УДК 517.925.7

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ РЕШЕНИЙ

В.В. ЦЕГЕЛЬНИК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 23 января 2014

Изложены результаты исследований, касающиеся построения и исследования аналитических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем (обыкновенных и в частных производных) специального вида.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, гамильтониан, модели случайно-матричного типа, автомодельное решение, системы с хаотическим поведением.

Введение

В настоящее время общепризнанным является тот факт, что неприводимые уравнения Пенлеве, полученные французским математиком Пенлеве и его коллегами в начале XX века, играют роль нелинейных аналогов для классических специальных функций. Основное свойство уравнений Пенлеве состоит в том, что их общие решения не имеют подвижных критических особых точек. Данное свойство часто называют P-свойством, а уравнения с P-свойством решений – уравнениями Пенлеве-типа или P-типа. В связи с тем, что отмеченное свойство является в определенном смысле критерием интегрируемости, исключительно актуальной на протяжении трех последних десятилетий является задача построения и исследования аналитических свойств решений нелинейных уравнений и систем высших порядков с P-свойством решений. Указанные уравнения и системы называют аналогами уравнений Пенлеве высших порядков или высшими аналогами уравнений Пенлеве. Высшие аналоги уравнений Пенлеве (как и сами уравнения Пенлеве) имеют весьма широкий спектр приложений, причем некоторые из них являются автомодельными редукциями хорошо известных высших аналогов нелинейных уравнений в частных производных, таких как Кортевега-де Фриза, Кодри-Додда-Гибона, Каупа-Купершмидта и др.

В данной работе излагаются некоторые результаты, полученные автором за последние пять лет и связанные с: 1) построением нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка и выше специального вида и исследованием аналитических свойств их решений; 2) исследованием аналитических свойств решений систем нелинейных ОДУ (связанных, в частности, с моделями случайно-матричного типа) на предмет принадлежности их к системам P-типа; 3) построением точных автомодельных редукций систем нелинейных уравнений в частных производных (имеющих конкретные приложения) к системам ОДУ с P-свойством решений.

Результаты предыдущих исследований автора по указанной тематике (начиная с 1983 г.) отражены в публикациях [1–33].

Преобразования Беклунда уравнений для полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных со вторым и четвертым уравнениями Пенлеве

В работах [34] построены системы дифференциальных уравнений

$$w'' = yw' - ww' - a, y'' = wy' - yy' - b; \quad (1)$$

$$w'y' - 2\alpha(y-w)^2 - (y^2 - w^2) = \frac{\beta}{2}, w' + y' + 2z(w-y) + (w-y)^2 = 0, \quad (2)$$

где w, y – неизвестные функции независимой переменной z; a, b, α, β – произвольные постоянные параметры.

Показано, что система (1) является системой Пенлеве-типа, причем она может быть преобразована к виду

$$w''^2 = -2w'^3 - 2(a+b)w'^2 + 2(a+b)ww' + a^2, \quad (3)$$

$$y''^2 = -2y'^3 - 2(a+b)y'^2 + 2(a+b)yy' + b^2. \quad (4)$$

Без ограничения общности можно считать $a + b = 1$, причем $a = \alpha - \varepsilon - \frac{1}{2}, \varepsilon^2 = 1, \alpha$ – произвольный параметр. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$w''^2 = -2w'^3 - 2zw'^2 + 2ww' + \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2. \quad (5)$$

Уравнению (5) удовлетворяет функция $h(z) = 2H(z, u(z), T(z))$, где $H(z, u, T) = \frac{u^2}{2} + \varepsilon\left(T^2 + \frac{z}{2}\right)u - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ – гамильтониан, ассоциированный со вторым уравнением Пенлеве

$$T'' = 2T^3 + zT + \alpha. \quad (P_2)$$

Для уравнения (5) построено преобразование Беклунда, а также получены нелинейные алгебраические соотношения, связывающие решения уравнения (5) при различных значениях параметра α.

С помощью преобразования $y = \frac{u-v}{2}, w = \frac{u+v}{2}$ относительно новых неизвестных функций u, v система (2) принимает вид

$$\frac{1}{4}\left(u'^2 - v'^2\right) - 2\alpha v^2 + uv = \frac{\beta}{2}, \ u' + 2zv + v^2 = 0. \quad (6)$$

Показано, что решения системы (6) выражаются через решения четвертого уравнения Пенлеве

$$v'' = \frac{v'^2}{2v} + \frac{3}{2}v^3 + 4zv^2 + 2(z^2 - 2\alpha) + \frac{\beta}{v}. \quad (P_4)$$

На основании этого доказана

Теорема 1. *Система (2) является системой Пенлеве-типа*.

Показано, что функции w, y удовлетворяют уравнениям

$$w''^2 - 4(w - zw')^2 + 2(w' + 2\alpha + 1)(2w'^2 + \beta) = 0, \quad (7)$$

$$y''^2 - 4(y - zy')^2 + 2(y' + 2\alpha - 1)(2y'^2 + \beta) = 0 \quad (8)$$

соответственно.

Отметим, что по аналогии с уравнением (P_2) уравнение (7) есть уравнение для полиномиального гамильтониана, ассоциированного с уравнением (P_4). Уравнение (8) получается из (7) преобразованием $w \to y, \alpha \to \alpha - 1$.

Неполиномиальные гамильтонианы, ассоциированные с третьим и пятым уравнениями Пенлеве

В последние три десятилетия наблюдается значительный интерес к исследованию определенных классов непрерывных и дискретных вероятностных моделей, известных под названием «модели случайно-матричного типа». Источники таких моделей весьма разнообразны.

Одной из наиболее важных характеристик указанных моделей является «нуль вероятность» – вероятность отсутствия частиц в заданном интервале или объединении интервалов. Нуль вероятности, как правило, могут быть представлены в виде определителей Фредгольма $\det(1-K)\,|_{\mathcal{J}}$, где K – есть некоторый интегральный оператор с ядром специального вида, а $\mathcal{J}$ – множество, где не должно быть частиц. Единственный известный на настоящий момент способ вычисления таких определителей состоит в их характеризации как решений некоторого однородного дифференциального уравнения (ОДУ) или системы уравнений с частными производными.

Известно, что однопараметрическое семейство решений уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{z}\cdot\frac{d\varphi}{dz}=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\varphi+2a_0z^{-1}\cdot\mathrm{sh}\,\varphi\ (a_0 - \text{параметр}),$$

являющегося частным случаем уравнения

$$zww''=zw'^2-ww'+\alpha w^3+\beta w+\gamma zw^4+\delta z, \qquad (P_3)$$

выражается в терминах определителей Фредгольма специального типа. В работах E. Barouch, B.M. Mc Coy, C.A.Tracy, T.T. Wu, посвященных решению классической проблемы вычисления спиновых корреляционных функций двумерной модели Изинга, был установлен следующий результат: скейлинговый предел двухточечной корреляционной функции модели Изинга допускает замкнутое выражение через решение уравнения (P_3) при $\alpha=\beta=0, \gamma=-\delta=1$. Характерно, что главная часть этого выражения (формулы) содержит гамильтониан

$$K_0=\frac{1}{z}\left[w^2u^2-3wu-\frac{z^2}{w^2}-\frac{1}{4}z^2w^2+\frac{9}{4}+\frac{z^2}{2}\right], \qquad (9)$$

ассоциированный с уравнением (P_3) в случае $\alpha=\beta=0, \gamma=-\delta=1$.

В работе [35] доказана

Теорема 2. *Уравнение* (P_3) *представимо в виде системы Гамильтониана с гамильтонианом*

$$K=\frac{\alpha_0w^2(u+P)^2}{z}+\frac{\beta_0w(u+P)}{z}-\frac{\alpha w}{2\alpha_0}+\frac{\beta}{2\alpha_0}-\frac{\gamma zw^2}{4\alpha_0}+\frac{\delta z}{4\alpha_0w^2}+Q, \qquad (10)$$

где $\alpha_0\neq 0, \beta_0$ – произвольные постоянные; $P(z,w), Q(z,w)$ – аналитические функции, удовлетворяющие условию $\frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial Q}{\partial w}$.

Формула (10) является обобщением (9), а также формулы гамильтониана Гарнье, ассоциированного с уравнением (P_3), и имеющего вид

$$K_1=\frac{1}{z}\left[2w^2u^2-3wu-\frac{\alpha z}{4}w+\frac{\beta z}{4w}-\frac{\gamma z^2w^2}{8}+\frac{\delta z^2}{8w^2}\right].$$

В работе [35] для пятого уравнения Пенлеве

$$2z^2w(w-1)w''=z^2(3w-1)w'^2-2zw(w-1)w'+2\alpha w^2(w-1)^3+$$
$$+2\beta(w-1)^3+2\gamma zw^2(w-1)+2\delta z^2w^2(w+1) \qquad (P_5)$$

получена формула ассоциированного с ним рационального гамильтониана в случае $\gamma\neq 0, \delta=0$. Также доказано существование ассоциированных с (P_5) в случае $\gamma\neq 0, \delta=0$ гамильтонианов нерационального типа.

Системы дифференциальных уравнений, ассоциированные с моделями случайно-матричного типа

1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$sq'=p+\frac{1}{4}qu, \qquad (11)$$

$$sp'=\frac{1}{4}(\alpha^2-s)q+\frac{1}{2}qv-\frac{1}{4}pu, \qquad (12)$$

$$u'=q^2, v'=pq \qquad (13)$$

с неизвестными функциями q, p, u, v независимой переменной s и произвольным параметром α.

Система (11) – (13) описывает модель случайно-матричного типа с ядром Бесселя. Система (11)–(13) имеет 2 первых интеграла

$$u^2 + 8v = 4sq^2 - 4u + c_1, \tag{14}$$

$$u = 4p^2 - (\alpha^2 - s + 2v)q^2 + 2pqu + c_2, \tag{15}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Умножая обе части уравнения (11) на $s\frac{d}{ds}$, а также используя второе и третье уравнения рассматриваемой системы, получим соотношение

$$s(sq')' = \frac{1}{4}(\alpha^2 - s)q + \frac{1}{16}(u^2 + 8v)q + \frac{1}{4}sq^3, \tag{16}$$

которое с учетом (14) принимает вид

$$s(sq')' = \frac{1}{4}(\alpha^2 - s)q + \frac{q}{16}(8sq^2 - 4u + c_1). \tag{17}$$

Исключая из (11), (15) неизвестную функцию p, получим следующее соотношение

$$(sq')^2 = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}(\alpha^2 - s)q^2 + \frac{q^2}{16}(u^2 + 8v) - \frac{c_2}{4}. \tag{18}$$

Подставляя выражение $\frac{1}{16}(u^2 + 8v)q$ в (18) находим, что

$$sq(sq')' = (sq')^2 - \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}sq^4 + \frac{c_2}{4}\,. \tag{19}$$

Исключая из (17), (19) неизвестную функцию u, получаем уравнение для определения q

$$s(q^2 - 1)(sq')' = q(sq')^2 + \frac{1}{4}sq^3(q^2 - 2) - \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \frac{c_1^2}{4} - c_2 - s\right)q. \tag{20}$$

Вводя в (20) преобразование $q = \frac{y(w)+1}{y(w)-1}, z^2 = s$ для определения функции $y(w)$ получим уравнение (P_5) с параметрами $\tilde{\alpha} = -\tilde{\beta} = \frac{1}{8}\left(\alpha^2 + \frac{c_1}{4} - c_2\right), \tilde{\gamma} = 0, \tilde{\delta} = -2$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. П*усть* $w = w(z)$ *– решение уравнения* (P_5) *при значениях параметров* $\tilde{\alpha} = -\tilde{\beta} = \frac{1}{8}\left(\alpha^2 + \frac{c_1}{4} - c_2\right), \tilde{\gamma} = 0, \tilde{\delta} = -2$. *Тогда функция* $q(s) = \frac{y(w)+1}{y(w)-1}, z^2 = s$ *является решением уравнения* (20).

Теорема 4. *Система* (11) – (13) *является системой Пенлеве-типа.*
Доказательство последнего утверждения основано на том, что общее решение уравнения (20) рациональным образом выражается через решение уравнения (P_5), которое не имеет подвижных критических особых точек. Остальные неизвестные функции p, u, v из системы (11) – (13) также не имеют подвижных критических особых точек, так как

$$-\frac{1}{4}u = sq(sq')' - (sq')^2 - \frac{1}{4}sq^4 - \frac{c_2}{4},$$

$$8v = 4sq^2 - 4u - u^2 + c_1, p = sq' - \frac{1}{4}qu.$$

2. Рассмотрим систему M. Hisakado дифференциально-разностных уравнений

$$2s_n = \frac{1}{1-s_{n-1}^2}\left(\frac{n}{t}s_{n-1} - \frac{\mathrm{d}s_{n-1}}{dt}\right), \tag{21}$$

$$2s_{n-1} = \frac{1}{1-s_n^2}\left(\frac{n+1}{t}s_n + \frac{\mathrm{d}s_n}{dt}\right), \tag{22}$$

где t – непрерывная независимая переменная, n – произвольный параметр. Система (21), (22) ассоциируется с уравнением $(n+1)s_n = t(s_{n+1} + s_{n-1})(1 - s_n^2)$, представляющим второе дискретное уравнение Пенлеве и дискретным модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза $\frac{ds_n}{dt} = -(s_{n+1} - s_{n-1})(1 - s_n^2)$. Получена редукция системы (21), (22) к частному случаю системы Пенлеве-типа [22], ассоциированной с уравнением (P_5) в случае $\delta = 0$.

3. Относительно переопределенной системы нелинейных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = a_n - 1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{u_n^2}{1-a_n} + \frac{p}{xy(a_{n-1})} + q(a_n - 1)(2a_n - 1)xy,$$
$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = a_n - 1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{v_n^2}{1-a_n} + \frac{p}{xy(a_{n-1})} + q(a_n - 1)(2a_n - 1)xy, \quad (23)$$

где a_n – неизвестная функция независимых переменных x, y; $n, p, q,$ – произвольные постоянные параметры;

$$2u_n = \frac{1}{a_n}\left[\frac{n+1}{x}(1 - a_n) - \frac{\partial a_n}{\partial x}\right],$$

$$2v_n = \frac{1}{a_n}\left[\frac{n+1}{y}(1 - a_n) - \frac{\partial a_n}{\partial y}\right]$$

справедлива.

Теорема 5. *Система* (23) *совместна, если* $xy = z,$ *а функция* $a_n = a_n(z)$ *выражается через решения уравнения* (P_5) *с параметрами* $\alpha = 2p, 2\beta = -(n+1)^2, \gamma = 2, \delta = 2q,$ *причем* $\frac{w}{w-1} = a_n$.

Система (23) в случае $p = q = 0$ получена M. Hisakado при исследовании двумерного уравнения Тоды и струнных уравнений.

4. Рассмотрена система дифференциальных уравнений

$$q' = p - qu + \alpha s, v' = -pq - \alpha sq, \quad (24)$$

$$p' = sq - 2qv + pu + \alpha su, u' = -q^2, \quad (25)$$

где s – независимая переменная, α – произвольный постоянный параметр. В случае $\alpha = 0$ система (24), (25) соответствует модели случайно-матричного типа с ядром Эйри. Характерной особенностью системы (24), (25) является то, что она является системой Гамильтона с гамильтонианом $H = \frac{p^2}{2} - \frac{sq^2}{2} + q^2 v - pqu + \alpha sp - \alpha squ$ и имеет первый интеграл $u^2 - 2v - q^2 = C$, где C – произвольная постоянная. Имеет место

Теорема 6. *Система* (24), (25) *является системой Пенлеве-типа. Ее решения выражаются через решения второго уравнения Пенлеве* $q'' = 2q^3 + (s + C)q + \alpha$.

5. Рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений (отвечающая модели случайно-матричного типа с ядром Эрмита)

$$q' = -sq + (\sqrt{2N} - 2u)p, w' = p^2, \quad (26)$$

$$p' = sp - (\sqrt{2N} + 2w)q, u' = -q^2, \quad (27)$$

с неизвестными функциями q, w, p, u независимой переменной s и натуральным параметром N.

Теорема 7. *Система дифференциальных уравнений* (26), (27) *удовлетворяет формальному тесту Пенлеве.*

При этом получено представление решения системы (26), (27) в виде формальных рядов Лорана

$$q = a_{-1}\tau^{-1} + a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots, \tau = s - s_0,$$

$$w = (4a_{-1}^2\tau)^{-1} + b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \cdots$$

$$p = (2a_{-1}\tau)^{-1} + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots$$

$$u = a_{-1}^2\tau^{-1} + u_0 + u_1\tau + u_2\tau^2 + \cdots,$$

содержащих четыре произвольных параметра s_0, $a_{-1} \neq 0$, c_1, c_2.

6. Dyson процессы, описываемые системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$r' = -pu, u'' = (x^2 - 2n - 1)u + 2u^2 p, p'' = (x^2 - 2n + 1) + 2p^2 u\,, \quad (28)$$

также ассоциируются с моделями случайно-матричного типа. В системе (28) p, r, u неизвестные функции независимой переменной x; n – произвольный постоянный параметр. Справедлива

Теорема 8. *Пусть* $w = w(x)$ *решение уравнения*

$$w''' - 6w^2w' + 2(x^2 - 2n - 2)w' - 2w^2 + 4wx + 2x^2 - 2(2n + 2) = 0. \quad (29)$$

при фиксированном значении параметра n. Тогда функции $u = \exp[\int w(x)dx]$, $p = [u'' - (x^2 - 2n - 1)u](2u^2)^{-1}$, $r = \frac{1}{4}[-w'' + 2w^3 - 2w(x^2 - 2n - 1) - 2c_1]$ (c_1 – произвольная постоянная) являются решениями системы (28).

Следует отметить, что последовательным преобразованием $x \to ix, w \to -iw, w = q(x) + x, i^2 = -1$ уравнение (29) сводится к уравнению третьего порядка относительно неизвестной функции q, первым интегралом которого является уравнение (P_4) с произвольным параметром β и $2\alpha = n + 1$.

Автомодельные редукции систем нелинейных уравнений в частных производных к уравнениям Пенлеве-типа

Как отмечалось во введении, одно из важнейших свойств уравнений P-типа состоит в том, что они являются точными автомодельными редукциями хорошо известных нелинейных уравнений в частных производных и их высших аналогов. Указанное обстоятельство позволяет не только строить точные решения уравнений в частных производных, но и переносить некоторые хорошо известные свойства решений последних на решения уравнений Пенлеве-типа.

1. Система нелинейных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &\varphi_t + 3(\varphi_{xx} + u\varphi) = 0, \\ &\psi_t - 3(\psi_{xx} + u\psi) = 0, \\ &u_t + 6(\phi\psi)'_x = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

с неизвестными функциями u, φ, ψ независимых переменных x, t, (моделирующая процессы взаимодействия и распространения волн в плазме) введением новой независимой переменной $z = x + t$ допускает редукцию к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &u' + 3\varphi'' + 3u\varphi = 0, \\ &\psi' - 3\psi'' - 3u\psi = 0, \\ &u' + 6(\varphi\psi)' = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

В системе (31) $(')$ и $('')$ обозначают производные первого и второго порядка соответственно по переменной z. Решения $u(z), \varphi(z), \psi(z), z = x + t$ будем называть решениями типа бегущей волны системы (30). Наличие двух первых интегралов $u + 6\varphi\psi = c_1, \varphi\psi + 3(\varphi'\psi - \varphi\psi') = c_2$ (c_2, c_2 – произвольные постоянные), а также первое уравнение системы (31) позволяют получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция φ

$$(3c_1 - 18c_2)\varphi^2 + (1 + 18c_1)\varphi\varphi'' + 9\varphi'^2 + 27\varphi'\varphi'' - 9\varphi\varphi''' = 0. \quad (32)$$

С помощью подстановки $p(z) = \varphi'\varphi^{-1}$ уравнение (32) допускает понижение порядка

$$p'' - 2p^3 - p^2 - \frac{1+18c_1}{9}p - \frac{c_1 - 6c_2}{3} = 0. \quad (33)$$

Решение уравнения (33) может быть представлено в терминах эллиптических функций Якоби.

2. В работах, связанных с исследованием моделей случайно-матричного типа, получено нелинейное уравнение в частных производных

$$\left(A_1^3 - 4\left(A_3 - \frac{1}{2}\right)\right)f + 6(A_1 f)^2, \quad (34)$$

где $A_n = \sum_{i=1}^{2r} x_i^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}, n = 1,3$; f – неизвестная функция независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_{2r}$. С уравнением (34) ассоциируется множество $\mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{r}[x_{2i-1}, x_{2i}] \subset \mathbb{R}$. Преобразованием $w_1 = f(\tau), \tau = x_1 + x_2 + \cdots x_{2r}$ уравнение (34) сводится к уравнению $rw'''_1 - 2\tau w'_1 + w_1 + 6rw'^2_1 = 0$ $\left(w'_1 = \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}\tau}, w'''_1 = \frac{\mathrm{d}^3 w_1}{\mathrm{d}\tau^3}\right)$, имеющему первый интеграл

$$w''^2_1 + 4w'^3_1 - \frac{2}{r}\tau w'^2_1 + \frac{2}{r}w_1 w'_1 = c_1, \tag{35}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Замена $w_1 = \lambda_1 \mathrm{w}, \tau = \mu_1 \, \mathrm{z}, \lambda_1\mu_1 = 1, \mu_1^3 = r$ позволяет свести (35) к уравнению (5).

Теорема 9. *Пусть* $w = w(z)$ *– решение уравнения* (5) *при фиксированных значениях параметров* α и ε. *Тогда функция* $f(\tau) = \lambda_1 w\left(\frac{\tau}{\mu_1}\right), \tau = x_1, x_2, \ldots, x_{2r}, \lambda_1\mu_1 = 1, \mu_1^3 = r$ *является решением уравнения* (34).

3. Исследованы некоторые аналитические свойства автомодельных решений системы трех нелинейных уравнений в частных производных [36]

$$u_t - \sigma^2 u_{xx} - u_{yy} - uq - \alpha u^2 v = 0, \tag{36}$$

$$v_t + \sigma^2 v_{xx} + v_{yy} + vq + \alpha u v^2 = 0, \tag{37}$$

$$q_{xx} - \sigma^2 q_{yy} + 2\alpha(uv)_{xx} = 0 \tag{38}$$

с неизвестными функциями u, v, q независимых переменных x, y, t. В системе (36)–(38) $\sigma^4 = 1, \alpha -$ отличный от нуля параметр. Введением новой неизвестной функции $\psi = \exp(R - iS)$, где $R = \frac{1}{2}\ln(-uv), S = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{u}{v}\right), i^2 = -1$, система (36) – (38) сводится к резонансной системе Дэви-Стюартсона

$$i\psi_t + \sigma^2\psi_{xx} + \psi_{yy} - 2\sigma^2\big(|\psi_{xx}| + \sigma^2|\psi_{yy}|\big)\psi|\psi|^{-1} - q\psi + \alpha|\psi|^2\psi = 0, \tag{39}$$

$$q_{xx} - \sigma^2 q_{yy} - 2\alpha(|\psi|^2)_{xx} = 0. \tag{40}$$

Система (39), (40) является расширением хорошо известного резонансного уравнения Шредингера

$$i\psi_t + \sigma^2\psi_{xx} - 2\sigma^2|\psi_{xx}| \cdot \psi \cdot |\psi|^{-1} - \alpha|\psi|^2\psi = 0. \tag{41}$$

Действительно, если неизвестные функции в системе (39)–(40) не зависят от y, то она вырождается в уравнение (41). При этом система (36)–(38) принимает вид

$$u_t - \sigma^2 u_{xx} + \alpha u^2 v = 0, \tag{42}$$

$$v_t + \sigma^2 v_{xx} - \alpha u v^2 = 0 \tag{43}$$

и при редукционном ограничении $v = u^*$ ($*$ – означает сопряжение к u), а также заменой $t \to it$ она превращается в нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t - \sigma^2 u_{xx} - \alpha|u|^2 u = 0. \tag{44}$$

Известно, что система (36)–(38) при выполнении определенного условия удовлетворяет тесту Вайса–Табора–Карневейла. Для случая, если система (36)–(38) не проходит тест Вайса–Табора– Карневейла, получены два семейства точных автомодельных решений, выражающихся через элементарные функции. Получена также редукция системы (36)–(38) к системе двух нелинейных связанных уравнений Шредингера с двумя независимыми переменными. На основании этого доказано существование у исследуемой системы автомодельных решений, порождаемых решениями уравнения (P_2), а также уравнения (P_4).

Заключение

Говоря о приложениях уравнений Пенлеве-типа к моделям случайно-матричного типа, следует отметить, что важную роль здесь играют асимптотические свойства решений уравнений для полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с неприводимыми уравнениями Пенлеве. Важнейшей характеристикой системы в статистической физике, квантовой механики (где теория случайных матриц играет ведущую роль), как известно, является ее гамильтониан. Тест Пенлеве удобно применять к исследованию и других систем (подобных (26), (27)), ассоциированных с моделями случайно-матричного типа. При этом актуальным является доказательство сходимости формальных рядов Лорана, определяющих решение конкретной системы, если она проходит тест Пенлеве.

NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS WITH SPECIAL PROPERTIES OF SOLUTIONS

V.V. TSEGEL'NIK

Abstract

The results concerning the construction and research of analytic properties of solutions to nonlinear (ordinary and partial) differential equations and systems of special type are presented.

Список литературы

1. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 1983. Т. 55. №2. С. 189–196.
2. *Цегельник В.В. //* Теорет. и матем. физика. 1984. Т. 61. № 1. С. 155–160.
3. *Цегельник В.В. //* Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 6. С. 497–500.
4. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1988. № 1. С. 41–49.
5. *Цегельник В.В. //* Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. № 5. С. 393–394.
6. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 1989. Т. 78. № 1. С. 22–34.
7. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 396–402.
8. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1303–1312.
9. *Цегельник В.В.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1991. № 1. С. 118–120.
10. *Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. № 6. С. 992–997.
11. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1118–1124.
12. *Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 1995. Т. 102. № 3. С. 364–366.
13. *Фуксштейнер Б., Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 1995. Т. 105. № 2. С. 208–213.
14. *Громак В.И., Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 8. С. 1018–1023.
15. *Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1434–1435.
16. *Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 1997. Т. 113. № 2. С. 285–288.
17. *Цегельник В.В. //* ДАН БССР. 1997. Т 41. № 3. С. 17–20.
18. *Цегельник В.В.* // Докл. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 132–133.
19. *Цегельник В.В.* // Изв. ВУЗов. Прикл. нелинейная динамика. 1998. Т. 6. № 5. С. 84–88.
20. *Цегельник В.В.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1998. № 3. С. 61–63.
21. *Tsegelnik V.V. //* Reqular and chaotic dynamics. 1999. Vol. 4. № 4. P. 77–80.
22. *Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №7. С. 1003–1004.
23. *Цегельник В.В.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 3. С. 425–426.
24. *Цегельник В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 3. С. 12–13.
25. *Цегельник В.В.* // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 139–141.
26. *Цегельник В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 2. С. 50–53.
27. *Цегельник В.В.* // Труды Ин-та математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12. № 2. С. 176–179.
28. *Цегельник В.В.* // Докл. БГУИР. 2004. № 1. С. 64–72.
29. *Цегельник В.В.* // Докл. БГУИР. 2006. № 2. С. 142–148.
30. *Цегельник В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2006. Т. 50. № 5. С. 22–24.
31. *Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 2007. Т. 151. № 1. С. 54–65.
32. *Цегельник В.В.* // Докл. БГУИР. 2008. № 2. С. 137–139.
33. *Цегельник В.В.* // Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа. Минск. 2007.
34. *Цегельник В.В.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54. № 1. С. 21–25.
35. *Цегельник В.В.* // Теорет. и матем. физика. 2010. Т. 162. № 1. С. 69–71.
36. *Цегельник В.В.* // Вестн. нац. исслед. ядерного университета «МИФИ». 2013. Т. 2. № 4. С. 422–424.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Цегельник Владимир Владимирович родился (1954 г.р.). Окончил механико-математический факультет БГУ им. В.И. Ленина в 1977 г., в 1984 г. – заочную аспирантуру этого же университета по специальности дифференциальные уравнения и математическая физика. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 2002 г. – докторскую. С 1999 г. занимает должность заведующего кафедрой высшей математики БГУИР. Автор более 150 научных и научно-методических публикаций, среди которых ряд учебных пособий, монография и более 40 научных статей. Научные интересы – аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений Пенлеве-типа и их приложения.