О. И. Костюкова, Е. А. Костина, Н. М. Федорцова, Параметрические задачи оптимального управления со взвешенными L_1- и L_2- нормами в критерии качества, *Тр. Ин-та матем.*, 2011, том 19, номер 2, 47–59

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2011. Том 19. № 2. С. 47–59

УДК 517.977.58

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО ВЗВЕШЕННЫМИ L_1- И L_2-НОРМАМИ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

О. И. Костюкова, Е. А. Костина, Н. М. Федорцова

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: kostyukova@im.bas-net.by
Университет г. Марбурга, Германия
e-mail: kostina@Mathematik.Uni-Marburg.de
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
fedartsova@tut.by
Поступила 16.09.2011

Рассматривается семейство параметрических задач оптимального управления, содержащих взвешенные L_1- и L_2-нормы управляющего воздействия в критерии качества. Роль параметра в задаче играет весовой коэффициент, с которым L_1-норма управления входит в целевую функцию. Исследована зависимость решений задачи оптимального управления от параметра в нерегулярном случае. Доказана теорема, описывающая свойства решений задачи при малых возмущениях параметра и дающая их асимптотические разложения. Получены простые правила построения решений возмущенных задач при условии, что известно лишь решение невозмущенной задачи.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности. В классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$, рассматривается следующее семейство задач оптимального управления ОС(α), $\alpha \in [0, \infty)$, со взвешенными L_1- и L_2-нормами управляющего воздействия в критерии качества:

$$OC(\alpha):\begin{cases} J(u) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_T x^T(t)Dx(t)\,dt + \dfrac{1}{2}\int_T \lambda u^2(t)\,dt + \alpha\int_T |u(t)|\,dt \to \min, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \\ x(0) = x_0, \quad Hx(t_*) = g, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in T, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\lambda > 0$ — весовые коэффициенты, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(t) \in \mathbb{R}$ — управление (управляющее воздействие), матрицы, векторы и числа $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (D — симметричная положительно полуопределенная матрица), $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_* > 0$ полагаются известными, коэффициент λ — фиксирован.

Задача ОС(α) рассматривается как параметрическая задача, где роль варьируемого параметра играет весовой коэффициент $\alpha > 0$ при L_1-норме.

Задачи оптимального управления, содержащие L_1 -норму управления в критерии качества, возникают во многих приложениях. В частности, при решении задач восстановления "разреженных сигналов", задач идентификации, для построения управлений с обратной связью, определения весового параметра α в конкретных приложениях [1], для обоснования алгоритмов построения решений методом продолжения решения по параметру и т.д.

В оптимальном управлении задачи такого типа возникают, когда действие управляющего воздействия невозможно на протяжении всего периода управления и требуется найти отрезки времени, где действие управления наиболее эффективно. С этой целью в критерий качества добавляется дополнительное слагаемое — взвешенная L_1 -норма управления.

Исследование зависимости решения задачи ОС (α) от весового коэффициента $\lambda \geq 0$ при $\alpha = 0$ проведено в работе [2]. Зависимость решения задачи от регулярного значения параметра $\alpha > 0$ при заданном значении $\lambda > 0$ исследована в работе [3].

Цель данной работы — исследовать зависимость решений задачи ОС (α) от нерегулярного значения параметра $\alpha > 0$ при заданном значении $\lambda > 0$.

При фиксированном значении параметра α задача ОС (α) является задачей оптимального управления с линейной динамикой и негладким интегральным критерием качества. Понятия допустимых и оптимальных управлений и траекторий вводятся стандартно.

Предположение 1. Существует такое число $\gamma_0 > 0$, что для любого вектора $\Delta g \in \mathbb{R}^m$, $\|\Delta g\| \leq \gamma_0$, найдется функция $\bar{u}(t) = \bar{u}(t|\Delta g)$, $t \in T$, такая, что $|\bar{u}(t)| \leq 1$, $t \in T$, и $H\bar{x}(t_*) = g + \Delta g$, где $\bar{x}(t)$, $t \in T$, — траектория системы (1), соответствующая управлению $\bar{u}(t)$, $t \in T$.

Замечание. Из предположения 1 следует, что

1) в задаче (1) существует несколько допустимых управлений;

2) задача (1) является нормальной [4];

3) выполняются следующие условия относительной управляемости:

$$\mathrm{rank}(Hb, \ldots, HA^{n-1}b) = m.$$

Для задачи (1) справедлив следующий критерий оптимальности.

Теорема 1. Принцип максимума. *Пусть выполняется предположение 1. Тогда для оптимальности допустимых управления* $u_\alpha(\cdot) = (u_\alpha(t),\ t \in T)$ *и соответствующей ему траектории* $x_\alpha(\cdot) = (x_\alpha(t),\ t \in T)$ *задачи* $OC(\alpha)$ *необходимо и достаточно существование такого* m *-вектора* $y(\alpha)$, *что вдоль управления* $u_\alpha(t)$, $t \in T$, *и решения* $\psi_\alpha(\cdot) = (\psi_\alpha(t),\ t \in T)$ *сопряженной системы*

$$\dot{\psi}_\alpha(t) = -A^T\psi_\alpha(t) + Dx_\alpha(t), \quad t \in T; \quad \psi_\alpha(t_\star) = H^T y(\alpha), \tag{2}$$

выполняются следующие соотношения:

$$\psi_\alpha^T(t)bu_\alpha(t) - \lambda u_\alpha^2(t)/2 - \alpha|u_\alpha(t)| = \max_{|u|\leq 1}(\psi_\alpha^T(t)bu - \lambda u^2/2 - \alpha|u|), \quad \text{п.в.} \quad t \in T. \tag{3}$$

Вектор $y(\alpha)$, при котором выполняются соотношения (2), (3), будем называть вектором Лагранжа.

Определим функцию коуправления следующим образом:

$$\Delta_\alpha(t) := \psi_\alpha^T(t)b, \quad t \in T. \tag{4}$$

Из (3) следует, что управление $u_\alpha(\cdot)$ и коуправление $\Delta_\alpha(\cdot)$ связаны соотношениями

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |\Delta_\alpha(t)| \le \alpha, \\ (\Delta_\alpha(t)+\alpha)/\lambda, & \text{если} \quad -\alpha-\lambda \le \Delta_\alpha(t) \le -\alpha, \\ (\Delta_\alpha(t)-\alpha)/\lambda, & \text{если} \quad \alpha \le \Delta_\alpha(t) \le \alpha+\lambda, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_\alpha(t) \le -\alpha-\lambda, \\ 1, & \text{если} \quad \Delta_\alpha(t) \ge \alpha+\lambda, \end{cases} \qquad t \in T.$$

Можно показать, что управление $u_\alpha(\cdot)$ не содержит особых участков и является непрерывной функцией.

В работе [3] доказана справедливость следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Задача ОС(α) имеет единственное решение.*

Пусть $u_\alpha(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче ОС(α), $y(\alpha)$ — вектор Лагранжа, $\psi_\alpha(\cdot)$ — соответствующее решение сопряженной системы, $\Delta_\alpha(\cdot)$ — коуправление (4).

Утверждение 2. *Пусть выполняется предположение 1 и при некотором векторе Лагранжа $y(\alpha)$ для соответствующей функции коуправления (4) существует такой интервал $[\tau_*, \tau^*] \subset T$, $\tau_* < \tau^*$, что $\alpha < |\Delta_\alpha(t)| < \alpha + \lambda$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$. Тогда для оптимального управления $u_\alpha(\cdot)$ задачи ОС(α) существует единственный вектор Лагранжа $y(\alpha)$.*

Основываясь на утверждении 2, легко показать, что для оптимального управления $u_\alpha(\cdot)$ задачи ОС(α) может существовать несколько векторов Лагранжа, только если $u_\alpha(t) = \text{const}$, $t \in T$, где $\text{const} = \pm 1 \vee 0$.

2. Структура решения и определяющие элементы. Рассмотрим параметрическую задачу оптимального управления ОС(α). Пусть $u_\alpha(\cdot)$ — ее оптимальное управление, $x_\alpha(\cdot)$ — соответствующая траектория, $y(\alpha)$ — вектор Лагранжа, $\psi_\alpha(\cdot)$, $\Delta_\alpha(\cdot)$ — решение сопряженной системы (2) и коуправление (4).

Предположение 2. Множество

$$T_a(\alpha) = \{t \in T : \ |\Delta_\alpha(t)| = \alpha \text{ или } |\Delta_\alpha(t)| = \alpha + \lambda\}$$

состоит из конечного числа точек.

Из предположения 2 следует, что множество $T_a(\alpha)$ можно представить в виде

$$T_\alpha(\alpha) = \{\xi_j(\alpha),\ j = 1, \dots, p(\alpha)\},\ \xi_j(\alpha) \in T,\ j = 1, \dots, p(\alpha);\ 0 \le p(\alpha) < \infty.$$

Точки $\xi_j(\alpha) \in T_\alpha(\alpha)$, $j = 1, \dots, p(\alpha)$, будем называть *активными точками.*

Без ограничения общности будем считать, что точки $\xi_j(\alpha) \in T$, $j = 1, \dots, p(\alpha)$, упорядочены по возрастанию: $\xi_1(\alpha) < \xi_2(\alpha) < \ldots < \xi_{p(\alpha)}(\alpha)$.

Будем полагать, что если $T_a(\alpha) = \emptyset$, то $p(\alpha) = 0$.

Замечание. Если $p(\alpha) = 0$, то имеет место одна из следующих ситуаций: $u_\alpha(t) = \text{const}$, $t \in T$, где $\text{const} = \pm 1 \vee 0$, или $u_\alpha(t) = (\psi'_\alpha(t)b \pm \alpha)/\lambda$, $t \in T$.

Обозначим $\xi_0(\alpha) \equiv 0$, $\xi_{p(\alpha)+1}(\alpha) \equiv t_*$,

$$T_j(\alpha) = (\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in P(\alpha) = \{0, 1, \dots, p(\alpha)\},$$

$$P^+(\alpha) = \{j \in P(\alpha) : \ \Delta_\alpha(t) > \alpha + \lambda,\ t \in T_j(\alpha)\},$$

$$P^-(\alpha) = \{j \in P(\alpha) : \ \Delta_\alpha(t) < -\alpha - \lambda,\ t \in T_j(\alpha)\},$$

$$P_s^+(\alpha) = \{j \in P(\alpha) : \ \alpha < \Delta_\alpha(t) < \alpha + \lambda,\ t \in T_j(\alpha)\},$$

$$P_s^-(\alpha) = \{j \in P(\alpha) : \ -\alpha - \lambda < \Delta_\alpha(t) < -\alpha,\ t \in T_j(\alpha)\},$$

$$P^0(\alpha) = \{j \in P(\alpha) : \ |\Delta_\alpha(t)| < \alpha,\ t \in T_j(\alpha)\},$$

$$L(\alpha) = \left\{ j \in \{1, \dots, p(\alpha)\} : \ \xi_j(\alpha) = 0 \vee t_* \text{ или } \xi_j(\alpha) \in \operatorname{int} T \text{ и } \frac{d}{dt}\Delta_\alpha(\xi_j(\alpha)) = 0 \right\}.$$

Определение 1. Множество

$$S(\alpha) = \{p(\alpha), P^{\pm}(\alpha), P_s^{\pm}(\alpha), P^0(\alpha)\}$$

назовем структурой решения задачи ОС (α).

Определение 2. Множество параметров

$$\theta(\alpha) = (\xi_j(\alpha),\ j = 1, \ldots, p(\alpha);\ \varphi(\alpha), y(\alpha)),$$

где $\varphi(\alpha) = \psi_\alpha(0) \in \mathbb{R}^n$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}^m$, назовем вектором определяющих элементов.

Определение 3. Значение параметра $\alpha > 0$ назовем регулярной точкой, если $P^+(\alpha) \cup \cup P^-(\alpha) \neq \emptyset$ и $L(\alpha) = \emptyset$.

3. Свойства решений в окрестности регулярной точки. Пусть для невозмущенного значения параметра $\alpha = \alpha_0$ известно решение задачи ОС (α_0), ее структура

$$S^0 = \{p(\alpha_0), P^{\pm}(\alpha_0), P_s^{\pm}(\alpha_0), P^0(\alpha_0)\}$$

и определяющие элементы $\theta(\alpha_0)$. Положим

$$p^0 = p(\alpha_0), \quad \theta^0 = \theta(\alpha_0) = (\xi_j^0 = \xi_j(\alpha_0),\ j = 1, \ldots, p^0;\ \varphi^0 = \varphi(\alpha_0),\ y^0 = y(\alpha_0)). \tag{5}$$

Для заданных числа и совокупности множеств $S = \{p, P^{\pm}, P_s^{\pm}, P^0\}$, где $p \geq 0$, $P = \{1, \ldots, p\} = \cup P^{\pm} \cup P_s^{\pm} \cup P^0$, сформируем вектор параметров $\theta = (\xi_j,\ j = 1, \ldots, p;\ \varphi,\ y)$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, и обозначим через $z_\alpha(\theta, S|t)$, $t \in T$, траекторию системы

$$\dot{z} = \begin{cases} \mathcal{A}_1 z + \gamma k_j(\alpha), & t \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \quad j \in P^{\pm} \cup P^0, \\ \mathcal{A}_2 z + \gamma k_j(\alpha), & t \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \quad j \in P_s^{\pm}, \end{cases} \quad z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $\xi_0 = 0$, $\xi_{p+1} = t_*$, $k_j(\alpha) = \pm 1$, $j \in P^{\pm}$; $k_j(\alpha) = \mp\alpha/\lambda$, $j \in P_s^{\pm}$; $k_j(\alpha) = 0$, $j \in P^0$;

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times n} \\ D & -A^T \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} A & bb^T/\lambda \\ D & -A^T \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} b \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix},$$

$\mathbb{O}_{m\times n}$ — нулевая $m \times n$-матрица, $\mathbf{0}_n$ — нулевой n-вектор.

Нетрудно проверить, что при S^0 получаем $z_{\alpha_0}(\theta^0, S^0|t) = (x_{\alpha_0}(t); \psi_{\alpha_0}(t))$, $t \in T$.

Пусть E_n — единичная $n \times n$-матрица. Обозначим

$$f(\theta, S, \alpha|t) := (\mathbf{0}_n^T, b^T) z_\alpha(\theta, S|t) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, p,$$

$$Q_*(\theta, S, \alpha) := \tilde{H} z_\alpha(\theta, S|t_*) - \begin{pmatrix} g \\ H^T y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} H & \mathbb{O}_{m\times n} \\ \mathbb{O}_{n\times n} & E_n \end{pmatrix},$$

$$\mu_j(\alpha) = \begin{cases} \pm(\alpha + \lambda), & \text{если} \quad j \in P^{\pm}, \quad \text{либо} \quad j \in P_s^{\pm} \quad \text{и} \quad (j-1) \in P^{\pm}, \\ \pm\alpha, & \text{если} \quad j \in P_s^{\pm} \quad \text{и} \quad (j-1) \in P^0, \quad \text{либо} \quad j \in P^0 \quad \text{и} \quad (j-1) \in P_s^{\pm}, \end{cases}$$

и рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$Q(\theta, S, \alpha) = \begin{pmatrix} Q_*(\theta, S, \alpha) \\ f(\theta, S, \alpha|\xi_j) - \mu_j(\alpha), \quad j = 1, \ldots, p \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{m+n+p}.$$

В работе [3] была сформулирована и доказана следующая теорема, описывающая свойства решений $u_\alpha(\cdot)$ задач ОС (α), $\alpha \in \mathcal{E}(\alpha_0)$, в окрестности регулярного параметра α_0. Здесь $\mathcal{E}(\alpha_0) = [\alpha_0 - \delta, \alpha + \delta]$, $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения 1 и 2 и пусть* $\alpha_0 > 0$ *— регулярное значение параметра. Тогда найдется такое число* $\delta_0 > 0$, *что для* $\alpha \in [\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0]$

1) существует непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$$\theta(\alpha) = (\xi_j(\alpha),\ j = 1, \ldots, p^0;\ \varphi(\alpha), y(\alpha)),$$

удовлетворяющая условиям $Q(\theta(\alpha), S^0, \alpha) \equiv \mathbf{0}_{m+n+p^0}$, $\theta(\alpha_0) = \theta^0$;

2) решения задач $OC(\alpha)$ *имеют постоянную структуру* $S(\alpha) = S(\alpha_0)$;

3) оптимальное управление $u_\alpha(\cdot)$ *задачи* $OC(\alpha)$ *строится по правилу*

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \pm 1, & t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in P^{\pm}(\alpha_0); \\ 0, & t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in P^0(\alpha_0); \\ ((\mathbf{0}_n^T, b^T) z_\alpha(\theta(\alpha), S^0|t) \mp \alpha)/\lambda, & t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in P_s^{\pm}(\alpha_0). \end{cases}$$

4. Свойства решений в окрестности нерегулярной точки. В данном разделе исследуем свойства решений $u_\alpha(\cdot)$ задач ОС (α) при изменении параметра α в окрестности $\mathcal{E}(\alpha_0)$ нерегулярной точки $\alpha_0 > 0$. Как будет показано ниже, нерегулярное значение параметра характеризуется тем, что при сколь угодно малых его изменениях происходит смена структуры решения: $S(\alpha_0 - 0) \neq S(\alpha_0) \neq S(\alpha_0 + 0)$. При этом характер поведения решений в правосторонней и левосторонней окрестностях точки α_0 могут быть разными. Для определенности далее будем считать, что $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0)$, где $\mathcal{E}^+(\alpha_0)$ — правосторонняя окрестность точки α_0. Случай левосторонней окрестности $\mathcal{E}^-(\alpha_0)$ рассматривается аналогично.

Для исследования поведения решений $u_\alpha(\cdot)$ задач ОС (α) в окрестности нерегулярной точки $\alpha_0 > 0$ необходимо рассмотреть каждый из следующих случаев: $P_s^+(\alpha_0) \cup P_s^-(\alpha_0) \neq \emptyset$, $P_s^+(\alpha_0) \cup P_s^-(\alpha_0) = \emptyset$. В данной работе исследуется более сложный случай, а именно:

$$P_s^+(\alpha_0) \cup P_s^-(\alpha_0) \neq \emptyset.$$

В случае $P_s^+(\alpha_0) \cup P_s^-(\alpha_0) \neq \emptyset$ нерегулярность означает, что $|L(\alpha_0)| \geq 1$, т.е. выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий:

$$\xi_1(\alpha_0) = 0, \quad \xi_{p(\alpha_0)}(\alpha_0) = t_*, \quad \exists j_0, \quad 1 \leq j_0 \leq p(\alpha_0): \quad \xi_{j_0}(\alpha_0) \in \operatorname{int} T, \quad \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_{j_0}(\alpha_0)) = 0.$$

Далее считаем, что выполняется следующее предположение.

Предположение 3. Будем считать, что

из условия $\xi_1(\alpha_0) = 0$ следует, что $\dot{\Delta}_{\alpha_0}(0) \neq 0$;

из условия $\xi_{p(\alpha_0)}(\alpha_0) = t_*$ следует, что $\dot{\Delta}_{\alpha_0}(t_*) \neq 0$;

из условий $\xi_j(\alpha_0) \in \operatorname{int} T$, $\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j(\alpha_0)) = 0$, следует, что $\ddot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j(\alpha_0)) \neq 0$, $j = 1, \ldots, p(\alpha_0)$.

Введем обозначения (5). В нерегулярном случае множество индексов $J = \{1, 2, \ldots, p^0\}$ состоит из двух подмножеств $J = J_* \cup L$, где

$$L = L(\alpha_0) \neq \emptyset, \quad J_* = J \setminus L = \{j \in J:\ \xi_j^0 \in \operatorname{int} T,\ \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0) \neq 0\},$$

т.е. множество активных точек $\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$, $j = 1, \ldots, p^0$, можно разбить на два подмножества: множество точек устойчивого поведения ($\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$, $j \in J_*$) и множество точек неустойчивого поведения ($\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$, $j \in L$).

Действительно, при достаточно малых возмущениях параметра α_0 поведение функции $\Delta_\alpha(t)$, $t \in T$, в окрестностях точек ξ_j^0, $j \in J_*$, будет "легко предсказуемым и однозначным": при малых возмущениях параметра α_0 для всех $j \in J_*$ внутренняя активная точка $\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$ всегда порождает одну внутреннюю активную точку $\xi_{\bar{j}}(\alpha) \in T_a(\alpha)$, $\xi_{\bar{j}}(\alpha_0) = \xi_j^0$.

Рассмотрим точки ξ_j^0, $j \in L$, и функцию

$$\Delta_{\alpha_0}(t), \quad t \in T. \tag{7}$$

Пусть $j \in L$. Тогда для функции (7) точка $\xi_j^0 \in (0, t_*)$ является точкой касания (пересечения при $\xi_j^0 = 0 \vee t_*$) одной из прямых

$$f(t) = \beta, \quad t \in T, \quad \text{где} \quad \beta = \pm(\alpha_0 + \lambda) \vee \pm\alpha_0. \tag{8}$$

При достаточно малых возмущениях параметра α_0 характер поведения функции $\Delta_\alpha(t)$, $t \in T$, в окрестности каждой точки ξ_j^0, $j \in L$, может быть разным в зависимости от конкретной ситуации. Действительно, при $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$

- в случае $j \in L$, $\xi_j^0 = 0 \vee t_*$, граничная активная точка $\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$ может

а) исчезнуть из множества активных точек, т.е. не породить ни одной активной точки множества $T_a(\alpha)$;

б) породить одну внутреннюю активную точку $\xi_{\bar{j}}(\alpha) \in T_a(\alpha)$, $\xi_{\bar{j}}(\alpha) \in (0, t_*)$, $\xi_{\bar{j}}(\alpha_0) = \xi_j^0$;

- в случае $j \in L$, $\xi_j^0 \in (0, t_*)$, активная внутренняя точка касания $\xi_j^0 \in T_a(\alpha_0)$ может

а) исчезнуть из множества активных точек, т.е. не породить ни одной активной точки множества $T_a(\alpha)$;

б) породить две внутренние активные точки $\xi_{\bar{j}}(\alpha), \xi_{\bar{j}+1}(\alpha) \in T_a(\alpha)$, $\xi_{\bar{j}}(\alpha) \leq \xi_{\bar{j}+1}(\alpha)$, $\xi_{\bar{j}}(\alpha_0) = \xi_{\bar{j}+1}(\alpha_0) = \xi_j^0$.

Ясно, что в случае нерегулярности невозмущенного значения параметра α_0 при сколь угодно малых вариациях этого параметра происходит смена структуры решения: $S(\alpha_0) \neq S(\alpha_0 + 0)$.

Наша задача состоит в том, чтобы определить новую структуру $S(\alpha_0 + 0)$, имея в своем распоряжении только решение невозмущенной задачи ОС(α_0), т.е. не решая явно возмущенные задачи ОС(α), $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0)$. Другими словами, это означает, что для каждой точки ξ_j^0, $j \in L$, надо определить, какая из описанных выше ситуаций а) или б) будет иметь для нее место при возмущенных значениях параметра $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0)$. Еще раз отметим, что при этом мы можем использовать только известную информацию о решении невозмущенной задачи ОС(α_0).

Как отмечалось выше, точки множества ξ_j^0, $j \in L$, могут быть как граничными точками отрезка T, в которых функция (7) пересекает одну из прямых (8) сверху или снизу, так и внутренними точками отрезка T, в которых функция (7) касается одной из прямых (8) сверху или снизу. Возможны различные комбинации указанных ситуаций, все из которых можно рассмотреть в общем случае. Это неизбежно приводит к достаточно сложным обозначениям и обилию рассматриваемых случаев и подслучаев. Для лучшего изложения и понимания проводимых далее выкладок, будем иллюстрировать все построения на одной конкретной ситуации, изображенной на рис. 1. Для функции (7), схематично изображенной на этом рисунке сплошной линией, имеем $p^0 = p(\alpha_0) = 10$, точки ξ_j^0, $j \in J_* = \{2, 4, 5, 7, 9, 10\}$, — точки устойчивого поведения, точки ξ_j^0, $j \in L = \{1, 3, 6, 8\}$, — точки неустойчивого поведения.

Рассмотрим только точки устойчивого поведения и перенумеруем их по возрастанию, вводя новые обозначения

$$\{\tilde{\xi}_j, \ j = 1, \ldots, \tilde{p}\} = \{\xi_j^0, \ j \in J_*\}, \quad \tilde{p} = |J_*|, \quad \tilde{\xi}_0 = 0 < \tilde{\xi}_1 < \tilde{\xi}_2 < \ldots < \tilde{\xi}_{\tilde{p}} < t_* = \tilde{\xi}_{\tilde{p}+1}.$$

Для случая, изображенного на рис. 1, имеем

$$\tilde{p} = 6, \quad \tilde{\xi}_1 = \xi_2^0, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_4^0, \quad \tilde{\xi}_3 = \xi_5^0, \quad \tilde{\xi}_4 = \xi_7^0, \quad \tilde{\xi}_5 = \xi_9^0, \quad \tilde{\xi}_6 = \xi_{10}^0.$$

Построим множества $\tilde{P} = \{0, \ldots, \tilde{p}\}$, $\tilde{P}_s^\pm = \{j \in \tilde{P} : \ \alpha_0 \leq \pm\Delta_{\alpha_0}(t) \leq \alpha_0 + \lambda, \ t \in [\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_{j+1}]\}$, $\tilde{P}^\pm = \{j \in \tilde{P} : \ \pm\Delta_{\alpha_0}(t) \geq \alpha_0 + \lambda, \ t \in [\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_{j+1}]\}$, $\tilde{P}^0 = \{j \in \tilde{P} : \ |\Delta_{\alpha_0}(t)| \leq \alpha_0, \ t \in [\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_{j+1}]\}$.

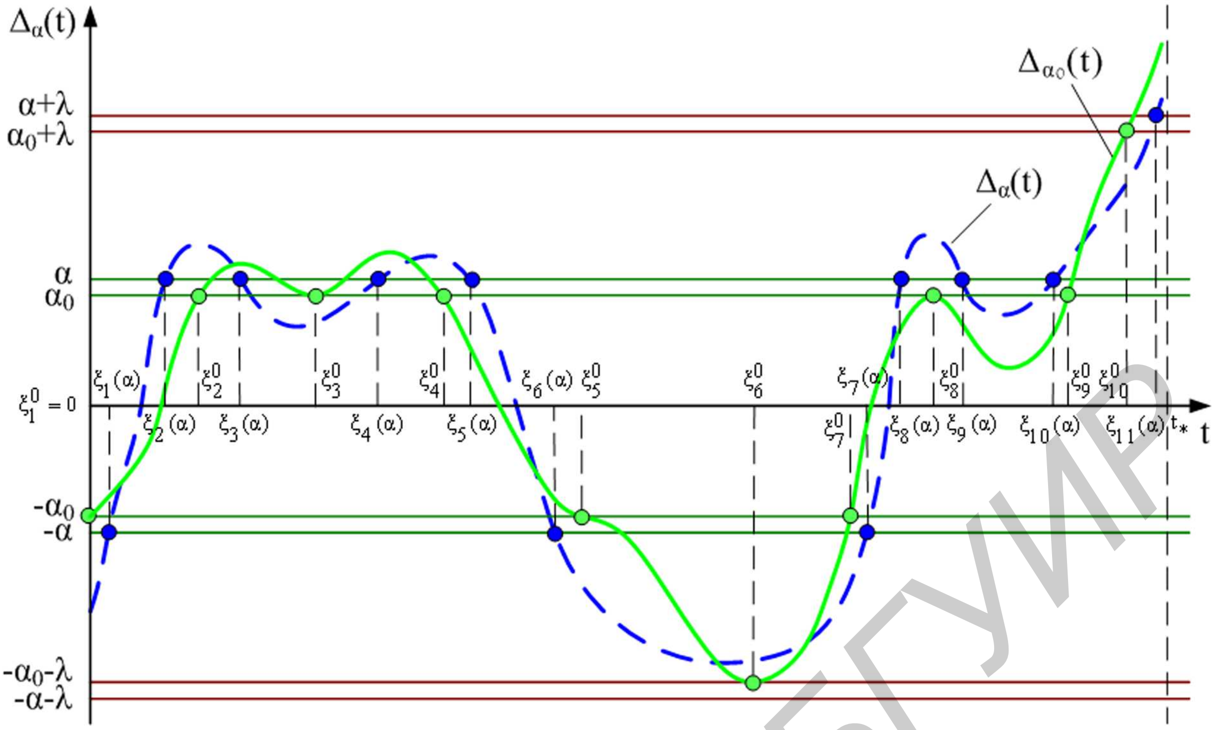

Рис. 1. Пример поведения функции $\Delta_\alpha(t)$ при возмущении параметра α в окрестностях точек устойчивого и неустойчивого поведения

Обозначим через $\Delta\tilde{z}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in T$, $\Delta\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ решение краевой задачи

$$\Delta\dot{\tilde{z}} = \begin{cases} \mathcal{A}_1\Delta\tilde{z}, & t \in T \setminus \left(\bigcup\limits_{j \in \tilde{P}_s^{\pm}} [\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_{j+1}) \right), \\ \mathcal{A}_2\Delta\tilde{z} \mp \gamma/\lambda, & t \in [\tilde{\xi}_j, \tilde{\xi}_{j+1}), \quad j \in \tilde{P}_s^{\pm}, \end{cases} \tag{9}$$

$$(E_n, \mathbb{O}_{n\times n})\Delta\tilde{z}(0) = \mathbf{0}_n, \quad \tilde{H}\Delta\tilde{z}(t_*) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ H^T\Delta\tilde{y} \end{pmatrix}.$$

По аналогии с доказательством теоремы 2 (приведено в работе [3]) можно показать, что $\det(\partial Q(\tilde{\theta}, \tilde{S}, \alpha_0)/\partial\theta) \neq 0$, где $\tilde{S} = \{\tilde{p}, \tilde{P}^{\pm}, \tilde{P}_s^{\pm}, \tilde{P}^0\}$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\xi}_j,\ j = 1, \ldots, \tilde{p}; \varphi(\alpha_0), y(\alpha_0))$. Основываясь на последнем условии, нетрудно показать, что краевая задача (9) имеет единственное решение.

Для точек ξ_j^0, $j \in L$, подсчитаем числа ε_j, $j \in L$, по правилам:

$$\text{если} \quad \xi_j^0 = 0 \vee t_* \quad \text{и} \quad j \in L, \quad \text{тогда полагаем} \quad \varepsilon_j = -((\mathbf{0}_n^T, b^T)\Delta\tilde{z}(\xi_j^0) - \Delta\mu_j)/\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0), \tag{10}$$

$$\text{если} \quad \xi_j^0 \in \operatorname{int} T \quad \text{и} \quad j \in L, \quad \text{тогда полагаем} \quad \varepsilon_j = -((\mathbf{0}_n^T, b^T)\Delta\tilde{z}(\xi_j^0) - \Delta\mu_j)/\ddot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0), \tag{11}$$

где $\Delta\mu_j = 1$ ($\Delta\mu_j = -1$), если в точке ξ_j^0 функция (7) касается или пересекает прямую $f(t) = \alpha_0$ или прямую $f(t) = \alpha_0 + \lambda$ (прямую $f(t) = -\alpha_0$ или прямую $f(t) = -\alpha_0 - \lambda$), $t \in T$.

Предположим, что $\varepsilon_j \neq 0$, $j \in L$. Тогда ниже будет доказано, что при $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$ поведение функции $\Delta_\alpha(t)$, $t \in T$, в окрестностях неустойчивых точек будет следующим:

• для точки $\xi_j^0 = 0$, $j \in L$, будет иметь место ситуация а) (см. выше) при $\varepsilon_j < 0$ и ситуация б) при $\varepsilon_j > 0$;

• для точки $\xi_j^0 = t_*,\ j \in L,$ будет иметь место ситуация а) при $\varepsilon_j > 0$ и ситуация б) при $\varepsilon_j < 0$;

• для точки $\xi_j^0 \in \operatorname{int} T,\ j \in L,$ будет иметь место ситуация а) при $\varepsilon_j < 0$ и ситуация б) при $\varepsilon_j > 0$.

Следовательно, положив

$$L^+ = \{j \in L:\ \xi_j^0 \in (0, t_*),\ \varepsilon_j > 0\}, \quad L^* = \{j \in L:\ \xi_j^0 = 0,\ \varepsilon_j > 0 \text{ или } \xi_j^0 = t_*,\ \varepsilon_j < 0\},$$

$$\bar{p} = |J_*| + |L^*| + 2|L^+|,$$
$$\{\bar{\xi}_j,\ j = 1, \ldots, \bar{p}\} = \{\xi_j^0,\ j \in J_*,\ \xi_j^0,\ j \in L^*;\ \xi_j^0,\ \xi_j^0,\ j \in L^+\},$$
$$0 = \bar{\xi}_0 \le \bar{\xi}_1 \le \ldots \le \bar{\xi}_{\bar{p}} \le \bar{\xi}_{\bar{p}+1} = t_*,$$

получаем, что при $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0)$ для вектора определяющих элементов решения задачи ОС (α) $\theta(\alpha) = (\xi_j(\alpha),\ j = 1, \ldots, p(\alpha);\ \varphi(\alpha), y(\alpha))$ будут выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered} 0 = \xi_0(\alpha) < \xi_1(\alpha) < \ldots < \xi_{\bar{p}}(\alpha) < \xi_{\bar{p}+1}(\alpha) = t_*, \quad p(\alpha) = \bar{p}, \\ \theta(\alpha_0 + 0) = \bar{\theta} = (\bar{\xi}_j,\ j = 1, \ldots, \bar{p},\ \bar{\varphi}, \bar{y}), \quad \bar{\varphi} = \varphi^0, \quad \bar{y} = y^0. \end{gathered} \tag{12}$$

Проиллюстрируем приведенные выше построения на примере, приведенном на рисунке. Пусть для этого примера имеют место неравенства $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_3 > 0,\ \varepsilon_6 < 0,\ \varepsilon_8 > 0.$ Тогда, согласно теории поведение функции $\Delta_\alpha(t),\ t \in T,$ при $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$ будет таким, как показано на рисунке пунктирной линией и

$$L^+ = \{3, 8\}, \quad L^* = \{1\}, \quad p(\alpha_0 + 0) =: \bar{p} = 11,$$
$$\bar{\xi}_1 = \xi_1^0, \quad \bar{\xi}_2 = \xi_2^0, \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = \xi_3^0, \quad \bar{\xi}_5 = \xi_4^0, \quad \bar{\xi}_6 = \xi_5^0, \quad \bar{\xi}_7 = \xi_7^0,$$
$$\bar{\xi}_8 = \bar{\xi}_9 = \xi_8^0, \quad \bar{\xi}_{10} = \xi_9^0, \quad \bar{\xi}_{11} = \xi_{10}^0.$$

Построим множества $\bar{P}_s^\pm := P_s^\pm(\alpha_0 + 0),\ \bar{P}^\pm := P^\pm(\alpha_0 + 0),\ \bar{P}^0 := P^0(\alpha_0 + 0),$ исходя из предположения, что при $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$ поведение функции $\Delta_\alpha(t),\ t \in T,$ в окрестностях неустойчивых точек будет таким, как описано выше. Правила построения этих множеств очевидны, но детальное описание этих правил в общем случае достаточно громоздкое и здесь не приводится. В рассматриваемом примере эти множества имеют вид

$$\bar{P}_s^- = \{0, 6\}, \quad \bar{P}_s^+ = \{2, 4, 8, 10\}, \quad \bar{P}^+ = \{11\}, \quad \bar{P}^- = \emptyset, \quad \bar{P}^0 = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Обозначим $\bar{S} = \{\bar{p}, \bar{P}^\pm, \bar{P}_s^\pm, \bar{P}^0\}$ и рассмотрим решение $z_\alpha(\theta, \bar{S}|t),\ t \in T,$ системы (6).

Достоверность приведенных выше построений обосновывается справедливостью следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon_j \ne 0,\ j \in L,$ и выполнены предположения 1, 2, 3. Тогда для $\alpha \in \mathcal{E}^+(\alpha_0) \setminus \alpha_0$*

1) существует непрерывная вектор-функция

$$\theta(\alpha) = (\xi_j(\alpha),\ j = 1, \ldots, \bar{p};\ \varphi(\alpha), y(\alpha)) \tag{13}$$

такая, что $Q(\theta(\alpha), \bar{S}, \alpha) \equiv \mathbf{0}_{m+n+\bar{p}},\ \theta(+\alpha_0) = \bar{\theta},$ и имеют место неравенства (12);

2) решения задач ОС(α) имеют неизменную структуру $S(\alpha) = \{\bar{p}, \bar{P}^\pm, \bar{P}_s^\pm, \bar{P}^0, \bar{L} = \emptyset\}$;

3) оптимальное управление $u_\alpha(\cdot)$ задачи ОС(α) строится по правилу

$$\begin{gathered} u_\alpha(t) = \pm 1, \quad t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in \bar{P}^\pm; \\ u_\alpha(t) = 0, \quad t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in \bar{P}^0; \\ u_\alpha(t) = ((\mathbf{0}_n^T, b^T) z_\alpha(\theta(\alpha), \bar{S}|t) \mp \alpha)/\lambda, \quad t \in [\xi_j(\alpha), \xi_{j+1}(\alpha)), \quad j \in \bar{P}_s^\pm; \end{gathered} \tag{14}$$

4) функция (13) не дифференцируема в точке α_0+0, *имеют место следующие асимптотические разложения для компонент данной функции:*

$$\begin{gathered}
\varphi(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar\varphi+\Delta\alpha v^0_\varphi+o(\Delta\alpha),\quad y(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar y+\Delta\alpha v^0_y+o(\Delta\alpha),\\
\xi_j(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar\xi_j+\Delta\alpha v^0_j+o(\Delta\alpha),\quad j\in I_*\setminus I_0,\\
\xi_j(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar\xi_j-\sqrt{\Delta\alpha}\,\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}}+o(\sqrt{\Delta\alpha}\,),\quad j\in I_0,\\
\xi_{j+1}(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar\xi_j+\sqrt{\Delta\alpha}\,\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}}+o(\sqrt{\Delta\alpha}\,),\quad j\in I_0,
\end{gathered}\tag{15}$$

где $I_0=\{j\in\{1,\dots,\bar p\}:\ \bar\xi_j=\bar\xi_{j+1}\}$; $I_*=\{1,\dots,\bar p\}\setminus\{(j+1),\ j\in I_0\}$; $s(j),\ j\in I_0,$ *— такие индексы из* L, *что* $\bar\xi_j=\xi^0_{s(j)}$, $j\in I_0$;

$$v^0_\varphi=(\mathbb{O}_{n\times n},E_n)\Delta\tilde z(0),\quad v^0_y=\Delta\tilde y,\quad v^0_j=-((\mathbf{0}^T_n,b^T)\Delta\tilde z(\bar\xi_j)-\Delta\mu_j)/\dot\Delta_{\alpha_0}(\bar\xi_j),\quad j\in I_*\setminus I_0,\tag{16}$$

$\Delta\tilde z(t),\ t\in T,$ *— решение краевой задачи (9).*

Доказательство. Данная теорема не может быть доказана тем способом, который использовался в [3] при доказательстве теоремы 2, так как при нерегулярном значении параметра α_0 имеет место равенство $\det(\partial Q(\bar\theta,\bar S,\alpha_0)/\partial\theta)=0$. Действительно, матрица $\partial Q(\bar\theta,\bar S,\alpha_0)/\partial\theta$ содержит $2|I_0|$ нулевых столбцов (так как $\dot\Delta_{\alpha_0}(\bar\xi_j)=\dot\Delta_{\alpha_0}(\bar\xi_{j+1})=0,\ j\in I_0$) и $|I_0|$ пар одинаковых строк (так как $\bar\xi_j=\bar\xi_{j+1},\ j\in I_0$).

Можно показать, что $\dim\operatorname{Ker}(\partial Q(\bar\theta,\bar S,\alpha_0)/\partial\theta)=2|I_0|$. Чтобы "уменьшить вырожденность" матрицы $\partial Q(\bar\theta,\bar S,\alpha_0)/\partial\theta$, введем новый вектор параметров $\eta=(\eta_j,\ j\in I_*,\ \Delta\eta_j,\ j\in I_0,\ \tilde\varphi,\tilde y)$, связанный с исходным вектором параметров $\theta=(\xi_j,\ j=1,\dots,\bar p,\ \varphi,y)$ взаимно однозначными соотношениями

$$\xi_j=\eta_j,\quad j\in I_*,\quad \xi_{j+1}=\eta_j+\Delta\eta_j,\quad j\in I_0,\quad \tilde\varphi=\varphi,\quad \tilde y=y.\tag{17}$$

Будем считать, что $z_\alpha(\eta,\bar S|t)\equiv z_\alpha(\theta,\bar S|t)$, $t\in T$, где $z_\alpha(\theta,\bar S|t)$, $t\in T$, — решение системы дифференциальных уравнений (6).

Систему уравнений $Q(\theta,\bar S,\alpha)=\mathbf{0}_{m+n+\bar p}$ заменим на эквивалентную ей систему

$$\tilde Q(\eta,\bar S,\alpha):=\begin{pmatrix} Q_*(\eta,\bar S,\alpha)\\ f(\eta,\bar S,\alpha|\eta_j)-\mu_j(\alpha),\quad j\in I_*\\ q(\eta,\bar S,\alpha|\eta_j,\Delta\eta_j),\quad j\in I_0\end{pmatrix}=\mathbf{0}_{m+n+|I_*|+|I_0|},$$

где $Q_*(\eta,\bar S,\alpha)=Q_*(\theta,\bar S,\alpha)$, $f(\eta,\bar S,\alpha|t)=f(\theta,\bar S,\alpha|t)$,

$$q(\eta,\bar S,\alpha|t,\Delta t)=(f(\eta,\bar S,\alpha|t+\Delta t)-f(\eta,\bar S,\alpha|t))/\Delta t.$$

Функцию $q(\eta,\bar S,\alpha|t,\Delta t)$ и ее производные

$$\partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,\Delta t)/\partial t,\quad \partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,\Delta t)/\partial\Delta t,\quad \partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,\Delta t)/\partial\alpha$$

доопределим при $\Delta t=0$ по непрерывности

$$\begin{gathered}
q(\eta,\bar S,\alpha|t,0)=\partial f(\eta,\bar S,\alpha|t)/\partial t,\quad \partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,0)/\partial t=\partial^2 f(\eta,\bar S,\alpha|t)/\partial t^2,\\
\partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,0)/\partial\Delta t=0.5\cdot\partial^2 f(\eta,\bar S,\alpha|t)/\partial t^2,\quad \partial q(\eta,\bar S,\alpha|t,0)/\partial\alpha=\partial^2 f(\eta,\bar S,\alpha|t)/\partial t\partial\alpha.
\end{gathered}$$

Аналогичным образом можно доопределить производные более высокого порядка в точке $(\bar\eta,\alpha_0)$, где $\bar\eta=(\bar\eta_j=\bar\xi_j,\ j\in I_*,\ \Delta\eta_j=0,\ j\in I_0,\ \bar\varphi,\ \bar y)$.

Для доказательства теоремы понадобится следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 3. Тогда существует число* $\delta_0 > 0$ *и непрерывная вектор-функция*

$$\eta(\alpha) = (\eta_j(\alpha),\ j \in I_*,\ \Delta\eta_j(\alpha),\ j \in I_0,\ \tilde{\varphi}(\alpha),\ \tilde{y}(\alpha)), \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + \delta_0], \tag{18}$$

такие, что

$$\tilde{Q}(\eta(\alpha), \bar{S}, \alpha) \equiv \mathbf{0}_{m+n+|I_*|+|I_0|}, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + \delta_0], \quad \eta(+\alpha_0) = \bar{\eta}, \tag{19}$$

выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \eta_1(\alpha) > 0, \quad \text{если} \quad \bar{\eta}_1 = 0; \quad \Delta\eta_j(\alpha) > 0, \quad j \in I_0; \\ \eta_{\bar{p}}(\alpha) < t_*, \quad \text{если} \quad \bar{\eta}_{\bar{p}} = t_*, \quad \alpha \in (\alpha_0, \alpha_0 + \delta_0], \end{gathered} \tag{20}$$

и справедливы асимптотические разложения для компонент вектор-функции (18)

$$\begin{gathered} \varphi(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \bar{\varphi} + \Delta\alpha v_\varphi^0 + o(\Delta\alpha), \quad y(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \bar{y} + \Delta\alpha v_y^0 + o(\Delta\alpha), \\ \eta_j(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \bar{\eta}_j + \Delta\alpha v_j^0 + o(\Delta\alpha), \quad j \in I_* \setminus I_0, \\ \eta_j(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \bar{\eta}_j - \sqrt{\Delta\alpha}\,\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}} + o(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad j \in I_0, \\ \Delta\eta_j(\alpha_0 + \Delta\alpha) = 2\sqrt{\Delta\alpha}\,\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}} + o(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad j \in I_0. \end{gathered} \tag{21}$$

Доказательство. Далее набор $\bar{S}$ будет фиксирован, поэтому будем опускать зависимость от $\bar{S}$ и писать $\tilde{Q}(\eta, \alpha)$ вместо $\tilde{Q}(\eta, \bar{S}, \alpha)$.

Можно показать, что $\dim \operatorname{Ker}(\partial\tilde{Q}(\bar{\eta}, \alpha_0)/\partial\eta) = |I_0| \geq 1$. Покажем, что справедливость утверждения является следствием обобщенной теоремы о неявной функции, доказанной в [5] и примененной к системе уравнений $\tilde{Q}(\eta, \alpha) = \mathbf{0}_{m+n+|I_*|+|I_0|}$.

Обозначим

$$\tilde{L} = \partial\tilde{Q}(\bar{\eta}, \alpha_0)/\partial\eta, \quad \tilde{b} = \partial\tilde{Q}(\bar{\eta}, \alpha_0)/\partial\alpha, \quad \Psi = (\phi(i),\ i \in I_0),$$

где $\phi(i)$, $i \in I_0$, — базис пространства $\operatorname{Ker}\tilde{L}$,

$$A_j := \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{Q}(\eta, \alpha)\phi(j)\right)\bigg|_{\substack{\eta=\bar{\eta}\\ \alpha=\alpha_0}}, \quad j \in I_0; \quad S(\beta) := (A_j\Psi\beta,\ j \in I_0), \quad \beta = (\beta_j,\ j \in I_0).$$

Отметим, что с учетом специфики матрицы $\tilde{L}$ легко показать, что каждый вектор $\phi(i)$, $i \in I_0$, представим в виде $\phi(i) = (\phi_j(i),\ j \in I_*,\ \Delta\phi_j(i),\ j \in I_0,\ \phi_*(i),\ \phi_0(i))$, $\phi_*(i) \in \mathbb{R}^n$, $\phi_0(i) \in \mathbb{R}^m$, где $\phi_i(i) = -1/2$, $\Delta\phi_i(i) = 1$, все остальные компоненты равны нулю.

При выполнении предположений 1 и 2 и предположения $\varepsilon_{s(j)} > 0$, $j \in I_0$, все условия теоремы из [5] выполняются для функции $\tilde{Q}(\eta, \alpha)$ с любым из $2^{|I_0|}$ набором параметров $\beta^0 = (\beta_j^0,\ j \in I_0)$, где $\beta_j^0 = \pm 2\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}}$.

Тогда, согласно этой теореме, при любом β^0 из этого набора найдется такое число $\delta_0 > 0$ и непрерывная функция (18), что имеют место соотношения (19) и функция $\eta(\alpha)$ допускает следующее представление:

$$\eta(\alpha) = \bar{\eta} + \sqrt{\Delta\alpha}\,\Psi\beta(\sqrt{\Delta\alpha}\,) + \Delta\alpha v(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad \Delta\alpha = \alpha - \alpha_0 \geq 0, \tag{22}$$

где $\beta(\varepsilon) = (\beta_j(\varepsilon),\ j \in I_0)$ и $v(\varepsilon) = (v_j(\varepsilon),\ j \in I_*,\ \Delta v_j(\varepsilon),\ j \in I_0,\ v_\varphi(\varepsilon),\ v_y(\varepsilon))$, $v_\varphi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $v_y(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $\beta(0) = \beta^0$, $v(0) = v^0 = (v_j^0,\ j \in I_*,\ \Delta v_j^0,\ j \in I_0,\ v_\varphi^0,\ v_y^0)$, v^0 — единственное решение системы

$$\tilde{L}v^0 + \tilde{b} + 0.5 \cdot S(\beta^0)\beta^0 = 0, \quad \Psi^T v^0 = \mathbf{0}_{|I_0|}. \tag{23}$$

Из (22) с учетом специфики матрицы Ψ имеем

$$
\begin{gathered}
\varphi(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar{\varphi}+\Delta\alpha v_\varphi(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad y(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar{y}+\Delta\alpha v_y(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \\
\eta_j(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar{\eta}_j+\Delta\alpha v_j(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad j\in I_*\setminus I_0, \\
\eta_j(\alpha_0+\Delta\alpha)=\bar{\eta}_j-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta\alpha}\,\beta_j(\sqrt{\Delta\alpha}\,)+\Delta\alpha v_j(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad j\in I_0, \\
\Delta\eta_j(\alpha_0+\Delta\alpha)=\sqrt{\Delta\alpha}\,\beta_j(\sqrt{\Delta\alpha}\,)+\Delta\alpha\Delta v_j(\sqrt{\Delta\alpha}\,), \quad j\in I_0.
\end{gathered} \tag{24}
$$

Из множества наборов параметров β^0 рассмотрим следующий: $\beta^0=(\beta^0_j=2\sqrt{2\varepsilon_{s(j)}}>0,$ $j\in I_0)$. С учетом специфики системы (23) нетрудно проверить, что значения компонент v^0_j, $j\in I_*\setminus I_0$, v^0_φ, v^0_y соответствующего решения системы (23) имеют вид (16). Тогда из (24) получаем (21).

Из (21) с учетом того, что $v^0_1=\varepsilon_{s(1)}>0$ при $\bar{\eta}_1=0$ и $v^0_{\bar{p}}=\varepsilon_{s(\bar{p})}<0$ при $\bar{\eta}_{\bar{p}}=t_*$, убеждаемся в справедливости соотношений (20), а значит, и утверждения в целом. Утверждение 3 доказано.

Из соотношений (17) и (21) следует справедливость утверждений 1) и 4) теоремы. Докажем справедливость утверждений 2) и 3) теоремы.

Используя вектор-функцию $\theta(\alpha)$, $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_0+\delta_0]$, (13), удовлетворяющую условиям $Q(\theta(\alpha),\bar{S},\alpha)\equiv\mathbf{0}_{m+n+\bar{p}}$, $\theta(+\alpha_0)=\bar{\theta}$ (см. формулировку теоремы 3) и набор множеств $\bar{S}$, построим $2n$-вектор-функцию $z_\alpha(t)=(x_\alpha(t);\psi_\alpha(t))=z_\alpha(\theta(\alpha),\bar{S}|t)$, $t\in T$, где $z_\alpha(\theta,\bar{S}|t)$, $t\in T$, — траектория системы (6). Нетрудно показать, что $(dz_\alpha(t)/d\alpha)|_{\alpha=+\alpha_0}=\Delta\tilde{z}(t)$, $t\in T$, где $\Delta\tilde{z}(t)$, $t\in T$, $\Delta\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$ — решение краевой задачи (9).

С учетом справедливости утверждения 3 и условий $\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)\neq 0$, $j\in J_*\cup L^*$, для доказательства утверждений 2) и 3) теоремы достаточно показать, что при $\alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0)\setminus\alpha_0$ для точек ξ^0_j, $j\in L^-=L\setminus\{L^+\cup L^*\}$, будет иметь место ситуация а) (см. выше), т.е. что данные точки исчезнут из множества активных точек, т.е. не породят ни одной активной точки множества $T_a(\alpha)$. Таким образом, надо показать, что при $\alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0)\setminus\alpha_0$ будут иметь место следующие соотношения:

$$
\Delta_\alpha(\hat{\xi}_j(\alpha))>a_j(\alpha), \quad \text{если} \quad j\in L^{-*}; \quad \Delta_\alpha(\hat{\xi}_j(\alpha))<a_j(\alpha), \quad \text{если} \quad j\in L^-_*. \tag{25}
$$

Здесь $\hat{\xi}_j(\alpha)$, $\alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0)$, $j\in L^-$, — единственные непрерывно дифференцируемые функции, неявно заданные соотношениями:

$$
\begin{gathered}
\dot{\Delta}_\alpha(\hat{\xi}_j(\alpha))\equiv 0, \quad \alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0), \quad \hat{\xi}_j(\alpha_0)=\xi^0_j, \quad \text{если} \quad \xi^0_j\in\operatorname{int}T, \\
\hat{\xi}_j(\alpha)\equiv 0, \quad \alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0), \quad \text{если} \quad \xi^0_j=0; \quad \hat{\xi}_j(\alpha)\equiv t_*, \quad \alpha\in\mathcal{E}^+(\alpha_0), \quad \text{если} \quad \xi^0_j=t_*, \\
a_j(\alpha)=\pm\alpha\vee\pm(\alpha+\lambda), \quad a_j(\alpha_0)=\Delta_{\alpha_0}(\xi^0_j);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
L^{-*}=\{j\in L^-:\ \xi^0_j\in\operatorname{int}T,\ \ddot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)>0 \text{ или } \xi^0_j=0,\ \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)>0, \text{ или } \xi^0_j=t_*,\ \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)<0\}, \\
L^-_*=\{j\in L^-:\ \xi^0_j\in\operatorname{int}T,\ \ddot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)<0 \text{ или } \xi^0_j=0,\ \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)<0, \text{ или } \xi^0_j=t_*,\ \dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j)>0\}.
\end{gathered}
$$

Для $j\in L^-$ подсчитаем

$$
\begin{gathered}
\omega_j=(d(\Delta_\alpha(\hat{\xi}_j(\alpha))-a_j(\alpha))/d\alpha)|_{\alpha=+\alpha_0}= \\
=\begin{cases}
\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi^0_j(+\alpha_0))\dot{\hat{\xi}}_j(+\alpha_0)+b^T\dfrac{d\psi_\alpha(\xi^0_j)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=+\alpha_0}-\Delta\mu_j, & \text{если} \quad \xi^0_j\in\operatorname{int}T, \\
b^T\dfrac{d\psi_\alpha(\xi^0_j)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=+\alpha_0}-\Delta\mu_j, & \text{если} \quad \xi^0_j=0\vee t_*,
\end{cases}= \\
=(\mathbf{0}^T_n,b^T)\Delta\tilde{z}(\xi^0_j)-\Delta\mu_j.
\end{gathered}
$$

Здесь числа $\Delta\mu_j$ определены так же, как и в (11).

По предположению имеем

$$\varepsilon_j := \begin{cases} -((\mathbf{0}_n^T, b^T)\Delta\tilde{z}(\xi_j^0) - \Delta\mu_j)/\ddot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0) < 0, & \text{если} \quad \xi_j^0 \in \operatorname{int} T, \quad j \in L^-, \\ -((\mathbf{0}_n^T, b^T)\Delta\tilde{z}(\xi_j^0) - \Delta\mu_j)/\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0) < 0, & \text{если} \quad \xi_j^0 = 0, \quad j \in L^-, \\ -((\mathbf{0}_n^T, b^T)\Delta\tilde{z}(\xi_j^0) - \Delta\mu_j)/\dot{\Delta}_{\alpha_0}(\xi_j^0) > 0, & \text{если} \quad \xi_j^0 = t_*, \quad j \in L^-. \end{cases}$$

Следовательно, $\omega_j > 0$, если $j \in L^{-*}$, и $\omega_j < 0$, если $j \in L_*^-$. Из последних соотношений и равенств $\Delta_{\alpha_0}(\xi_j^0) = a_j(\alpha_0)$, $j \in L^-$, следует справедливость (25). Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 можно получить простые правила построения решения возмущенной задачи ОС $(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ при условии, что известно решение $u_{\alpha_0}(\cdot)$ невозмущенной задачи ОС (α_0) и точка α_0 является нерегулярной. Данные правила сводятся к следующей последовательности шагов.

1. Для точек неустойчивого поведения ξ_j^0, $j \in L$, подсчитать числа ε_j, $j \in L$, по правилам (10), (11). Точки ξ_j^0, $j \in L$, для которых $\varepsilon_j < 0$, исчезнут из множества активных точек при возмущении параметра α. Каждая из точек ξ_j^0, $j \in L$, для которой $\varepsilon_j > 0$, при возмущении параметра α породит две внутренние активные точки, если $\xi_j^0 \in (0, t_*)$, и одну внутреннюю активную точку, если $\xi_j^0 = 0 \vee t_*$.

2. Определить структуру решения $\bar{S}(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ задачи ОС $(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ с учетом шага 1.

3. Найти решение $\theta = \theta(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ системы нелинейных уравнений

$$Q(\theta, \bar{S}, \alpha_0 + \Delta\alpha) = \mathbf{0}_{m+n+\bar{p}}.$$

Это можно сделать методом Ньютона, взяв в качестве начального приближения вектор $\hat{\theta}$, компоненты которого

$$\hat{\xi}_j = \bar{\xi}_j + \Delta\alpha v_j^0, \quad j \in I_* \setminus I_0, \quad \hat{\xi}_j = \bar{\xi}_j - \sqrt{2\Delta\alpha\varepsilon_{s(j)}}, \quad \hat{\xi}_{j+1} = \bar{\xi}_j + \sqrt{2\Delta\alpha\varepsilon_{s(j)}}, \quad j \in I_0,$$

$$\hat{\varphi} = \bar{\varphi} + \Delta\alpha v_\varphi^0, \quad \hat{y} = \bar{y} + \Delta\alpha v_y^0,$$

построены с учетом асимптотических разложений (15).

4. Зная вектор $\theta(\alpha_0 + \Delta\alpha)$, построить оптимальное управление $u_{\alpha_0+\Delta\alpha}(\cdot)$ задачи ОС $(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ по правилам (14) при $\theta = \theta(\alpha_0 + \Delta\alpha)$.

Можно показать, что, несмотря на недифференцируемость функции $\theta(\alpha)$ в точке $\alpha = \alpha_0 + 0$, функция $\int_T |u_\alpha(t)|\, dt$ является дифференцируемой и

$$\frac{d}{d\alpha} \int\limits_T |u_\alpha(t)|\, dt \bigg|_{\alpha=\alpha_0} = 2\tilde{I}(\Delta\tilde{x}^*, \Delta\tilde{u}^*) - \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \tilde{P}_s^\pm} (\tilde{\xi}_{j+1} - \tilde{\xi}_j) \le 0.$$

Здесь $\Delta\tilde{u}^*(t)$, $\Delta\tilde{x}^*(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление и траектория в задаче

$$I(\Delta x, \Delta u) = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^{t_*} \Delta x^T(t) D \Delta x(t)\, dt + \sum_{j \in \tilde{P}_s^\pm(\alpha_0)} \lambda \int\limits_{\tilde{\xi}_j^0}^{\tilde{\xi}_{j+1}^0} \Delta u(t)^2\, dt \Big) \to \min,$$

$$\Delta\dot{x} = \begin{cases} A\Delta x, & t \in T \setminus \Big(\bigcup\limits_{j \in \tilde{P}_s^\pm(\alpha_0)} [\tilde{\xi}_j^0, \tilde{\xi}_{j+1}^0) \Big), \\ A\Delta x + b\Delta u \mp b/\lambda, & t \in [\tilde{\xi}_j^0, \tilde{\xi}_{j+1}^0), \quad j \in \tilde{P}_s^\pm(\alpha_0), \end{cases} \quad \Delta x(0) = \mathbf{0}_n, \quad H\Delta x(t_*) = \mathbf{0}_m, \quad (26)$$

$\tilde{I}(\Delta\tilde{x}^*, \Delta\tilde{u}^*)$ — оптимальное значение целевой функции в задаче (26).

5. Заключение. В работе рассмотрено семейство параметрических задач оптимального управления, содержащих взвешенные L_1 - и L_2 -нормы управляющего воздействия в критерии качества. Исследована зависимость решений задачи от нерегулярных значений весового коэффициента, с которым L_1 -норма управления входит в целевую функцию. Доказанная в работе теорема 3 предоставляет полную информацию о поведении решения задачи при возмущении весового коэффициента в окрестности нерегулярного значения, а также дает его асимптотические разложения. На основе теоремы предложен алгоритм, позволяющий быстро строить решения возмущенных задач при условии, что известно решение невозмущенной задачи.

Отметим, что теорема 3 обобщает теорему 2 и делает более полным исследование зависимости решений рассматриваемой задачи как в регулярном, так и в нерегулярном случаях.

Литература

1. *Krawczyk D., Rudnicki M.* Regularization parameter selection in discrete ill-posed problems — the use of the u-curve // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. № 2. P. 157–164.
2. *Kostyukova O.I., Kurdina M.A.* Asymptotic properties of solutions of parametric optimal control problems with varying index of the Singular Arcs // Differential Equations. 2008. V. 44. № 11. P. 1–14.
3. *Kostyukova O.I., Kostina E.A., Fedartsova N.M.* Parametric optimal control problems with weighted L_1 -norm in the cost function // Automatic Control and Computer Sciences. 2010. V. 44. № 4. P. 179–190.
4. *Bliss G.* Lectures on the calculus of variations. The University of Chicago Press, 1963.
5. *Kostyukova O., Kostina E.* Generalized implicit function theorem and its application to parametric optimal control problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2006. V. 320. № 2. P. 736–755.

O. I. Kostyukova, E. A. Kostina, N. M. Fedartsova

Family of parametric optimal control problems with weighted L_1 - and L_2 -norms in the cost functional

Summary

We consider a family of parametric optimal control problems with weighted L_1 - and L_2 -norms of the control in the cost functional. The weighted coefficient at the L_1 -norm plays a role of the parameter. We study the dependence of solutions of the optimal control problem with respect to parameter values in irregular case. We prove the theorem that describes properties of solutions of the problem in a neighbourhood of an irregular parameter value and gives their asymptotic expansions. We obtain simple rules for computing solutions of perturbed problems using only solution of the unperturbed problem.