УДК 514.765.1

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ И ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ НА НИХ

Н.П. Можей, канд. физ.-мат. наук, доцент,
БГУИР

Потоки Риччи римановых многообразий использовались в работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см. [1]). Поток Риччи определяется через тензор Риччи, который задает кривизну многообразия в одномерном направлении.

Пусть M – многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\overline{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\overline{G}$, G), где $G \subset \overline{G}$. Начнем с локального описания однородных пространств и связностей на них. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Инвариантные римановы метрики g на M находятся во взаимно–однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G–модуле $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое риманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathrm{g})$, $codim_{\overline{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \le 4$ описывается тройкой $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, будем называть ее *локально римановым однородным пространством*. Любое локально однородное пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $codim_{\overline{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и $\mathfrak{g} \ne \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

	Таблица умножения	B	
1.3.1	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1$
1.3.2	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 & -u_2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ \hline \end{array}$	$\varepsilon=\pm 1, a\neq 0$
1.3.3	$\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}$	$ab\neq 0$

1.3.4	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1+u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1-u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$	$ab\neq 0$
1.3.5	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$a\neq 0$
1.3.6	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	$a\neq 0$
1.3.7	$\begin{array}{ccccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$\varepsilon=\pm 1, a\neq 0$
3.5.1	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\pm$
3.5.2	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$a\neq 0$
3.5.3	$\begin{array}{ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 – дополнительный к $\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре ($\bar{g}$, g) называется такое отображение $\Lambda : \bar{g} \to gl(V)$, где $V = \bar{g} / g$, что его ограничение на g есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g-инвариантным. Инвариантные аффинные связности трехмерных римановых однородных пространств в базисе u_1, u_2, u_3 имеют вид:

3.5.1, 3.5.2, 3.5.3. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 – 1.3.7. Связность

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Тензорное поле Риччи S - ковариантное тензорное поле степени 2, т.ч.

$$S(X,Y) = tr\ V \to R(V,X)Y \text{ для } X,Y,V \in Tx(M).$$

Теорема. Тензоры Риччи римановых однородных пространств:

3.5.1.

$-2p_{2,3}^2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2$

3.5.2.

$-2p_{2,3}^2 - 2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2 - 2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2 - 2$

3.5.3.

$-2p_{2,3}^2 + 2$	0	0
0	$-2p_{2,3}^2 + 2$	0
0	0	$-2p_{2,3}^2 + 2$

1.3.1.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

1.3.2.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}+p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}+p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}-2p_{1,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1} + p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2} - p_{3,2}$.

1.3.3.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-1-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} - 1 - r_{1,2} - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

1.3.4.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} + 1 - r_{1,2} - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

1.3.5.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} - 1 - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

1.3.6.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}+1-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} + 1 - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

1.3.7.

A	$p_{1,3}p_{3,2}-p_{2,3}p_{3,1}+r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}-p_{3,2}r_{1,1}+r_{3,3}p_{3,2}$	0
B	$p_{2,3}p_{3,2}+p_{1,3}p_{3,1}-r_{1,2}-p_{3,1}r_{1,1}+p_{3,2}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,1}$	0
0	0	$2p_{1,3}r_{3,3}-2r_{1,1}p_{1,3}-2r_{1,2}p_{2,3}$

где A= $p_{2,3}\,p_{3,2} + p_{1,3}\,p_{3,1} - r_{1,2} - p_{3,1}\,r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,2} + r_{3,3}\,p_{3,1}$, B=- $p_{1,3}\,p_{3,2} + p_{2,3}\,p_{3,1} - r_{1,1} + p_{3,2}\,r_{1,1} + p_{3,1}\,r_{1,2} - r_{3,3}\,p_{3,2}$.

Список литературы

1. Chow B., Knopf D. The Ricci ow: an introduction. Mathematical Surveys and Monographs, V. 110. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.