УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ТРЕХМЕРНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ НА НИХ

Работа посвящена исследованию симметрических пространств. Представлена локальная классификация трехмерных симметрических однородных пространств, что эквивалентно описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму на изотропном модуле. Описаны все инвариантные линейные связности на таких пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, секционными кривизнами, тензорами Риччи. В статье использован алгебраический подход для описания линейных связностей, методы теории групп Ли, алгебр Ли и однородных пространств. Методы, предложенные в работе, могут быть применены для анализа физических моделей, а алгоритмы классификации однородных пространств, линейных связностей на этих пространствах, тензоров кривизны и кручения, алгебр голономии, секционных кривизн, тензоров Риччи могут быть компьютеризованы и использованы для решения подобных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: симметрическое пространство, алгебра Ли, линейная связность, тензор Риччи.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

THREE-DIMENSIONAL SYMMETRIC SPACES AND RICHI TENSORS ON THEM

The paper is devoted to the study of symmetric spaces. We present the local classification of three-dimensional symmetric homogeneous spaces. It is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant nondegenerate symmetric bilinear form on the isotropy module. We describe all invariant linear connections on the such spaces together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras, sectional curvatures, Richi tensors. In this article we used the algebraic approach for description of linear connections, methods of the theory of Lie groups, Lie algebras and homogeneous spaces. The methods stated in the work can be applied for the analysis of physical models, and algorithms classification of homogeneous spaces, linear connections on these spaces, curvature and torsion tensors, holonomy algebras, sectional curvatures, Richi tensors can be computerized and used for the decision of similar problems in large dimensions.

Key words: symmetric space, Lie algebra, linear connection, Richi tensor.

Введение. Идея многообразия как геометрического объекта, обладающего своей собственной внутренней геометрией, принадлежит Б. Риману. Это понятие появилось до понятия абстрактного топологического пространства, и первоначально многообразие всегда было снабжено метрикой. Симметрическое пространство – это пространство линейной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Название «симметрическое» связано с одним важным геометрическим свойством таких пространств, которое может быть принято за определение: геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства, т. е. такое преобразование, при котором заданная связность переходит в себя.

Потоки Риччи ввел Р. Гамильтон, он же получил глубокие результаты в теории трехмерных многообразий. В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи римановых многообразий использовались как важное техническое средство, получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см., например, [1]). Представляет интерес и изучение геометрических свойств метрик, входящих в поток Риччи. Поток Риччи задается через тензор Риччи, который определяет кривизну многообразия в одномерном направлении.

Наиболее важной и интересной задачей римановой геометрии в целом является задача о нахождении связей между геометрическими и топологическими характеристиками римановых многообразий и их локальной характеристикой – кривизной: секционной кривизной, кривизной Риччи или скалярной кривизной. Впервые открытые двумерные поверхности неотрицательной гауссовой кривизны изучал Кон-Фоссен. В двумерном случае все указанные кривизны совпадают, эта связь достаточно просто описывается с помощью теоремы Гаусса – Бонне. В

Библиотека БГУИР

многомерном случае теоремы, аналогичной теореме Гаусса – Бонне, нет, а возможность серьезного изучения многомерных римановых многообразий появилась после доказательства теоремы сравнения Рауха и Александрова – Топоногова. Используя эти теоремы и другие, часто удается получить те или иные геометрические характеристики риманова многообразия, а из уже имеющихся геометрических свойств извлечь информацию и о топологическом строении риманова многообразия. Первым результатом в многомерном случае была теорема о цилиндре, обобщающая аналогичную теорему Кон-Фоссена для двумерных поверхностей.

1. Основные опрелеления. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – однородное пространство, $G = G_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, где $G \subset \bar{G}$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Инвариантные римановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно – однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, т. е. каждое риманово однородное пространство $(\bar{G}, M, \mathbf{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \leq 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$. Линейной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть такое отображение $\Lambda\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(V)$, где $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (см., например, [2]), что инвариантные линейные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Тензор кручения имеет вид

$$T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - \left[x, y\right]_V$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, а тензор кривизны –

$$R(x_V, y_V) = \left[\Lambda(x), \Lambda(y)\right] - \Lambda(\left[x, y\right]).$$

Алгеброй голономии связности на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется подалгебра вида

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots,$$

где $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

2. Классификация симметрических пространств.

***Теорема* 1.** Локально однородное симметрическое пространство, допускающее риманову метрику, такое, что $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Таблица умножения	B
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ номер 1.3.1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & \pm e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & \mu e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ номер 1.3.5 и 1.3.6	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ номер 3.5.1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$ номер 3.5.2	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$ номер 3.5.3	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры (2, 1) допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме: 1.3.1 при $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, 1.3.5, 1.3.6.

***Теорема* 2.** Локально однородное симметрическое пространство, допускающее только псевдориманову метрику, такое, что $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

Таблица умножения	B
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$

Библиотека БГУИР

номер 3.4.1	
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
номер 3.4.2	
$\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & a \\ \hline 0 & -a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
номер 3.4.3	
$\begin{array}{c\|ccccc} & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
номер 2.21.1	
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
номер 1.8.1	
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & \pm e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & \mu e_1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
номер 1.8.4 и 1.8.5	
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$
номер 1.1.1	
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & a & 0 \\ \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
номер 1.1.5	
$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$ $a \neq 0$
номер 1.1.6	

Доказательство основано на классификации псевдоримановых пространств, приведенной в [3]. Для указанных однородных пространств находим инвариантные линейные связности.

Прямыми вычислениями получаем, что, например, в случаях 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 связность в базисе u_1, u_2, u_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для 1.3.1–1.3.6 связность выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

В случаях 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 2.21.1 связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для 1.1.1, 1.1.5, 1.1.6 связность выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

В случаях 1.8.1, 1.8.4, 1.8.5 связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix},$$

Библиотека БГУИР

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1}+q_{1,2} & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1}+2q_{1,2}+p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случаи 3.4.2 и 3.4.3. Не нарушая общности, можно считать, что $a = p_{1,2} \geq 0$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кривизны:

$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 0 & a^2\mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix} -a^2\pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\mp 1 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a^2\pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2\pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=2au_1,\ T(u_1,u_3)=2au_2,\ T(u_2,u_3)=2au_3.$$

Алгебра голономии совпадает с трехмерным неприводимым представлением sl(2, R) при $a^2 \neq \pm 1$ и коммутативна в противном случае. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Для указанных выше симметрических пространств найдем также секционную кривизну:

$$K(u_i,u_j)=\frac{B(R(u_i,u_j)u_i,u_j)}{B(u_i,u_i)B(u_j,u_j)-B(u_i,u_j)^2}.$$

Номер тройки	$K(u_1,u_2)$	$K(u_1,u_3)$	$K(u_2,u_3)$
1.3.1	0	0	0
1.3.5	$\frac{1}{a}$	0	0
1.3.6	$-\frac{1}{a}$	0	0
3.5.1	0	0	0
3.5.2	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a}$
3.5.3	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$

3. Классификация тензоров Риччи.

Тензорное поле Риччи S – ковариантное тензорное поле степени 2, т.ч.

$S(x, y) = \mathrm{tr}\, v \to R(v, x)y$ для $x, y, v \in T_x(M)$.

***Теорема* 3.** Тензоры Риччи симметрических римановых однородных пространств имеют следующий вид:

3.5.1

$-2p_{2,3}^2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2$

3.5.2

$-2p_{2,3}^2-2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2-2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2-2$

3.5.3

$-2p_{2,3}^2+2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2+2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2+2$

1.3.1

$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}+p_{3,2}r_{1,1}+p_{3,1}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,2}$	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

1.3.5

$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$-p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}+p_{3,2}r_{1,1}+p_{3,1}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,2}$	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

1.3.6

$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$-p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}+p_{3,2}r_{1,1}+p_{3,1}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,2}$	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

Библиотека БГУИР

***Теорема* 4.** Тензоры Риччи симметрических псевдоримановых однородных пространств имеют вид:

3.4.1

0	0	$-2p_{1,2}^2$
0	$2p_{1,2}^2$	0
$-2p_{1,2}^2$	0	0

3.4.2

0	0	$-2p_{1,2}^2+2$
0	$2p_{1,2}^2-2$	0
$-2p_{1,2}^2+2$	0	0

3.4.3

0	0	$-2p_{1,2}^2-2$
0	$2p_{1,2}^2+2$	0
$-2p_{1,2}^2-2$	0	0

2.21.1

0	0	$-2p_{1,2}^2$
0	$2p_{1,2}^2$	0
$-2p_{1,2}^2$	0	0

1.1.1

0	$p_{3,2}q_{2,3}-p_{3,2}r_{2,2}+$ $+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$p_{1,3}q_{3,1}-q_{3,1}r_{1,1}+$ $+r_{3,3}q_{3,1}$	0	0
0	0	$p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}+$ $+q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3}$

1.1.5

0	$p_{3,2}q_{2,3}-1-$ $-p_{3,2}r_{2,2}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$p_{1,3}q_{3,1}-1-$ $-q_{3,1}r_{1,1}+r_{3,3}q_{3,1}$	0	0
0	0	$p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}+$ $+q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3}$

1.1.6

0	$p_{3,2}q_{2,3}+r_{2,2}-$ $-p_{3,2}r_{2,2}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
$p_{1,3}q_{3,1}-r_{1,1}-$ $-q_{3,1}r_{1,1}+r_{3,3}q_{3,1}$	0	0
0	0	$p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}+$ $+q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3}$

1.8.1

0	0	$-2p_{1,2}^2$
0	$2p_{1,2}^2$	$3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2}(q_{1,2}+p_{1,3})$
$-2p_{1,2}^2$	$-2p_{1,3}p_{1,2}+$ $+q_{1,2}p_{1,2}$	$p_{1,2}q_{1,3}+4p_{1,3}q_{1,2}+$ $+2p_{1,3}^2+q_{1,2}^2-r_{1,2}p_{1,2}$

1.8.4

0	0	$-2p_{1,2}^2$
0	$2p_{1,2}^2$	$3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2}(q_{1,2}+p_{1,3})$
$-2p_{1,2}^2$	$-2p_{1,3}p_{1,2}+$ $+q_{1,2}p_{1,2}$	$p_{1,2}q_{1,3}+4p_{1,3}q_{1,2}+$ $+2p_{1,3}^2+q_{1,2}^2-r_{1,2}p_{1,2}-1$

1.8.5

0	0	$-2p_{1,2}^2$
0	$2p_{1,2}^2$	$3p_{1,3}p_{1,2}-p_{1,2}(q_{1,2}+p_{1,3})$
$-2p_{1,2}^2$	$-2p_{1,3}p_{1,2}+$ $+q_{1,2}p_{1,2}$	$p_{1,2}q_{1,3}+4p_{1,3}q_{1,2}+$ $+2p_{1,3}^2+q_{1,2}^2-r_{1,2}p_{1,2}+1$

Заключение. Алгебраический подход, использованный в работе, дает возможность обобщить различные результаты дифференциальной геометрии и упростить их доказательство, а также применить идеи дифференциальной геометрии к другим математическим теориям и, наоборот, использовать различные алгебраические результаты в дифференциальной геометрии. Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех линейных связностей на трехмерных пространствах, методика также может быть использована для других размерностей.

Литература

1. Chow B., Knopf D. Mathematical Surveys and Monographs. Vol 110: The Ricci flow: an introduction. Providence: American Mathematical Society, 2004. 325 p.

2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. 1954. Vol. 76. no. 1. p. 33–65.

3. Можей Н. П. Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №12. С. 51–69.

References

1. Chow B., Knopf D. *Mathematical Surveys and Monographs. Vol 110*: *The Ricci flow*: *an introduction.* Providence, American Mathematical Society Publ., 2004. 325 p.

2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. Journ. Math*, 1954, vol. 76. no. 1, pp. 33–65.

3. Mozhey N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [News of higher educational institutions. Mathematics], 2013, no. 12, pp. 51–68 (in Russian).

Библиотека БГУИР

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий». Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the authors

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor Software for Information Technologies Department. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 26.02.2016

Библиотека БГУИР