УДК 518.5

КИСЕЛЕВСКИЙ О.С.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

Проанализированы возможности методов Фурье-анализа, островов среза (площадь–периметр) и подсчёта фактической площади для параметризации и моделирования фрактальных структур. Произведена оценка точности предложенных методов и ограничения их применимости в исследовании самоподобных функций и поверхностей. Получена эмпирическая формула зависимости фрактальной размерности самоподобной функции от параметров спектра мощности.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из главных проблем в 3D-моделировании поверхности остается количественное описание топологии. Особенно важное значение проблема параметризации топологии поверхности имеет в 3D-моделирования физико-технических, физико-химических процессов, в информационных и информационно-измерительных системах. Как известно, большинство физических процессов протекает в сильно неравновесных условиях, что приводит к формированию развитых упорядоченных структур, обладающих свойством *масштабного самоподобия* [1]. Традиционные методы параметризации топологии зачастую не позволяют количественно описывать сложное строение материала. Количественной мерой самоподобия может быть *фрактальная размерность*. Фрактальные алгоритмы нашли применение в информационных технологиях для синтеза трехмерных компьютерных изображений природных ландшафтов, для компрессии и кодирования данных [2], для анализа процессов роста покрытий [3].

Основной целью данной работы была реализация численных методов фрактального анализа, определение точности этих методов и ограничений их применимости в исследовании реальных физических объектов. Эти исследования включали в себя построение математических моделей фрактальных функций и поверхностей с известной размерностью и вычисление значения фрактальной размерности различными численными методами фрактального анализа.

ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Численные методы фрактального анализа основаны на исследовании математического множества, аппроксимирующего исследуемую структуру. Таким множеством, может быть дискретный образ поверхности в виде двумерной матрицы $z(i,j)$, где i, j – горизонтальные координаты точки поверхности, а $z_{i,j}$ соответственно – ее высота. В данной работе рассматриваются методы *Фурье анализа профилей, островов среза (площадь–периметр)* и *подсчета фактической площади*.

Метод *Фурье анализа профилей* заключается в получении Фурье спектра мощности функции случайного процесса $s(k)$. Под спектром $s(k)$ понимается зависимость суммы квадрата амплитуд s синусоидальной и косинусоидальной гармоник от их частоты k [4]. Согласно [4], спектр мощности функции случайного процесса можно аппроксимировать функцией:

$$s(k) = \lambda \cdot k^{-H} \tag{1}$$

рой коэффициент H связан с фрактальной размерностью D эмпирическим ношением, приведенным в [5]:

$$H = 2 \cdot (3 - D) \quad (2)$$

Метод *островов среза (площадь–периметр)* заключается в измерении ктальной размерности границ горизонтальных сечений шероховатой поверхности. При есечении поверхности горизонтальными секущими плоскостями, в сечении учаются, так называемые, острова среза. Фрактальная размерность границ этих ровов D' согласно теории, предложенной Мандельбротом [4], находится из тношения:

$$L(\delta) \sim [A(\delta)]^{D'/2} \quad (3)$$

$L(\delta)$ – периметр островов в сечении δ, а $A(\delta)$ – площадь.

Сама размерность D находится по формуле, предложенной Мандельбротом [4]:

$$D = D' + 1 \quad (4)$$

Коэффициент $D'/2$ в выражении (3) равен тангенсу угла наклона α линейной ти графика зависимости $\log(L(\delta))$ от $\log(A(\delta))$.

Точность результатов, полученных численными методами, можно оценить в внении с результатами, полученными методом *подсчета фактической площади*. Этот од является наиболее точным, поскольку напрямую вытекает из определения мерности Хаусдорфа $D_Ф$ [4]:

$$N = A_Ф \cdot \varepsilon^{-D_Ф} \quad (5)$$

ε – характеристический размер геометрических фигур, которыми аппроксимируется ерхность при подсчете фактической площади, N – общее количество роксимирующих фигур, $A_Ф$ – подсчитанная фактическая площадь.

Фрактальная размерность вычисляется как тангенс угла наклона графика исимости $A_Ф$ от характеристического размера аппроксимирующих фигур (параметра кретизации) ε.

При программной реализации этих методов, поверхность представлялась в виде мерной матрицы $z(i,j)$ размерами $i \times j$, где z – высота точки с координатами (i,j). В оде островов среза (площадь–периметр) периметру, на уровне δ соответствует ичество точек, удовлетворяющих равенству $z(i,j) = \delta$, а площади – количество точек, влетворяющих равенству $z(i,j) \geq \delta$. В методе подсчета фактической площади ерхность аппроксимировалась множеством (n,n) пар элементарных треугольников с ктеристическим размером ε. Фактическая площадь вычислялась как сумма площадей элементарных треугольников.

Для тестирования реализованных методов фрактального анализа был предложен од Фурье-симуляции фрактальных функций. Этот метод заключается в обратном троении гармонической функции по заданному спектру мощности $s(k)$. Характер онической функции и соответствующего ей спектра мощности однозначно ктеризуется параметром H в формуле (1). В то же время, параметр H связан с мерность D соотношением (2). Такая гармоническая функция, выраженная суммой усоид с частотами от k_{min} до k_{max}, и амплитудами $s(k)^2$, представляет собой функцию айного процесса либо в 3D-моделировании профиль фрактальной поверхности.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для значений H в формуле (1), изменяющихся в пределах от 0 до 100, методом Фурье-симуляции были построены модели фрактальных поверхностей. Для каждой из симулированных поверхностей методом подсчета фактической площади были рассчитаны фактические значения фрактальной размерности $D_Ф$. Затем фактические значения фрактальной размерности были сопоставлены со значениями D, подсчитанными по формуле (2), предложенной в [5]. Было установлено, что график функции (2) коррелирует с вычисленным значением фрактальной размерности только в узком диапазоне значений H от 0,5 до 2,0. Была выведена эмпирическая формула, которая более точно соответствует экспериментально определенной зависимости $D_Ф$ от H:

$$D = e^{-2 \cdot H + 1} + 2 \qquad (6)$$

Фрактальные размерности Фурье-симулированных поверхностей рассчитывались также методом островов среза. По результатам сопоставления фактических значений фрактальной размерности со значениями, полученными методом островов среза, и подсчитанными по корреляционным функциям (2) и (6), были построены графики отклонений вычисленных значений фрактальной размерности ΔD от значений $D_Ф$.

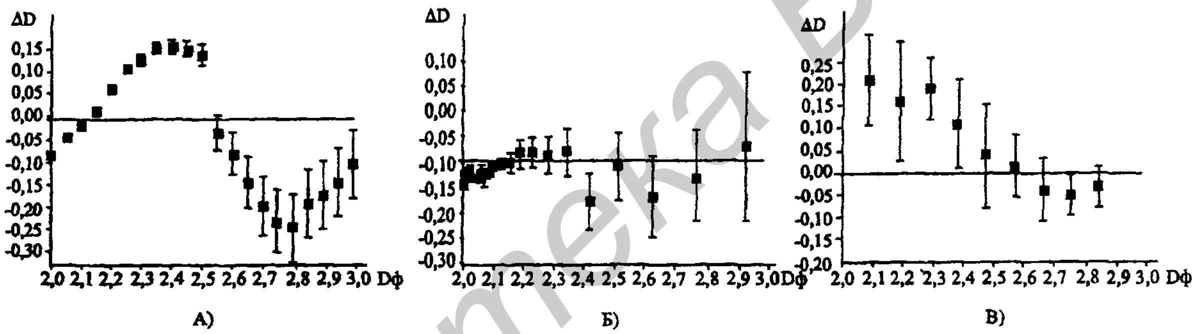

Рис.1. Отклонения ΔD фрактальной размерности, рассчитанной по формулам линейной (*а*) и экспоненциальной (*б*) корреляции, а также посчитанной методом островов среза (*в*) (площадь-периметр) от фактического значения $D_Ф$.

Как видно из графиков, фрактальная размерность, вычисленная по эмпирической формуле экспоненциальной корреляции (*6*), более точно соответствует фактической размерности, чем вычисленная по формуле линейной корреляции (2). При $2{,}0 < D_Ф < 2{,}4$, значения фрактальной размерности D, вычисленные по формуле экспоненциальной корреляции, точно соответствуют фактическим, а при $D_Ф > 2{,}4$ имеют абсолютное систематическое отклонение менее минус 0,05, что значительно ниже абсолютных отклонений линейной корреляции (ΔD до минус 0.20). Метод островов среза при значениях $D_Ф < 2{,}6$ обладает погрешностью до ±0,20 и абсолютным систематическим отклонением ΔD до 0,2. При значениях $D > 2{,}6$ погрешность снижается до ±0,05…0,07, а абсолютное систематическое отклонение ΔD – до минус 0,07.

ВЫВОДЫ

Корреляционная взаимосвязь между Фурье спектром мощности функции случайной величины и фрактальной размерностью позволяет синтезировать модели фрактальных поверхностей с большой степенью соответствия заданной фрактальной размерности. При этом наиболее точную корреляцию между параметрами спектра мощности профиля и фрактальной размерностью представляет эмпирическая экспоненциальная зависимость. Сопоставление значений фрактальной размерности, полученных методом горизонтальных сечений (площадь-периметр), с фактическим значением, полученным методом подсчета фактической площади, позволило определить точность этого метода и пределы значений фрактальной размерности, ограничивающие его применение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хакен Г. Синергетика. Иерархия устойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.:Мир, 1980.

2. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике. // Computerworld-Россия, 1995. – №15. – с.11

3. Казаченко В.П., Киселевский О.С., Егоров А.И. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2003. – №2. – с.109-112

4. Ф.Енс. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.

5. Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Pullax A.J. // Nature, 1984. – Vol.308. – p.721.

Киселевский Олег Сергеевич
Аспирант кафедры «Материаловедение, обработка и упрочнение материалов», магистр тех. наук
Белорусский государственный университет транспорта, г.Гомель
Тел.: (+375 29) 736-35-38
E-mail: d_mr78@mail.ru