БЫСТРЫЙ ПЕРЕСЧЕТ ОТКРЫТЫХ И ЗАКРЫТЫХ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИИ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Батура П. М., Кароли М. К., Кот О.В.

Ревотюк М. П. – канд. техн. наук, доцент

Рассматривается использование эффекта снижения вычислительной сложности регулярного решения открытых и закрытых линейных задач о назначении с незначительным изменением матриц стоимостей. Пересчет решения позволяет снизить вычислительную сложность решения на порядок.

Известно, что классические открытые линейные задачи о назначении (ЛЗН) в виде

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\ x_{ij} \ge 0;\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right\} \qquad (1)$$

характеризуются вычислительной сложностью $O(m^2 n)$ [1]. Достаточно часто возникает потребность пересчета задачи (1) после изменения исходных данных. Прямолинейный пересчет варианта задачи потребует $O(m^2 n)$ операций. Однако итерация расчета для любой включаемой строки имеет вычислительную сложность $O(mn)$ [1,2], что побуждает использовать наследование результатов предшествующего решения.

Наиболее эффективные для решения задачи (1) алгоритмы венгерского метода используют переход к двойственной задаче линейного программирования

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \,\middle|\, c_{ij} - u_i - v_j \ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right\}. \qquad (2)$$

Здесь неизвестными являются потенциалы строк и столбцов. Значения потенциалов определяют решение задачи (2) в виде множества пар индексов $R = \{(i, j) \mid c_{ij} - u_i - v_j = 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\}$.

Отображение решения (2) в процедурах венгерского метода обычно проводят на вектор назначений строк столбцам: $r_j = i,\ (i, j) \in R,\ j=\overline{1,n}$. Начальное значение элементов такого вектора отражает отсутствие назначений столбцов строкам: $r_j = m+1,\ j=\overline{1,n}.$ Обычно задача (2) формулируется с представлением матрицы в формате $m \le n.$ Последовательные итерации назначения столбцов выполняются при нулевых начальных значениях потенциалов строк с уточнением потенциалов столбцов [1,2].

В случае реоптимизации решения изменяться могут произвольные элементы матрицы задачи с сохранением ее размера. Очевидно, что можно выделить строки, в которых изменены элементы, и повторить итерации назначения для таких строк. Изменение элементов матрицы должно отражаться значениями потенциалов, сбросом признака назначения соответствующей дуги графа и итерацией назначения строки. Если изменены элементы строки i, то ее потенциал в общем случае должен быть скорректирован по правилу $u_i = \min_j (c_{ij} - v_j,\ j=\overline{1,n}),\ i=\overline{1,m}.$ В случае изменения элементов столбца j его потенциал также должен меняться: $v_j = \min_i (c_{ij} - u_i,\ i=\overline{1,m}),\ j=\overline{1,n}.$

Очевидно, что выбор между строкой или столбцом измененного элемента для реоптимизации решения не принципиален. Если применена схема итерации по строкам, то необходимо получить список строк, для которых столбцы не назначены. Проще всего такой список получить посредством проверки условия $r_j > m,\ j=\overline{1,n}.$ Однако этап коррекции потенциалов можно совместить с этапом назначения столбца. Для этого достаточно пометить измененные столбцы признаком отказа от назначения: $r_j = m+1,\ j \in \overline{1,n},$ далее обнулить потенциалы измененных строк и повторить стандартные итерации включения таких строк в инкрементальной схеме решения ЛЗН [2,3].

Таким образом, исключение этапа коррекции потенциалов снижает вычислительную сложность обработки последствий коррекции строк (столбцов) практически в два раза.

Список использованных источников:

1. Jonker R., Volgenant A. A shortest path algorithm for dense and sparse linear assignment problem//Computing, vol. 38, 1987. – pp. 325-340.
2. Toroslu I.H., Üçoluk G. Incremental assignment problem//Information Sciences, vol. 177, 2007. – pp. 1523-1529.
3. Ревотюк, М.П. Реоптимизация решения задач о назначении/М.П. Ревотюк, П.М. Батура, А.М. Полоневич//Доклады БГУИР. – 2011. – № 1(55). – С. 55-62.