

АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНОГО КАПИЛЛЯРНОГО ВИСКОЗИМЕТРА РЯДОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

В.Г. Лещенко¹, Н.И. Инсарова¹, Д.В. Мансуров², В.А. Мансуров¹, М.А. Шеламова¹

¹Белорусский государственный медицинский университет, E-mail: mansurov@tut.by

²УП «Фарнелл», Минск

Abstract. The processing method of the ill-posed experimental data obtained with a transient capillary viscometer is presented. The base of the method is a numerical expansion in a series of the orthonormal exponential function the experimental data. It is shown this method allows to deliver from a noise accompanied the transient flow into the viscometer.

Реологические показатели крови (вязкость крови и плазмы, агрегационная способность и деформируемость эритроцитов) являются важнейшими диагностическими характеристиками. Вязкость крови определяет функционирование циркуляторной системы. Высокая вязкость является причиной дополнительной нагрузки на сердечнососудистую систему. Для определения этих показателей используются специальные приборы - вискозиметры. Эти приборы – сложные устройства, требующие высококвалифицированного персонала, с другой стороны требуют значительного времени на одно измерение. Основной целью реологических измерений является кривая течения в консистентных (макроскопических) координатах. Для капиллярных вискозиметров такими координатами являются расход Q перепад давления ΔP . Из этой кривой определяются микрореологические показатели на стенке капилляра напряжение сдвига τ_w и скорость сдвига $\dot{\gamma}_w$.

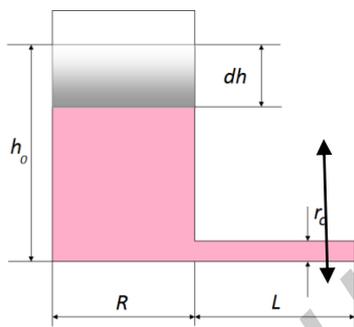


Рисунок 1 - Схематический разрез нестационарного вискозиметра

С целью сокращения времени измерения применяется нестационарный метод [1,2]. В данном случае (рис 1), исследуемая жидкость, находящаяся в вертикальном резервуаре, вытекает из него через капилляр известной длины и точно определенного радиуса. Высота столба жидкости $h(t)$ в резервуаре определяет давление на входе капилляра. В дальнейшем этот резервуар будем называть напорной трубкой.

Измерение высоты столба жидкости производится кондуктометрическим способом. В центре напорной трубки расположен электрод, на который через резистор подается переменное напряжение с частотой 8 КГц. Микропроцессорной системой на базе ARDUINO измеряется падение напряжения на этом резисторе. Падение напряжения обратно пропорционально высоте столба жидкости. Микропроцессор вычисляет высоту столба жидкости и посредством USB передает данные в главный компьютер. Реальные измерения реологического аналога крови показывают, что на вычисленную высоту столба накладывается шум неизвестной природы, несвязанной с работой электроники и АЦП микропроцессора.

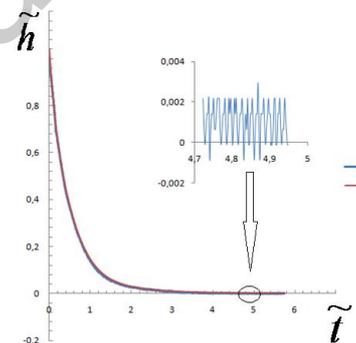


Рисунок 2 - Нормированная зависимость высоты столба жидкости

Вероятно, это связано с изменением формы свободной поверхности при вытекании жидкости из напорной трубки (рис 2).

Основная цель данной работы разработать методику обработки экспериментальных данных, полученных на нестационарном вискозиметре, при наличии шума, наложенного на нестационарное течение.

Жидкость под действием гидростатического давления Δp , определяемого $h(t)$ ($\Delta p = \rho g h(t)$, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения), свободно вытекает из вертикального напорного цилиндра радиуса R через горизонтальный капилляр радиуса r_c и длиной L . Расход жидкости Q , прошедшей через сечение капилляра, вычисляется как: $Q = \frac{\pi \cdot r_c^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau$ здесь $\tau_w = \Delta p \cdot r_c / 2L$ напряжение сдвига на стенке капилляра, $\partial u / \partial r = \dot{\gamma} = f(\tau)$ - реологическая функция, определяемая свойствами жидкости.

Перемещение свободной поверхности dh за время dt определяет уменьшение объема жидкости в напорном цилиндре $dV = \pi \cdot R^2 dh$. В этом случае изменение расхода во времени:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \pi \cdot R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi \cdot r_c^3}{(\rho g h(t) \cdot r_c / 2L)^3} \int_0^{\rho g h(t) \cdot r_c / 2L} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (1)$$

Данное соотношение является уравнением относительно неизвестной функции $f(\tau)$, которая является конечной целью вискозиметрических измерений. Следует заметить, что изменение высоты сопровождается колебаниями свободной поверхности жидкости (рис.2) вычисление производной в правой части (1) по этой причине - сложная задача.

Одним из способов вычисления расхода и давления из «плохих» экспериментальных данных является аппроксимация. Наиболее подходящей аппроксимацией может служить ортонормированный ряд экспоненциальных функций. Это позволяет повысить точность представлений реологических функций. Заметим, что для ньютоновской жидкости имеется точное решение (1), т.е. изменение высоты столба жидкости в напорной трубке вискозиметра описывается следующей зависимостью

$$h(t) = h_0 \exp\left(-(\rho g r_c^4 / 8\eta l R_r^2) t\right) \quad (2)$$

здесь r_c - радиус капилляра, η - динамическая вязкость жидкости, l - длина капилляра, R_r - радиус напорной трубки, h_0 - начальная высота жидкости в напорной трубке. При этом характерное время составляет $\tau = 8\eta l R_r^2 / \rho g r_c^4$. В данном случае это время составило 243 с.

Экспоненциальный ряд представляется как: $h(\tilde{t})/h_0 = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k(-c_k \tilde{t})$, c_k - некоторые коэффициенты, которые выбирается из физических соображений, $b_k = \int_0^z h(\tilde{t}) \varphi_k(\tilde{t}) d\tilde{t}$ - коэффициенты Фурье, на промежутке от 0 до z , φ_k - система экспоненциальных ортонормированных функций, которая представляется как [3]:

$$\varphi_1 = \sqrt{2} \exp(-\tilde{t}); \varphi_2 = 6 \exp(-2\tilde{t}) - 4 \exp(-\tilde{t}); \varphi_3 = \sqrt{6} (10 \exp(-3\tilde{t}) - 12 \exp(-2\tilde{t}) + 3 \exp(-\tilde{t}))$$

$$\varphi_4 = \sqrt{2} (70 \exp(-4\tilde{t}) - 120 \exp(-3\tilde{t}) + 60 \exp(-2\tilde{t}) - 8 \exp(-\tilde{t}))$$

$$\varphi_5 = \sqrt{10} (126 \exp(-5\tilde{t}) - 280 \exp(-4\tilde{t}) + 210 \exp(-3\tilde{t}) - 60 \exp(-2\tilde{t}) - 5 \exp(-\tilde{t}))$$

здесь $\tilde{t} = t/\tau$ - нормированное время.

Также нормировалась и высота свободной поверхности жидкости $\tilde{h} = h/h_0$. Нормированные экспериментальные данные показаны на рис. 2. Коэффициенты b_k вычислялись путем численного интегрирования методом Симпсона с использованием приведенной ортонормированной системы функций [3]. При известных коэффициентах b_k вычисление производной по нормированному времени не представляет сложностей (рис. 3). Эта производная пропорциональна расходу Q (1). Введя обозначения безразмерного расхода $\tilde{q} = Q/Q_0$, где Q_0 расход в начальный момент времени и безразмерный перепад давления, величина которого пропорциональна нормированной высоте, получим кривую течения в безразмерных консистентных координатах (рис. 4), откуда по известным методикам можно получить неизвестную реологическую функцию $f(\tau)$, например, численно решая (1) методом регуляризации [4].

В заключении подчеркнем, что созданы основы расчета параметров течения в нестационарном капиллярном вискозиметре, предложен метод обработки результатов измере-

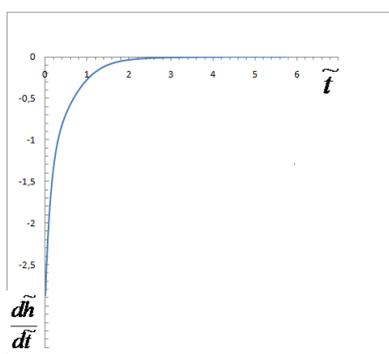


Рисунок 3 - Зависимость безразмерной скорости изменения высоты от безразмерного времени

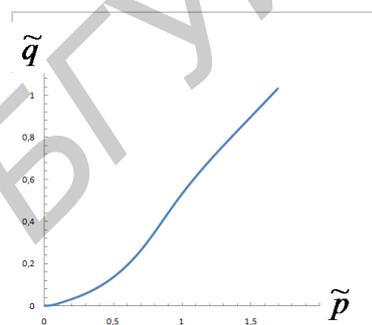


Рисунок 4 - Зависимость безразмерного расхода от безразмерного давления (нормированные консистентные координаты)

ний, сопровождаемых шумом. Основой расчета скорости сдвига при нестационарном напорном течении реологически-сложной жидкости и кривой течения служат измеряемые напорно-расходные характеристики нестационарного капиллярного течения. Показано, что реально существующих условий течения в капилляре оправдана аппроксимация измеренных значений рядом ортонормированных экспоненциальных функций, что позволяет избавиться от шума, сопровождающего процесс течения в нестационарном вискозиметре. Для вычисления истинной скорости сдвига в вискозиметрическом узле, и, следовательно, истинной вязкости можно применить процедуру регуляризации интегрального уравнения движения жидкости.

Литература

1. Патент США 6,907,772 Kensey J.M. с соавторами, 2005
2. **Мансуров В.А.**, Мансуров Д.В., Ямайкина И.В. Нестационарный метод измерения кривых течения маловязких оседающих суспензий // ИФЖ 2011. Том 84, №3. С.454 – 458.
3. **А. А. Дмитриев** Ортогональные экспоненциальные функции в гидрометеорологии Гидрометеоиздат: Ленинград 1973 - 119 с.
4. **Yeow, Y.L.**, Lee, H.L., Melvani, A.R., Mifsud, G.C., A new method of processing capillary viscometry data in the presence of wall slip. // Journal of Rheology 2003. Vol.47.No 2. – pp. 337–348.