

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра теоретических основ электротехники

***ЭЛЕКТРОТЕХНИКА
С ОСНОВАМИ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ***

Методическое пособие
к выполнению контрольных заданий
для студентов заочной формы обучения

Минск 2007

УДК 621.3 + 621.311 (075.8)

ББК 31.2 я 73

Э 45

Авторы-составители:
И. Л. Свито, Ф. Г. Шевченко

Электротехника с основами энергосбережения : метод. пособие к выполнению контр. заданий для студ. заоч. формы обуч. / сост. И. Л. Свито, Ф. Г. Шевченко. – Минск : БГУИР, 2007. – 47 с. : ил.

ISBN 978-985-488-188-1

В методических указаниях содержатся методики расчета установившихся и переходных режимов электрических цепей с источниками постоянных, гармонических и произвольной формы ЭДС и токов, приводятся примеры расчета и подробные рекомендации по выполнению типовых расчетов электрических цепей, рассмотрено применение популярной системы математических расчетов MathCAD для анализа линейных электрических цепей.

УДК 621.3+621.311(075.8)
ББК 31.2 я 73

ISBN 978-985-488-188-1

© Свито И. Л., Шевченко Ф. Г.,
составление, 2007

© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2007

СОДЕРЖАНИЕ

1. Переходные процессы в линейных электрических цепях	4
1.1. Классический метод расчета переходных процессов.....	4
1.1.1. Пример 1.1	6
1.1.2. Пример 1.2	7
1.2. Операторный метод расчета переходных процессов	8
1.2.1. Пример 1.3	11
1.3. Интеграл Дюамеля	12
1.3.1. Пример 1.4	13
1.4. Численные методы анализа электрических цепей	14
1.4.1. Резистивные схемы электрической цепи	15
1.4.2. Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния	16
1.4.3 Основные функции MathCAD	17
Пример 1.5	19
Пример 1.6	21
Пример 1.7	22
1.5. Пример выполнения контрольной работы №2	26
1.5.1. Расчет переходных процессов классическим методом.....	28
1.5.2. Расчет переходных процессов классическим методом средствами MathCAD	32
1.5.3. Расчет переходных процессов операторным методом	37
1.5.4. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях при импульсных воздействиях	41
Литература.....	46

1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В контрольной работе №1 [11] были исследованы цепи в установившихся режимах, когда все их параметры либо постоянны во времени, либо для гармонических величин постоянны по амплитуде. Такие режимы работы цепей называются статическими. После подключения источника питания в момент $t = 0$ и до перехода на установившийся режим параметры цепи меняются во времени до тех пор, пока не примут окончательных значений. В этом переходном состоянии цепь называется динамической. Аналитическое решение динамической цепи можно получить классическим или операторным методами; если пассивная цепь подключается к источнику с произвольной формой сигнала, т.е. функцией, аналитически заданной на каждом конечном интервале и имеющей в точках стыка интервалов разрывы непрерывности первого рода, то реакцию цепи определяют интегралом Дюамеля.

1.1. Классический метод расчета переходных процессов

Если цепь содержит индуктивность L или емкость C , то результаты анализа цепи можно получить только путем решения дифференциального уравнения, которое составляют на основе законов Кирхгофа и уравнений элементов цепи.

Решение линейного дифференциального уравнения может быть представлено в виде суммы двух составляющих: 1) общего решения однородного дифференциального уравнения – свободной составляющей $i_{св}(t)$ или $u_{св}(t)$; 2) частного решения неоднородного дифференциального уравнения – вынужденной составляющей $i_y(t)$ или $u_y(t)$, которую удобно определять как реакцию цепи при $t \rightarrow \infty$ в установившемся режиме. То есть

$$i(t) = i_y(t) + i_{св}(t) \text{ или } u(t) = u_y(t) + u_{св}(t).$$

Установившийся режим цепи обусловлен действием источников энергии постоянного или синусоидального напряжения. Свободный режим цепи обусловлен запасом электромагнитной энергии цепи в момент коммутации (включение, выключение, переключение, изменение параметров цепи и т.п.).

Порядок характеристического уравнения зависит от числа реактивных элементов и их размещения в цепи. Наиболее простой способ составления характеристического уравнения цепи состоит в следующем: 1) записывают формулу входного сопротивления относительно любой ветви цепи в комплексной форме, 2) в формуле $Z(j\omega)$ заменяют $j\omega$ на p , 3) полученное выражение $Z(p)$ приравнивают к нулю. Если разветвленная цепь имеет лишь один накопитель энергии, удобнее записывать формулу входного сопротивления относительно ветви с накопителем энергии.

Если в схеме имеется источник тока, характеристическое сопротивление следует записывать относительно любой другой ветви схемы, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой.

Выражение свободной составляющей определяется видом корней характеристического уравнения.

Корни вещественные, отрицательные и различные (апериодический режим):

$$i_{CB}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t};$$

корни вещественные, отрицательные и кратные (критический режим):

$$i_{CB}(t) = (A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 / 2! + \dots) \cdot e^{p \cdot t};$$

корни комплексно-сопряженные (колебательный режим):

$$i_{CB}(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_{CB} \cdot t + \psi),$$

где n – порядок характеристического уравнения цепи; A_K и ψ – постоянные интегрирования (константы), определяемые из начальных условий; p_K – корни характеристического уравнения; δ – собственное затухание; ω_{CB} – угловая частота затухающих свободных колебаний.

Для определения констант используют начальные условия (*независимые и зависимые*), обусловленные двумя законами коммутации. К независимым начальным условиям (ННУ) относят токи в индуктивных элементах $i_L(0)$ и напряжения на емкостных элементах $u_C(0)$ после коммутации, которые определяются из схемы до коммутации для $t = 0$.

Первый закон коммутации: при любых изменениях в электрической цепи, связанных с коммутацией, энергия в индуктивном элементе не может изменяться мгновенно, и, следовательно, ток в индуктивном элементе не может изменяться скачком:

$$i_L(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-),$$

где $i_L(0_-)$ – ток в индуктивном элементе перед коммутацией; $i_L(0_+)$ – ток в индуктивном элементе после коммутации для $t = 0$.

Второй закон коммутации: энергия в емкостном элементе не может изменяться мгновенно, и, следовательно, напряжение на емкостном элементе не может изменяться скачком:

$$u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-),$$

где $u_C(0_-)$ – напряжение на емкостном элементе до коммутации, $u_C(0_+)$ – напряжение на емкостном элементе после коммутации для $t = 0$.

Все остальные токи, напряжения и их производные в цепи после коммутации для $t = 0$ могут изменяться скачком и называются *зависимыми начальными условиями* (ЗНУ). ЗНУ определяются из схемы после коммутации по законам Кирхгофа, записанным для $t = 0$, учитывая известные ННУ.

Постоянные интегрирования для цепи второго порядка определяются из уравнений для $i(0)$ и $di(t)/dt$ при $t = 0$ ($i'(0)$):

а) апериодический режим

$$\begin{aligned} i(0) &= i_y(0) + A_1 + A_2; \\ i'(0) &= i'_y(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2; \end{aligned}$$

б) колебательный режим

$$i(0) = i_y(0) + A \cdot \sin(\psi);$$

$$i'(0) = i'_y(0) + \omega_{CB} \cdot A \cdot \cos(\psi) - \delta \cdot A \cdot \sin(\psi).$$

Производные от тока в индуктивном элементе и напряжения на емкостном элементе в первый момент после коммутации ($t = 0$) удобно определять из выражений $i'_L(0) = u_L(0)/L$ и $u'_C(0) = i_C(0)/C$.

Расчет переходного процесса классическим методом производится в следующем порядке.

- Рассчитывается режим до коммутации, из которого определяются независимые начальные условия.
- Составляется характеристическое уравнение цепи путем приравнивания нулю входного сопротивления $Z(p)$ относительно ветви с реактивным элементом.
- Находится общее решение системы однородных дифференциальных уравнений (свободные составляющие).
- Находится частное решение системы неоднородных дифференциальных уравнений (установившийся режим).
- По начальным условиям определяются постоянные интегрирования.

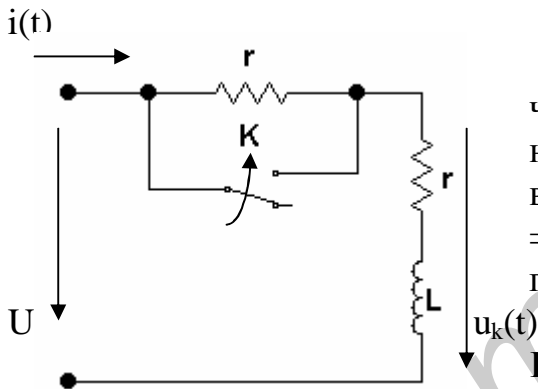


Рис. 1.1

Пример 1.1. Ключ (К) включается и через 2,5 с выключается. Определить ток и напряжение на катушке через 5 с после включения рубильника (рис. 1.1), если $r = 1$ Ом, $L = 5$ Гн, $U = 100$ В. Построить графики $i(t)$ и $u_k(t)$.

Решение

1. Расчет после включения рубильника.

До коммутации ток в катушке равен

$$i_L(0_-) = U/2r = 100/2 = 50 \text{ А.}$$

Входное сопротивление $Z(p) = r + pL = 0$.

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$p_1L + r = 0, \quad p_1 = -r/L = -1/5 = -0,2 \text{ 1/с.}$$

Решение ищем в виде

$$i(t) = i_{ПР1} + i_{СВ1} = i_{ПР1} + B_1 \cdot e^{p_1 t}.$$

На основании первого закона коммутации $i_1(0) = i_L(0) = i_L(0_-) = 50 \text{ А.}$

Находим $i_{ПР1}$ после включения рубильника: $i_{ПР1} = U/r = 100/1 = 100 \text{ А.}$

Определяем постоянную интегрирования B_1 из уравнения, записанного для момента коммутации $t = 0$:

$$i(0) = i_{ПР1}(0) + i_{СВ1}(0) = i_{ПР1} + B_1 \cdot e^{p_1 \cdot 0} = 100 + B_1 = 50,$$

$$B_1 = -50 \text{ А.}$$

Решение записываем в виде

$$i(t) = i_{ПР1} + i_{СВ1} = 100 - 50 \cdot e^{p_1 t} \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа определяем напряжение на катушке после включения рубильника: $u_{k1}(t) = r \cdot i(t) + L \cdot di(t)/dt = U = 100 \text{ В.}$

2. Расчет после выключения рубильника для $t \geq 2,5$ с.

Находим ток в момент времени $t = 2,5$ с: $i_1(2,5) = 100 - 50 \cdot e^{p_1 \cdot 2,5} = 69,7$ А.

Характеристическое уравнение после выключения рубильника и его корень равны $2 \cdot r + p_2 L = 0$, $p_2 = -2r/L = -2/5 = -0,4$ 1/с.

Решение ищем в виде $i(t-2,5) = i_{\text{ПР2}} + i_{\text{СВ2}} = i_{\text{ПР2}} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)}$, где $i_{\text{ПР2}} = U/2r = 100/2 = 50$ А.

Постоянную интегрирования B_2 определяем из уравнения, записанного для момента коммутации $t = 2,5$ с:

$$i(t-2,5) = i_{\text{ПР2}} + i_{\text{СВ2}} = i_{\text{ПР2}} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)} = 50 + B_2 = 69,7 \text{ А.}$$

$$B_2 = 19,7 \text{ А.}$$

Решение записываем в виде $i(t-2,5) = i_{\text{ПР2}} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)} = 50 + 19,7 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)}$ А.

По второму закону Кирхгофа определяем напряжение на катушке после включения рубильника:

$$u_{k2}(t-2,5) = r \cdot i(t-2,5) + L \cdot di(t-2,5)/dt = r \cdot (50 + 19,7 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)}) + L \cdot (p_2) \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)} = 50 - 19,7 \cdot e^{p_2 \cdot (t-2,5)} \text{ А.}$$

Графики тока $i(t)$ и напряжения $u_k(t)$ представлены на рис. 1.2.

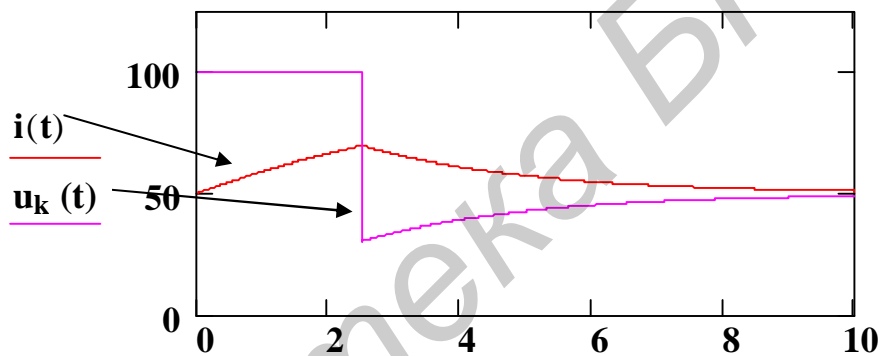


Рис. 1.2

Пример 1.2. В цепи (рис. 1.3) ток $i_1(t)$ внезапно прерывается быстродействующим выключателем (время коммутации $\Delta t \rightarrow 0$). До коммутации ток i_1 имел постоянное значение I_1 , ток $i_2(t) = 0$, рассеяние отсутствует. Для $t < 0$ $u_C(0_-) = 0$.

Найти напряжение на конденсаторе $u_C(t)$.

Дано: $M = 5$ мГн; $I_1 = 0,1$ А; $L_2 = 10$ мГн; $C = 1$ мкФ; $r = 1$ кОм.

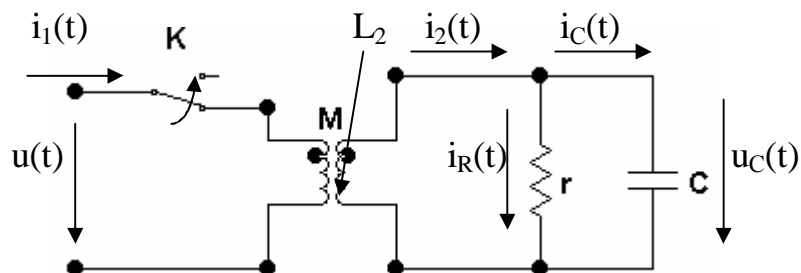


Рис. 1.3

Решение

Условие непрерывности потокосцепления: $\Psi(+0) = \Psi(-0)$.

Так как отсутствует рассеяние, то $L_1 \cdot L_2 = M^2$, т.е. $L_1 = M^2/L_2$ мГн.

Из условия непрерывности определим начальные условия

$$L_1 \cdot i_1(0_-) = M \cdot i_2(0_+), \text{ т.е. } i_2(0) = L_1 \cdot I_1 / M = 0,05 \text{ А.}$$

Начальное значение напряжения на емкости $u_C(0) = 0$.

В установившемся режиме $i_{2\text{ПР}} = 0$, $u_{\text{СПР}} = 0$, т.к. нет источников.

Для второго контура составим уравнение Кирхгофа:

$$M \frac{di_1}{dt} = u_C(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}, \quad 0 = r \cdot i_R(t) - u_C(t), \quad i_2(t) = i_R(t) + i_C(t).$$

Определим начальное значение токов $i_R(t)$ и $i_C(t)$:

$$i_R(0) = \frac{u_C(0)}{r} = 0, \quad i_C(0) = i_2(0) - i_R(0) = i_2(0) = 0,05 \text{ А.}$$

Запишем первое уравнение, предварительно выразив токи через $u_C(t)$:

$$i_2(0) = i_C(0) = C \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_0.$$

Тогда

$$M \frac{di_1(t)}{dt} = L_2 \cdot C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{L_2}{r} \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t).$$

Характеристическое уравнение $p^2 + \frac{1}{r \cdot C} p + \frac{1}{L_2 \cdot C} = 0$.

Корни характеристического уравнения: $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{СВ}} = -500 \pm j10000$.

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$u_C(t) = u_{\text{СПР}}(t) + u_{\text{СВ}}(t) = 0 + A e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{\text{СВ}} \cdot t + \psi).$$

Возьмем производную от этого уравнения

$$\frac{du_C}{dt} = -\delta \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{\text{СВ}} \cdot t + \psi) + \omega_{\text{СВ}} \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega_{\text{СВ}} \cdot t + \psi).$$

При $t = 0$ $u_C(0) = 0$, $du_C(t)/dt \big|_0 = i_C(0)/C = 0,05/10^{-6} = 50\,000$ В/с.

Составим уравнения для определения постоянных интегрирования.

При $t = 0$ $u_C(0) = A \cdot \sin \psi = 0$,

$$du_C(t)/dt \big|_0 = -\delta \cdot A \cdot \sin \psi + \omega_{\text{СВ}} \cdot A \cdot \cos \psi = 50\,000.$$

Из первого уравнения $A \neq 0$, тогда $\sin \psi = 0 \rightarrow \psi = 0$.

Из второго уравнения находим $A = 50\,000/\omega_{\text{СВ}} = 5$ В.

Ответ: $u_C(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_{\text{СВ}} \cdot t = 5 \cdot e^{-500 \cdot t} \cdot \sin 10^4 \cdot t$ В.

1.2. Операторный метод расчета переходных процессов

Функция $i(t)$ или $u(t)$, называемая *оригиналом*, удовлетворяющая условиям Дирихле на любом конечном промежутке времени и равная нулю при $t < 0$, заменяется соответствующей ей функцией $F(p)$ комплексного переменного p , называемой *изображением*. Эти функции связаны соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-p \cdot t} dt \quad \text{или} \quad F(p) = L\{f(t)\},$$

называемым прямым преобразованием Лапласа.

Выберем произвольно направления токов и запишем систему уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа для схемы, приведенной на рис. 1.4, а.

$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) - i(t) &= 0; \\ r_1 i_1(t) + L di_1(t)/dt + (1/C) \int i_1(t) dt - r_2 i_2(t) &= 0; \\ r_1 i_1(t) + L di_1(t)/dt + (1/C) \int i_1(t) dt + r \cdot i(t) &= e(t). \end{aligned}$$

В табл. 1.1 приводятся оригиналы простейших функций и их изображения.

Таблица 1.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
t	$1/p^2$	$1 - e^{-At}$	$A/[p \cdot (p + A)]$
E	E/p	$E_m \sin \omega t$	$\omega E_m / (p^2 + \omega^2)$
$E \cdot e^{At}$	$E/(p - A)$	$E_m e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\omega E_m / [(p + \delta)^2 + \omega^2]$
$L \cdot di(t)/dt$	$pL \cdot I(p) - L \cdot i(0)$	$t \cdot e^{-At}$	$1/(p + A)^2$
$(1/C) \int i(t) dt$	$(1/p \cdot C) \cdot I(p) + u_C(0)/p$	$\text{sh}(A \cdot t)$	$A/(p^2 - A^2)$

Используя табл. 1.1, перейдя от оригиналов к изображениям, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} I_1(p) + I_2(p) - I(p) &= 0; \\ r_1 I_1(p) + Lp I_1(p) - Li_L(0) + I_1(p)/pC + u_C(0)/p - r_2 I_2(p) &= 0; \\ r_1 I_1(p) + L \cdot p \cdot I_1(p) - L \cdot i_1(0) + I_1(p)/pC + u_C(0)/p + r \cdot I(p) &= E(p). \end{aligned}$$

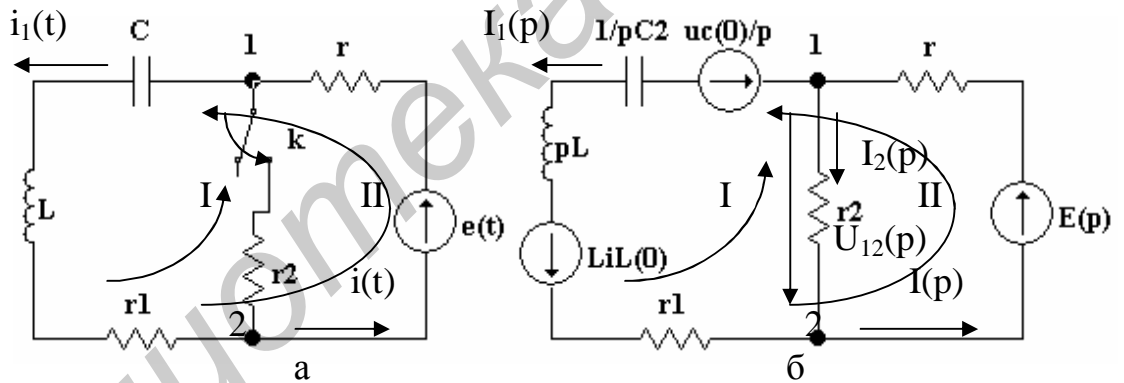


Рис. 1.4

Операторная схема, соответствующая этой системе уравнений, показана на рис. 1.4, б. Как видно из схемы, в ветвях с параметрами L и C при ненулевых начальных условиях учтены источники ЭДС $Li_L(0)$, $u_C(0)/p$. Направление источника напряжения $L \cdot i_L(0)$ совпадает с направлением тока $i_L(0)$, а источник напряжения $u_C(0)/p$ направлен против тока, который заряжал конденсатор в схеме до коммутации.

Запишем напряжение $U_{12}(p)$ в операторной форме:

$$U_{12}(p) = R_2 I_2(p) = (R_1 + L \cdot p + 1/Cp) I_1(p) - Li_L(0) + u_C(0)/p = E(p) - r \cdot I(p).$$

Найдем токи в ветвях (см. рис. 1.4, б):

$$I_1(p) = \frac{U_{12}(p) + Li_L(0) - u_C(0)/p}{Z_1(p)}; \quad I_2(p) = \frac{U_{12}(p)}{r_2}; \quad I(p) = Y(p)(E(p) - U_{12}(p)),$$

где $Z_1(p) = r_1 + L \cdot p + 1/(C \cdot p)$ – операторное сопротивление первой ветви.

Величина, обратная операторному сопротивлению, называется операторной проводимостью: $Y(p) = 1/r$.

Операторные сопротивления записывают так же, как и сопротивления в комплексной форме, если в них заменить $j\omega$ через p .

Первый закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид:

$$I_1(p) + I_2(p) + \dots + I_N(p) = \sum_{K=1}^N I_K(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме имеет вид:

$$\sum_{K=1}^N Z_K(p) \cdot I_K(p) = \sum_{K=1}^N [E_K(p) + L_K i_{LK}(0) - u_{CK}(0)/p],$$

где $i_{LK}(0)$ и $u_{CK}(0)$ – начальные значения токов в катушках индуктивности и напряжений на конденсаторах в соответствующих ветвях.

При нулевых начальных условиях ($i_{LK}(0) = 0$ и $u_{CK}(0) = 0$) второй закон Кирхгофа имеет вид $\sum_{K=1}^N Z_K(p) \cdot I_K(p) = \sum_{K=1}^N [E_K(p)]$.

Он аналогичен второму закону Кирхгофа в комплексной форме. Чаще всего изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_M \cdot p^M + b_{M-1} \cdot p^{M-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_N \cdot p^N + a_{N-1} \cdot p^{N-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0},$$

где a_k и b_k – вещественные числа, а $M < N$. Оригинал $f(t)$ изображения $F(p)$ можно найти по формуле, называемой **теоремой разложения**. В зависимости от вида корней характеристического уравнения $F_2(p) = 0$ выражение теоремы разложения имеет различный вид:

а) если корни вещественные, отрицательные и различные, то оригинал определяется выражением $f(t) = \sum_{K=1}^N \frac{F_1(p_K)}{F_2'(p_K)} e^{p_K t}$;

б) если знаменатель уравнения $F_2(p) = p \cdot F_3(p) = 0$ имеет один корень, равный нулю, то оригинал находят по формуле

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{K=1}^N \frac{F_1(p_K)}{p_K F_3'(p_K)} e^{p_K t};$$

в) если уравнение $F_2(p) = 0$ имеет комплексные корни $p_{K1,2} = -\delta \pm j\omega_{CB}$, то выражение теоремы разложения имеет вид

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}.$$

Этапы решения задач операторным методом:

- 1) определение независимых начальных условий из схемы до коммутации и составление операторной схемы замещения;
- 2) определение изображения искомых величин с помощью любого метода расчета;
- 3) нахождение оригиналов по найденным изображениям с помощью теоремы разложения, таблиц, связывающих оригиналы и их изображения, или обратного преобразования Лапласа.

Пример 1.3. В цепи (см. рис. 1.3) ток $i_1(t)$ внезапно прерывается быстродействующим выключателем (время коммутации $\Delta t \rightarrow 0$). До коммутации ток i_1 имел постоянное значение I_1 , ток $i_2(t) = 0$, рассеяние отсутствует. Для $t < 0$ $u_C(0) = 0$.

Найти напряжение на конденсаторе $u_C(t)$.

Дано: $M = 5$ мГн; $I_1 = 0,1$ А; $L_2 = 10$ мГн; $C = 1$ мкФ ; $r = 1$ кОм.

Решение

В контуре L_2 , r , C находится ЭДС, имеющая вид дельта-функции $d(t)$; это происходит в результате мгновенного разрыва тока I_1 в индуктивно-связанном контуре. В этом случае роль напряжения в контуре играет индуктированная ЭДС: $e(t) = -M di_1/dt = -u(t) = -M \cdot I_1 \cdot d(t)$.

На основании законов Кирхгофа для второго контура запишем уравнения

$$i_2(t) = i_R(t) + i_C(t),$$

$$M \cdot I_1 \cdot \delta(t) = L_2 di_2(t)/dt + r i_R(t),$$

$$0 = r i_R(t) - u_C(t),$$

где $\delta(t) = dI_1(t)/dt$, $i_C(t) = C du_C(t)/dt$, $i_R(t) = u_C(t)/r$, $i_2(t) = u_C(t)/r + C du_C(t)/dt$.

Выразим второе уравнение системы через переменную $u_C(t)$:

$$M \cdot I_1 \cdot d(t) = C L_2 d^2 u_C(t)/dt^2 + (L_2/r) du_C(t)/dt + u_C(t).$$

Используя табл. 1.1, перейдем от оригиналов к изображениям и запишем уравнение цепи в операторной форме с учетом, что $u_C(0) = 0$:

$$M \cdot I_1 = L_2 C p^2 \cdot U_C(p) + p \cdot L_2 \cdot U_C(p)/r + U_C(p),$$

где $I_1(p) = I_1/p$, $\int (d^2 u_C(t)/dt^2) dt = p^2 \cdot U_C(p)$, $\int (du_C(t)/dt) dt = p \cdot U_C(p)$.

В результате находим, что

$$U_C(p) = M \cdot I_1 / (L_2 C (p^2 + p/rC + 1/L_2 C)).$$

Находим корни знаменателя $p^2 + p/rC + 1/L_2 C = 0$:

$$p_{1,2} = -1/2rC \pm ((1/2rC)^2 - 1/L_2 C)^{1/2} = -500 \pm (250000 - 10^8)^{1/2} \approx -500 \pm j10^4.$$

Корни комплексно-сопряженные. Процесс имеет колебательный характер.

По теореме разложения оригинал напряжения $u_C(t)$ для комплексно-сопряженных корней ищем в виде

$$u_C(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(p_1)}{N_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right),$$

где $N_1(p_1) = M \cdot I_1 / L_2 C = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 / 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 50\,000$, $N_2'(p_1) = 2p_1 + 1/(r \cdot C) = 2 \cdot (-500 + j10^4) + 1/10^3 \cdot 10^{-6} = j2 \cdot 10^4$.

После подстановки численных значений получим:

$$u_C(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(p_1)}{N_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{50000}{j2 \cdot 10^4} \cdot e^{(-500 + j10000) \cdot t} \right) = \operatorname{Re} \left(5 \cdot e^{-500 \cdot t} e^{j(10^4 \cdot t - 90)} \right),$$

$$u_C(t) = \operatorname{Re} \left(5 \cdot e^{-\delta \cdot t} (\cos(\omega_{CB} \cdot t - 90) + j \sin(\omega_{CB} \cdot t - 90)) \right) = 5 \cdot e^{-500 \cdot t} \sin(10000 \cdot t) \text{ В},$$

где $\delta = 500$ – коэффициент затухания, $\omega_{CB} = 10\,000$ рад/с – угловая частота свободных колебаний.

Если записать напряжение $U_C(p)$ в виде

$$U_C(p) = 5 \cdot 10^4 / ((p + 500)^2 + 10000^2) = E_m \cdot \omega_{CB} / ((p + \delta)^2 + \omega_{CB}^2),$$

то, обращаясь к табл. 1.1, получим

$$u_C(t) = 5 \cdot e^{-500t} \sin(10^4 \cdot t) \text{ В.}$$

Решим эту задачу, используя операторную схему замещения (рис. 1.5).
Источник ЭДС в ветви с емкостью отсутствует, т.к. $u_C(0) = 0$.

Составим уравнение по методу двух узлов:

$$U_C(p) = U_{12}(p) = E(p) / [p \cdot L_2 \cdot (p \cdot C + 1/r + 1/p \cdot L_2)] = \\ = (M \cdot I_1 / L_2 C) / (p^2 + p/r \cdot C + 1/L_2 C) = F_1(p) / F_2(p),$$

где $E(p) = M \cdot I_1$, $F_1(p) = M \cdot I_1 / (L_2 C)$, $F_2(p) = p^2 + p/r \cdot C + 1/(L_2 C)$.

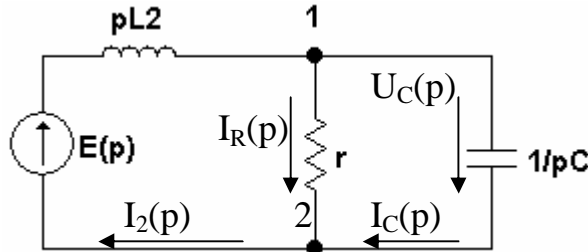


Рис. 1.5

Найдем корни знаменателя $F_2(p) = p^2 + p/(r \cdot C) + 1/(L_2 C) = 0$:

$$p_{1,2} = -1/(2r \cdot C) \pm (1/(2r \cdot C)^2 - 1/(L_2 C))^{1/2} = -\delta \pm (\delta^2 - \omega_{CB}^2)^{1/2} \approx -500 \pm j10^4.$$

По теореме разложения оригинал напряжения $u_C(t)$ для комплексно-сопряженных корней ищем в виде

$$u_C(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(p_1)}{N_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right),$$

где $N_1(p_1) = M \cdot I_1 / L_2 C = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 / 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 50\,000$, $N_2'(p_1) = 2p_1 + 1/(r \cdot C) =$
 $= 2 \cdot (-500 + j10^4) + 1/10^3 \cdot 10^{-6} = j2 \cdot 10^4$.

После подстановки численных значений получим

$$u_C(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(p_1)}{N_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{50\,000}{j2 \cdot 10^4} \cdot e^{(-500 + j10000)t} \right) = 5 \cdot e^{-500t} \sin(10\,000 \cdot t) \text{ В.}$$

Токи в ветвях

$$i_C(t) = C du_C(t)/dt = 5 \cdot 10^{-6} (-500 \cdot e^{-500t} \sin(10000 \cdot t) + \\ + 10\,000 \cdot e^{-500t} \cos(10\,000 \cdot t)) \approx 0,05 \cdot e^{-500t} \cdot \sin(10\,000 \cdot t + 87^\circ) \text{ А.}$$

$$i_R(t) = u_C(t)/r = 0,005 \cdot e^{-500t} \sin(10\,000 \cdot t) \text{ А.}$$

$$i_2(t) = i_R(t) + i_C(t).$$

Ответ: $u_C(t) = 5 \cdot e^{-500t} \sin(10\,000 \cdot t) \text{ В.}$

1.3. Интеграл Дюамеля

Если на пассивную цепь с нулевыми начальными условиями включается воздействие произвольной формы $u(t)$ или $J(t)$, то реакцию цепи $f(t)$ определяют интегралом Дюамеля по формуле

$$f(t) = u(0) \cdot h(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \text{ или } f(t) = J(0) \cdot h(t) + \int_0^t J'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau,$$

где $u(0)$, $J(0)$ – воздействия при $t = 0$; $u'(\tau) = [du(\tau)/d\tau]$, $J'(\tau) = [dJ(\tau)/d\tau]$ – производные от воздействия при замене t на τ ; $h(t)$ – переходная

характеристика. Переходной характеристикой цепи ($h_U(t) = u(t)/U$ и $y(t) = i(t)/U$ при $U = 1$ В, $h_i(t) = i(t)/J$ и $z(t) = u(t)/J$ при $J = 1$ А) называют реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичное воздействие.

При исследовании действия коротких импульсов, площадь которых равна единице, пользуются понятием дельта-функции $\delta(t)$. Реакция цепи на действие дельта-функции называется импульсной переходной характеристикой цепи $k(t)$, которая определяется по формуле

$$k(t) = h(0) \cdot \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}.$$

Пример 1.4. Определить в цепи (рис. 1.6, а) ток $i_1(t)$ при действии напряжения пилообразной формы и параметрах: $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 10$ Ом, $L = 100$ мГн.

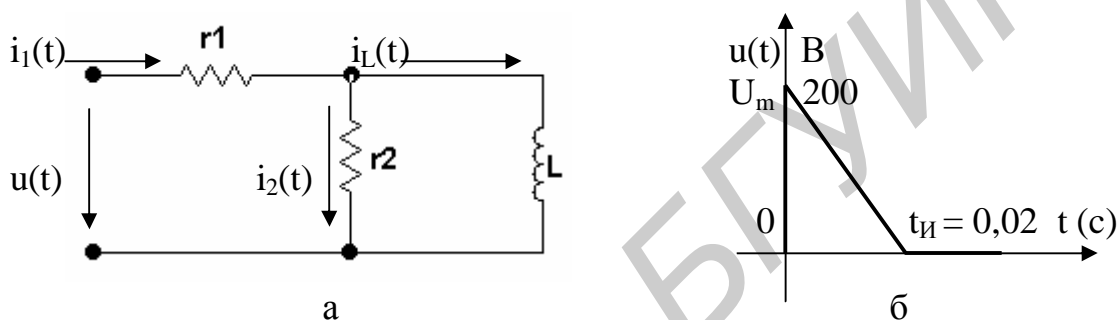


Рис. 1.6

Решение

Найдем переходную функцию цепи $y(t)$ для тока $i_1(t)$ при действии на входе напряжения $U = 1$ В. Решение для тока $i_1(t)$ ищем в виде

$$i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1CB}(t),$$

где $i_{1y}(t) = U/r_1 = 1/5 = 0,2$ А, $i_{1CB}(t) = Be^{-t/\tau}$ – свободная составляющая тока, $\tau = L/[r_1 \cdot r_2 / (r_1 + r_2)] = 0,03$ с – постоянная времени цепи.

При $t = 0$ по первому закону коммутации

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0, \quad i_1(0) = i_2(0) + i_L(0) = 1/(r_1 + r_2) = 1/15 \text{ А},$$

следовательно,

$$B = i_1(0) - i_{1y}(0) = 1/15 - 0,2 = -2/15 \text{ А}.$$

Переходная проводимость для тока i_1

$$y(t) = i_1(t)/U = 0,2(1 - 0,667e^{-t/\tau}) \text{ См}.$$

Уравнение приложенного напряжения (рис. 1.6, б) таково:

$$u(t) = U_m(1 - t/t_{И}) = 200(1 - 50 \cdot t) \text{ В},$$

где $t_{И} = 0,02$ с – длительность входного импульса.

Применяем формулу Дюамеля для промежутка времени $0 \leq t < 0,02$ с, получаем

$$i_1(t) = u(0) y(t) + \int_0^t y(t-\tau) u'(\tau) \tau d\tau = 40(1 - 0,667 e^{-33,4 t}) - \int_0^t (1 - 0,667 e^{-33,4(t-\tau)}) \cdot 10^4 d\tau =$$

$$= 40 - 26,7 e^{-33,4 t} - 2000 \cdot t + 40 - 40 e^{-33,4 t} = 80 - 2000 \cdot t - 66,7 e^{-33,4 t} \text{ А},$$

где $u'(\tau) = du(\tau)/d\tau = -10^4$ В/с.

Для промежутка времени $0,02 \leq t < \infty$ получаем

$$i_1(t) = u(0)y(t) + \int_0^{t_1} y(t-\tau) u'(\tau) d\tau - u(t_1)y(t-t_1) = 40 - 26,7e^{-33,4t} - 2000\tau \Big|_0^{t_1} + 40e^{-33,4t} \Big|_0^{t_1} =$$

$$= 40 - 26,7e^{-33,4t} - 40 - 40e^{-33,4t} + 1,948 \cdot 40e^{-33,4t} = -66,7e^{-33,4t} + 77,9e^{-33,4t} = 11,2 \cdot e^{-33,4t} \text{ А.}$$

При $t = t_1$ ток еще существует, несмотря на то что напряжение равно нулю.

$$i_1(t_1) = 11,2 \cdot e^{-33,4 \cdot 0,02} = 5,76 \text{ А.}$$

1.4. Численные методы анализа электрических цепей

С 70-х гг. XX в. внимание инженеров, занимающихся вопросами проектирования электронных схем, привлекли методы неявного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Многие неявные методы численного решения дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши, можно представить в обобщенном виде

$$X_{N+1} = \sum_{I=0}^M a_I \cdot (X_N)_I + h \sum_{I=-1}^M b_I \cdot \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)_N \right]_I,$$

где $X_{N+1} = X[(N+1) \cdot h]$ – матрица-столбец переменных состояния для момента времени $t = (N+1) \cdot h$; $X_N = X(N \cdot h)$ – матрица-столбец переменных состояния для предыдущего шага $t = N \cdot h$.

Первое слагаемое есть линейная комбинация переменных $X(t)$, моменты времени которых предшествуют моменту времени искомой величины. Второе слагаемое – линейная комбинация производных в соответствующие моменты времени.

Перепишем уравнение в виде

$$X_{N+1} = \sum_{I=0}^M a_I \Psi(X_N)_I + h \sum_{I=0}^M b_I \Psi \left(\frac{dX}{dt} \right)_N + h \Psi b_{-1} \Psi \left(\frac{dX}{dt} \right)_{N+1}.$$

При $a_0 = 1$, $a_I = b_I = 0$ для $I > 0$, $b_0 = b_{-1} = 1/2$ получим расчетную формулу метода трапеций:

$$X_{N+1} = X_N + (h/2) \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)_N + \left(\frac{dX}{dt} \right)_{N+1} \right].$$

При численных методах решения дифференциального уравнения интегрирование осуществляется по шагам, причем на первом шаге переменные состояния определяются из схемы до коммутации, а на каждом N -м шаге они вычисляются в результате расчета цепи на предыдущем шаге.

Решение системы дифференциальных уравнений численными методами можно осуществить на ПЭВМ, используя языки программирования в среде Windows Turbo Pascal и Си, программных продуктов Электронная лаборатория на IBM PC (Electronics Workbench), Excel, MathCAD и MatLAB [1, 7, 9, 10, 11]:

– по резистивным схемам, составленным для любого неявного метода интегрирования дифференциальных уравнений;

– интегрированием дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния в форме Коши для любого неявного метода.

1.4.1. Резистивные схемы электрической цепи

Рассмотрим индуктивный элемент электрической цепи (рис. 1.7). Напряжение на зажимах индуктивности при $L = \text{const}$ характеризуется скоростью изменения потокосцепления во времени и равно

$$u_L(t) = d\psi/dt = L di/dt.$$

Производная от тока в линейной индуктивности $di/dt = u_L(t)/L$.

Заменим переменную X переменной i в формуле трапеций, получим $i_{N+1} = i_N + (h/2)[(di/dt)_N + (di/dt)_{N+1}] = i_N + (h/2)[u_{LN}/L + u_{L(N+1)}/L] = i_N + (h/2L)[u_{LN} + u_{L(N+1)}]$.

При численных методах решения дифференциального уравнения интегрирование осуществляется по шагам, причем на первом шаге ток $i_L(0)$ определяется из схемы до коммутации, а на каждом n -м шаге ток i_{LN} вычисляется в результате расчета цепи на предыдущем шаге. Заменяя отношение $h/2L$ проводимостью G_L , а найденное значение тока идеальным источником тока $J_N = i_N + G_L \cdot u_{LN}$, получим эквивалентную схему замещения индуктивного элемента (см. рис. 1.7) [1,7].

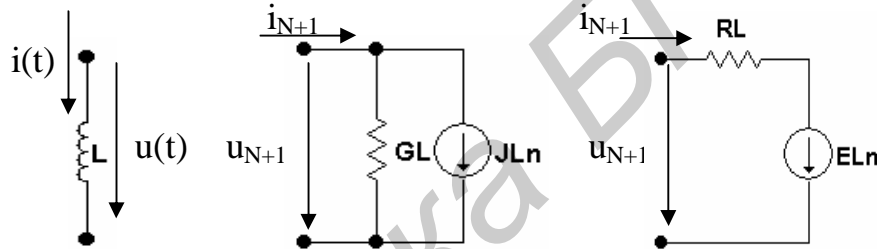


Рис. 1.7

Таким образом, ток в индуктивной ветви на втором и последующих шагах определяется из выражения

$$i_{N+1} = J_{LN} + G_L \cdot u_{LN+1} = (E_{LN} + u_{LN+1})/R_L,$$

где $G_L = 1/R_L = h/2L$; $J_{LN} = i_N + G_L \cdot u_{LN} = E_{LN}/R_L$.

Аналогично для емкостного элемента (рис. 1.8). Напряжение на зажимах конденсатора связано с током выражением

$$u = (1/C) \int i(t) dt.$$

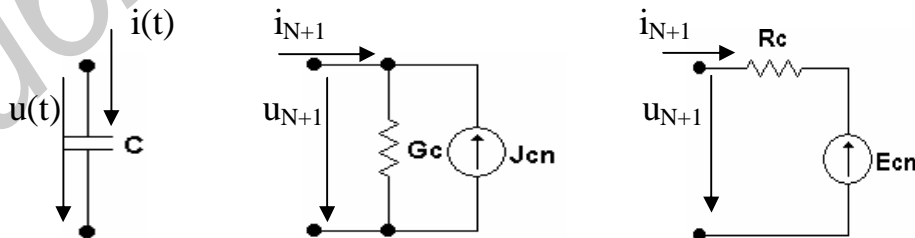


Рис. 1.8

Производная от напряжения на зажимах емкости равна $du/dt = i_C/C$.

Заменим переменную X переменной $u(t)$, получим

$$u_{N+1} = u_N + h[(du/dt)_N + (du/dt)_{N+1}]/2 = u_N + (h/2C)(i_N + i_{N+1}) = E_{CN} + R_C \cdot i_{N+1} = (J_{CN} + i_{N+1})/G_C,$$

где $E_{CN} = u_N + R_C \cdot i_N = J_{CN}/G_C$; $R_C = 1/G_C = h/2C$.

Эквивалентная резистивная схема емкостного элемента приведена на рис. 1.8. Напряжение на емкости на втором и последующих шагах определяется из выражения $u_{N+1} = E_{CN} + R_C i_{N+1} = (J_{CN} + i_{N+1})/G_C$.

Методика расчета переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами:

- в схеме до коммутации определяются независимые начальные условия;
- выбирается шаг интегрирования на каждом интервале времени;
- каждый элемент C и L заменяется соответствующей резистивной схемой, в которой источники соответствуют моменту времени $t_N = N \cdot h$;
- на каждом шаге вычисляются искомые переменные и новые параметры источников. Результаты расчета заносятся в таблицу или выводятся в виде графика.

Преимущества данной методики. Система дифференциальных уравнений заменяется алгебраической, и на каждом этапе расчета меняется только шаг интегрирования и параметры источников эквивалентных схем для линейных цепей, что существенно упрощает расчет. Метод применим и для нелинейных схем, при этом пересчитываются R_C и R_L на каждом шаге вычислений. Точность расчета увеличивается при уменьшении шага h или использовании неявного метода более высокого порядка, но при этом увеличивается время счета. Неявные методы устойчивы при любом шаге.

1.4.2. Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния

Метод переменных состояния – наиболее универсальный метод расчета электрических цепей используется для расчета цепей высокого порядка, когда применение других методов нецелесообразно. Он основан на решении дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши. Аналитическое решение уравнений состояния для сложных линейных цепей сопряжено с большими трудностями, а для нелинейных цепей – невозможно.

Интегрирование дифференциальных уравнений, составленных методом переменных состояния в форме Коши, на практике выполняется численными методами на ПЭВМ, при этом значения искомых величин в начальный момент времени $t = 0$ должны быть известны.

Дифференциальные уравнения состояния в матричной форме имеют вид

$$d\mathbf{X}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}(t),$$

где $\mathbf{X}(t)$ – матрица-столбец (размером $n \times 1$) переменных состояния; $\mathbf{V}(t)$ – матрица-столбец (размером $m \times 1$) источников; \mathbf{A} – квадратная матрица порядка n ; \mathbf{B} – матрица размером $n \times m$. Элементы этих матриц определяются топологией и параметрами цепи.

Переменными состояния в электрической цепи являются токи $i_L(t)$ и напряжения $u_C(t)$, так как они определяют энергетическое состояние цепи.

Подставив в расчетную формулу метода трапеций уравнения переменных состояния для N -го и $(N + 1)$ -го шагов, получим

$$\mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{X}_N + (h/2)\mathbf{A}(\mathbf{X}_N + \mathbf{X}_{N+1}) + (h/2)\mathbf{B}(\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_{N+1}).$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{X}_{N+1} = [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{1} + (h/2)\mathbf{A}] \mathbf{X}_N + (h/2) [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_{N+1}).$$

Метод трапеций устойчив при любом шаге, поэтому выбор шага диктуется только необходимой точностью расчета.

Система алгебраических уравнений в матричной форме для остальных токов и напряжений электрической цепи имеет вид

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t),$$

где $\mathbf{Y}(t)$ – матрица-столбец размером $l \times 1$; \mathbf{F} и \mathbf{D} – матрицы связи (соответственно размером $l \times n$ и $l \times m$).

1.4.3. Основные функции MathCAD

Запустите MathCAD с помощью меню Пуск (Пуск → Все программы → MathSoft → MathCAD 11 Enterprise Edition) или другим способом. После запуска MathCAD 11 открывается рабочее окно (рис. 1.9). Рассмотрим элементы этого окна.

Самой верхней строкой является *строка заголовка*. В левой части этой строки расположены пиктограмма, название приложения (MathCAD) и название активного документа (Untitled:1). В правой части строки заголовка расположены *кнопки управления окном MathCAD* (свернуть, развернуть во весь экран, закрыть окно).

Под строкой заголовка расположена *строка меню*. В правой части находятся *кнопки управления окном активным документом* (Untitled:1). Любое меню можно раскрыть щелчком мыши.

File – команды для работы с файлами документа MathCAD.

Edit – средства редактирования документа.

View – команды панелей инструментов и другие.

Insert – команды, которые позволяют вставить в документ различные объекты.

Format – команды управления форматом текста, формул и пр.

Tools – различные вспомогательные команды.

Symbolics – команды символьного вычисления.

Window – команды управления окнами документов.

Help – справочная система MathCAD.

Следующими строками являются панели инструментов MathCAD (Standard, Formatting, Math, Resources и др.). Панели могут плавать в отдельном окне. Показать другие или скрыть можно с помощью подменю View >> Toolbars (см. рис. 1.9). Флажки возле некоторых названий панелей означают, что данная панель показана на экране.

Большую часть окна MathCAD занимает рабочая область документа MathCAD. В левом верхнем углу рабочей области расположен красный крестик – *курсор* MathCAD, а справа есть серая полоса – *граница области печати*. Щелчком мыши курсор можно установить в любом месте документа. Именно здесь можно вставлять формулы, графики и др. объекты.

Самая нижняя строка в окне называется *строкой состояния*. В левой части строки находятся четыре «окошечка». В первом написано Auto. Второе и третье показывают, включены ли на клавиатуре режимы Caps Lock и Num Lock соответственно. В четвертом окошечке указывается страница документа MathCAD, где находится курсор. Если указатель мыши навести на любую кнопку панелей инструментов, то в строке состояния появится подсказка о том, что это такое.

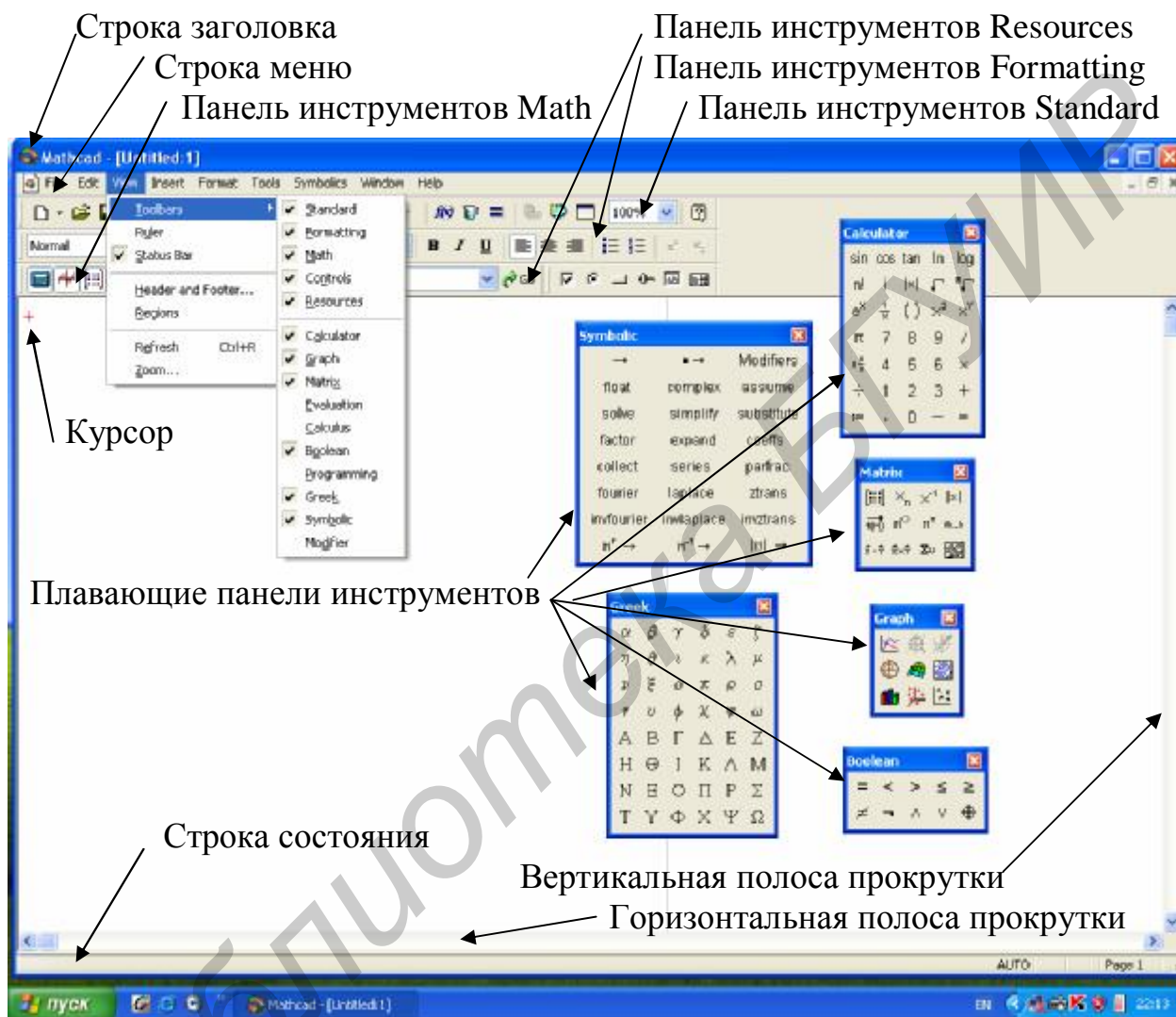


Рис. 1.9

Если правой кнопкой мыши щелкнуть на рабочей области документа, то на экране появится *контекстное меню* с командами Cut, Copy, Paste и др.

Все документы MathCAD хранятся на жестком диске компьютера в виде файлов с расширением *.mcd*. Основные операции для работы с документом MathCAD собраны в меню File, некоторые из них вынесены на панель Standard.

Справочная система MathCAD написана на английском языке. В ней можно найти описание любого элемента, любой команды, а также большое количество примеров и их использование. Все компоненты ее можно найти в меню Help.

Рассмотрим основные принципы работы с программой MathCAD. Для сложных расчетов удобно использовать панели инструментов. Откроем плавающие панели инструментов «Греческий алфавит» и «Арифметика».

Вычислим формулу $X_L = \omega \cdot L$. Введем имя переменной ω , нажав соответствующую кнопку на панели «Греческий алфавит», которое появится в указанном курсором месте. Нажмем кнопку «:=» на панели «Арифметика». Справа ω появится символ «:=», означающий присваивание переменной, и черный квадрат. Введем число 10 000, которое нужно присвоить переменной ω . Нажмем клавишу «Enter». Рамка блока исчезнет, а курсор примет вид «+» и будет установлен ниже созданного блока. Аналогично присвоим переменной L число 0.53. Щелкнем мышью ниже созданных формул. Введем имя переменной X_L . Нажмем кнопку «:=». Введем имя переменной ω . Нажмем клавишу * на клавиатуре. В созданном блоке появится операция умножения. Нажмем клавиши «L» и «Enter» на клавиатуре. Введем имя переменной X_L . Нажмем кнопку = на панели «Арифметика». В созданном блоке появится результат вычислений (рис. 1.10). Рисунки можно копировать в документы, созданные редактором Word.

$$\omega := 10000 \quad L := 0.53 \quad X_L := \omega \cdot L \quad X_L = 5.3 \times 10^3$$

Рис. 1.10

Формулы можно перемещать в любое место рабочего поля документа, взяв мышью за край рамки. Иллюстрация вычислений в MathCAD будет описана по ходу изложения материала.

Пример 1.5. В схеме рис. 1.11, а рассчитать ток $i_2(t)$ и напряжение $u_2(t)$ при воздействии на входе цепи импульса (рис. 1.12), если: $r_1 = 100$ Ом, $r_2 = 21$ Ом, $r_3 = 24$ Ом, $C = 0,53$ мкФ, $p = -46\,755$ 1/с, $t_1 = 49,7 \cdot 10^{-6}$ с, $T_H = 5 \cdot t_1 = 248,5 \cdot 10^{-6}$ с, $t_2 = 149,1 \cdot 10^{-6}$ с, $e_1(t) = 40$ мВ при $0 \leq t < t_1$, $e_2(t) = -100 + 804\,800 \cdot t$ мВ при $t_1 < t < t_2$, $e_3(t) = -20$ мВ при $t_2 < t \leq \infty$.

Решение

Алгоритм расчета в интервале времени $0 \leq t < t_1$. Определяем начальные условия: $u_C(0) = 0$.

Задаемся шагом $h = t_2/30 = 0,00000497$ с и находим параметры резистивной схемы замещения (рис. 1.11, б):

$$G_C = 1/R_C = 2C/h; \quad G_L = 1/R_L = h/2L.$$

Используя формулу двух узлов, определяем $u_2(0)$ и $i_2(0)$:

$$u_2(0) = [G_3 \cdot e_1(0) + G_2 \cdot u_C(0)] / (G_1 + G_2 + G_3);$$

$$i_2(0) = G_2 \cdot (u_2(0) - u_C(0)).$$

Находим параметры источника резистивной схемы для $t = 0$:

$$J_C(0) = i_2(0) + G_C \cdot u_3(0).$$

Запишем уравнения по методу узловых напряжений для следующего шага:

$$(G_1 + G_2 + G_3) \cdot u_2(k) - G_2 \cdot u_3(k) = G_3 \cdot e(k);$$

$$-G_2 \cdot u_2(k) + (G_2 + G_C) \cdot u_3(k) = J_C(k-1),$$

где $G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_3 = 1/R_3$; $R_1 = r_1$; $R_2 = r_2$; $R_3 = r_3$.

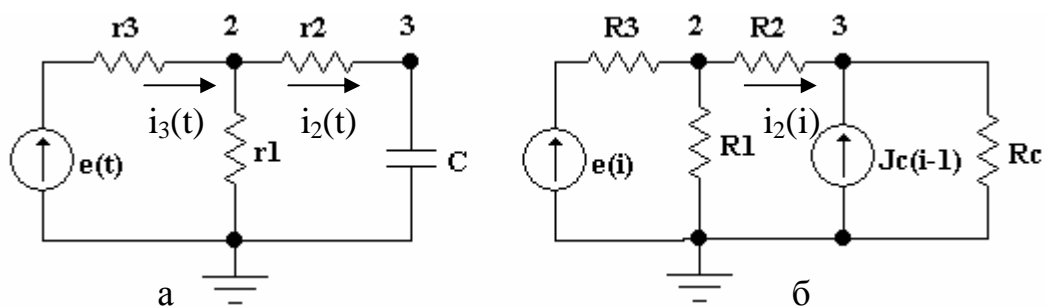


Рис. 1.11

Находим потенциалы узлов:

$$u_2(k) = [G_4 \cdot e(k) + G_2 \cdot J_C(k-1)] / G_5;$$

$$u_3(k) = [J_C(k-1) + G_2 \cdot u_2(k)] / (G_2 + G_C),$$

где $G_4 = G_3(G_2 + G_C)$; $G_5 = (G_1 + G_C)(G_1 + G_2 + G_3) - G_2 G_2$; $u_3(k) = u_C(k)$.

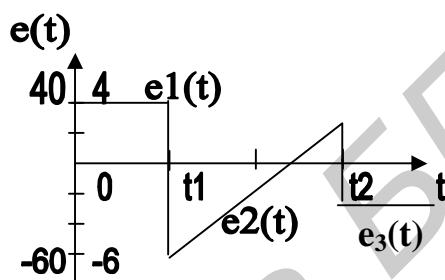


Рис. 1.12

По закону Ома определяем ток $i_2(k)$ и ток зависимого источника тока $J_C(k)$:

$$i_2(k) = G_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)); \quad J_C(k) = i_2(k) + G_C \cdot u_3(k).$$

Аналогично находим $u_2(k)$ и $i_2(k)$ для следующего момента времени $t = 2h$. Расчет повторяется до момента времени $t = t_1$.

Алгоритм расчета переходного процесса для второго и третьего интервалов времени аналогичен, изменяются только выражения источников ЭДС.

Для расчета $u_2(k)$, $u_3(k) = u_C(k)$, $i_2(k)$ и $J_C(k)$, воспользуемся средствами MathCAD. Введем исходные данные примера 1.4.

$$r1 := 100 \quad r2 := 21 \quad r3 := 24 \quad g1 := \frac{1}{r1} \quad g2 := \frac{1}{r2} \quad g3 := \frac{1}{r3}$$

$$C := 0.00000053 \quad p := -46755 \quad t2 := 0.0001491 \quad t1 := \frac{t2}{3} \quad T1 := 5 \cdot t1$$

$$e1 := 40 \quad e2(t) := -100 + 804800 \cdot t \quad h := \frac{t2}{30} \quad e3(t) := -20 \quad h = 4.97 \times 10^{-6}$$

$$g_c := 2 \frac{C}{h} \quad d4 := g3 \cdot (g2 + g_c) \quad d5 := (g_c + g2) \cdot (g1 + g2 + g3) - g2 \cdot g2$$

Рассчитаем $u_2(k)$, $u_3(k) = u_C(k)$, $i_2(k)$ и $J_C(k)$ в диапазоне от нуля до десяти из выражений

$$\begin{aligned}
k &:= 0 & u_c(k) &:= 0 & u_3(k) &:= u_c(k) \\
u_2(k) &:= \frac{(g_3 \cdot e_1 + g_2 \cdot u_c(k))}{g_1 + g_2 + g_3} & i_2(k) &:= g_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)) & u_2(k) &= 16.787 \\
J(k) &:= i_2(k) + g_c \cdot u_3(k) & i_2(k) &= 0.799 \\
k &:= 1 & u_2(k) &:= \frac{(d_4 \cdot e_1 + g_2 \cdot J(k-1))}{d_5} & u_2(k) &= 20.007 \\
t &:= t + h & u_3(k) &:= \frac{(J(k-1) + g_2 \cdot u_2(k))}{g_2 + g_c} & u_3(k) &= 6.716 \\
i_2(k) &:= g_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)) & J(k) &:= i_2(k) + g_c \cdot u_3(k) & J(k) &= 2.065 & i_2(k) &= 0.633
\end{aligned}$$

При расчете десятого и тридцатого шагов учтем, что $u_2(k)$ и $i_2(k)$ изменяются скачком.

$$\begin{aligned}
k &:= 10 & t &:= t + h & u_2(k) &:= \frac{(d_4 \cdot e_1 + g_2 \cdot J(k-1))}{d_5} & u_2(k) &= 30.759 \\
u_3(k) &:= \frac{(J(k-1) + g_2 \cdot u_2(k))}{g_2 + g_c} & i_2(k) &:= g_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)) & u_3(k) &= 29.133 \\
J(k) &:= i_2(k) + g_c \cdot u_3(k) & J(k) &= 6.291 & i_2(k) &= 0.077 \\
e_2(k) &:= -100 + 4 \cdot k & u_2(k) &:= \frac{g_3 \cdot e_2(k) + g_2 \cdot 29.133}{g_1 + g_2 + g_3} & u_2(k) &= -11.207 \\
i_2(k) &:= g_2 \cdot (u_2(k) - 29.133) & J(k) &:= i_2(k) + g_c \cdot 29.133 & i_2(k) &= -1.921 \\
k &:= 11 & u_2(k) &:= \frac{(d_4 \cdot e_2(k) + g_2 \cdot J(k-1))}{d_5} & u_3(k) &:= \frac{(J(k-1) + g_2 \cdot u_2(k))}{g_2 + g_c} \\
i_2(k) &= -1.449 & i_2(k) &:= g_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)) & u_2(k) &= -17.108 \\
t &:= t + h & J(k) &:= i_2(k) + g_c \cdot u_3(k) & J(k) &= 1.394
\end{aligned}$$

Результаты расчета сведены в табл. 1.2.

Пример 1.6. Составить уравнения состояния для цепи (см. рис. 1.11, а).

Решение

Методом наложения определим ток в ветви с емкостью, заменив конденсатор источником ЭДС $e(t) = u_c(t)$ на каждом шаге вычислений:

$$i_2(t) = -(R_1 + R_3)u_c(t) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + R_1 e(t) / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

Учитывая, что $i_2(t) = C \cdot du_c(t)/dt$, получим

$$du_c(t)/dt = [- (R_1 + R_3)u_c(t) + R_1 e(t)] / [C \cdot (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)].$$

В матричной форме это уравнение имеет вид

$$d\mathbf{X}(t)/dt = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}(t),$$

где $d\mathbf{X}(t)/dt = du_c(t)/dt$; $\mathbf{A} = -(R_1 + R_3) / [C \cdot (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)]$; $\mathbf{X}(t) = u_c(t)$; $\mathbf{V}(t) = e(t)$; $\mathbf{B} = R_1 / [C \cdot (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)]$.

Напряжение на параллельном участке цепи найдем по второму закону Кирхгофа:

$$u_2(t) = R_2 i_2(t) + u_c(t) = [R_1 R_3 u_c(t) + R_1 R_2 e(t)] / (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3).$$

Запишем систему уравнений для тока $i_2(t)$ и напряжения $u_2(t)$ в переменных состояния:

$$i_2(t) = [-(R_1+R_3)/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]u_C(t) + [R_1/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]e(t);$$

$$u_2(t) = [R_1R_3/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]u_C(t) + [R_1R_2/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]e(t).$$

В матричной форме система уравнений запишется в виде

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t),$$

$$\text{где } \mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_2 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{X}(t) = u_C(t); \quad \mathbf{V}(t) = e(t); \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -(R_1+R_3)/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_3/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_2/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix}.$$

Пример 1.7. Для цепи (см. рис. 1.11, а) сравнить результаты расчета тока $i_2(t)$ и напряжения $u_2(t)$ интегрированием дифференциальных уравнений с данными аналитического расчета.

Решение. Результаты аналитического расчета:

$$\text{для } 0 < t < t_1: i_2(t) = 0,799 \cdot e^{pt} \text{ мА}; \quad u_2(t) = 32,258 - 15,471 \cdot e^{pt} \text{ мВ};$$

$$\text{для } t_1 < t < t_2: i_2(t) = 0,3439 - 23 \cdot e^{pt} \text{ мА}; \quad u_2(t) = -87,3 + 649000 \cdot t + 447,1e^{pt} \text{ мВ};$$

$$\text{для } t_2 < t \leq \infty: i_2(t) = -499,1e^{pt} \text{ мА}; \quad u_2(t) = -16,129 + 9828e^{pt} \text{ мВ}.$$

Алгоритм расчета в интервале времени $0 \leq t < t_1$, $u_C(0) = 0$.

Рассчитаем матрицы, входящие в уравнение, записанное по методу трапеций:

$$\mathbf{X}_{N+1} = [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{1} + (h/2)\mathbf{A}]\mathbf{X}_N + (h/2) [\mathbf{1} - (h/2)\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_{N+1}),$$

где $\mathbf{X}_{n+1} = u_{C(N+1)}$; $\mathbf{1} = 1$ – единичная матрица; $\mathbf{V}_N + \mathbf{V}_{N+1} = e_{1(N+1)} + e_{1N}$; $\mathbf{X}_N = u_{CN}$;

$$\mathbf{A} = a_{11} = -(R_1+R_3)/[C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)]; \quad \mathbf{B} = b_{11} = R_1/[C(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)];$$

$$\mathbf{I} = i_{11} = \left(1 + \frac{h}{2}\mathbf{A}\right) = 1 + h a_{11}/2;$$

$$\mathbf{J} = j_{11} = \left(1 - \frac{h}{2}\mathbf{A}\right)^{-1} = (1 + h a_{11}/2)^{-1};$$

$$\mathbf{L} = l_{11} = i_{11} j_{11};$$

$$\mathbf{K} = k_{11} = b_{11} (e_{1N} + e_{1N+1});$$

$$\mathbf{M} = m_{11} = h \cdot j_{11} k_{11}/2.$$

Напряжение u_{N+1} получим из выражения $u_{CN+1} = l_{11} \cdot u_{CN} + m_{11}$.

Находим искомые переменные i_2 и u_2 :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{V}(t),$$

$$\text{где } \mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_{2N+1} \\ u_{2N+1} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(R_1+R_3)/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_3/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{X}(t) = u_{CN+1}; \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_2/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{V}(t) = e_{N+1};$$

$$\begin{Bmatrix} i_{2N+1} \\ u_{2N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(R_1+R_3)/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_3/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix} \cdot u_{CN+1} + \begin{Bmatrix} R_1/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \\ R_1 \cdot R_2/(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3) \end{Bmatrix} \cdot e_{N+1}$$

$$i_{2N+1} = [-(R_1+R_3)u_{CN+1} + R_1e_{N+1}] / (R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3);$$

$$u_{2N+1} = [R_1R_3u_{CN+1} + R_1R_2e_{N+1}] / (R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3).$$

Для расчета $u_2(k)$, $u_3(k) = u_C(k)$, $i_2(k)$ и $J_C(k)$ воспользуемся средствами MathCAD.

$$r_1 := 100 \quad r_2 := 21 \quad r_3 := 24 \quad C := 0.0000005 \quad t_2 := 0.0001491 \quad p := -46755$$

$$d_4 := g_3 \cdot (g_2 + g_c) \quad d_5 := (g_c + g_2) \cdot (g_1 + g_2 + g_3) - g_2 \cdot g_2 \quad h = 4.97 \times 10^{-6}$$

$$g_1 := \frac{1}{r_1} \quad g_2 := \frac{1}{r_2} \quad g_3 := \frac{1}{r_3} \quad h := \frac{t_2}{30} \quad t_1 := \frac{t_2}{3} \quad g_c := 2 \frac{C}{h} \quad T_1 := 4 \cdot t_1$$

$$e_1(k) := 40 \quad e_2(k) := -100 + 4 \cdot k \quad e_3(k) := -20 \quad u_C(k) := 0 \quad u_3(k) := u_C(k)$$

$$k := 0 \quad u_3(k) = 0 \quad t := 0 \quad I_2 := 40 \cdot \frac{r_1}{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3} \quad I_2 = 0.799$$

$$u_2(k) := \frac{(g_3 \cdot e_1(k) + g_2 \cdot u_C(k))}{g_1 + g_2 + g_3} \quad i_2(k) := g_2 \cdot (u_2(k) - u_3(k)) \quad u_2(k) = 16.787$$

$$J(k) := i_2(k) + g_c \cdot u_3(k) \quad i_2(k) = 0.799 \quad J(k) = 0.799$$

$$A := \frac{-(r_1 + r_3)}{C \cdot (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)} \quad B := \frac{r_1}{C \cdot (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)}$$

$$I := 1 + h \cdot \frac{A}{2} \quad j_{11} := \left(1 - h \cdot \frac{A}{2} \right)^{-1} \quad l_{11} := I \cdot j_{11} \quad k_{11} := B \cdot (e_1(k) + e_1(k+1))$$

$$m_{11} := h \cdot j_{11} \cdot \frac{k_{11}}{2} \quad Y := \begin{pmatrix} i_2(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.799 \\ 16.787 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} C \cdot A \\ C \cdot r_3 \cdot B \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} C \cdot B \\ C \cdot r_2 \cdot B \end{pmatrix}$$

$$k := 1 \quad u_C(k) := l_{11} \cdot u_C(k-1) + m_{11} \quad u_C(k) = 6.716$$

$$Y := F \cdot u_C(k) + D \cdot e_1(k) \quad Y = \begin{pmatrix} 0.633 \\ 20.007 \end{pmatrix}$$

$$k := 2 \quad u_C(k) := l_{11} \cdot u_C(k-1) + m_{11} \quad u_C(k) = 12.033$$

$$Y := F \cdot u_C(k) + D \cdot e_1(k) \quad Y = \begin{pmatrix} 0.501 \\ 22.558 \end{pmatrix}$$

При расчете с десятого по тридцатый шаг надо учесть, что на каждом шаге изменяется $e_2(k) = -100 + 4 \cdot k$.

$$k := 10 \quad u_C(k) := l_{11} \cdot u_C(k-1) + m_{11} \quad u_C(k) = 29.133$$

$$Y := F \cdot u_C(k) + D \cdot e_1(k)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.077 \\ 30.759 \end{pmatrix}$$

$$Y := F \cdot u_C(k) + D \cdot e_2(k)$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1.921 \\ -11.207 \end{pmatrix}$$

$$m_{11} := h \cdot j_{11} \cdot \frac{k_{11}}{2} \quad k_{11} = -4.374 \times 10^6 \quad k_{11} := B \cdot (e_2(k) + e_2(k+1)) \quad m_{11} = -9.738$$

Таблица 1.2

№	$t \cdot 10^{-6}$, с	$u_c(t)$, мВ	$i_2(t)$, мА	$i_{2c}(t)$, мА	$i_{2i}(t)$, мА	$u_2(t)$, мВ	$u_{2c}(t)$, мВ	$u_{2i}(t)$, мВ
1	0	0	0,799	0,799	0,799	16,787	16,787	16,787
2	4,97	6,716	0,634	0,633	0,633	19,995	20,007	20,007
3	9,94	12,033	0,502	0,501	0,501	22,538	22,558	22,558
4	14,91	16,244	0,398	0,397	0,397	24,553	24,557	24,557
5	19,88	19,578	0,316	0,314	0,314	26,151	26,176	26,176
6	24,85	22,217	0,25	0,249	0,249	27,417	27,442	27,442
7	29,82	24,308	0,198	0,197	0,197	28,421	28,445	28,445
8	34,79	25,963	0,157	0,156	0,156	29,217	29,239	29,239
9	39,76	27,273	0,125	0,124	0,124	29,847	29,867	29,867
10	44,73	28,311	0,099	0,098	0,098	30,347	30,365	30,365
11	49,7	29,133	0,078	0,077	0,077	30,743	30,759	30,759
11	49,7	29,133	-1,908	-1,921	-1,921	-11,27	-11,207	-11,207
12	54,67	13,33	-1,441	-1,449	-1,449	-17,121	-17,108	-17,108
13	59,64	1,489	-1,071	-1,076	-1,076	-21,09	-21,108	-21,108
14	64,61	-7,216	-0,778	-0,78	-0,78	-23,567	-23,605	-23,605
15	69,58	-13,436	-0,545	-0,546	-0,546	-24,862	-24,91	-24,91
16	74,55	-17,691	-0,361	-0,361	-0,361	-25,22	-25,271	-25,271
17	79,52	-20,387	-0,215	-0,214	-0,214	-24,834	-24,886	-24,886
18	84,49	-21,851	-0,099	-0,098	-0,098	-23,86	-23,91	-23,91
19	89,46	-22,339	-0,007	-0,00599	-0,00599	-22,419	-22,465	-22,465
20	94,43	-22,054	0,066	0,067	0,067	-20,608	-20,649	-20,649
21	99,4	-21,156	0,123	0,125	0,125	-18,503	-18,54	-18,54
22	104,37	-19,774	0,169	0,17	0,17	-16,167	-16,198	-16,198
23	109,34	-18,008	0,205	0,206	0,206	-13,646	-13,673	-13,673
24	114,31	-15,938	0,234	0,235	0,235	-10,978	-11,001	-11,001
25	119,28	-13,627	0,257	0,258	0,258	-8,195	-8,214	-8,214
26	124,25	-11,126	0,275	0,276	0,276	-5,321	-5,336	-5,336
27	129,22	-8,474	0,289	0,29	0,29	-2,373	-2,386	-2,386
28	134,19	-5,702	0,301	0,301	0,301	0,632	0,622	0,622
29	139,16	-2,836	0,31	0,31	0,31	3,683	3,676	3,676
30	144,13	0,105	0,317	0,317	0,317	6,77	6,765	6,765
31	149,1	3,105	0,322	0,323	0,323	9,886	9,882	9,882
32	149,1	3,105	-0,468	-0,477	-0,477	-6,905	-6,904	-6,904
33	154,07	-0,899	-0,371	-0,377	-0,377	-8,818	-8,825	-8,825
34	159,04	-4,07	-0,294	-0,299	-0,299	-10,334	-10,345	-10,345
35	164,01	-6,58	-0,233	-0,237	-0,237	-11,535	-11,549	-11,549
36	168,98	-8,568	-0,185	-0,187	-0,187	-12,488	-12,503	-12,503
37	173,95	-10,14	-0,147	-0,148	-0,148	-13,243	-13,258	-13,258
38	243,53	-15,901	-0,0057	-0,00565	-0,00565	-16,017	-16,02	-16,02

Далее решение повторяем для следующего шага. Продолжая решение, получим таблицу искомых переменных для $t = k \cdot h$.

Результаты расчета сведены в табл. 1.2. Решение совпадает с результатами, приведенными в примере 1.4 при расчете по резистивной схеме, так как резистивная схема была составлена с применением метода трапеций. Отметим, что формирование уравнений с переменными состояния более трудоемко по сравнению с получением уравнений для резистивной схемы. Сравнение значений $i_2(t)$ и $u_2(t)$, рассчитанных аналитическими и численными методами ($i_{2c}(t)$ и $u_{2c}(t)$ – по резистивной схеме; $i_{2i}(t)$ и $u_{2i}(t)$ – интегрированием дифференциальных уравнений), показывает, что метод трапеций дает погрешность не более 1 % для выбранного шага.

Для построения графиков $e(t)$, $i_2(t)$ и $u_2(t)$ воспользуемся средствами MathCAD (рис. 1.13).

При построении графиков воспользуемся аналитическими выражениями функций $e(t)$, $i_2(t)$ и $u_2(t)$. Графики строим в интервалах времени $0 \leq t \leq t_1$, $t_1 \leq t \leq t_2$ и $t_2 \leq t \leq 5 \cdot t_1$. Введем формулу, в которой задается переменная t , которая определяет диапазон изменения аргумента на графике функции от 0 до $T1$ с шагом $h = 0.000001$. Введем имя переменной t . Нажмем кнопку «:=». Наберем на клавиатуре 0 и запятую. Нажмем кнопку «m...n» на панели инструментов «Матрицы». В черных квадратиках введем величину шага и $T1$. Чтобы задать условия для построения графиков на трех интервалах, воспользуемся оператором if.

```
t := 0, .0000001, T1
e(t) := if(t ≤ t1, e1(t), if(t ≤ t2, e2(t), e3(t)))
i2(t) := if(t ≤ t1, i21(t), if(t ≤ t2, i22(t), i23(t)))
u2(t) := if(t ≤ t1, u21(t), if(t ≤ t2, u22(t), u23(t)))
```

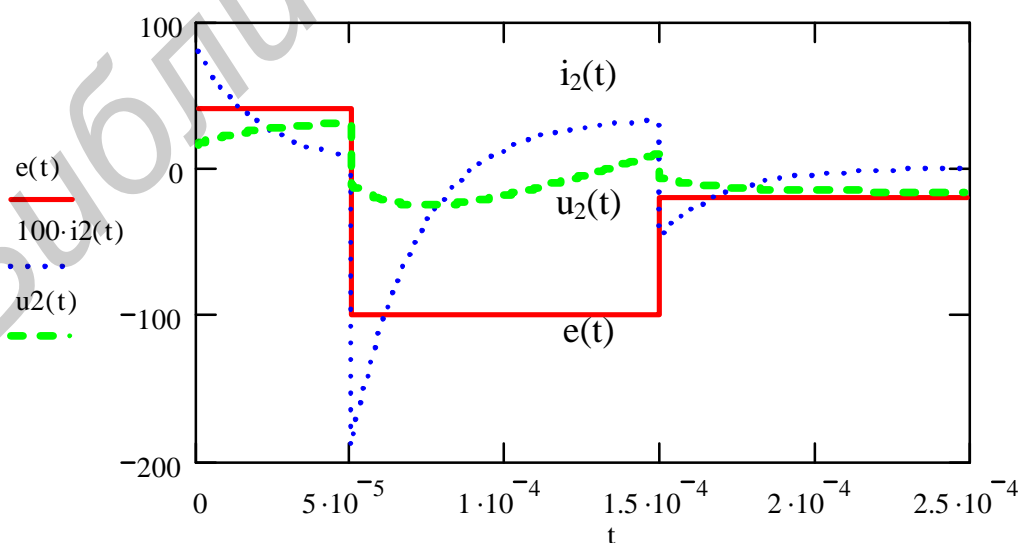
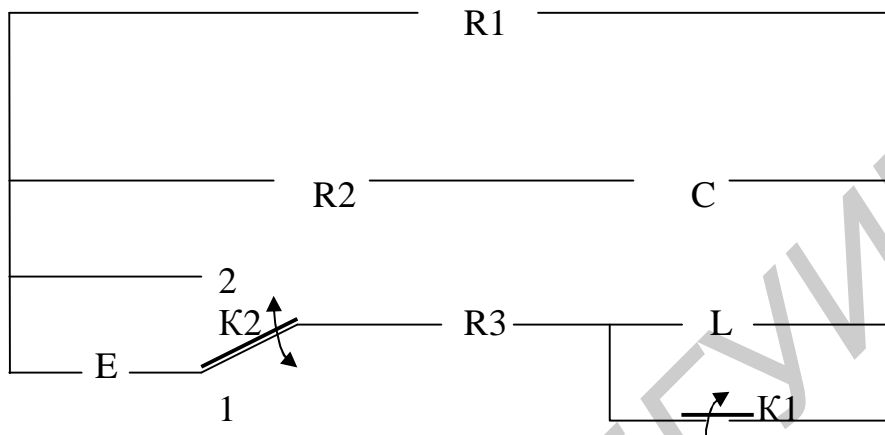


Рис. 1.13

1.5. Пример выполнения контрольной работы №2

Контрольная работа соответствует разделу программы «Переходные процессы в линейных электрических цепях». Распечатка одного из вариантов задания представлена на рис. 1.14.

Шифр 630101-2



Параметры: $R1 = 100 \text{ Ом}$, $R2 = 21 \text{ Ом}$, $R3 = 24 \text{ Ом}$
Классический метод $L = 33 \text{ мГн}$, $C = 0,53 \text{ мкФ}$
Операторный метод $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 0,54 \text{ мкФ}$

Рис. 1.14

З а д а н и е

Расчет переходных процессов

в цепях с сосредоточенными параметрами

1. Схема на рис. 1.14. Переходный процесс возникает при размыкании ключа K_1 . Ключ K_2 находится в положении 1. Классическим методом определить ток переходного процесса в ветви с индуктивностью $i_L(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, если в цепи действует $e(t) = 100\sin 10^4 t \text{ мВ}$. Построить графики найденных зависимостей от времени как сумму принужденной и свободной составляющих.

2. Схема на рис. 1.14. Ключ K_1 разомкнут, а ключ K_2 переводится из положения 1 в положение 2. В цепи действует ЭДС $E = 100 \text{ мВ}$. Рассчитать ток в ветви с индуктивностью $i_L(t)$ и напряжение $u_C(t)$ операторным методом. Построить графики найденных зависимостей от времени.

3. Схема на рис. 1.14. Ключ K_1 замкнут. Ключ K_2 находится в положении 1. Определить переходную и импульсную характеристики тока $i(t)$ в ветви с реактивным элементом и напряжения $u_2(t)$ на параллельном участке цепи. При воздействии на вход цепи импульса (рис. 1.15) длительностью $t_2 = k \cdot \tau$, где τ – постоянная времени цепи ($k = 1 - 6$), определить ток $i(t)$ и напряжение $u_2(t)$ на всех интервалах времени. Построить графики $u(t)$, $i(t)$ и $u_2(t)$.

Записать шифр и вклеить листок с распечаткой задания в контрольную работу.

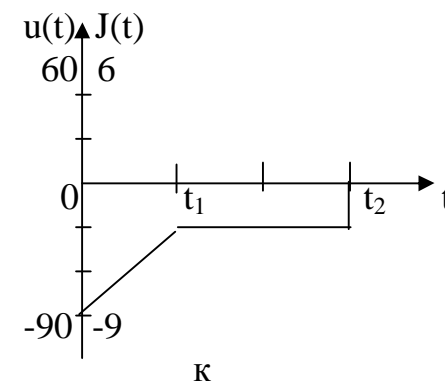
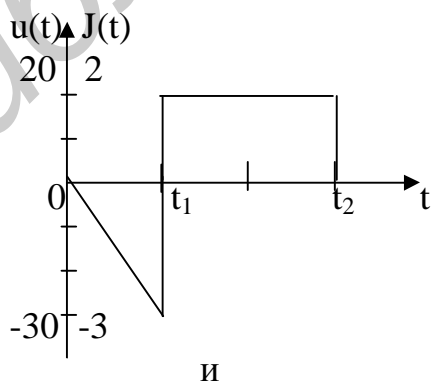
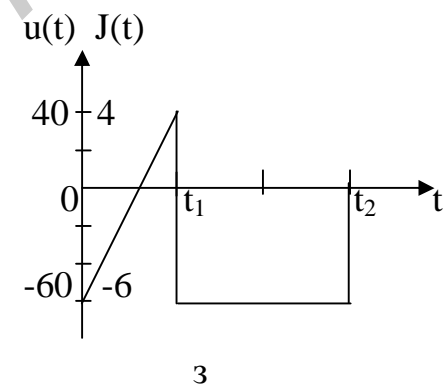
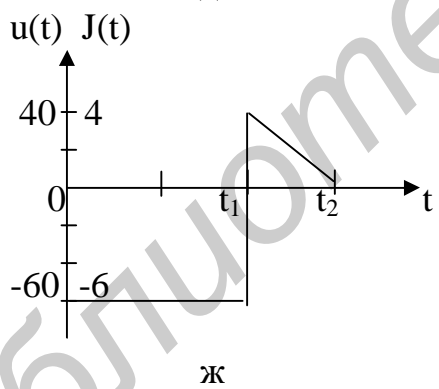
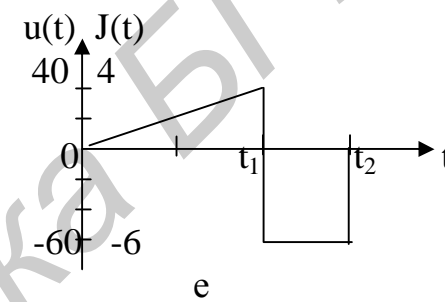
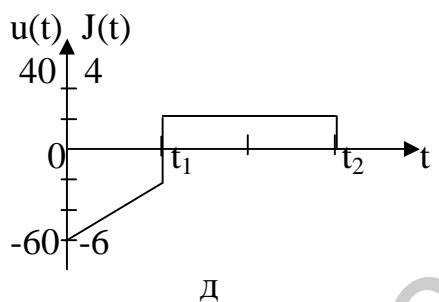
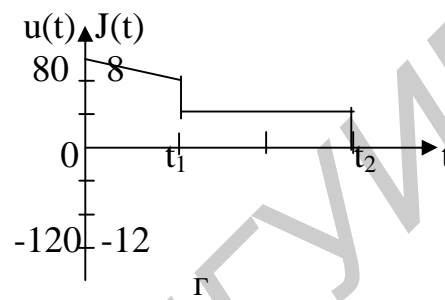
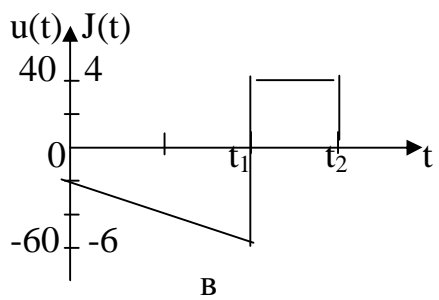
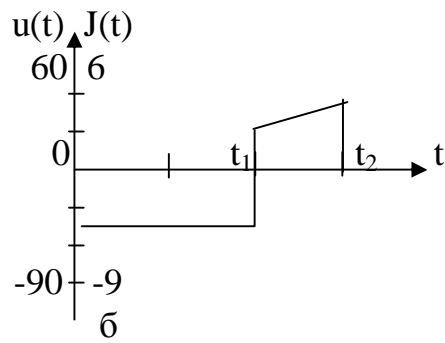
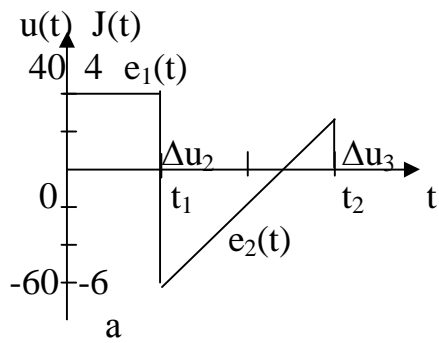


Рис. 1.15

1.5.1. Расчет переходных процессов классическим методом

Начертим схему согласно варианту задания (рис. 1.16).

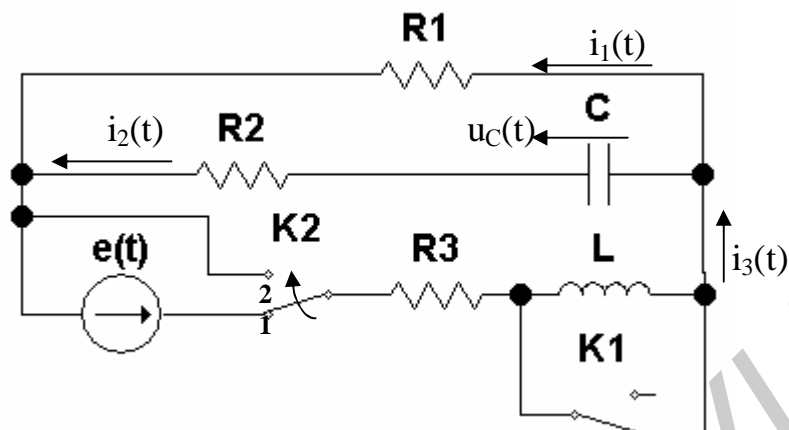


Рис. 1.16

В соответствии с классическим методом расчета ток $i_L(t) = i_3(t)$ и напряжение $u_C(t)$ ищем в виде

$$i_L(t) = i_3(t) = i_{3y}(t) + i_{3св}(t);$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{CCB}(t).$$

Расчет переходного процесса классическим методом производится в следующем порядке:

- рассчитывается цепь до коммутации для определения независимых начальных условий;
- рассчитывается установившийся режим после коммутации;
- составляется характеристическое уравнение цепи в установившемся режиме и определяются его корни;
- записывается полное решение как сумма принужденной и свободной составляющих;
- рассчитываются необходимые зависимые начальные условия и определяются постоянные интегрирования;
- найденные постоянные интегрирования подставляются в полное решение и строятся графики искомых величин.

Независимые начальные условия (ННУ) $i_L(0)$ и $u_C(0)$ определяются из схемы до коммутации (рис. 1.16). Ключ K_1 замкнут. До коммутации в цепи отсутствует индуктивность. Следовательно, ток в индуктивности до коммутации будет равен 0 и, согласно первому закону коммутации, не изменится непосредственно после размыкания ключа $i_L(0) = i_3(0^+) = i_3(0^-) = 0$.

Так как в цепи действует источник синусоидального напряжения, расчет проводим символическим методом. Комплексное сопротивление цепи относительно источника

$$Z_{BX} = R_3 + \frac{R_1 \cdot (R_2 + 1/j\omega \cdot C)}{R_1 + (R_2 + 1/j\omega \cdot C)} = 24 + \frac{100 \cdot (21 - j188,679)}{100 + (21 - j188,679)} = 106,741 \cdot e^{-j20,6} \text{ Ом},$$

где $X_C = 1/\omega C = 1/(10^4 \cdot 0,53 \cdot 10^{-6}) = 188,679 \text{ Ом}$, $\omega = 10 \text{ 000 рад/с}$.

По закону Ома определим комплексную амплитуду тока \dot{I}_{3M} :

$$\dot{I}_{3M} = \frac{\dot{E}_M}{Z_{BX}} = \frac{100}{106,741 \cdot e^{-j20,6}} = 0,937 \cdot e^{j20,6} \text{ мА.}$$

По правилу плеч находим комплексную амплитуду тока \dot{I}_{2M} :

$$\dot{I}_{2M} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega \cdot C}} \cdot \dot{I}_{3M} = 0,937 \cdot e^{j20,6} \cdot \frac{100}{100 + 21 - j188,679} = 0,418 \cdot e^{j77,928} \text{ мА.}$$

Комплексную амплитуду напряжения на емкости определим по закону Ома:

$$\dot{U}_{CM} = (-jX_C) \cdot \dot{I}_{2M} = 0,418 \cdot e^{j77,928} \cdot (-j188,679) = 78,869 \cdot e^{-j12,072} \text{ мВ.}$$

Мгновенное значение напряжения на емкости запишем в виде

$$u_C(t) = 78,869 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 12,072^\circ) \text{ мВ.}$$

По второму закону коммутации находим напряжение на емкости после коммутации при $t = 0$ (ННУ):

$$u_C(0) = u_C(0^-) = 78,869 \cdot \sin(-12,072^\circ) = -16,495 \text{ мВ.}$$

Принужденные составляющие $i_{3y}(t)$ и $u_{Cy}(t)$ определим по схеме, изображенной на рис. 1.17.

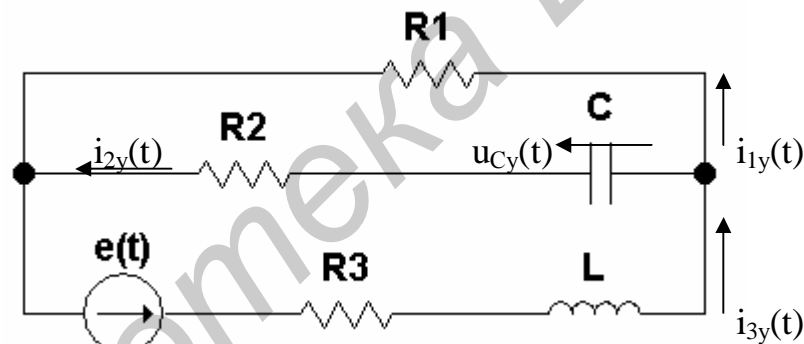


Рис. 1.17

Запишем комплексные сопротивления ветвей в схеме (см. рис. 1.17):

$$Z_1 = R_1 = 100 \text{ Ом;}$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 21 - j188,679 \text{ Ом;}$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L = 24 + j330 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление цепи относительно источника равно

$$Z_{BX} = Z_3 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 24 + j330 + \frac{100 \cdot (21 - j188,679)}{100 + 21 - j188,679} = 309,043 \cdot e^{j71,137} \text{ Ом.}$$

По закону Ома определим комплексную амплитуду тока \dot{I}_{3My} :

$$\dot{I}_{3My} = \frac{\dot{E}_M}{Z_{BX}} = \frac{100}{309,043 \cdot e^{j71,137}} = 0,324 \cdot e^{-j71,137} \text{ мА.}$$

По правилу плеч находим комплексную амплитуду тока \dot{I}_{2My} :

$$\dot{I}_{2My} = \dot{I}_{3My} \frac{R_1}{R_1 + R_2 - j \frac{1}{\omega \cdot C}} = 0,324 \cdot e^{-j71,137} \cdot \frac{100}{100 + 21 - j188,679} = 0,145 \cdot e^{-j13,8} \text{ мА.}$$

Комплексную амплитуду напряжения на емкости определим по закону Ома:

$$\dot{U}_{CMy} = -jX_C \cdot \dot{I}_{2My} = (-j188,679) \cdot 0,145 \cdot e^{-j13,809} = 27,358 \cdot e^{-j103,809} \text{ мВ.}$$

Мгновенные значения напряжения на емкости и тока в индуктивности запишутся в следующем виде:

$$U_{Cy}(t) = 27,358 \sin(10^4 t - 103,809^\circ) \text{ мВ;} \\ i_{Ly}(t) = i_{3y}(t) = 0,324 \sin(10^4 t - 71,137^\circ) \text{ мА.}$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

Запишем входное сопротивление относительно второй ветви пассивной схемы (рис. 1.18) в комплексной форме:

$$Z_{BX}(j\omega) = R_2 + \frac{1}{j\omega \cdot C} + \frac{R_1 \cdot (R_3 + j\omega \cdot L)}{R_1 + (R_3 + j\omega \cdot L)}$$

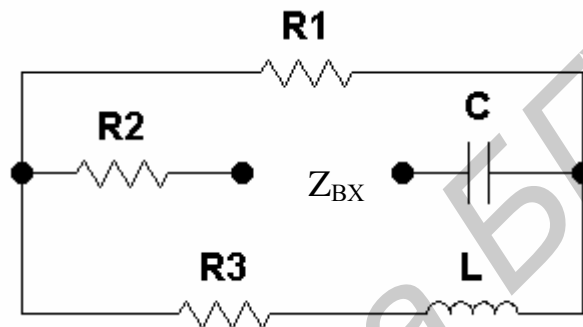


Рис. 1.18

Заменим в формуле $j\omega$ на p и полученное выражение приравняем нулю:

$$Z_{BX}(p) = R_2 + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R_1 \cdot (R_3 + p \cdot L)}{R_1 + (R_3 + p \cdot L)} = 0.$$

После выполнения алгебраических преобразований получим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3)C + L}{(R_1 + R_2) \cdot C \cdot L} p + \frac{R_1 + R_3}{(R_1 + R_2) \cdot L \cdot C} = 0$$

или
$$p^2 + \left[\frac{(100 \cdot 21 + 100 \cdot 24 + 24 \cdot 21) \cdot 0,53 \cdot 10^{-6} + 0,033}{(100 + 21) \cdot 0,033 \cdot 0,53 \cdot 10^{-6}} \right] p + \frac{100 + 24}{0,033 \cdot 0,53 \cdot 10^{-6} (100 + 21)} = 0,$$

$$p^2 + 16846,5 \cdot p + 58593103 = 0.$$

Корни этого уравнения: $p_1 = -4908 \text{ 1/с; } p_2 = -11939 \text{ 1/с.}$

По виду корней характеристического уравнения записываем искомое решение переходного процесса (см. подразд. 1.1). Так как число корней равно 2 и они действительны, то $i_3(t)$ и $u_C(t)$ имеют вид

$$i_3(t) = 0,324 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 71,137^\circ) + A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \text{ мА,}$$

$$u_C(t) = 27,358 \cdot \sin(10^4 t - 103,809^\circ) + B_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + B_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \text{ мВ.}$$

Для случая комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{CB}$:

$$i_3(t) = i_y(t) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{CB} \cdot t + \psi_i),$$

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + B \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{CB} \cdot t + \psi_U).$$

Уравнения имеют по два неизвестных (постоянные интегрирования), следовательно, для однозначного их определения необходимо составить еще одно уравнение, которое получим дифференцированием первого уравнения.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 для тока третьей ветви найдем из уравнений

$$i_3(t) = 0,324 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 71,137^\circ) + A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t},$$

$$\frac{di_3}{dt} = 0,324 \cdot 10^4 \cdot \cos(10^4 \cdot t - 71,137^\circ) + (-4908) \cdot A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + (-11939) \cdot A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t}.$$

Производная от тока в третьей ветви в момент $t = 0$ относится к зависимым начальным условиям. Зависимые начальные условия $i'_L(0) = i'_3(0) = [di_3(t)/dt]_{t=0}$ $u'_C(0) = [du_C(t)/dt]_{t=0}$ определим из схемы после коммутации (см. рис. 1.16) по системе уравнений, составленной по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0$, с учетом найденных ННУ.

Составим для определения зависимых начальных условий систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} -r_1 \cdot i_1(0) + u_C(0) + r_2 \cdot i_2(0) = 0, \\ -r_2 \cdot i_2(0) - u_C(0) - L \cdot \left. \frac{di_3(t)}{dt} \right|_{t=0} - r_3 \cdot i_3(0) = -e(0), \\ i_3(0) = i_1(0) + i_2(0). \end{cases}$$

Подставляя численные значения найденных ранее независимых начальных условий $i_3(0) = 0$, $u_C(0) = -16,495$ мВ и значение $e(0) = 100 \sin(\omega \cdot 0) = 0$, получим

$$i_2(0) = 0,136319 \text{ мА};$$

$$\left. \frac{di_3(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = 413,09 \text{ мА/с}.$$

Производную напряжения на емкости в момент коммутации определим из выражения

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_2(0)}{C} = \frac{0,136319}{0,53 \cdot 10^{-6}} = 257207 \text{ мВ/с}.$$

ЗНУ проще найти из схемы после коммутации для $t = 0$ (рис. 1.19), в которой индуктивность заменяется источником тока $J = i_L(0) = 0$ (обрыв третьей ветви), а конденсатор – источником ЭДС $E = u_C(0) = -16,495$ мВ.

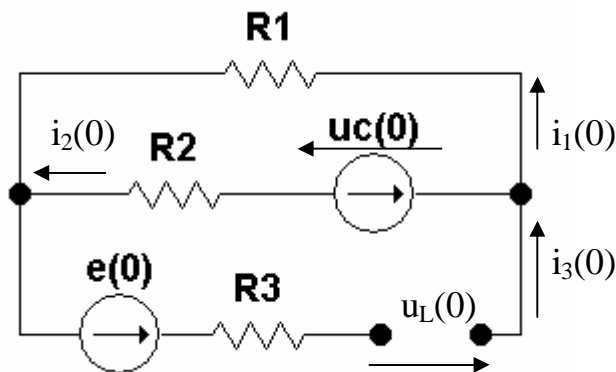


Рис. 1.19

По закону Ома определим ток $i_2(0)$ и напряжение $u_L(0)$:

$$i_2(0) = -i_1(0) = -\frac{u_c(0)}{R_1 + R_2} = \frac{16,495}{100 + 21} = 0,136319 \text{ мА};$$

$$u_L(0) = -R_1 \cdot i_1(0) = 100 \cdot 0,136319 = 13,6319 \text{ мВ}.$$

Полагая в уравнениях для тока третьей ветви $t = 0$, получим

$$\begin{cases} i_3(0) = 0,324 \cdot \sin(-71,137) + A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_3(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,324 \cdot 10^4 \cdot \cos(-71,137) + (-4908) \cdot A_1 + (-11939) \cdot A_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 = -0,307 + A_1 + A_2, \\ 413,09 = 1048 - 4908 \cdot A_1 - 11939 \cdot A_2. \end{cases}$$

Отсюда $A_1 = 0,43$, $A_2 = -0,1237$.

Окончательное выражение для тока в индуктивности запишем в виде

$$i_3(t) = 0,324 \cdot \sin(10^4 t - 71,137^\circ) + 0,43e^{-4908t} - 0,1237e^{-11939t} \text{ мА}.$$

Напряжение на емкости рассчитываем аналогично:

$$u_c(t) = 27,358 \cdot \sin(10^4 t - 103,809^\circ) + B_1 \cdot e^{-4908t} + B_2 \cdot e^{-11939t} \text{ мВ},$$

$$\frac{du_c}{dt} = 27,353 \cdot 10^4 \cos(10^4 t - 103,809) + (-4908)B_1 e^{-11939t} + (-11939) \cdot B_2 \cdot e^{-11939t} \text{ мВ/с}.$$

Полагая в обоих уравнениях $t = 0$, получим

$$\begin{cases} u_c(0) = 27,358 \cdot \sin(-103,809) + B_1 + B_2, \\ \left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = 27,358 \cdot 10^4 \cdot \cos(-103,809) + (-4908) \cdot B_1 + (-11939) \cdot B_2. \end{cases}$$

Уравнения для определения постоянных интегрирования примут вид

$$\begin{cases} -16,495 = -26,567 + B_1 + B_2, \\ 257207 = -65299,715 - 4908 \cdot B_1 - 11939 \cdot B_2. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, определим постоянные интегрирования:

$$B_1 = 62,74; \quad B_2 = -52,77.$$

Окончательное выражение для напряжения на емкости запишем в виде

$$u_c(t) = 27,358 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 103,809^\circ) + 62,74 \cdot e^{-4908t} - 52,77 \cdot e^{-11939t} \text{ мВ}.$$

1.5.2. Расчет переходных процессов классическим методом средствами MathCAD

Введем исходные данные цепи (см. рис. 1.16) и рассчитаем цепь до коммутации для определения независимых начальных условий.

$$\begin{array}{lllll} R1 := 100 & R2 := 21 & R3 := 24 & \omega := 10000 & Em := 100 \\ C := 0,53 \times 10^{-6} & & L := 0,033 & XL := \omega \cdot L & XL = 330 \\ XC := \frac{1}{\omega \cdot C} & XC = 188,679 & & j := \sqrt{-1} & \end{array}$$

Независимые начальные условия $i_L(0)$ и $u_C(0)$ определяются из схемы до коммутации (см. рис. 1.16). Ключ K_1 замкнут. До коммутации в цепи отсутствует индуктивность. Следовательно, ток в индуктивности до коммутации будет равен 0 и, согласно первому закону коммутации, не изменится непосредственно после размыкания ключа: $i_L(0) = i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0$.

Так как в цепи действует источник синусоидального напряжения, расчет проводим символическим методом. Комплексное сопротивление цепи относительно источника равно

$$Z_0 := R_3 + R_1 \cdot \frac{(R_2 - j \cdot X_C)}{R_1 + R_2 - j \cdot X_C}, \quad Z_0 = 99.916 - 37.555i$$

На данной частоте цепь эквивалентна последовательно включенным резистором ($R = 99,916 \text{ Ом}$) и емкостным сопротивлением ($X = -37,555 \text{ Ом}$). Мнимая часть комплексного сопротивления может иметь любой знак (знак плюс, если X – индуктивное сопротивление).

По закону Ома определим комплексную амплитуду тока \underline{i}_{3M} . По правилу плеч находим комплексную амплитуду тока \underline{i}_{2M} . Напряжение на емкости U_{0CM} определяем по закону Ома:

$$I_{30m} := \frac{E_m}{Z_0}, \quad I_{20m} := I_{30m} \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_2 - j \cdot X_C)}, \quad U_{0cm} := -j \cdot X_C \cdot I_{20m}$$

Найдем модуль и фазу (в радианах) напряжения на емкости:

$$|U_{0cm}| = 78.862, \quad \psi_{uc0} := \arg(U_{0cm}), \quad \psi_{uc0} = -0.211$$

Мгновенное значение напряжения на емкости запишем в виде

$$u_{c0}(t) := 78.862 \cdot \sin(10000 \cdot t - 0.211)$$

По второму закону коммутации находим напряжение на емкости после коммутации при $t = 0$ (ННУ):

$$u_{c0} := |U_{0cm}| \cdot \sin(\psi_{uc0}), \quad u_{c0} = -16.494$$

Принужденные составляющие $i_{3y}(t)$ и $u_{Cy}(t)$ определим по схеме, изображенной на рис. 1.17. Комплексное сопротивление цепи относительно источника равно

$$Z_{yct} := R_3 + j \cdot X_L + R_1 \cdot \frac{(R_2 - j \cdot X_C)}{R_1 + R_2 - j \cdot X_C}, \quad Z_{yct} = 99.916 + 292.445i$$

По закону Ома определим комплексную амплитуду тока \underline{i}_{3My} :

$$I_{3my} := \frac{E_m}{Z_{yct}}, \quad I_{3my} = 0.105 - 0.306i$$

По правилу плеч находим комплексную амплитуду тока \underline{i}_{2My} . Комплексную амплитуду напряжения на емкости определим по закону Ома:

$$I_{2my} := I_{3my} \cdot \frac{R_1}{(R_1 + R_2 - j \cdot X_C)}, \quad U_{cmy} := -j \cdot X_C \cdot I_{2my}, \quad U_{cmy} = -6.501 - 26.451i$$

Найдем модули и фазы (в радианах) напряжения на емкости и тока в индуктивности:

$$|I_{3my}| = 0.324 \quad \psi_{i3} := \arg(I_{3my}) \quad \psi_{i3} = -1.242$$

$$|U_{cmy}| = 27.238 \quad \psi_{uc} := \arg(U_{cmy}) \quad \psi_{uc} = -1.812$$

Мгновенные значения тока в индуктивности и напряжения на емкости запишем в виде

$$i_{3y}(t) := 0.324 \sin(10000t - 1.242), \quad u_{cy}(t) := 27.238 \sin(10000t - 1.812).$$

ЗНУ проще найти из схемы после коммутации для $t = 0$ (рис. 1.19), в которой индуктивность заменяется источником тока $J = i_L(0) = 0$ (обрыв третьей ветви), а конденсатор – источником ЭДС $E = u_C(0) = -16,495$ мВ.

По закону Ома определим ток $i_2(0)$ и напряжение $u_L(0)$:

$$i_{20} := \frac{-u_{c0}}{R_1 + R_2} \quad i_{20} = 0.136 \quad u_{L0} := R_1 \cdot i_{20} \quad u_{L0} = 13.631$$

$$d_{i30} := \frac{u_{L0}}{L} \quad d_{i30} = 413.071 \quad d_{uc0} := \frac{i_{20}}{C} \quad d_{uc0} = 2.572 \times 10^5$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

Запишем входное сопротивление относительно второй ветви пассивной схемы (см. рис. 1.18) в комплексной форме. Заменяем в формуле $j\omega$ на p и полученное выражение приравняем нулю. Чтобы найти корни этого уравнения, выполним следующие шаги.

Наберем на клавиатуре ключевое слово **Given**. Нажмем на клавишу «Enter». Введем уравнение, изображенное на рис. 1.20. Наберем на клавиатуре строку $\text{find}(p)^T$ и нажмем кнопку «→» на панели инструментов «Вычисления». Встроенная функция find (Искать) определяет корни уравнения p_1 и p_2 .

$$\text{Given} \quad R_2 + \frac{1}{p \cdot C} + R_1 \cdot \frac{(R_3 + p \cdot L)}{R_1 + R_3 + p \cdot L} = 0$$

$$\text{Find}(p)^T \rightarrow \left(\begin{array}{l} -11938.682427334096208 \\ -4907.8367170175758212 \end{array} \right) \quad p_1 := -4907.8367 \quad p_2 := -11938.682427$$

Рис. 1.20

По виду корней характеристического уравнения записываем искомое решение переходного процесса. Так как число корней равно 2 и они действительны, то $i_3(t)$ и $u_C(t)$ имеют вид (см. подразд. 1.1):

$$i_3(t) = 0,324 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 1,242) + A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \quad \text{мА},$$

$$u_C(t) = 27,238 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 1,812) + B_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + B_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \quad \text{мВ}.$$

Оба уравнения имеют по два неизвестных (постоянные интегрирования), следовательно, для однозначного их определения необходимо составить еще одно уравнение, которое получим дифференцированием первого уравнения.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 для тока третьей ветви найдем из уравнений

$$i_3(t) = 0,324 \cdot \sin(10^4 \cdot t - 71,137^\circ) + A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} ,$$

$$\frac{di_3}{dt} = 0,324 \cdot 10^4 \cdot \cos(10^4 \cdot t - 71,137^\circ) + (-4908) \cdot A_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + (-11939) \cdot A_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} .$$

Полагая в уравнениях для тока третьей ветви $t = 0$, получим

$$\begin{cases} i_3(0) = 0,324 \cdot \sin(-71,137) + A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_3(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,324 \cdot 10^4 \cdot \cos(-71,137^\circ) + (-4908) \cdot A_1 + (-11939) \cdot A_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 = -0,307 + A_1 + A_2, \\ 413,09 = 1048 - 4908 \cdot A_1 - 11939 \cdot A_2 . \end{cases}$$

Чтобы решить систему уравнений, выполним следующие шаги (рис. 1.21):

$$i_{3y}(0) = -0.307 \quad di_{3y} := |I_{3my}| \cdot \omega \cdot \cos(\psi_{i3}) \quad di_{3y} - di_{30} = 633.09$$

$$\text{Given} \quad i_{3y}(0) + A_1 + A_2 = 0 \quad di_{3y} - 4907.84 \cdot A_1 - 11938.68 \cdot A_2 = di_{30}$$

$$\text{Find}(A_1, A_2)^T \rightarrow (.43065028824758118770 \quad -12400641744175354994) \quad A_1 := 0.4306 \quad A_2 := -0.124$$

Рис. 1.21

Окончательное выражение для тока в индуктивности запишем в виде

$$i_3(t) := 0.324 \sin(10000t - 1.242) + 0.4306 e^{-4907.8 \cdot t} - 0.124 e^{-11938.68 \cdot t} .$$

Напряжение на емкости рассчитываем аналогично:

$$u_C(t) = 27,358 \cdot \sin(10^4 t - 103,809^\circ) + B_1 \cdot e^{-4908 \cdot t} + B_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \text{ мВ},$$

$$\frac{du_C}{dt} = 27,353 \cdot 10^4 \cos(10^4 t - 103,809^\circ) + (-4908) B_1 e^{-4908 \cdot t} + (-11939) \cdot B_2 \cdot e^{-11939 \cdot t} \text{ мВ/с}.$$

Чтобы решить систему уравнений, выполним следующие шаги (рис. 1.22):

$$u_{cy}(0) = -26.449 \quad ducy0 := |U_{cmy}| \cdot \omega \cdot \cos(\psi_{uc}) \quad ducy0 = -6.501 \times 10^4$$

$$\text{Given} \quad u_{cy}(0) + B_1 + B_2 = uc0 \quad ducy0 + p_1 \cdot B_1 + p_2 \cdot B_2 = duc0$$

$$\text{Find}(B_1, B_2)^T \rightarrow (62.732826693238325092 \quad -52.777260979332843778) \quad B_1 := 62.733 \quad B_2 := -52.777$$

Рис. 1.22

Окончательное выражение для напряжения запишем в виде

$$u_C(t) := 27.238 \sin(10000t - 1.812) + 62.733 e^{-4907.8 \cdot t} - 52.777 e^{-11938.68 \cdot t} .$$

Запишем уравнения для свободных и принужденных составляющих тока $i_3(t)$ и напряжения $u_C(t)$:

$$i_{3cb}(t) := 0.4306 e^{-4908 \cdot t} - 0.124 e^{-11939 \cdot t} \quad u_{ccb}(t) := 62.7 e^{-4908 \cdot t} - 52.8 e^{-11939 \cdot t}$$

$$i_{3y}(t) := 0.324 \sin(10000t - 1.242) \quad u_{cy}(t) := 27.238 \sin(10000t - 1.812)$$

Строим графики $i_3(t)$ и $u_C(t)$ как сумму принужденной и свободной составляющих (рис. 1.24 и 1.25 соответственно):

$$\begin{aligned}
 i_3(t) &= i_{3y}(t) + i_{3CB}(t); & u_C(t) &= u_{Cy}(t) + u_{CCB}(t); \\
 i_{3y}(t) &= 0,324 \cdot \sin(\omega t - 1,242) \text{ мА}; & u_{Cy}(t) &= 27,36 \cdot \sin(\omega t - 1,812) \text{ мВ}; \\
 i_{3CB}(t) &= 0,43e^{-4908t} - 0,124e^{-11939t} \text{ мА}; & u_{CCB}(t) &= 62,7e^{-4908t} - 52,8e^{-11939t} \text{ мВ}.
 \end{aligned}$$

Определяем длительность переходного процесса для свободной составляющей:

$$T1 = 5 \cdot \tau_1 = -5/p_1 = 5/4908 = 10,187 \cdot 10^{-4} \text{ с},$$

где τ – постоянная времени цепи (обратная величина минимального по модулю одного из корней характеристического уравнения).

$$t := 0,2 \cdot \frac{\pi}{100\omega} .. 5 \cdot \tau_1$$

$$i_3(t) := 0.324 \sin(10000t - 1.242) + 0.4306e^{-4907.8 \cdot t} - 0.124e^{-11938.68 \cdot t}$$

$$u_C(t) := 27.238 \sin(10000t - 1.812) + 62.733e^{-4907.8 \cdot t} - 52.777e^{-11938.68 \cdot t}$$

$$i_{3cb}(t) := 0.4306e^{-4908 \cdot t} - 0.124e^{-11939 \cdot t} \quad u_{ccb}(t) := 62.7e^{-4908 \cdot t} - 52.8e^{-11939 \cdot t}$$

$$i_{3y}(t) := 0.324 \sin(10000t - 1.242)$$

$$u_{cy}(t) := 27.238 \sin(10000t - 1.812)$$



Рис. 1.23

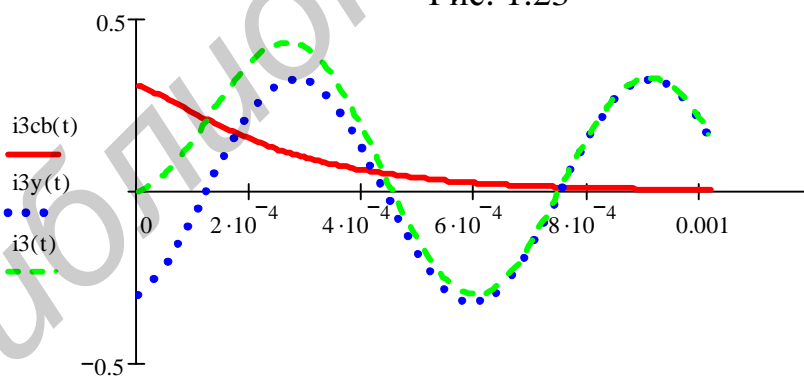


Рис. 1.24

Графики позволяют наглядно представить результаты расчетов. Введем формулу, в которой задается переменная t , которая определяет диапазон изменения аргумента на графике функции. Нажмем кнопку на панели инструментов «Графики» (Graph) (см. рис. 1.9). На рабочем поле документа появится шаблон декартова графика (см. рис. 1.23). Шаблон имеет два поля

ввода (черных квадратика) и прямоугольную рамку. В поле ввода, расположенном возле оси ординат, вводим имя функции $i_{3CB}(t)$. Нажмем на клавишу «,». Появится новое поле ввода для функции $i_{3y}(t)$. Еще раз нажмем на клавишу «,». В новое поле ввода введем имя функции $i_3(t)$. Щелкнем на рабочей области документа вне поля графика. На графике будут построены все три функции.

Аналогично строим графики напряжений $u_{CCb}(t)$, $u_{Cy}(t)$ и $u_C(t)$ (рис. 1.25).

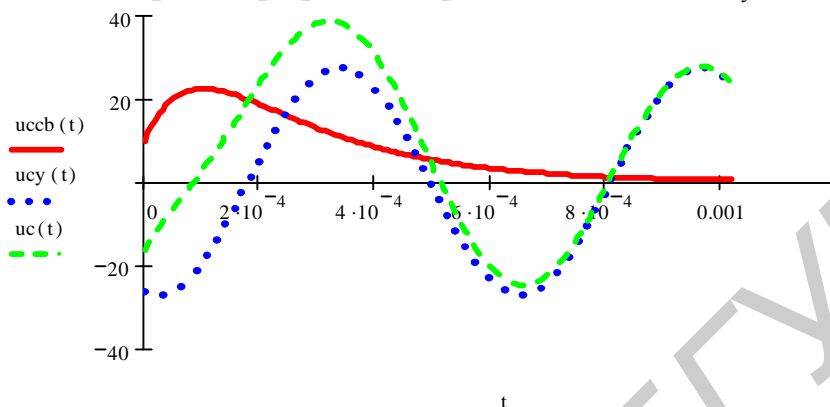


Рис. 1.25

Практически переходный процесс в нашем случае заканчивается за время одного периода принужденной составляющей, т.е. $t = 2\pi/\omega = 6,2831/10^4 = 6,2831 \cdot 10^{-4} \text{ с} \approx 3 \cdot \tau$.

1.5.3. Расчет переходных процессов операторным методом

Запишем исходные данные согласно варианту (шифр 630101, вариант 2).

В цепи действует постоянная ЭДС $E = 100$ мВ. Ключ $K2$ переводится из положения 1 в положение 2 (рис. 1.26). Рассчитать ток в ветви с индуктивностью $i_L(t)$ и напряжение $u_C(t)$ операторным методом. Построить графики $i_L(t)$ и $u_C(t)$.

$e(t) = E = 100$ мВ; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 21$ Ом; $R_3 = 24$ Ом; $C = 0,54$ мкФ; $L = 0,01$ Гн.

Для выполнения расчета введем исходные данные в документ MathCAD:

$$R1 := 100 \quad R2 := 21 \quad R3 := 24 \quad L := 0.01 \quad C := 0.54 \cdot 10^{-6} \quad E := 100$$

Задача с ненулевыми начальными условиями. В схеме до коммутации (см. рис. 1.26) по закону Ома найдем ток $i_3(0^-)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0^-)$.

$$t := 0 \quad i_3(t) := \frac{E}{R1 + R3} \quad u_C(t) := R1 \cdot i_3(t) \quad i_3(t) = 0.806 \quad u_C(t) = 80.645$$

По законам коммутации запишем ННУ:

$$i_L(0) = i_3(0) = i_3(0^-) = 0,806 \text{ мА};$$

$$u_C(0) = u_C(0^-) = 80,645 \text{ мВ}.$$

Составим операторную схему замещения и найдем изображения искомых величин. Операторная схема согласно рис. 1.26 изображена на рис. 1.27.

По методу контурных токов запишем систему уравнений и, учитывая, что ток второй ветви $I_2(p)$ совпадает по направлению с контурным током $I_{11}(p)$, а ток третьей ветви $I_3(p)$ направлен против контурного тока $I_{22}(p)$, имеем

$$t = 0, \quad \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{C \cdot p} \right) \cdot I_2(p) - R_1 \cdot I_3(p) = \frac{-u_c(t)}{p},$$

$$-R_1 \cdot I_2(p) + (R_1 + R_3 + L \cdot p) \cdot I_3(p) = L \cdot i_3(t).$$

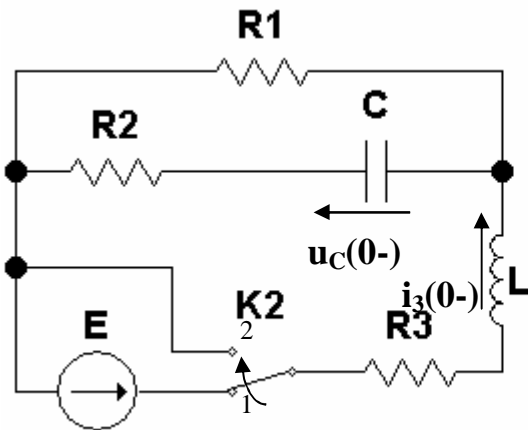


Рис. 1.26

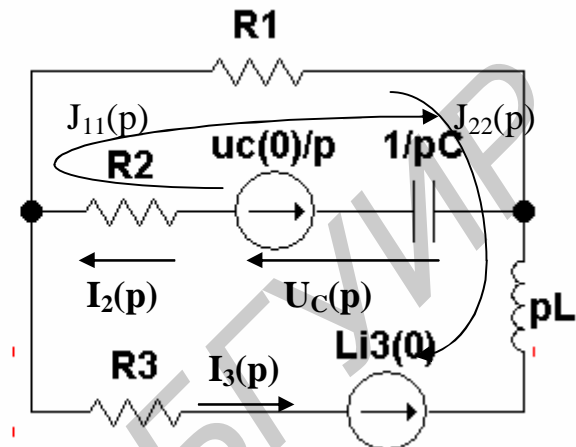


Рис. 1.27

Решим эти уравнения относительно $I_2(p)$ и $I_3(p)$ средствами MathCAD. Заменим искомые переменные $I_2(p)$ и $I_3(p)$ соответственно через x и $-y$. Эта система из двух уравнений зависит от трех параметров: x , y и p . Решим систему в символьном виде. Функция $\text{find}(x,y)$ (Найти) может вывести только зависимость параметров $x(p)$ и $y(p)$. На рис. 1.28 видим, что результат функции $\text{find}(x,y)$ представлен в виде матрицы-столбца.

Given

$$[(R_1 + R_2) \cdot C \cdot p + 1] \cdot x - R_1 \cdot C \cdot p \cdot y = -C \cdot u_{c0}$$

$$-R_1 \cdot x + (R_1 + R_3 + L \cdot p) \cdot y = L \cdot I_{30}$$

Find (x,y) →

$$\begin{pmatrix} \frac{-26999946}{63510800 \cdot p + 3267 \cdot p^2 + 620000000000} \\ .80645000000000000000 \cdot \frac{3267 \cdot p + 23000000}{63510800 \cdot p + 3267 \cdot p^2 + 620000000000} \end{pmatrix}$$

Рис. 1.28

После выполнения алгебраических преобразований получим

$$I_2(p) := \frac{-8264}{p^2 + 19440p + 189810^5}, \quad I_3(p) := \frac{(0.80645p + 5677)}{(p^2 + 19440p + 189810^5)}.$$

Емкость на операторной схеме замещения цепи изображается операторным сопротивлением и источником ЭДС, учитывающим ненулевые начальные условия. Запишем изображение напряжения на емкости (см. рис. 1.27):

$$U_C(p) = \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{p \cdot C} \cdot I_2(p) = \frac{u_c(0)}{p} + U_1(p).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$U_C(p) := \frac{80.645}{p} + \frac{-1.53 \times 10^{10}}{p \cdot (p^2 + 19440p + 189810^5)}$$

По изображению $I_3(p)$ находим оригинал тока $i_3(t)$ с помощью теоремы разложения (см. подразд. 1.2):

$$i_3(t) = \sum_{k=1}^N \frac{M_1(p_k)}{M_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t},$$

где p_k – k -й корень характеристического уравнения $M_2(p) = 0$; N – порядок характеристического уравнения; $M_2' = [dM_2(p)/dp]$ – производная полинома $M_2(p)$.

Для тока в индуктивности $i_3(t)$ запишем

$$M_1(p) = 0,80645 \cdot p + 5677;$$

$$M_2(p) = p^2 + 19440 \cdot p + 189800000;$$

$$M_2'(p) = 2p + 19440.$$

Найдем корни характеристического уравнение средствами MathCAD:

$$\text{Given } p^2 + 19440 \cdot p + 189.8 \cdot 10^6 = 0 \quad \text{Find } (p)^T \rightarrow \begin{pmatrix} -9720. - 9763.2781380026247821 \cdot i \\ -9720. + 9763.2781380026247821 \cdot i \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при экспонентах в случае комплексно сопряженных корней тоже будут комплексно сопряженными, поэтому при суммировании мнимая часть будет равна нулю и ток $i_3(t)$ можно определить как удвоенное значение вещественной части первого или второго слагаемого (см. подразд. 1.2):

$$i_3(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{M_1(p_1)}{M_2'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right].$$

После подстановки в последнее выражение численных значений получим:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{0.806 \cdot (-9720 + j \cdot 9763) + 5674}{2 \cdot (-9720 + j \cdot 9763) + 19440} \cdot e^{-(9720 + j \cdot 9763) \cdot t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} [0.8359 \cdot e^{j15^\circ} \cdot e^{-9720 \cdot t} \cdot e^{j9763 \cdot t}] = \operatorname{Re} [0.8359 \cdot e^{-9720 \cdot t} (\cos(9763 \cdot t + 15^\circ) + \\ &+ j \sin(9763 \cdot t + 15^\circ))] = 0.8359 \cdot e^{-9720 \cdot t} \cdot \cos(9763 \cdot t + 15^\circ) = \\ &= 0.8359 \cdot e^{-9720 \cdot t} \cdot \sin(9763 \cdot t + 105^\circ). \end{aligned}$$

Найдем ток $i_3(t)$ средствами MathCAD:

$$\begin{aligned} M1(p) &:= 0.806 p + 5677 & M2(p) &:= p^2 + 19440 p + 1897810^4 \\ dM2(p) &:= 2 \cdot p + 19440 & i3(t) &:= 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{M1(p1)}{dM2(p1)} \cdot e^{p1 \cdot t} \right) \end{aligned}$$

Амплитуду I_{m3} и начальную фазу ψ_{i3} тока $i_3(t)$ находим из выражений

$$I_{3m} := 2 \cdot \frac{M1(p1)}{dM2(p1)} \quad I_{3m} = 0.806 + 0.221i \quad |I_{3m}| = 0.836 \quad \psi_{i3} := \arg(I_{3m}) + \frac{\pi}{2} \quad \psi_{i3} = 1.838$$

Запишем конечный результат:

$$i_3(t) := |I_{3m}| \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_{cb} \cdot t + 1.838) \quad i_3(t) := 0.836 e^{-9730 \cdot t} \sin(9762 t + 1.838)$$

Переходное напряжение на емкости вычислим, используя полученное ранее изображение $U_C(p)$ и свойство линейности преобразования Лапласа.

Сумме изображений $U_C(p) = u_C(0)/p + U_1(p)$ будет соответствовать сумма оригиналов $u_C(t) = u_C(0) + u_1(t)$, где

$$U_1(p) = \frac{-153 \cdot 10^8}{p \cdot (p^2 + 19440 \cdot p + 189800000)} = \frac{N_1(p)}{p \cdot N_2(p)}.$$

Изображению $u_C(0)/p$ в области оригиналов будет соответствовать константа $u_C(0) = 80,645$ В. Оригинал $u_1(t)$ находим по теореме разложения с нулевым корнем (см. подразд. 1.2). Характеристическое уравнение $N_2(p) = 0$ имеет три корня: $p_1 = 0$; $p_2 = -\delta + j\omega_{CB} = -9720 + j9762$; $p_3 = -9720 - j9762$.

Следовательно,

$$u_2(t) = \frac{N_1(0)}{N_2(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{N_1(p_2)}{p_2 N_2'(p_2)} \cdot e^{p_2 t} \right] = \frac{-153 \cdot 10^8}{1898 \cdot 10^5} + 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{-153 \cdot 10^8}{p_2 \cdot (2 \cdot p_2 + 19440)} \cdot e^{-9720 \cdot t} e^{j9762 \cdot t} \right].$$

После подстановки численных значений и выполнения всех преобразований получим

$$u_1(t) = -80,6 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-153 \cdot 10^8}{2 \cdot (-9720 + j \cdot 9762)^2 + 19440(-9720 + j9762)} \right] =$$

$$= -80,6 + 113,72 e^{-9720 \cdot t} \cdot \sin(9762 \cdot t + 45,1^\circ).$$

Складывая $u_C(0) = 80,6$ и $u_1(t)$, находим напряжение на емкости

$$u_C(t) = 113,72 \cdot e^{-9720 \cdot t} \cdot \sin(9762 \cdot t + 45,1^\circ) \text{ мВ.}$$

Найдем напряжение $u_C(t)$ средствами MathCAD:

$$U_C(p) := \frac{80.6}{p} + \frac{-153 \cdot 10^8}{p \cdot (p^2 + 19440p + 189.8 \cdot 10^6)} \quad U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + U_1(p)$$

Изображению $u_C(0)/p$ в области оригиналов будет соответствовать константа $u_C(0) = 80,6$ В. Оригинал $u_1(t)$ находим по теореме разложения с нулевым корнем (см. подразд. 1.2):

$$u_1(t) := \frac{N_1(0)}{N_2(0)} + 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(p_2)}{p_2 \cdot dN_2(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t} \right),$$

где

$$N_1(p) := -153 \cdot 10^8 \quad N_1(0) = -1.53 \times 10^{10} \quad N_1(p_2) = -1.53 \times 10^{10} \quad dN_2(p_2) := 2 \cdot p_2 + 19440$$

$$N_2(p) := p^2 + 19440 \cdot p + 18978 \cdot 10^4 \quad N_2(0) = 1.898 \times 10^8$$

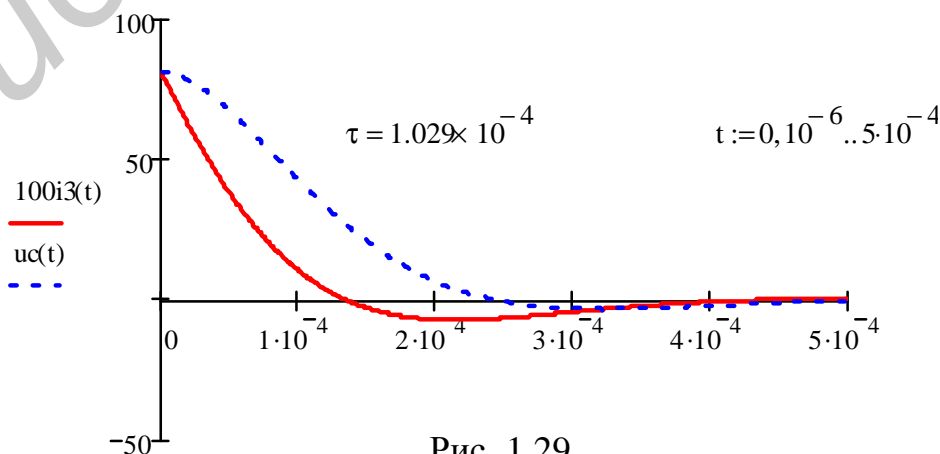


Рис. 1.29

После подстановки численных значений и выполнения всех преобразований найдем амплитуду и начальную фазу $u_C(t)$:

$$U_{cm} := \frac{2 N1(p2)}{p2 \cdot dN2(p2)} \quad U_{cm} = 80.622 - 80.275i \quad |U_{cm}| = 113.771$$

$$\psi_u := \arg(U_{cm}) + \frac{\pi}{2} \quad \psi_u = 0.788$$

$$u_C(t) := u_{c0} + u_{c1}(t) \quad u_C(t) := 113.77e^{-9720 \cdot t} \cdot \sin(9762t + 0.788)$$

Кривые тока $i_3(t)$ и напряжения на емкости $u_C(t)$ построим средствами MathCAD (рис. 1.29).

1.5.4. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях при импульсных воздействиях

Исходные данные согласно варианту (шифр 630101, вариант 2) таковы.

Ключ К1 замкнут. Ключ К2 находится в положении 1 (см. рис. 1.16).
 Параметры схемы: $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 21$ Ом; $R_3 = 24$ Ом; $C = 0,53$ мкФ; ЭДС (согласно рис. 1.15, а); $k = 7$.

Расчет переходных и импульсных характеристик

а) Цепь (рис. 1.30, а) подключается к источнику ЭДС $E = 1$ В.

Так как в цепи имеется ветвь с емкостью, целесообразно начинать расчет с определения $u_C(t)$. Рассчитаем напряжение $u_C(t)$ классическим методом.

Расчет цепи до коммутации (см. рис. 1.30, а – ключ К2 разомкнут).
 Напряжение на конденсаторе $u_C(0^-)$ равно нулю. Согласно второму закону коммутации напряжение на конденсаторе в первый момент после коммутации при $t = 0$ равно $u_C(0) = u_C(0^-) = 0$.

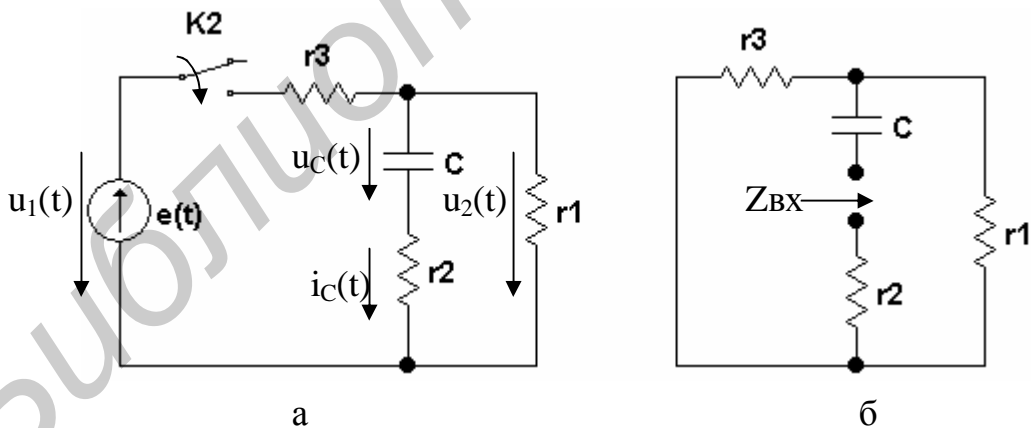


Рис. 1.30

Расчет установившегося процесса после коммутации (см. рис. 1.30, а – ключ К2 замкнут). Напряжение на конденсаторе равно

$$U_{Cy} = R_1 \cdot I_{3y} = R_1 \cdot E / (R_1 + R_3) = 100 \cdot 1 / (100 + 24) = 0,806 \text{ В.}$$

Для составления характеристического уравнения найдем входное сопротивление в цепи после коммутации по отношению ко второй ветви (рис. 1.30, б):

$$Z_{BX}(p) = R_2 + \frac{1}{pC} + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) Cp + R_1 + R_3}{(R_1 + R_3) Cp} = 0.$$

Единственный корень этого уравнения равен

$$p_1 = -\frac{R_1 + R_3}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) C} = -\frac{100 + 24}{(100 \cdot 21 + 100 \cdot 24 + 21 \cdot 24) \cdot 0,53 \cdot 10^{-6}} = -46755 \frac{1}{c}$$

Решение ищем в виде (см. подразд. 1.1)

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{CCB}(t) = 0,80645 + A \cdot e^{p_1 t}$$

Для момента времени $t = 0$ определяем постоянную интегрирования A :

$$u_C(0) = 0,80645 + A = 0, \text{ откуда } A = -0,80645 \text{ В.}$$

Таким образом, $u_C(t) = 0,80645 - 0,80645 \cdot e^{-46755 \cdot t}$ В.

Находим ток $i_C(t)$ и напряжение $u_2(t)$:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -0,806 \cdot C \cdot (-46755) \cdot e^{-46755 \cdot t} = 19,987 \cdot 10^{-3} e^{-46755 \cdot t} \text{ А;}$$

$$u_2(t) = u_C(t) + R_2 \cdot i_C(t) = 0,80645 - 0,386787 \cdot e^{-46755 \cdot t} \text{ В.}$$

Переходные характеристики находим как отношение тока $i_C(t)$ и напряжения $u_2(t)$ к единичному напряжению $E = 1$ В, а импульсные – как производные от переходной функции цепи.

$$y(t) = i_C(t)/E = 19,987 \cdot 10^{-3} e^{-46755 \cdot t} \text{ См – переходная проводимость;}$$

$$h_U(t) = u_2(t)/E = 0,80645 - 0,386787 \cdot e^{-46755 \cdot t} \text{ В – переходная характеристика;}$$

$$h_{\delta i}(t) = y(0) \cdot \delta(t) + dy(t)/dt = 19,987 \cdot 10^{-3} \cdot \delta(t) - 934,35 \cdot e^{-46755 \cdot t};$$

$$h_{\delta u}(t) = h_U(0) \cdot \delta(t) + dh_U(t)/dt = 0,41966 \cdot \delta(t) + 18084 \cdot e^{-46755 \cdot t},$$

где $h_{\delta i}(t)$, $h_{\delta u}(t)$ – импульсные характеристики соответственно по току и напряжению.

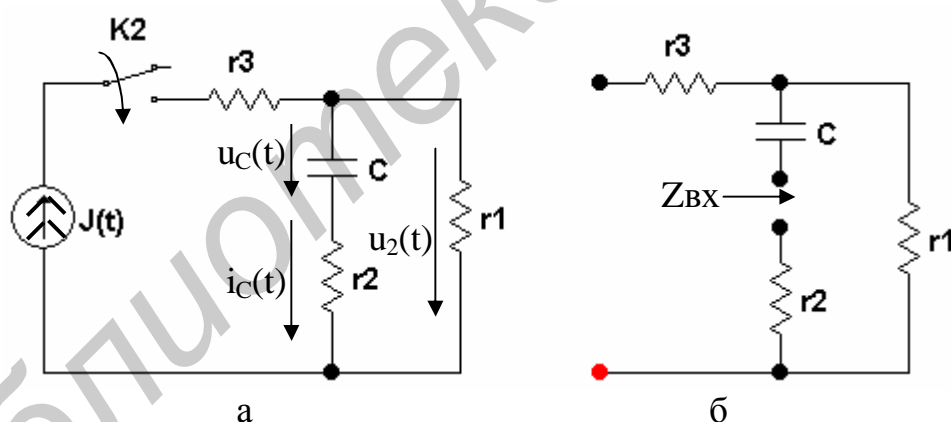


Рис. 1.31

б) Цепь (рис. 1.31, а) подключается к источнику тока $J = 1$ А.

Рассчитаем напряжение $u_C(t)$ классическим методом.

Согласно второму закону коммутации $u_C(0) = u_C(0-) = 0$.

В установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно

$$U_{Cy} = R_1 \cdot J_3 = 100 \cdot 1 = 100 \text{ В.}$$

Для составления характеристического уравнения найдем входное сопротивление цепи после коммутации по отношению ко второй ветви (рис. 1.31, б):

$$Z_{BX}(p) = R_2 + \frac{1}{pC} + R_1 = \frac{(R_2 + R_1) \cdot C \cdot p + 1}{Cp} = 0.$$

Единственный корень этого уравнения равен

$$p_1 = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} = -\frac{1}{(100 + 21) \cdot 0,53 \cdot 10^{-6}} = -15593 \frac{1}{c}.$$

Решение ищем в виде $u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{CCB}(t) = 100 + A \cdot e^{p_1 t}$.

Для момента времени $t = 0$ определяем постоянную интегрирования A :

$$u_C(0) = 100 + A = 0, \text{ откуда } A = -100.$$

Таким образом, $u_C(t) = 100 - 100 \cdot e^{-15593 \cdot t}$ В.

Находим ток $i_C(t)$ и напряжение $u_2(t)$:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -100 \cdot C \cdot (-15593) \cdot e^{-15593 \cdot t} = 0,826446 \cdot e^{-15593 \cdot t} \text{ А};$$

$$u_2(t) = u_C(t) + R_2 \cdot i_C(t) = 100 - 82,6446 \cdot e^{-15593 \cdot t} \text{ В}.$$

Переходные и импульсные характеристики тока $i_C(t)$ и напряжения $u_2(t)$ имеют следующий вид:

$$h_i(t) = i_C(t)/J = 0,826446 \cdot e^{-15593 \cdot t} \text{ – переходная характеристика по току};$$

$$z(t) = u_2(t)/J = 100 - 82,6446 \cdot e^{-15593 \cdot t} \text{ Ом – переходное сопротивление};$$

$$h_{\delta i}(t) = h_i(0) \cdot \delta(t) + dh_i(t)/dt = 0,826 \cdot \delta(t) - 224,2 \cdot e^{-15593 \cdot t};$$

$$h_{\delta u}(t) = z(0) \cdot \delta(t) + dz(t)/dt = 17,355 \cdot \delta(t) + 1288677 \cdot e^{-15593 \cdot t},$$

где $h_{\delta i}(t)$, $h_{\delta u}(t)$ – импульсные характеристики соответственно по току и напряжению.

Рассчитаем переходный процесс с помощью интеграла Дюамеля средствами MathCAD, если на входе цепи (см. рис. 1.30, а) действует $e(t)$, которая изображена на рис. 1.15, а.

Запишем сигнал (см. рис. 1.15, а) аналитически на каждом интервале времени. Длительность импульса при воздействии на входе источника ЭДС равна $t_H = t_2 = k \cdot \tau = 7 \cdot 21,39 \cdot 10^{-6} = 149,8 \cdot 10^{-6}$ с; принимаем $t_2 = 15 \cdot 10^{-5}$ с; $t_1 = t_2/3 = 5 \cdot 10^{-5}$ с; где $\tau = -1/p_1 = 21,39 \cdot 10^{-6}$ с.

На интервале $0 < t < t_1$ $e_1(0) = 40$ мВ, $e_1(t) = 40$ мВ.

На интервале $t_1 < t < t_2$ $\Delta u_2 = e_2(t_1) - e_1(t_1) = -60 - 40 = -100$ мВ, $e_2(t) = -100 + k_2 \cdot t = -100 + 800000 \cdot t$ мВ,

где $k_2 = [e_2(t_2) - e_2(t_1)]/(t_2 - t_1) = (20 + 60)/(15 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5}) = 800000$ мВ/с.

На интервале $t_2 < t < t_3 = 5 \cdot t_1 = 25 \cdot 10^{-5}$ с, $\Delta u_3 = e_3(t_2) - e_2(t_2) = -20$ мВ, $e_3(t) = 0$.

Для выполнения расчета введем исходные данные k , p , τ , $y(t)$, $h(t)$, t_1 , t_2 , t_3 , e_1 , $e_2(t)$, $e_3(t)$, Δu_2 , Δu_3 в документ MathCAD.

$$k := 7 \quad p := -4.6755 \times 10^4 \quad \tau = 2.139 \times 10^{-5}$$

$$y(t) := 19.987 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-46755 \cdot t}$$

$$h(t) := 0.80645 - 0.386787 \cdot e^{-46755 \cdot t}$$

$$t_2 := 15 \cdot 10^{-5} \quad t_1 := \frac{t_2}{3}$$

$$t_3 := 25 \cdot 10^{-5}$$

$$e_1 := 40 \quad e_2(t) := -100 + 8 \cdot 10^5 \cdot t \quad e_3(t) := 0 \quad \Delta u_2 := -100 \quad \Delta u_3 := -20$$

Воспользуемся первой формой записи интеграла Дюамеля в интервале времени $0 < t < t_1$:

$$i_C(t) = e_1(0) \cdot y(t) + \int_0^t e_1'(\tau) \cdot y(t-\tau) \cdot d\tau; \quad u_2(t) = e_1(0) \cdot h_U(t) + \int_0^t e_1'(\tau) \cdot h_U(t-\tau) \cdot d\tau,$$

где $y(t-\tau) = 19,987 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-45775 \cdot (t-\tau)}$ См; $h_U(t) = 0,806 - 0,387 \cdot e^{-46755 \cdot t}$; $h_U(t-\tau) = 0,806 - 0,387 \cdot e^{-46755 \cdot (t-\tau)}$; $e_1'(\tau) = de_1(\tau)/d\tau = 0$; $e_1(0) = e_1 = 40$ В.

На всех интервалах расчет проведем средствами MathCAD. Воспользуемся символьными операциями с математическими выражениями. Введем имя переменной $i_C(t)$. Нажмем кнопку «:=» на панели инструментов «Арифметика» (Calculator). Наберем на клавиатуре аналитическое выражение. Нажмем кнопку определенного интеграла на панели инструментов «Матанализ» (Calculus). На экране появится шаблон определенного интеграла. Наберем на клавиатуре подынтегральную функцию и пределы интеграла. Нажмем кнопку «→» на панели инструментов «Символы» (Symbolic). В создаваемом блоке появится значок «→». Нажав на клавишу «Enter», получим результат.

В интервале времени $0 \leq t \leq t_1$:

$$ic1(t) := e_1 \cdot y(t) + \int_0^t k_1 \cdot y(t-\tau) \, d\tau \rightarrow .7994800000000000000 \exp(-46755 \cdot t)$$

$$u21(t) := e_1 \cdot h(t) + \int_0^t k_1 \cdot h(t-\tau) \, d\tau \rightarrow 32.25800 - 15.471480 \cdot \exp(-46755 \cdot t),$$

где $k_1 = 0$ – производная по времени от $e_1 = 40$ В.

В интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$

$$ic2(t) := e_1 \cdot y(t) + \int_0^{t_1} k_1 \cdot y(t-\tau) \, d\tau + \Delta u_2 \cdot y(t-t_1) + \int_{t_1}^t k_2 \cdot y(t-\tau) \, d\tau$$

$$ic2(t) \rightarrow .7994800000000000000 \exp(-46755 \cdot t) - 1.9987000000000000000 \exp\left(-46755 \cdot t + \frac{9351}{4000}\right)$$

$$u22(t) := e_1 \cdot h(t) + \int_0^{t_1} k_1 \cdot h(t-\tau) \, d\tau + \Delta u_2 \cdot h(t-t_1) + \int_{t_1}^t k_2 \cdot h(t-\tau) \, d\tau$$

$$u22(t) \rightarrow -87.263 + 645160 \cdot t + 453.709 \cdot \exp(-46755 \cdot t),$$

где $k_2 = 800000$ В/с – производная по времени от $e_2(t) = -100 + 800000 \cdot t$.

В интервале времени $t_2 \leq t \leq t_3$:

$$ic3(t) := e_1 \cdot y(t) + \int_0^{t_1} k_1 \cdot y(t-\tau) \, d\tau + \Delta u_2 \cdot y(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} k_2 \cdot y(t-\tau) \, d\tau + \Delta u_3 \cdot y(t-t_2) + \int_{t_2}^t k_3 \cdot y(t-\tau) \, d\tau$$

$$ic3(t) \rightarrow -87.633 \cdot \exp(-46755 \cdot t)$$

$$u23(t) := e_1 \cdot h(t) + \Delta u_2 \cdot h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} k_2 \cdot h(t-\tau) \, d\tau + \Delta u_3 \cdot h(t-t_2)$$

$$u23(t) \rightarrow 1695 \cdot \exp(-46755 \cdot t),$$

где $k_1 = 0$, $k_2 = 800000$ В/с и $k_3 = 0$ – производные от $e_1(t) = 40$, $e_2(t) = -100 + 800000 \cdot t$ и $e_3(t) = 0$.

Выпишем результаты расчета и построим графики.

В интервале времени $0 \leq t \leq t_1$:

$$i_{c1}(t) := .799358 \cdot \exp(-46755 \cdot t) \quad u_{21}(t) := 32.258 - 15.47 \cdot \exp(-46755 \cdot t)$$

В интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$i_{c2}(t) := 0.342 - 23.445 \cdot \exp(-46755 \cdot t) \quad u_{22}(t) := -87.263 + 645160 \cdot t + 453.709 \cdot \exp(-46755 \cdot t)$$

В интервале времени $t_2 \leq t \leq t_3$:

$$i_{c3}(t) := -87.633 \cdot \exp(-46755 \cdot t) \quad u_{23}(t) := 1695 \cdot \exp(-46755 \cdot t)$$

$$t := 0, 0.000001 \cdot t_3 \quad e(t) := \text{if}(t \leq t_1, e_1(t), \text{if}(t \leq t_2, e_2(t), e_3(t)))$$

$$i_c(t) := \text{if}(t \leq t_1, i_{c1}(t), \text{if}(t \leq t_2, i_{c2}(t), i_{c3}(t))) \quad u_2(t) := \text{if}(t \leq t_1, u_{21}(t), \text{if}(t \leq t_2, u_{22}(t), u_{23}(t)))$$

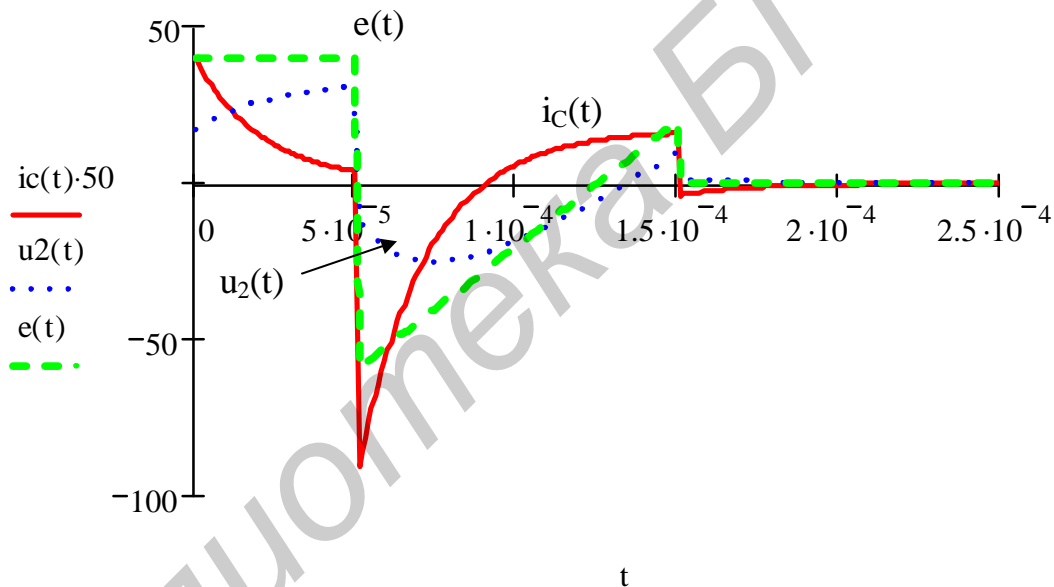


Рис. 1.32

Введем формулу, в которой задается переменная t , которая определяет диапазон изменения аргумента на графике функции от 0 до t_3 с шагом $h = 0.000001$. Введем имя переменной t . Нажмем кнопку «:=». Наберем на клавиатуре 0 и запятую. Нажмем кнопку «m...n» на панели инструментов «Матрицы». В черных квадратиках введем величину шага и t_3 . Чтобы задать условия для построения графиков на трех интервалах, воспользуемся оператором if . Нажмем кнопку на панели инструментов «Графики» (Graph) (см. рис. 1.9). В поле ввода, расположенном возле оси ординат, вводим имя функции $i_c(t)$. Нажмем на клавишу «,». Появится новое поле ввода для функции $u_2(t)$. Еще раз нажмем на клавишу «,». В новое поле ввода введем имя функции $e(t)$. Щелкнем на рабочей области документа вне поля графика. На графике (рис. 1.32) будут построены все три функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Батура, М. П. Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – Минск : Выш. шк., 2004. – 608 с.
2. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке [и др.]. – М. : Энергоатом-издат, 1989. – 528 с.
3. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей / Г. И. Атабеков. – М. : Энергия, 1970. – 424 с.
4. Шебес, М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990. – 544 с.
5. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1984. – 559 с.
6. Теория линейных электрических цепей / Б. П. Афанасьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1973. – 592 с.
7. Методическое пособие по использованию вычислительной техники при выполнении домашних, курсовых и лабораторных работ по курсам ТОЭ, ТЛЕЦ, ОТЦ / И. А. Федорова [и др.]. – Минск : МРТИ, 1980. – 36 с.
8. Свито, И. Л. Конспект лекции раздела курса ТОЭ и ОТЦ «Расчет переходных процессов методом переменных состояния» / И. Л. Свито. – Минск : МРТИ, 1993. – 42 с.
9. Методические указания по выполнению контрольных заданий по курсу «Электротехника» для студ. заоч. формы обуч. / сост. Ф. Г. Шевченко. – Минск : БГУИР, 1998. – 38 с.
10. Методические указания к выполнению контрольных заданий по курсу «Электротехника» для студ. спец. Т.09.01.01 заоч. формы обуч. / сост. Ф. Г. Шевченко. – Минск : БГУИР, 2000. – 56 с.
11. Методические указания к выполнению контрольных заданий по курсу «Электротехника» для студ. спец. 39.01.01 заоч. формы обуч. / сост. Ф. Г. Шевченко. – Минск : БГУИР, 2002. – 48 с.
12. Методические указания по курсу «Электротехника с основами энергосбережения» к самост. работе студ. спец. «Радиотехника» всех форм обуч. / сост. И. Л. Свито, Ф. Г. Шевченко. – Минск : БГУИР, 2004. – 55 с.

Учебное издание

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА С ОСНОВАМИ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ

Методическое пособие
к выполнению контрольных заданий
для студентов заочной формы обучения

Авторы-составители:
Свито Игорь Леонтьевич
Шевченко Феликс Георгиевич

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор М. В. Тезина

Подписано в печать 22.05.2007.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 2,3.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 400 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91.
Заказ 160.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6