

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра антенн и устройств СВЧ

**Д. В. Гололобов**

***ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН***

Конспект лекций  
для студентов специальности  
I-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»  
всех форм обучения

Минск 2007

УДК 621.371(076)  
ББК 22.336 я 7  
Г 61

**Р е ц е н з е н т**

доц. кафедры радиотехнических устройств БГУИР,  
канд. техн. наук И. Ю. Малевич

**Гололобов, Д. В.**

Г 61 Теория колебаний и волн: конспект лекций для студ. спец. I-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» всех форм обуч. / Д. В. Гололобов. – Минск : БГУИР, 2007. – 168 с.  
ISBN 978-985-488-218-5

В пособии излагаются современные взгляды на теорию колебаний и волн преимущественно в отрыве от их формирователей. Основой аналитического описания являются фундаментальные законы электродинамики и Фурье-представления. Рассмотрены характеристики сред, участвующих в процессах распространения радиоволн, их особенности при взаимодействии с тропо- и ионосферами.

**УДК 621.371(076)**  
**ББК 22.336 я 7**

**ISBN 978-985-488-218-5**

© Гололобов Д. В., 2007  
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2007

## ВВЕДЕНИЕ

В современной радиоэлектронике в качестве носителя информации применяют электрические колебания и волны.

По определению информация есть совокупность сведений о процессе, явлении в заданном объекте, о состоянии этого объекта.

Инструментом (носителем) информации об объектах являются колебания и волны.

Под *колебанием* понимается любой процесс, изменяющийся во времени.

*Волна* – колебательное движение в физической среде, а также распространение этого движения.

Для уяснения необходимости изучения теории колебаний и волн рассмотрим обобщенную схему канала радиосвязи, приведенную на рис. 1.

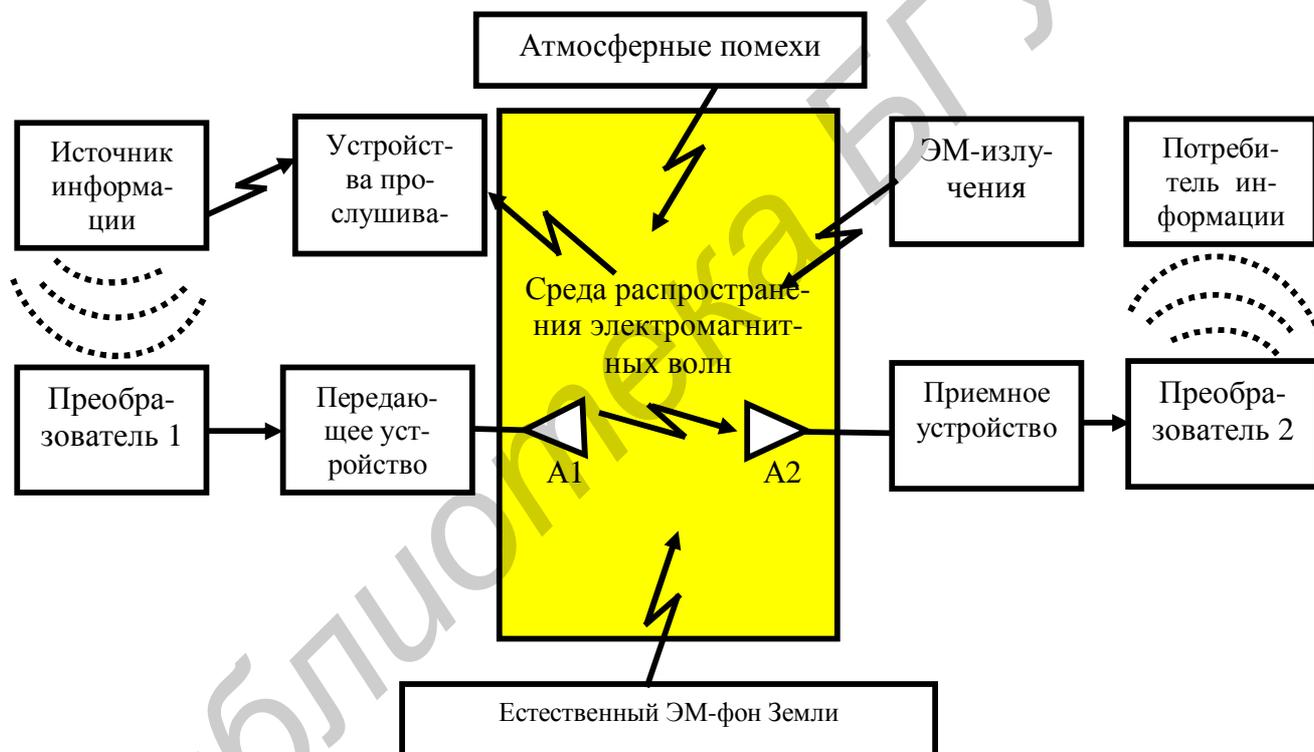


Рис. 1. Обобщенная схема реального канала радиосвязи

Радиоканал обязательно содержит в своем составе передающее устройство, которое формирует радиоколесание. Оно будет являться информативным, если содержит определенные сведения, полученные от источника информации. Эти сведения представляют собой колебания определенной природы – акустические, оптические, механические и др. Для преобразования таких колебаний в электрические используют специальные преобразователи (микрофон, видеокамера, датчики и др.). Процесс вложения информационного колебания в высокочастотное посредством изменения одного из его параметров называется модуляцией. К выходу передатчика подключают антенну A1, которая преобразует

высокочастотное колебание в электромагнитную волну (ЭМВ). В зависимости от параметров ЭМВ и особых условий ее распространения в среде с конечными электродинамическими параметрами определяется расстояние, на котором обеспечивается эффективный прием ЭМВ приемной антенной А2. На приемном конце осуществляется процесс выделения полезной информации из электрического колебания посредством его преобразования (селекция, усиление, демодуляция и др.). Для преобразования электрического колебания в колебание другой природы применяются специальные преобразователи (динамическая головка, телевизионная трубка, датчики и др.), обеспечивающие доставку информации до потребителя.

В процессе эксплуатации радиоканала возникают проблемы, связанные как с естественными и умышленными искажениями, так и с несанкционированным извлечением информационных колебаний.

К первой проблеме следует отнести действие помех – мешающих колебаний – естественной и искусственной природы. К основным видам естественных помех относятся атмосферные и космические помехи, создаваемые излучениями Солнца, звезд, галактик, земные – связанные с естественным электромагнитным излучением Земли, а также помехи, возникающие в процессе распространения ЭМВ. К искусственным относят промышленные помехи, создаваемые промышленными, научными, медицинскими и другими установками, и преднамеренные помехи, которые создаются для кратковременной или протяженной парализации работы отдельных радиоканалов.

При обеспечении безопасности объектов и информации требуется проводить ряд организационных и технических мероприятий, определяющих меры по созданию условий для нормального функционирования в среде потенциальных вредных воздействий и возможностей извлечения информации. Перехват информации может быть осуществлен на этапе ее формирования, преобразования и передачи по радиоканалу посредством специальных устройств прослушивания.

Второй по значимости (после радиоактивного воздействия) проблемой является воздействие на человека электромагнитных полей. Новые условия взаимодействия человека и окружающего мира жестко связаны с электрическими и магнитными полями. Все больше на передний план выходят вопросы экологии.

Создаваемая радиоаппаратура, обеспечивающая комфортные условия существования человека, параллельно создает целую гамму проблем, которую предстоит решать в ближайшем будущем. Это искусственные электромагнитные поля, создаваемые различной радиоэлектронной аппаратурой бытового и специального назначения.

В связи с этим в ближайшем будущем необходимо будет решать прикладные проблемы человечества, связанные с экологией, а именно:

- 1) исследование длительного воздействия электромагнитного излучения на человека;

2) установление причин неадекватного воздействия электромагнитных полей на изменение функций людей (при одинаковых условиях и фиксированном уровне воздействия изменение функций человека не однозначны);

3) влияние сформированной совокупности искусственных полей на организм человека;

4) влияние на живые организмы локализации естественных электрических и магнитных полей (гипомагнитные поля и др.);

5) воздействие человека на окружающий мир и связанное с этим ухудшение природной среды его обитания (озоновый слой – влияние на РРВ; техногенный фактор – воздействие на осадочный чехол земной поверхности; искусственные воздействия на метеообразования и пр.);

6) влияние концентрации различных объектов вокруг Земли, способствующей трансформации взаимодействия с солнечной системой и галактиками.

Третьей проблемой является рациональное использование существующих сформированных полей для создания новых радиоэлектронных систем и источников энергии.

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

## 1.1. Классификация колебаний

Характер изменения процесса во времени определяет вид колебания.

В зависимости от того, с какой вероятностью колебания могут быть предсказаны (определены или описаны), в конкретный момент времени они подразделяются на *детерминированные* (регулярные) и *случайные* (нерегулярные). Любое колебание, параметры которого могут быть предсказаны с вероятностью единица, является детерминированным. Параметры случайных колебаний изменяются во времени случайно и могут быть описаны с вероятностью меньше единицы.

Детерминированные колебания могут быть разделены на *периодические* и *непериодические*. Периодические колебания – это процесс, повторяющийся через конечный отрезок времени, называемый периодом:

$$S(t) = S(t \pm nT), \quad (1)$$

где  $n$  – любое целое число. Простейшим периодическим колебанием является *гармоническое* (рис. 2):

$$S(t) = A \cos y(t) = A \cos (\omega t + j), \quad (2)$$

где  $A, y(t)$  – амплитуда (размах) и полная фаза колебания;

$\omega, j$  – круговая частота и начальная фаза колебания.

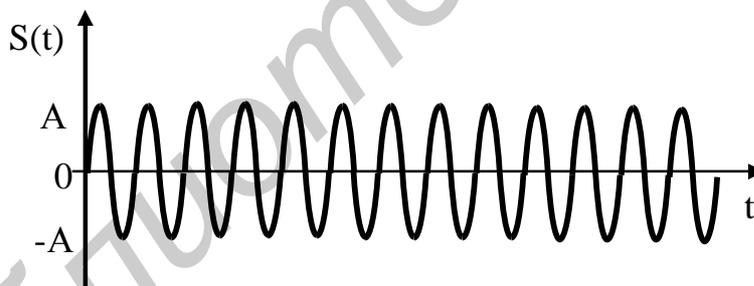


Рис. 2. Гармоническое колебание

Если форма колебания отличается от гармонической, то его называют *ангармоническим*. К таким колебаниям относят релаксационные и импульсные (рис. 3). Для описания ангармонических колебаний применяется разложение заданной функции по различным ортогональным системам функций.

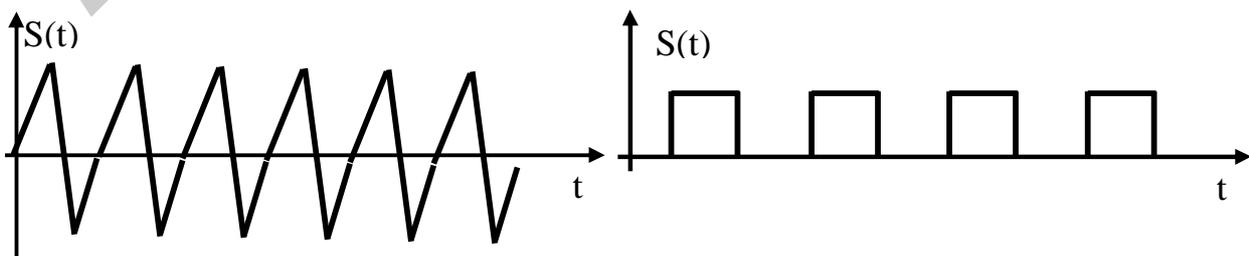


Рис. 3. Ангармонические колебания

Когда условие (1) не выполняется, то колебание называют непериодическим. Примеры таких колебаний приведены на рис. 4

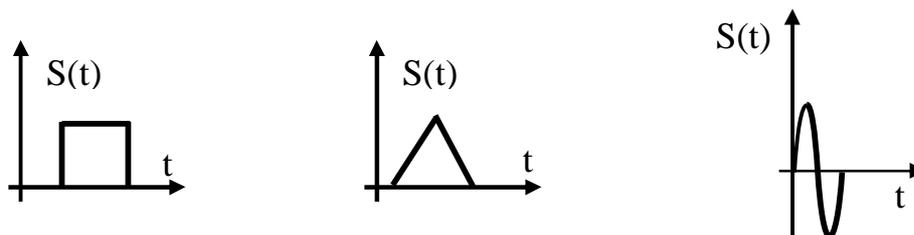


Рис. 4. Непериодические колебания

По характеру возникновения и поддержания колебания делятся на *собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания*. Физический объект, в котором реализуются колебания, называется *колебательной системой*. Если колебания возникают в колебательной системе в результате кратковременного внешнего воздействия, то они являются *свободными*. Когда колебания возникают в системе под действием периодических внешних сил, не зависящих от самой системы, говорят о *вынужденных* колебаниях. Если внешнее воздействие на колебательную систему сопровождается притоком дополнительной энергии через изменение одного из ее параметров, то формируемое колебание называется *параметрическим*. *Автоколебания* возникают в системе без внешнего воздействия.

В зависимости от свойств колебательной системы могут быть сформированы *инкрементные, декрементные и незатухающие* колебания. В случае формирования гармонического колебания на выходе колебательной системы имеет место

$$S(t) = Ae^{-at} \cos(\omega t + j), \quad (3)$$

где  $a$  – коэффициент затухания. Если  $a > 0$ , колебание является декрементным (затухающим, рис. 5, а), при  $a < 0$  колебание инкрементное (нарастающее, рис. 5, б) и при  $a = 0$  – незатухающее колебание.

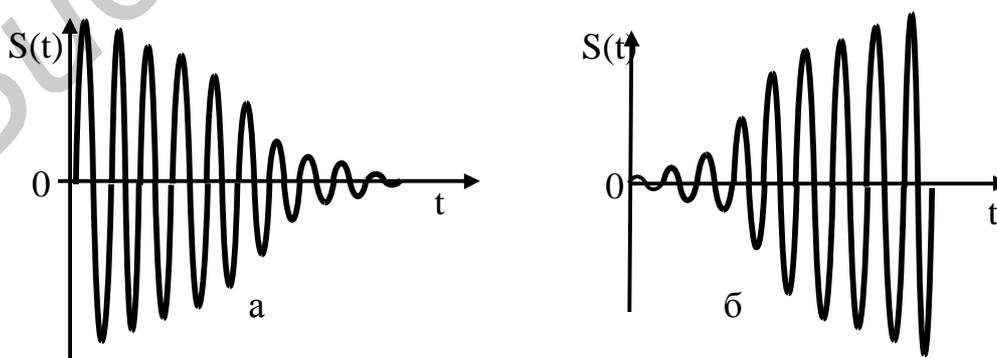


Рис. 5. Декрементное (а) и инкрементное (б) колебания

Колебания подразделяются по виду модуляции. Под *модуляцией* понимается процесс принужденного изменения одного или нескольких его параметров по закону другого колебания. *Амплитудная модуляция* (АМ) образуется при изменении во времени амплитуды  $A(t)$ , когда угловая компонента  $y(t)$  остается постоянной (рис. 6, а). *Угловая модуляция* (УМ) формируется при изменении полной фазы  $y(t)$ , а амплитуда остается постоянной (рис. 6, б). Когда подвергается изменению во времени и амплитуда  $A(t)$  и полная фаза  $y(t)$  (рис. 6, в), то говорят о *смешанной модуляции* (СМ).

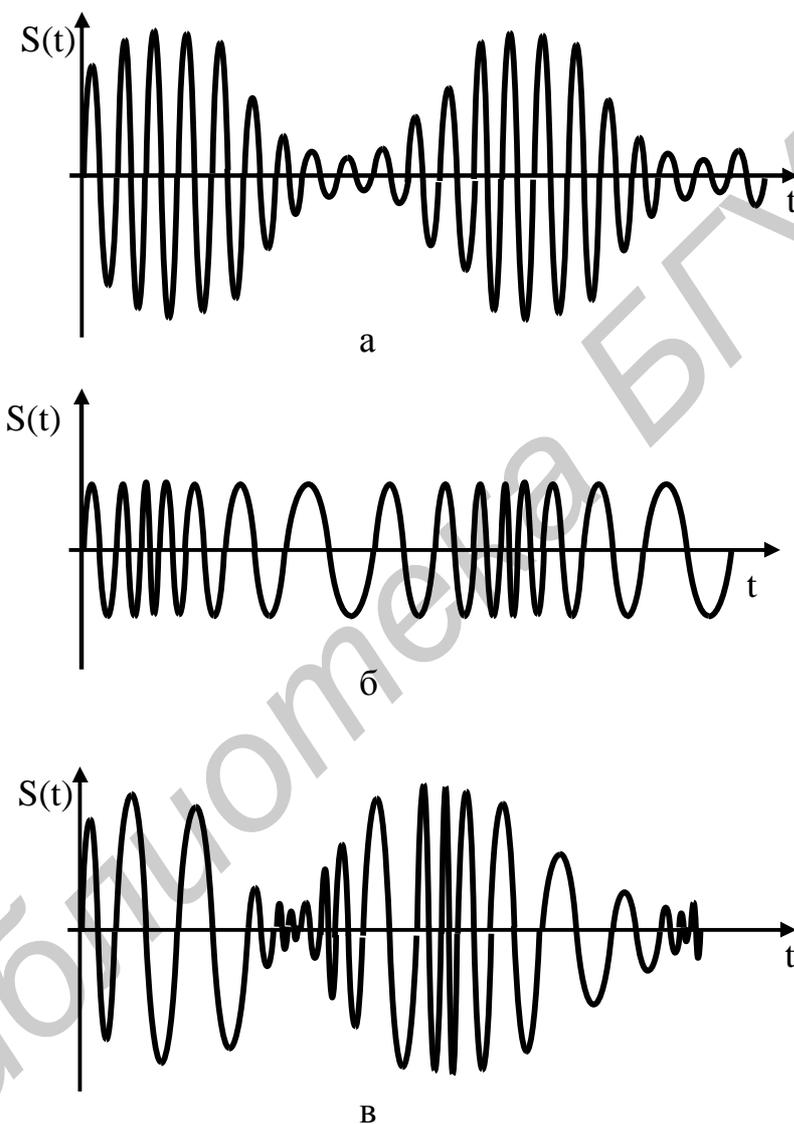


Рис. 6. Модулированные колебания:  
а – АМ; б – УМ; в – СМ

К отдельному виду модуляций относят *импульсную* (ИМ), при которой осуществляют изменение одного из параметров последовательности импульсных колебаний. Когда по закону управляющего колебания меняется амплитуда импульсов, то имеет место амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) (рис. 7, а); когда

изменяется длительность – широтно-импульсная (ШИМ) (рис. 7, б), а когда период последовательности – временно-импульсная модуляция (как разновидности ЧИМ и ФИМ, рис. 7, в).

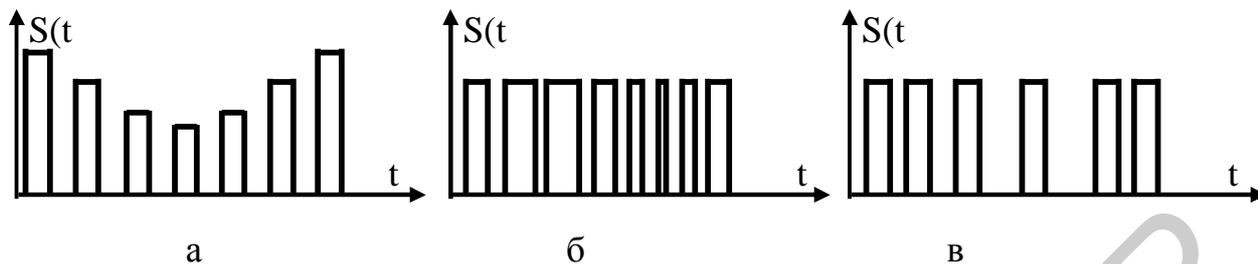


Рис. 7. Импульсно-модулированные колебания:  
а – АИМ; б – ШИМ; в – ВИМ

Если в качестве управляющего колебания при АМ, УМ и СМ применяется импульсное колебание, то говорят о *манипуляции*. На рис. 8 приведены примеры амплитудно-, частотно- и фазоманипулированных колебаний.

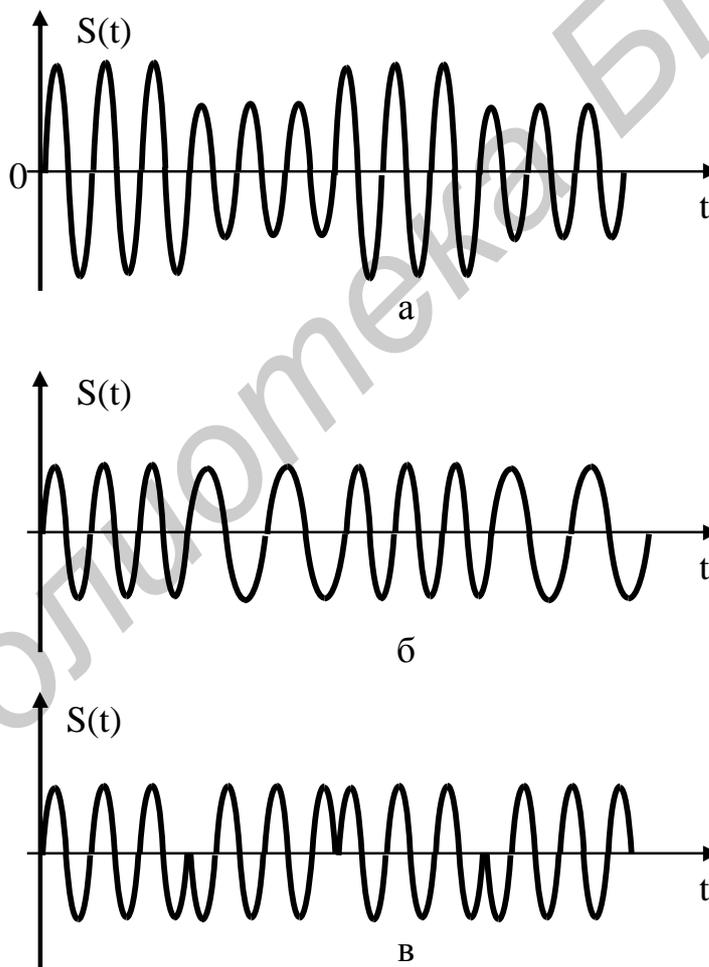


Рис. 8. Манипулированные колебания:  
а – амплитудная; б – частотная; в – фазовая

Колебания могут подвергаться преобразованиям по уровню и во времени. *Аналоговые* колебания непрерывны во времени и принимают значения из некоторого диапазона уровней (рис. 9, а), *дискретные* – принимают значения в отдельные моменты времени (рис. 9, б), *квантованные* – в разные моменты времени принимают отдельные уровни (рис. 9, в), *цифровые* – дискретны во времени и квантованы по уровню, которому соответствует отдельный цифровой код (рис. 9, г).

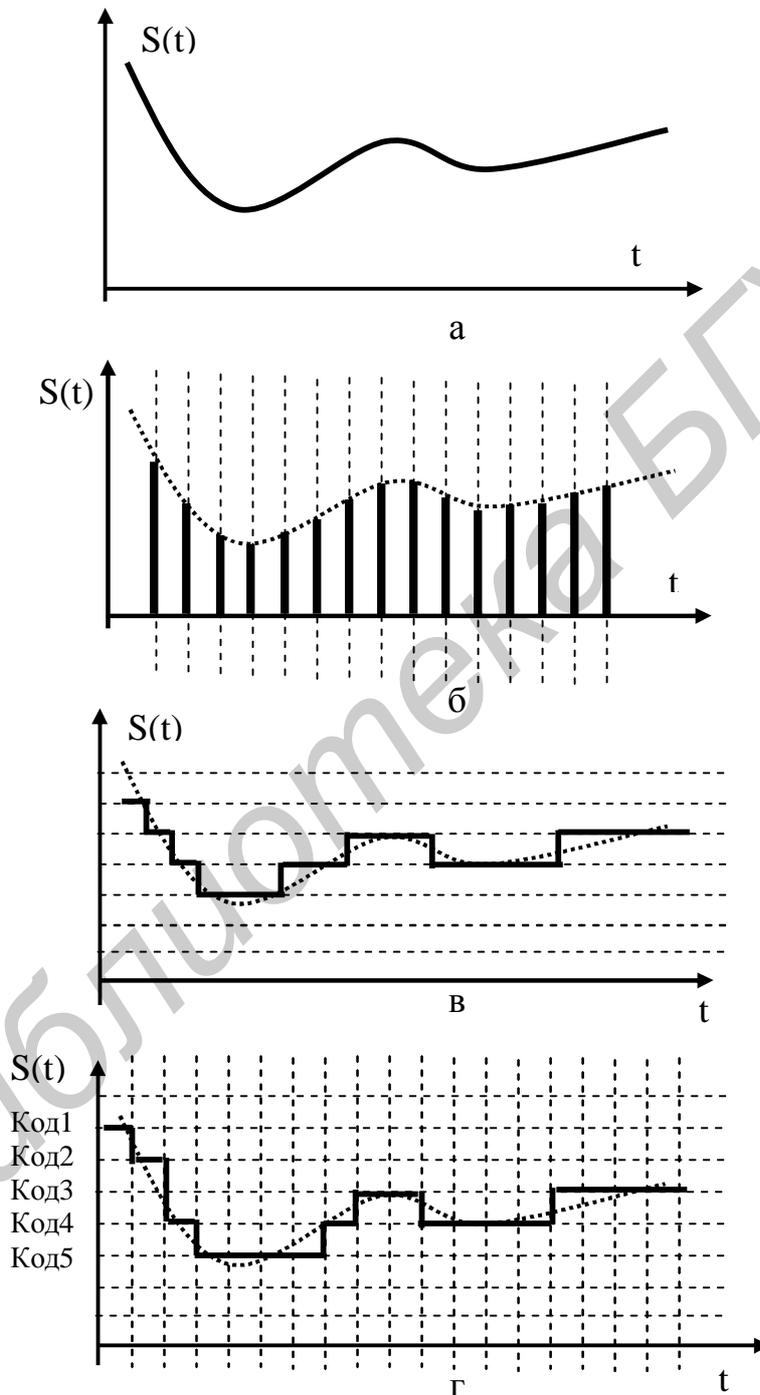


Рис. 9. Формы колебаний:  
а – аналоговые; б – дискретные; в – квантованные; г – цифровые

Случайные колебания не поддаются строгому математическому описанию, так как и амплитуда, и полная фаза изменяются по случайному характеру (рис. 10). Поэтому для оценки случайных колебаний прибегают к методам математической статистики.

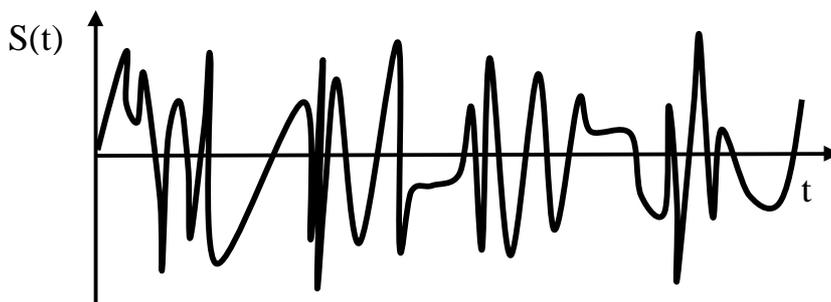


Рис. 10. Фрагмент случайного колебания

Приведенная классификация колебаний не является строгой.

## 1.2. Описание гармонического колебания

Периодически изменяемый во времени процесс электрической или акустической природы, представленный на рис. 11, может быть описан как

$$S(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - j_1) = A_0 \sin\left(\frac{2p}{T_0} t \pm \frac{p}{2} \pi j_1\right), \quad (4)$$

где  $A_0$  – амплитуда (размах) колебания, единица измерения – вольт, ампер, ватт и др.;

$\omega_0$  – круговая частота, рад/с;

$T_0 = 1/f_0$  – период, с;

$f_0$  – частота колебания, Гц;

$j_1 = \omega_0 t_1$  – начальная фаза колебания, рад;

$t$  – текущее время:  $-\infty < t < \infty$

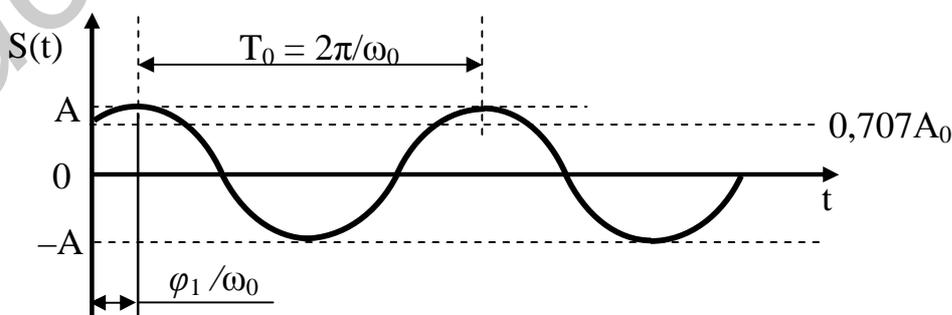


Рис. 11. Гармоническое колебание

Амплитудное значение, соответствующее уровню 0,707 от максимального пикового значения  $A_0$ , называется *действующим*  $A_d = 0,707 A_0$ .

Величина, обратная периоду  $T_0$  колебания, носит название *частоты*, которая связана с круговой  $\omega_0$  как

$$T_0 = 1/f_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad \omega_0 = 2\pi f_0.$$

Начальная фаза колебания  $j_1$  определяется системой отсчета. Как следует из (4), колебание может быть всегда представлено (задано) либо функцией косинуса, либо синуса. Фазовая компонента колебания особую роль играет при сложении или перемножении двух или нескольких колебаний. В этих случаях одно из них может быть представлено в виде опорного, относительно которого осуществляется отсчет фаз других колебаний.

### 1.3. Суперпозиция колебаний

#### 1.3.1. Соотношение фаз колебаний

Пусть гармоническое (тональное) колебание с амплитудой  $A_1$  изменяется по закону косинуса

$$S_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t, \quad (5)$$

а второе с той же амплитудой – по закону синуса (рис. 12):

$$S_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t = A_1 \cos(\omega_1 t + \pi/2). \quad (6)$$

В этом случае говорят, что первое колебание  $S_1(t)$  опережает по фазе колебание  $S_2(t)$  на  $j_1 = \omega_1 t_1 = \pi/2$  и находится в *квадратуре* (смысл этого понятия будет раскрыт в следующем подразделе).

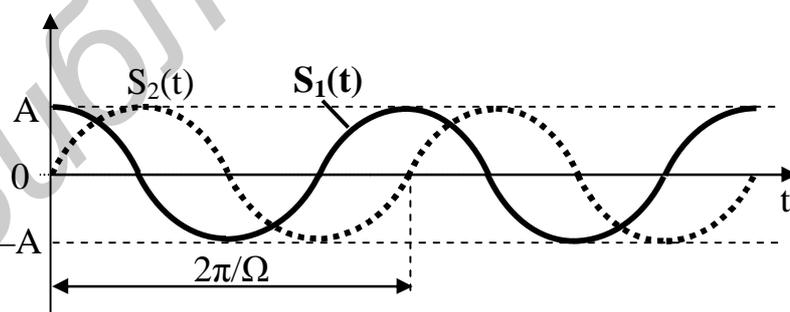


Рис. 12. Колебания  $S_1(t)$  опережает  $S_2(t)$

Если второе тональное колебание сдвинуто относительно первого на половину периода –  $\pi$  (рис. 13), то говорят, что колебания  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  находятся в *противофазе*, или они *антифазны*, *противофазны*. В этом случае

$$S_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + p/2) = A_1 \cos(\omega_1 t + p). \quad (7)$$

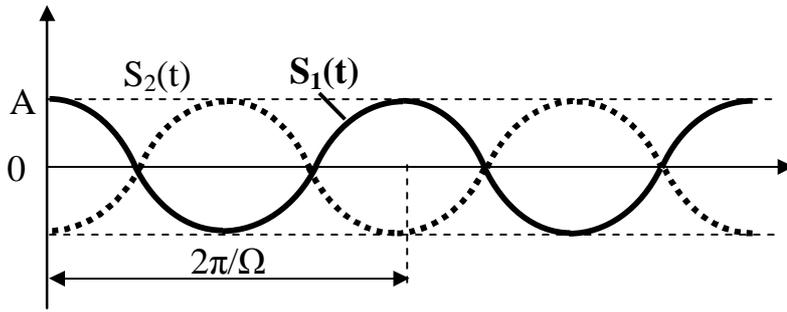


Рис. 13. Противофазные колебания

Если

$$S_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + p) = A_1 \cos(\omega_1 t + 3p/2), \quad (8)$$

то говорят, что колебание  $S_1(t)$  отстает от  $S_2(t)$  на  $p/2$  и находится в *квадратуре* (рис. 14).

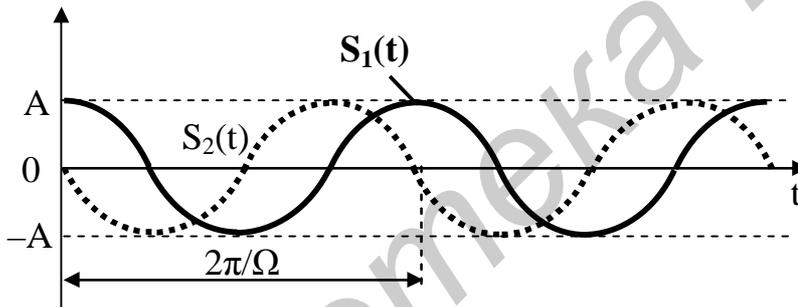


Рис. 14. Колебания  $S_1(t)$  отстает от  $S_2(t)$

Когда фазы двух колебаний совпадают (рис. 15), то говорят, что они находятся в фазе, или являются *синфазными*.

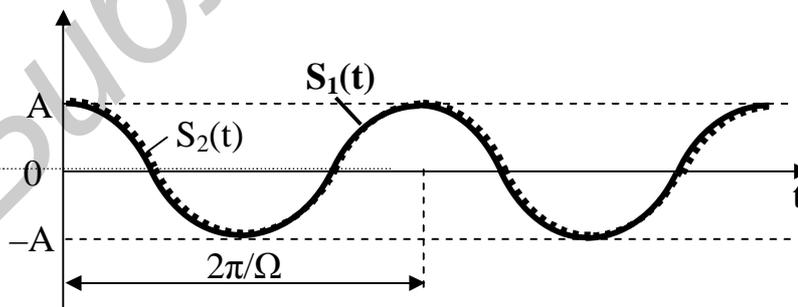


Рис. 15. Синфазные колебания

### 1.3.2. Сложение одночастотных колебаний с разными амплитудами и фазами

Представим суперпозицию двух колебаний  $S_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + j_1)$  и  $S_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 t + j_2)$  с произвольными амплитудами и начальными фазами на векторной диаграмме (рис. 16), используя некоторую ось отсчета ОВ. Определим амплитуду и фазу суммарного колебания, имея в виду, что частота  $\omega$  не изменна.

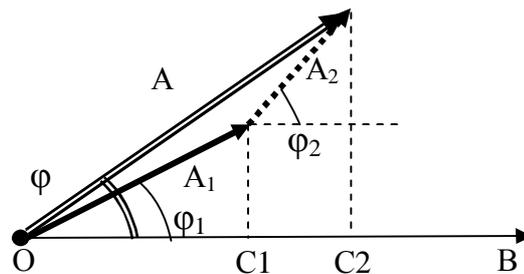


Рис. 16. Сложение произвольных колебаний

Из диаграммы следует

$$A \cos j = A_1 \cos j_1 + A_2 \cos j_2, \quad (9)$$

$$A \sin j = A_1 \sin j_1 + A_2 \sin j_2.$$

Возведем в квадрат выражения (9) и сложим их, тогда получим

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(j_1 - j_2), \quad (10)$$

$$j = \arctg\left(\frac{A_1 \sin j_1 + A_2 \sin j_2}{A_1 \cos j_1 + A_2 \cos j_2}\right). \quad (11)$$

Из последних выражений следует:

- 1) квадрат амплитуды суммарного колебания всегда положителен и зависит от соотношения амплитуд и начальных фаз двух колебаний;
- 2) фаза суммарного колебания также определяется амплитудами и начальными фазами колебаний  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ ;
- 3) частота результирующего колебания не изменяется.

В случае синфазного сложения колебаний амплитудные различия двух колебаний играют значительную роль. При этом амплитуда суммарного колебания будет равна сумме амплитуд двух колебаний (рис. 17, а):

$$S_1(t) + S_2(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t = (A_1 + A_2) \cos \omega_1 t. \quad (12)$$

В этом случае по суммарному колебанию сложно судить о вкладе каждой из амплитуд двух колебаний. На рис. 17, б приведена векторная диаграмма суперпозиции двух колебаний относительно заданной оси ОВ.

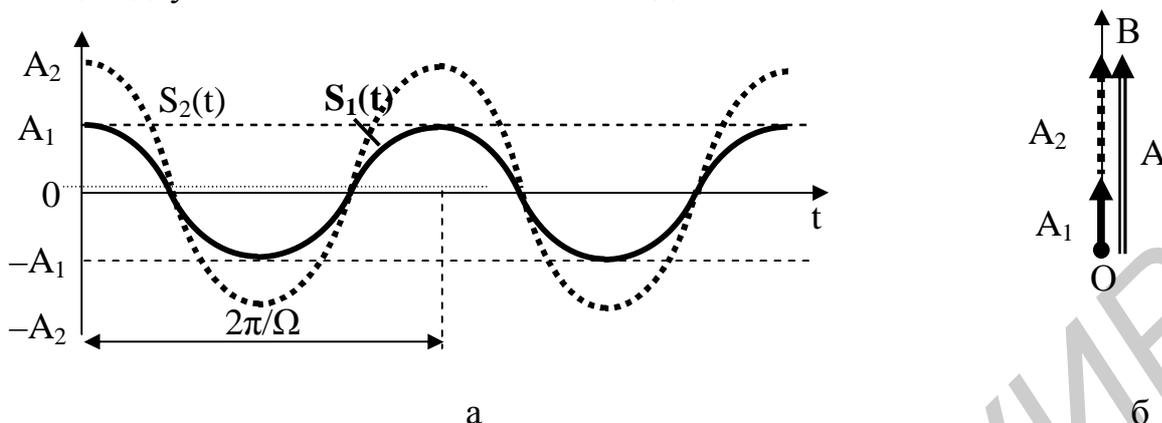


Рис. 17. Синфазное сложение колебаний

При противофазном сложении колебаний (рис. 18, а) амплитудное значение суммарного колебания будет определяться разностью амплитуд двух колебаний, т.к.

$$S_1(t) + S_2(t) = A_1 \cos w_1 t + A_2 (\cos w_1 t + \pi) = (A_1 - A_2) \cos w_1 t. \quad (13)$$

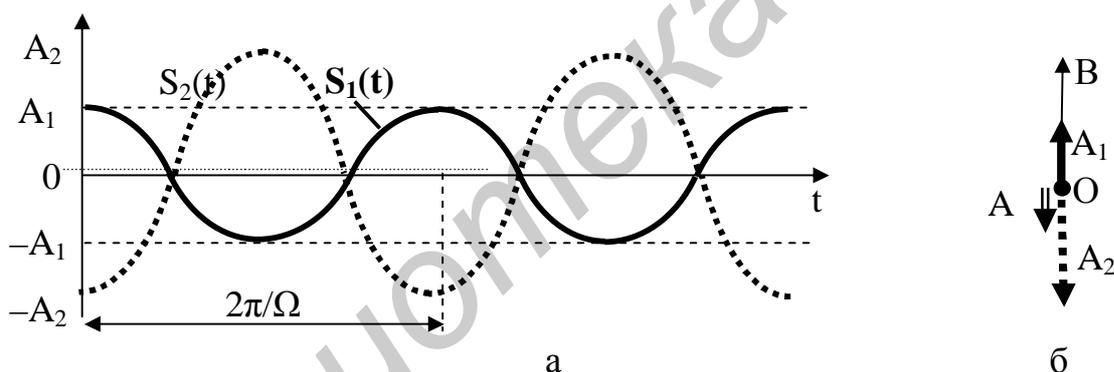


Рис. 18. Противофазное сложение колебаний

На рис. 18, б приведена векторная диаграмма суперпозиции двух противофазных колебаний относительно заданной оси ОВ.

Рассмотрим случай (рис. 19, а), когда

$$S_1(t) + S_2(t) = A_1 \cos w_1 t + A_2 (\cos w_1 t + p/2). \quad (14)$$

Из (10) следует, что амплитуда суммарного колебания при этом будет определяться как  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ . Это видно из диаграммы, приведенной на рис. 19, б. Фазовая компонента суммарного колебания будет зависеть от соотношения амплитуд двух колебаний и изменяться в пределах от 0 до 90°.

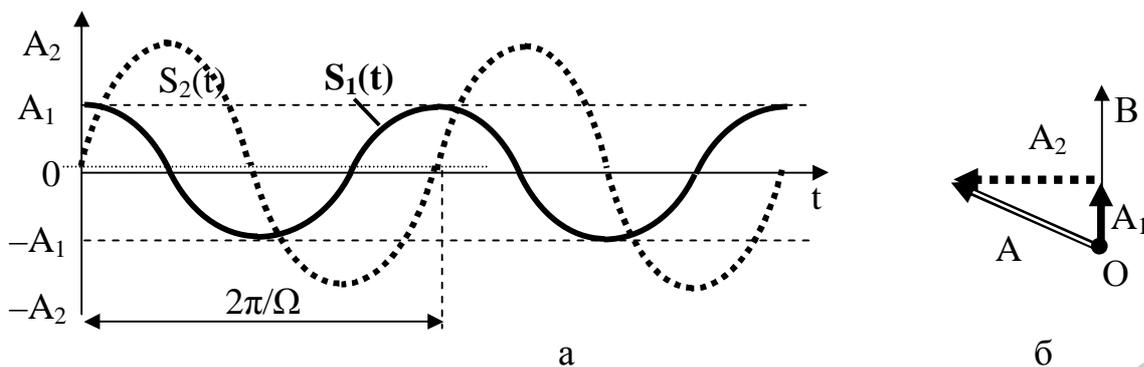


Рис. 19. Сложение колебаний с фазовым разнесом  $\pi/2$

Если второе колебание сдвинуто на  $3\pi/2$  (рис. 20, а), амплитуда суммарного колебания равна  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ , а его фаза в зависимости от соотношения амплитуд двух колебаний изменяется в пределах от  $0$  до  $-90^\circ$ .

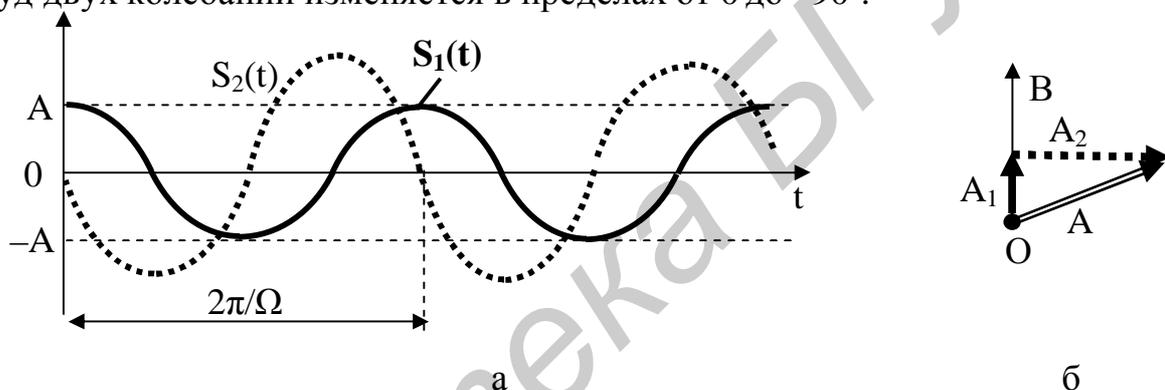


Рис. 20. Сложение колебаний с фазовым разнесом  $3\pi/2$

При сложении двух колебаний с произвольным фазовым набегом квадрат амплитуды суммарного колебания будет изменяться по функции, приведенной на рис. 21.

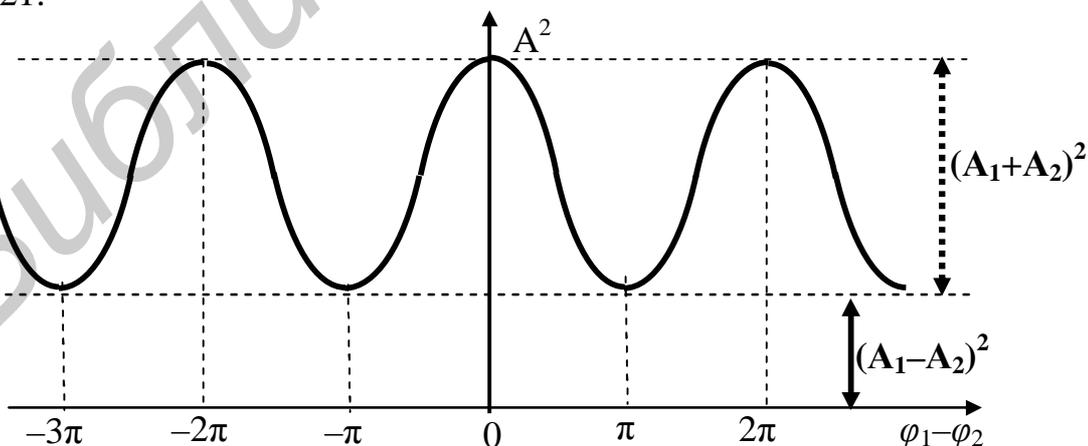


Рис. 21. Зависимость квадрата амплитуды суммарного колебания от разности фаз двух колебаний

Из графика следует, что квадрат амплитуды результирующего колебания изменяется в интервале от  $(A_1 + A_2)^2$  до  $(A_1 - A_2)^2$ . Максимумам функции соответствуют фазовые различия  $j_1 - j_2 = \pm 2pk$ , а минимумам  $-j_1 - j_2 = \pm(2k+1)p$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 1.3.3. Суперпозиция произвольного числа колебаний одной частоты

Пусть задано некоторое число колебаний  $N$  с произвольными амплитудами и начальными фазами вида

$$\begin{aligned} S_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t - j_1), \\ S_2(t) &= A_2 \cos(\omega_1 t - j_2), \\ &\dots\dots\dots \\ S_N(t) &= A_N \cos(\omega_1 t - j_N). \end{aligned} \quad (15)$$

Необходимо определить сумму этих колебаний

$$S(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_1 t - j_n) = A \cos(\omega t - j). \quad (16)$$

Ясно, что оно будет гармоническим и по аналогии с рассуждениями в подразд. 3.2 можно определить суммарные (результирующие) амплитуду

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_N^2 + 2A_1^2 A_2^2 \cos(j_1 - j_2) + \dots + 2A_{N-1}^2 A_N^2 \cos(j_{N-1} - j_N) \quad (17)$$

и фазу

$$j = \arctg \left[ \frac{A_1 \sin j_1 + A_2 \sin j_2 + \dots + A_N \sin j_N}{A_1 \cos j_1 + A_2 \cos j_2 + \dots + A_N \cos j_N} \right]. \quad (18)$$

Из последних выражений следует:

- 1) амплитуда суммарного колебания всегда зависит от соотношения амплитуд и начальных фаз произвольного числа колебаний;
- 2) фаза суммарного колебания определяется амплитудами и начальными фазами колебаний  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t)$ ;
- 3) частота результирующего колебания остается равной  $\omega_1$ .

### 1.3.4. Суперпозиция двух колебаний с разными частотами

Пусть заданы два колебания  $S_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + j_1)$  и  $S_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + j_2)$  с произвольными амплитудами и начальными фазами (рис. 22). Определим ам-

плитуду и фазу суммарного колебания, имея в виду, что частоты колебаний различны.

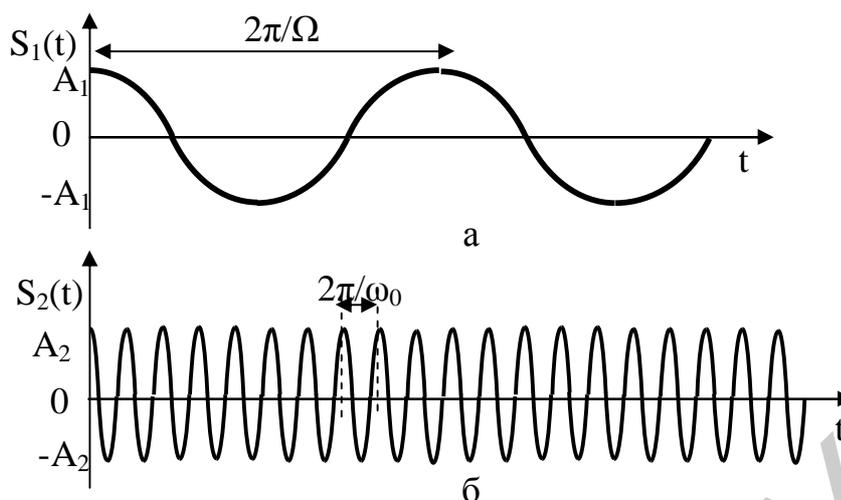


Рис. 22. Колебания с разными частотами

По аналогии с рассуждениями в подразд. 3.2 получим

$$A = \sqrt{[A_1 \cos(w_1 t + j_1) + A_2 \cos(w_2 t + j_2)]^2 + [A_1 \sin(w_1 t + j_1) + A_2 \sin(w_2 t + j_2)]^2}, \quad (19)$$

$$j = \arctg \left[ \frac{A_1 \sin(w_1 t + j_1) + A_2 \sin(w_2 t + j_2)}{A_1 \cos(w_1 t + j_1) + A_2 \cos(w_2 t + j_2)} \right]. \quad (20)$$

Из выражений (19), (20) следует:

- 1) амплитуда суммарного колебания всегда положительна и зависит не только от соотношения амплитуд и начальных фаз двух колебаний, но и от соотношения частот;
- 2) фаза суммарного колебания также определяется амплитудами, начальными фазами и частотами колебаний  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ ;
- 3) частота результирующего колебания зависит от соотношения амплитуд (рис. 23).

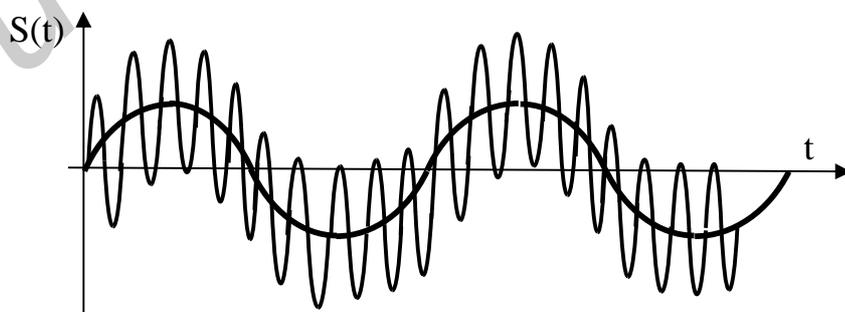


Рис. 23. Обобщенный вид суммарного колебания

## 1.4. Аналитическое описание периодических колебаний

### 1.4.1. Гармонический анализ периодических колебаний

Для описания сложных колебаний, под которыми будем понимать колебания, отличающиеся от гармонических, используется система базисных функций. Важное значение здесь приобретают ортогональные системы функций. Напомним, что система действительных функций

$$j_0(x), j_1(x), \dots, j_n(x) \quad (21)$$

является ортогональной на интервале  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b j_n(x)j_m(x)dx = 0 \quad \text{при } n \neq m \quad (22)$$

при условии, что ни одна из этих функций  $j_n(x) \neq 0$ .

Величина, определяемая как

$$\int_a^b j_n^2(x)dx = \|j_n\|^2, \quad (23)$$

называется нормой.

Когда функции  $j_n(x)$  непрерывны, то произвольная кусочно-линейная функция может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = C_0j_0(x) + C_1j_1(x) + C_2j_2 + \dots; \quad (24)$$

если коэффициенты этого ряда определяются как

$$C_n = \frac{1}{\|j_n\|^2} \int_a^b f(x)j_n(x)dx, \quad (25)$$

то ряд (24) называется **обобщенным рядом Фурье**.

Для разложения периодических колебаний в ряд Фурье используются тригонометрические

$$1, \cos w_1t, \sin w_1t, \cos 2w_1t, \sin 2w_1t \dots \cos nw_1t, \sin nw_1t \quad (26)$$

или комплексные функции

$$\dots e^{-j2w_1t}, e^{-jw_1t}, 1, e^{jw_1t}, e^{j2w_1t} \dots, \quad (27)$$

где  $w_1 = 2\pi/T$  – частота первой гармоники.

Система (26) приводит к тригонометрической форме записи ряда Фурье, а (27) – к комплексной.

Воспользуемся сначала системой (27) и перепишем ряд (24) для произвольного периодического колебания  $S(t)$  в виде

$$S(t) = \dots C_{-2}e^{-j2\omega_1 t} + C_{-1}e^{-j\omega_1 t} + C_0 + C_1e^{j\omega_1 t} + C_2e^{j2\omega_1 t} \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (28)$$

Определим норму функции (27) для периодического колебания

$$\|j_n\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega_1 t} e^{j\omega_1 t} dt = T,$$

тогда коэффициенты ряда согласно (24) и принятым выше обозначениям определяются как

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (29)$$

Учитывая, что  $e^{ja} = \cos a - j \sin a$ , преобразуем (29):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega_1 t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega_1 t dt = A_n - jB_n, \quad (30)$$

где  $A_n = A_{-n}$  – чётные,  $B_n = -B_{-n}$  – нечётные по индексу  $n$  составляющие. Это обстоятельство используется при анализе произвольного колебания. Очевидно, что (30) можно представить в виде

$$\dot{C}_n = |C_n| e^{-jP_n}, \quad (31)$$

где

$$|C_n| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{и} \quad P_n = \arctg \frac{B_n}{A_n},$$

тогда ряд Фурье может быть записан в комплексной

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{j(n\omega_1 t - P_n)} \quad (32)$$

и тригонометрической формах

$$S(t) = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_1 t - P_n). \quad (33)$$

При этом в (33) считается, что  $|C_{-n}| = |C_n^*|$ , в результате чего появляется удвоение. Поясним это на векторной диаграмме (рис. 24), принимая во внимание, что

$$|C_{-n}| e^{j(-n\omega_1 t - P_{-n})} + |C_n| e^{j(n\omega_1 t - P_n)} = |C_n| (e^{j(-n\omega_1 t - P_{-n})} + e^{j(n\omega_1 t - P_n)}) = 2|C_n| \cos(n\omega_1 t - P_n).$$

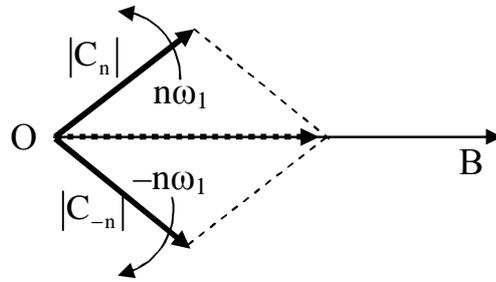


Рис. 24. К пояснению удвоения  $|C_n|$

На оси  $OB$  отображаются проекции векторов  $|C_n|$ , вращающихся в противоположные стороны.

Используются также следующие формы записи ряда Фурье:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - P_n). \quad (34)$$

Сравнивая (33) и (34), нетрудно заметить, что  $a_n = 2A_n$ ;  $b_n = 2B_n$ ;  $A_n = 2C_n$ . Здесь  $n$  – номер гармоники, под которой будем понимать отдельное гармоническое колебание с частотой  $n\omega_1$ . Если  $n = 1$ , то гармоника называется **основной** (первой) (период сложного колебания совпадает с периодом  $2\pi/\omega_1$ ). Гармоники с частотами выше  $\omega_1$ , когда  $n > 1$ , называются **высшими**.

Поскольку представление временных зависимостей гармоник на одном графике делает его запутанным и нагроможденным, то совокупность амплитуд с частотами  $\omega_n = n\omega_1$  изображают на частотной оси. Она является дискретной (линейчатой) и называется **амплитудным спектром (АС)**. АС может изображаться в двухстороннем (рис. 25, а) и одностороннем (рис. 25, б) видах.

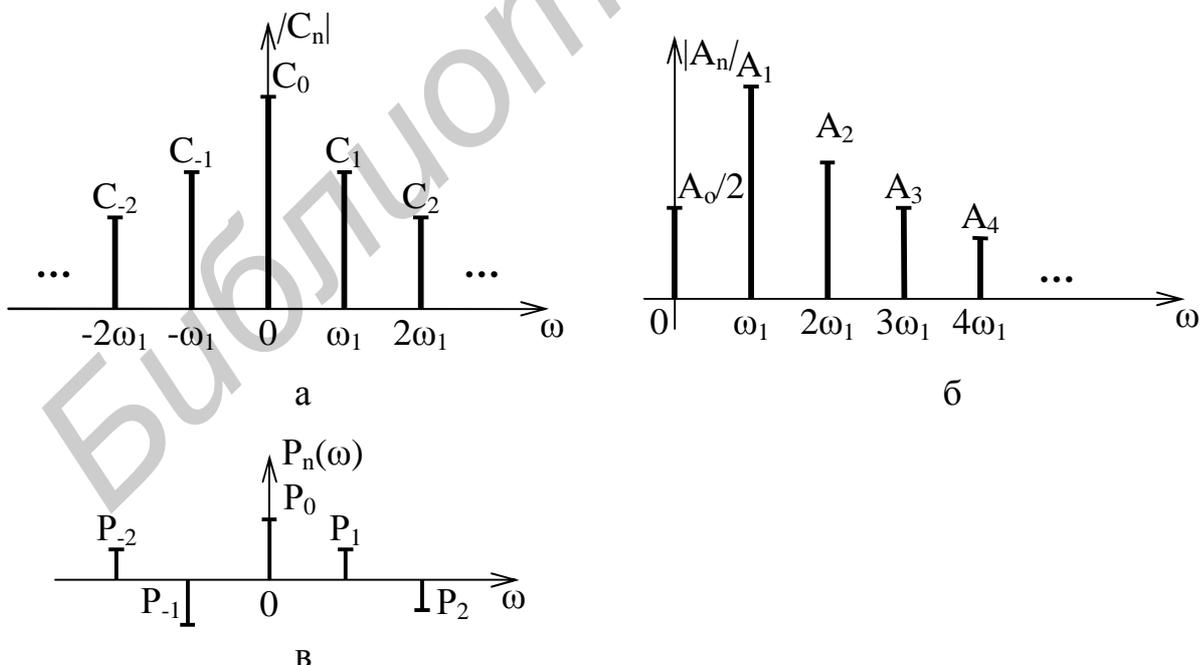


Рис. 25. Спектральная характеристика колебания

Зависимость начальных фаз гармоник от частоты называется **фазовым спектром (ФС)** (рис. 25, в).

*Пример.* Пусть задано колебание прямоугольной формы с известной амплитудой  $A$  и периодом  $T_0$  (рис. 26, а). Необходимо представить это колебание в виде ряда Фурье и привести его АС и ФС.

Приведенная функция определяется во времени как

$$S(t) = A \quad \text{при} \quad 0 < t < T/2,$$

$$S(t) = -A \quad \text{при} \quad T/2 < t < T$$

и является нечетной. Это означает, что  $A_n = 0$  и

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega_1 t \, dt = B_n.$$

Определим эти коэффициенты ряда

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \sin n\omega_0 t \, dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} (-A) \sin n\omega_0 t \, dt =$$

$$= \frac{A}{T_0 n \omega_0} - \frac{A}{T_0 n \omega_0} \cos \left[ n\omega_0 \frac{T_0}{2} \right] - \frac{A}{T_0 n \omega_0} \cos \left[ n\omega_0 \frac{T_0}{2} \right] + \frac{A}{T_0 n \omega_0} \cos [n\omega_0 T_0].$$

Принимая во внимание, что  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , можно окончательно записать

$$C_n = \frac{2A}{T_0 n \omega_0} \left( 1 - \cos \left[ n\omega_0 \frac{T_0}{2} \right] \right) = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos [n\pi]).$$

Из последнего выражения видно, что коэффициенты обнуляются при четных  $n$  и равны  $\frac{2A}{n\pi}$  при  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ . Тогда ряд Фурье может быть записан согласно (33) в виде

$$S(t) = \sum_{n=1,3,5,7,\dots} \frac{4A}{n\pi} \sin [n\omega_0 t].$$

Проанализируем данный ряд. При  $n = 1$  амплитудное значение коэффициента ряда равно  $\frac{2A}{\pi}$ , а частота  $\omega_1 = \omega_0$  (рис. 26, б).

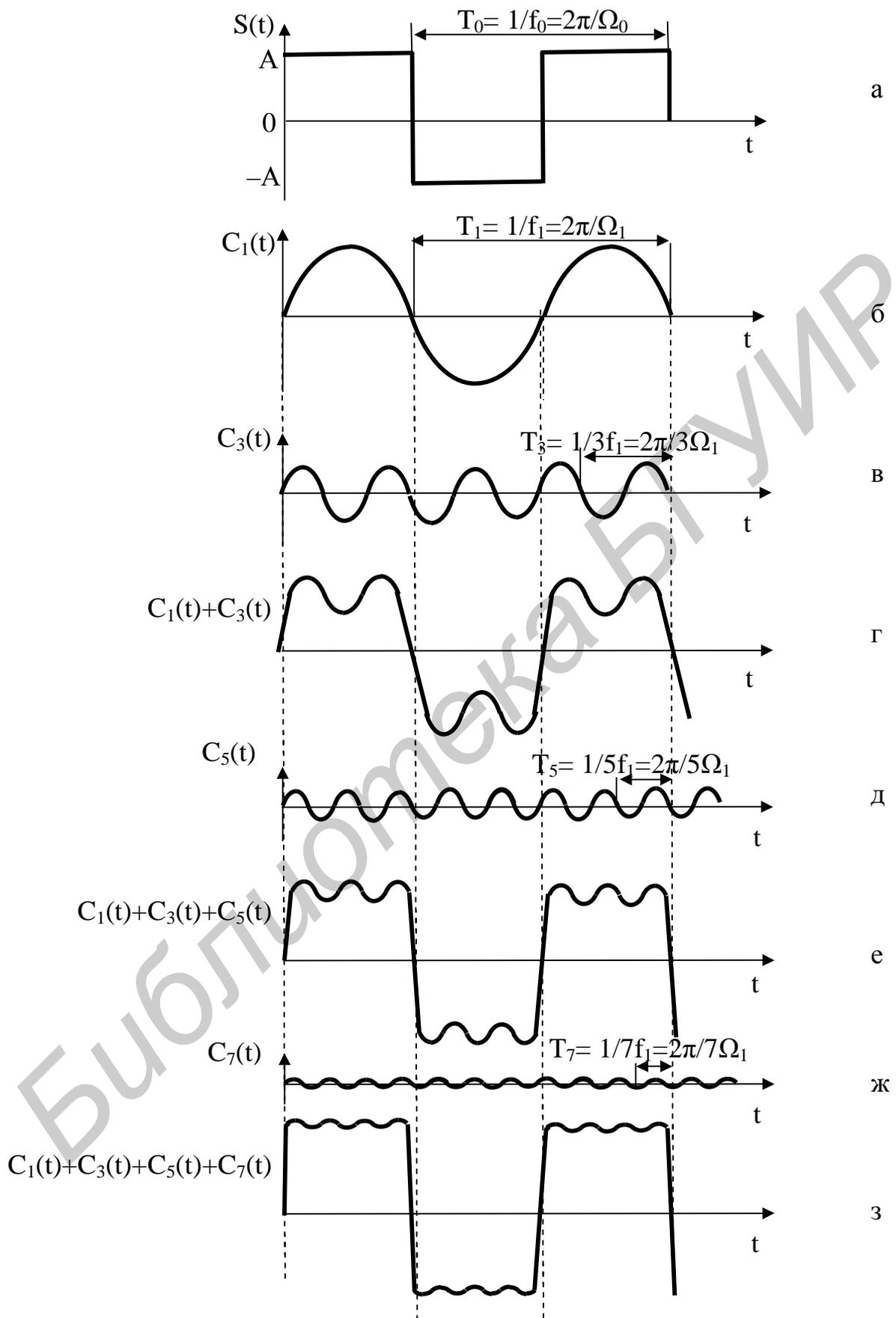


Рис. 26. Разложение колебания

Когда  $n = 3$ , что соответствует третьей гармонике, амплитуда составляющей уменьшается в три раза (рис. 26, в). При суммировании первой и третьей гармоник результирующее колебание принимает вид, приведенный на рис. 26, г. Если к полученной сумме гармоник прибавить пятую (рис. 26, д), то результат приблизится к оригиналу заданной функции (рис. 26, е). Еще большее приближение к оригиналу можно получить при сложении полученного результата с седьмой гармоникой (рис. 26, ж), иллюстрированном рис. 26, з.

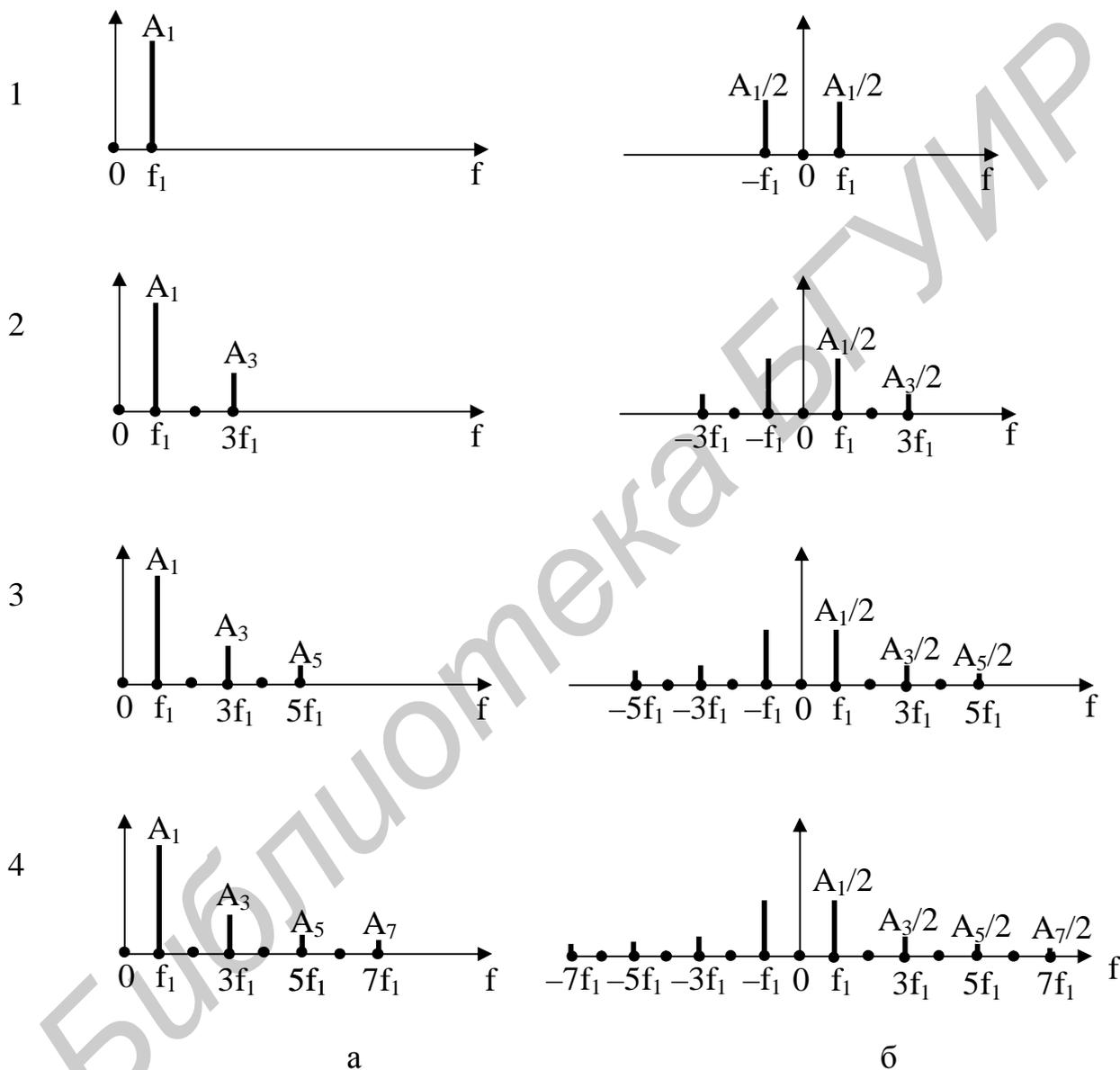


Рис. 27. Спектры гармоник:

- а – тригонометрический; б – комплексный;  
 1 – первой; 2 – суммы первой и третьей;  
 3 – суммы первой, третьей и пятой;  
 4 – суммы первой, третьей, пятой и седьмой

На рис. 27 приведена динамика трансформации спектра результирующего колебания при росте числа гармоник в тригонометрическом и комплексном видах.

Приведенный пример позволяет сделать следующие выводы:

- 1) увеличение числа гармоник приводит к более точному описанию (восстановлению) колебания;
- 2) при росте номера гармоники ее амплитуда уменьшается;
- 3) начальная фаза гармоники существенно влияет на результат сложения.

#### 1.4.2. Синтез колебаний. Эффект Гиббса

Синтез – процесс, обратный анализу колебаний, подчиненный задаче реставрации колебания по известному спектральному представлению. При этом необходимо говорить о точности преобразования колебаний в частотной области. Погрешность аппроксимации определяется выражением

$$z^2 = \int_a^b \left[ S(t) - \sum_{n=-\infty}^N C_n j_n(t) \right]^2 dt. \quad (35)$$

Восстановление колебания по спектру при  $N \rightarrow \infty$  приводит к неординарной реставрации колебания, связанной с выбросами в точках разрыва функции. Этот момент связан с нарушением сходимости ряда и носит название эффекта Гиббса.

#### 1.4.3. Распределение мощности в спектре периодического колебания

Распределение мощности в спектре периодического сложного колебания может быть определено из понятия средней мощности за промежуток времени  $t_2 - t_1$ . Обычно этот промежуток ограничивается периодом колебания  $T$ :

$$P_s = \frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \|j_n\|^2 = \frac{1}{T} \sum |C_n|^2 T = \left( \frac{A_0}{2} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n}{2} \right)^2. \quad (36)$$

Отсюда видно, что полная мощность колебания равна сумме средних мощностей постоянной составляющей и отдельных гармоник и не зависит от их начальных фаз.

Спектр мощности периодического колебания будет дискретным, амплитуда каждой спектральной составляющей будет равна квадрату амплитуды гармонической составляющей колебания.

#### 1.4.4. Преобразование колебаний

Преобразование колебаний осуществляется за счет характеристик устройств, обеспечивающих их специальную трансформацию.

Разделяют линейное и нелинейное преобразование колебаний. Первое предполагает изменение спектрального состава колебания за счет частотной характеристики устройства. Как правило, линейные устройства являются пассивными и не обеспечивают увеличения энергии колебания. Нелинейные устройства позволяют *обогатить спектр колебания* и осуществить за счет специальной фильтрации определенное преобразование колебаний.

Рассмотрим некоторые виды преобразований.

##### 1. Генерация

Образуется за счет преобразования постоянного напряжения в гармонически изменяющееся колебание. Это означает, что производится перенос энергии колебания с нулевой частоты на наперед заданную частоту (рис. 28).



Рис. 28. Генерирование колебаний

##### 2. Усиление

Требования к трансформации спектра минимальные (в смысле обогащения) и в то же время жесткие (в смысле фильтрации). Необходимо увеличить мощность колебания без искажения его формы. Искажения формы колебания, связанные с появлением дополнительных спектральных составляющих помимо требуемой (рис. 29), может привести к нежелательным эффектам.



Рис. 29. Усиление колебаний

Уровень искажений колебания оценивается коэффициентом нелинейных искажений:

$$k_{н.и} = \frac{\sqrt{\sum_n I_n}}{I_1},$$

где  $I_1$ ,  $I_n$  – амплитуды основной и высших ( $n = 2, 3, 4...$ ) гармоник.

##### 3. Умножение частоты

При тех же условиях режима следует обеспечить выделение колебания кратной частоты по отношению к входной (рис. 30).

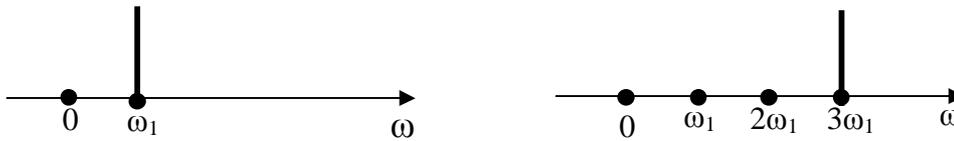


Рис. 30. Умножение частоты колебания

#### 4. Модуляция

Заключается в переносе низкочастотного колебания в область более высоких частот. Под действием низкочастотного колебания может происходить изменение одного из параметров высокочастотного колебания. На рис. 31 приведен пример тональной амплитудной модуляции.

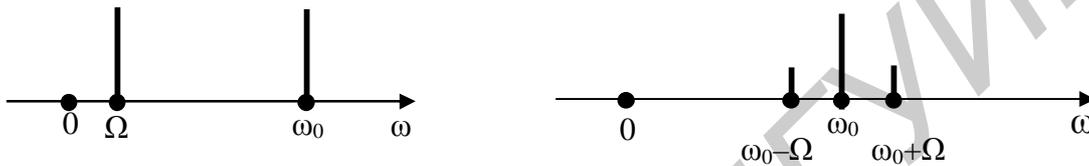


Рис. 31. Амплитудная модуляция

#### 5. Преобразование «вверх»

Обеспечивается при воздействии модулированного и независимого управляемого колебания с частотой выше частоты несущего колебания на нелинейное устройство. При этом формируется модулированное колебание с высокочастотной составляющей, равной сумме управляющей и несущей частот с сохранением низкочастотной огибающей (рис. 32).

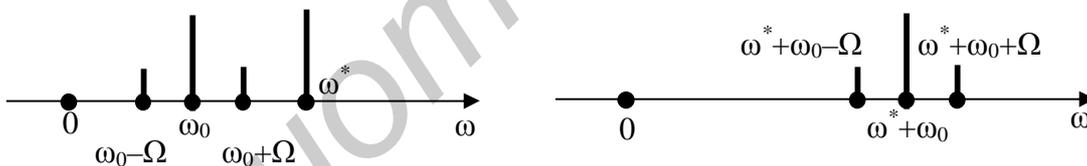


Рис. 32. Перенос колебания «вверх»

#### 6. Преобразование «вниз»

Обеспечивается при воздействии модулированного и независимого управляемого колебания с частотой ниже частоты несущего колебания на нелинейное устройство. После специальной фильтрации формируется модулированное колебание с высокочастотной составляющей, равной разности управляющей и несущей частот с сохранением низкочастотной огибающей (рис. 33).

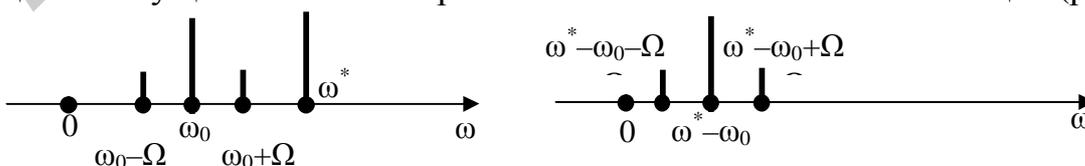


Рис. 33. Перенос колебания «вниз»

#### 7. Выпрямление колебания

Преобразование, обратное генерации колебаний. Заключается в выпрямлении (выравнивании) напряжения колебания заданной формы (рис. 34).



Рис. 34. Выпрямление

## 8. Детектирование

Процесс, обратный модуляции. Обеспечивает выделение низкочастотной составляющей из спектра модулированного колебания (рис. 35).

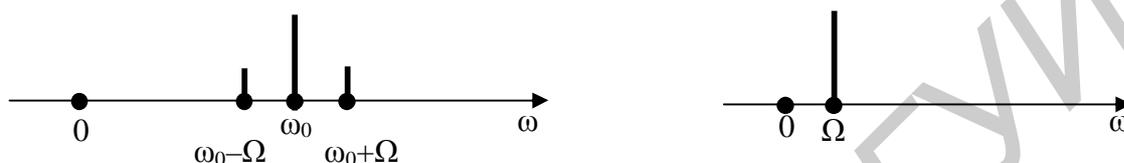


Рис. 35. Детектирование модулированного колебания

## 9. Ограничение колебания

Приводит к существенной корректировке спектра – его обогащению. Может быть применено для реализации режимов усиления, умножения частоты, выпрямления колебания.

### 1.5. Аналитическое описание неперидических колебаний

#### 1.5.1. Гармонический анализ неперидических колебаний

Пусть имеется периодическое колебание, изображенное на рис. 36. Потребуем, чтобы период  $T \rightarrow \infty$ , тогда периодическое колебание обращается в неперидическое.

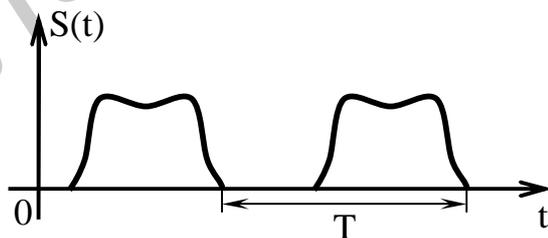


Рис. 36. Периодическое колебание

Подставим выражение для коэффициентов  $C_n$  в ряд Фурье, записанный в комплексной форме, с учётом того, что  $\frac{1}{T} = \frac{w_1}{2\pi}$ :

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w_1}{2p} \left( \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn w_1 t} dt \right) e^{jn w_1 t}. \quad (37)$$

Так как  $T \rightarrow \infty$  и  $w_1 \rightarrow \Delta w$ , то знак суммы обращается в знак интегрирования, а  $n w_1$  – в текущее значение частоты  $w$ ,  $\Delta w \rightarrow dw$ , тогда

$$S(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j w t} dt \right) e^{j w t} dw. \quad (38)$$

Выражение, входящее под скобки, называется **спектральной плотностью сигнала** и обозначается  $S(jw)$ . Перепишем (38) в виде системы:

$$\begin{cases} S(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j w t} dt; \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} S(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(jw) e^{j w t} dw. \end{cases} \quad (40)$$

Эти соотношения называются **парой преобразований Фурье**. Переход от временного представления колебания в частотную область определяет **прямое преобразование Фурье**, а переход от частного представления к временному – **обратное преобразование Фурье**.

Для спектральной функции  $S(jw)$  справедливы известные представления в тригонометрической и комплексной формах:

$$S(jw) = A(w) - jB(w) = C(w) e^{-j p(w)}, \quad (41)$$

где  $A(w)$  и  $B(w)$  – чётная (косинусоидальная) и нечётная (синусоидальная) составляющие спектральной плоскости;

$C(w) = \sqrt{A^2 + B^2}$  – амплитудно-частотная характеристика колебания (АЧХК);

$p(w) = \text{Arctg} \left[ \frac{B}{A} \right]$  – фазочастотная характеристика колебания (ФЧХК).

Следует учесть, что  $\text{Arctg} X = \arctg X \pm pN$ , где  $N$  – целое число.

*Пример.* Необходимо определить спектральную плотность и построить графики АЧХК и ФЧХК импульса с амплитудой  $E$  и длительностью  $\tau$  (рис. 37).

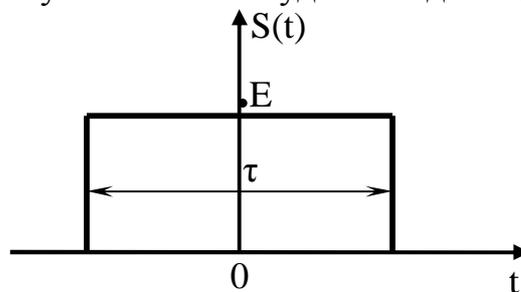


Рис. 37. Прямоугольный импульс

Используя (18), получим

$$S(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = -\frac{E}{j\omega} \left( e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{j\frac{\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2E}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}. \quad (42)$$

Выражение (42) представлено в виде функции  $\frac{\sin(x)}{x}$ , предел от которой при  $x$ , стремящемся к нулю, равен единице (первый замечательный предел).

Построим графики АЧХК и ФЧХК согласно (42). На рис. 38 приведена спектральная характеристика импульсного колебания, а также АЧХК (рис. 39), ФЧХК (рис. 40).

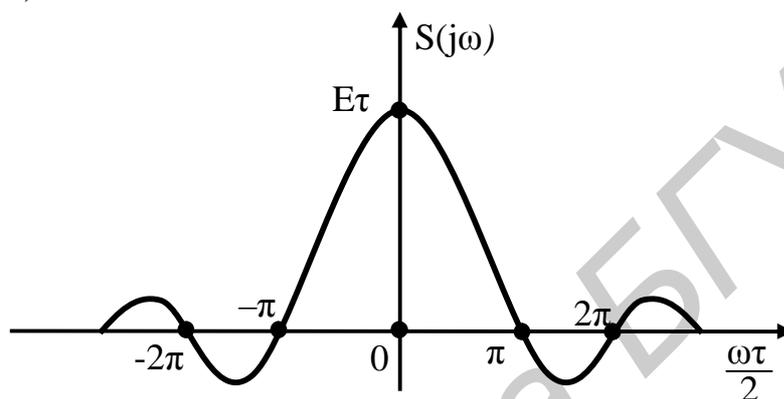


Рис. 38. Спектральная характеристика импульса

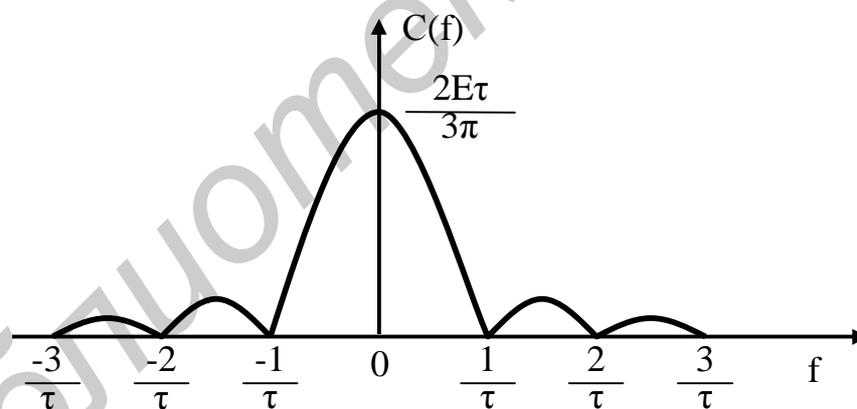


Рис. 39. АЧХК

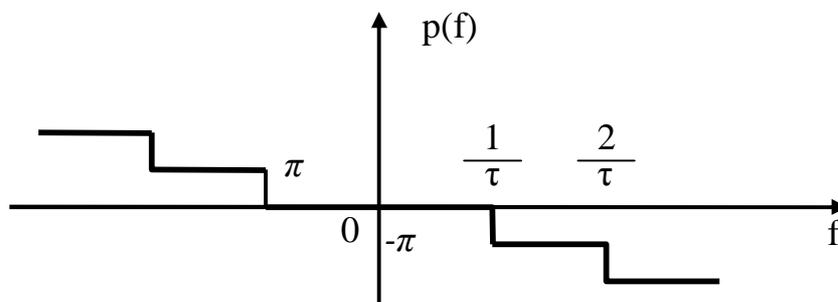


Рис. 40. ФЧХК

В сравнении с периодическим колебанием непериодическое имеет плотное расположение спектральных линий, поэтому введено понятие спектральной плотности. Если амплитуда колебания измеряется в вольтах, то спектральная плотность в вольтах на герц или В\*с. Первый нуль спектральной плотности приходится на точку  $\frac{wt}{2} = p$ , откуда ясно, что  $\frac{w}{2p} = f = \frac{1}{t}$ .

Анализ распределения энергии такого колебания в частотной области показывает, что 90 % ее приходится на основной лепесток спектральной плотности и лишь 10 % занимает энергия затухающих осциллирующих лепестков.

### 1.5.2. Свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах)

1. *Теорема линейности.* Если известны спектральные функции колебаний  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$ , то сумме этих колебаний будет соответствовать сумма спектральных плотностей:

$$\sum_n S_n(t) \Leftrightarrow \sum_n S_n(jw). \quad (43)$$

2. *Теорема запаздывания.* Если известна спектральная плотность  $S(jw)$  колебания  $S(t)$ , то спектр функции  $S(t \pm t_0)$ , где  $t_0$  – время запаздывания, отличается от известной спектральной плотности на множитель  $\exp(\pm jw t_0)$ :

$$\sum S(t \pm t_0) \Leftrightarrow S(jw) \cdot e^{\pm jw t_0} = S(w) e^{-j(w)} \cdot e^{mjw t_0}, \quad (44)$$

т.е. изменяется лишь ФЧХК.

3. *Теорема о масштабе.* Если известна спектральная функция  $S_1(jw)$  колебания  $S_1(t)$ , то изменение масштаба колебания по времени в  $b$  раз (сжатие или растяжение), приводит к изменению его спектральной плотности следующим образом:

$$S_2(t) = S_1(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} S_1(j \frac{w}{a}). \quad (45)$$

Согласно теореме для сжатия спектра необходимо растянуть процесс во времени. Это означает, что произведение эффективной ширины спектра, соответствующей отрезку частот, занимаемому главным лепестком, на длительность колебания есть постоянная величина:

$$\Delta w \cdot t = \text{const}. \quad (46)$$

4. *Теорема смещения во временной области.* Если известна спектральная плотность  $S_1(jw)$  колебания  $S_1(t)$ , то его домножение на гармоническую функцию  $S_2(t) = S_1(t) \cos(w_0 t - j)$  приводит к расщеплению спектра на два с уменьшением их по амплитуде в два раза и смещению на величину частоты гармонического колебания  $w_0$ :

$$S_2(j\omega) = \frac{1}{2}S_1(j[\omega_0 - \omega])e^{-j\omega t} + \frac{1}{2}S_1(j[\omega_0 + \omega])e^{j\omega t}. \quad (47)$$

5. *Спектры производной и интеграла.* Если известна спектральная плотность  $S_1(j\omega)$  колебания  $S_1(t)$  и при  $t=0$  модуль  $S(\omega) = 0$ , то спектры её производной и интеграла определяются как

$$\frac{dS_1(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega S_1(j\omega); \quad (48)$$

$$\int S(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}S(j\omega). \quad (49)$$

6. *Спектр произведения двух колебаний.* Если известны спектральные функции  $S_1(j\omega)$  и  $S_2(j\omega)$  для колебаний  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , то для произведения  $S_3(t) = S_1(t) \cdot S_2(t)$ :

$$S_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega) \cdot S_2(j[\omega - \Omega])d\Omega. \quad (50)$$

7. *Взаимная заменяемость частоты и времени (теорема дуальности).*

Если задана спектральная плотность  $S(j\omega)$  колебания  $S(t)$ , то замена переменных  $\omega$  на  $t$  и  $t$  на  $\omega$  в преобразованиях Фурье показывает возможность определения формы колебания по известной спектральной плотности.

8. *Теорема энергии (теорема Релея, или равенство Парсеваля).* Следует из свойства произведения двух колебаний и позволяет определить энергию по временной  $S(t)$  или частотной  $S(\omega)$  областях:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \frac{1}{P} \int_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega. \quad (51)$$

Единицей измерения энергии является  $S^2(t)/\text{Гц}$ .

## 1.6. Связь спектров периодического и непериодического колебаний

Существует ли связь между спектрами периодического и непериодического колебаний одинаковой формы?

Анализ проведем на примере импульса прямоугольной формы с заданной спектральной плотностью  $S(j\omega)$ . Как следует из (29), спектральная плотность отличается от коэффициента  $C_n$  ряда Фурье отсутствием множителя  $1/T$ . Отсюда следует, что при повторении импульса с заданным периодом коэффициенты ряда определяются как

$$C_n = \frac{S(j\omega)}{T}. \quad (52)$$

Из последнего выражения следует, что огибающая спектра периодического колебания будет совпадать по форме со спектром одиночного колебания (рис. 41).

Зная, что первый нуль спектральной плотности импульса определяется его длительностью, а частотное расстояние между спектральными линиями – пе-

риодом повторения этих импульсов, можно констатировать, что число спектральных линий в главном лепестке будет определяться скважностью.

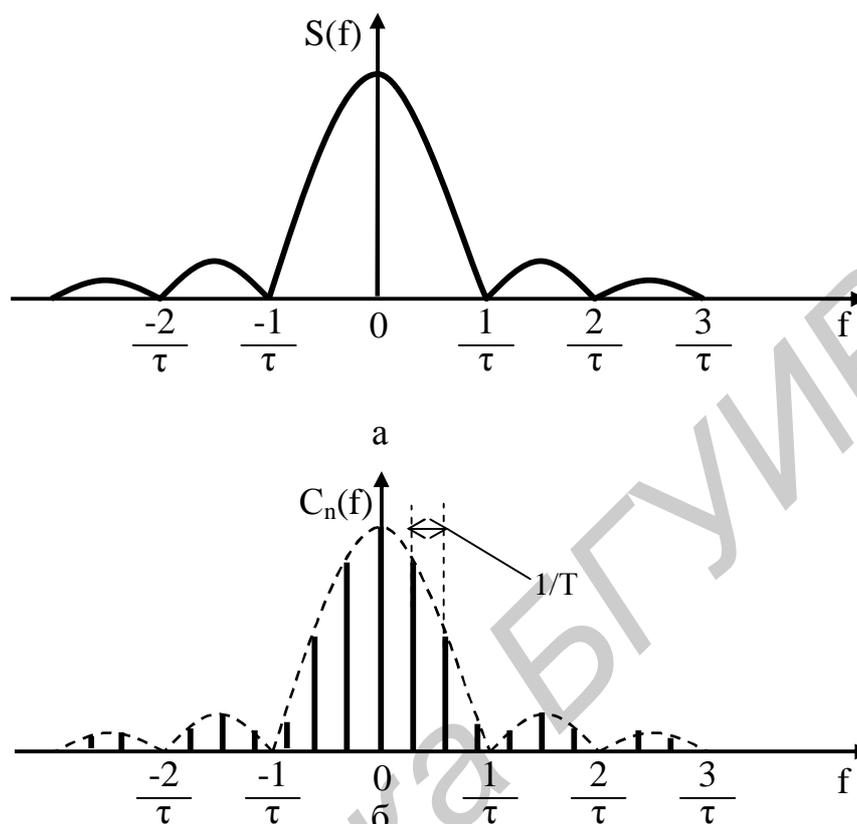


Рис. 41. Спектры непериодического (а) и периодического (б) импульса

## 1.7. Модулированные колебания

### 1.7.1. Общие положения

*Модуляция* – это процесс принудительного изменения параметров высокочастотного колебания по закону низкочастотного.

Рассматривая обобщенную модель модулированного колебания

$$a(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + q(t)) = A(t)\cos y(t), \quad (53)$$

где  $A(t)$  – амплитуда (огибающая);

$q(t)$  – фазовая составляющая;

$y(t)$  – полная фаза радиосигнала,

можно выделить три варианта модуляции:

1) *амплитудную (АМ)*, при которой изменению во времени подвергают амплитуду  $A(t)$ , а угловая компонента  $y(t)$  остается постоянной;

2) *угловую* (УМ), когда изменению подвергается полная фаза  $y(t)$ , а амплитуда остается постоянной;

3) *смешанную* (СМ), при которой изменяется и амплитуда  $A(t)$  и полная фаза  $y(t)$ .

## 1.7.2. Амплитудно-модулированные колебания

### 1.7.2.1. Однотональная модуляция

Рассмотрим АМ-колебание с тональной модуляцией, когда низкочастотное колебание изменяется по закону (рис. 42, а):

$$A(t) = A_0 + \Delta A \cos(\Omega t + j_0). \quad (54)$$

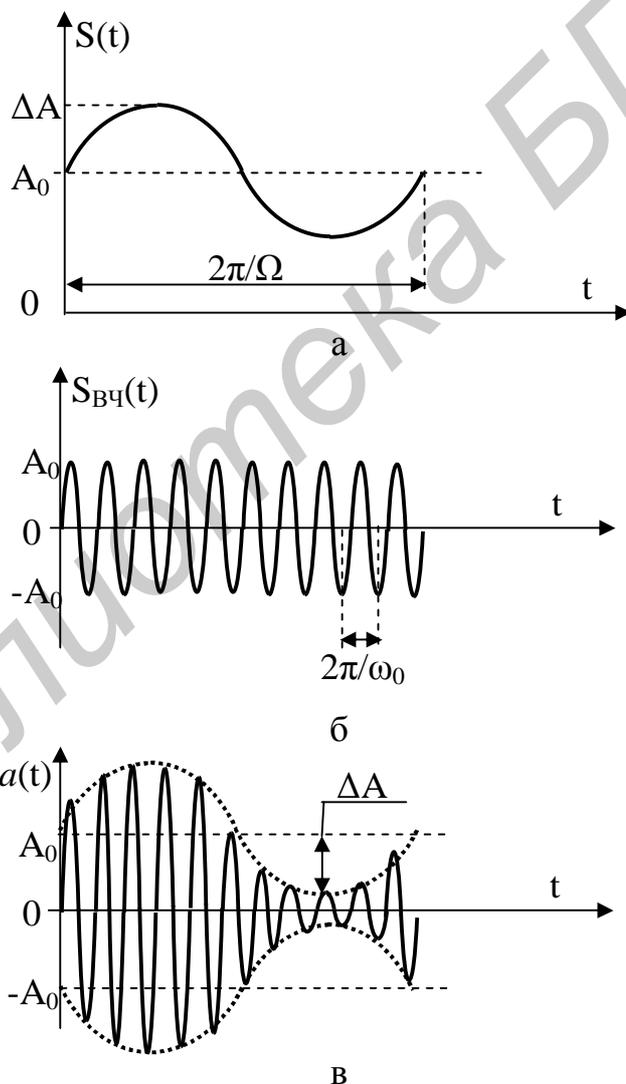


Рис. 42. Колебание с тональной модуляцией

Частота высокочастотного (несущего) колебания должна быть велика по сравнению с наивысшей частотой спектра передаваемого сообщения. Необходи-

димо также, чтобы ширина спектра сообщения была мала по сравнению с несущей частотой  $\omega_0$ . В этом случае колебание трактуется как узкополосный процесс. Пусть высокочастотное колебание имеет гармоническую форму (рис. 42, б):

$$S_{\text{ВЧ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + q_0). \quad (55)$$

С учетом (54) и (55) АМ-колебание может быть представлено как

$$a(t) = A_0 [1 + M \cos(\Omega t + j_0)] \cos(\omega_0 t + q_0), \quad (56)$$

здесь  $M = \frac{\Delta A}{A_0}$  – коэффициент глубины амплитудной модуляции, определяемый соотношением амплитуд управляющего  $\Delta A$  и несущего  $A_0$  колебаний (рис. 42, в). Коэффициент  $M$  может быть определен более простым способом по осциллограмме. Если

$$\begin{aligned} A_{\text{max}} &= A_0 + \Delta A = A_0 (1 + M), \\ A_{\text{min}} &= A_0 - \Delta A = A_0 (1 - M), \end{aligned}$$

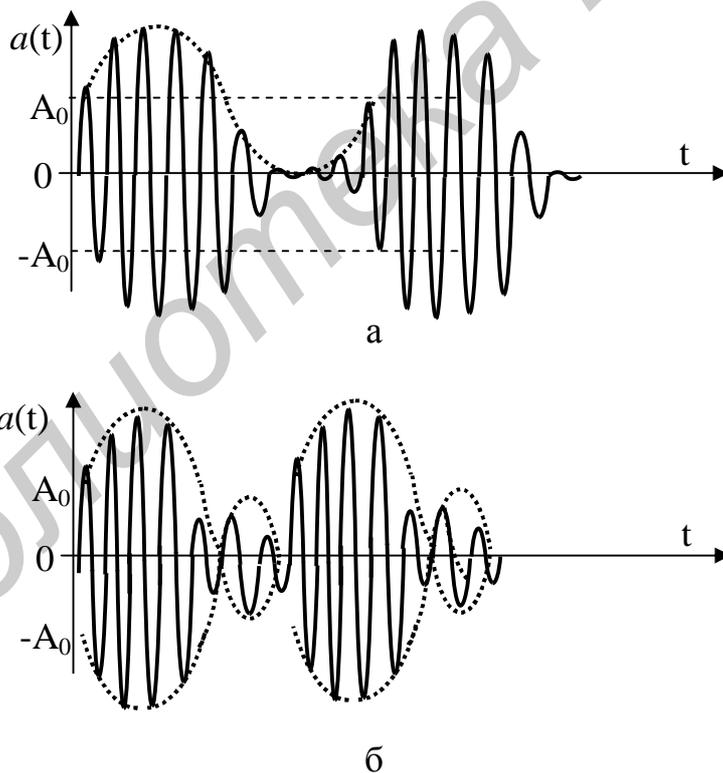


Рис. 43. АМ-колебание:

а – 100 %-ная модуляция; б – перемодуляция

тогда

$$M = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}} 100 \%. \quad (57)$$

Для анализа коэффициента модуляции обратимся к рис. 42, 43. Изображение на рис. 42, б соответствует немодулированному колебанию, когда  $M = 0$ ; на рис. 42, в – модуляции от 0,1 до 0,99, а рис. 43, а – 100%-ной модуляции. При  $\Delta A > A_0$  (рис. 43, б) коэффициент модуляции больше единицы, что соответствует *эффекту перемодуляции*.

Преобразуем выражение (56) без учета начальных фаз  $j_0$  и  $q_0$ :

$$a(t) = A_0 \cos w_0 t + A_0 M \cos \Omega t \cos w_0 t = A_0 \cos w_0 t + \frac{1}{2} A_0 M \cos (w_0 + \Omega)t + \frac{1}{2} A_0 M \cos (w_0 - \Omega)t. \quad (58)$$

Из (58) видно, что спектр АМ-колебания имеет три спектральные составляющие (рис. 44): одну с амплитудой  $A_0$  и частотой  $w_0$ , а также две боковые составляющие с одинаковыми амплитудами  $\frac{A_0 M}{2}$ , отстоящими от несущей слева  $w_0 - \Omega$  и справа  $w_0 + \Omega$ .

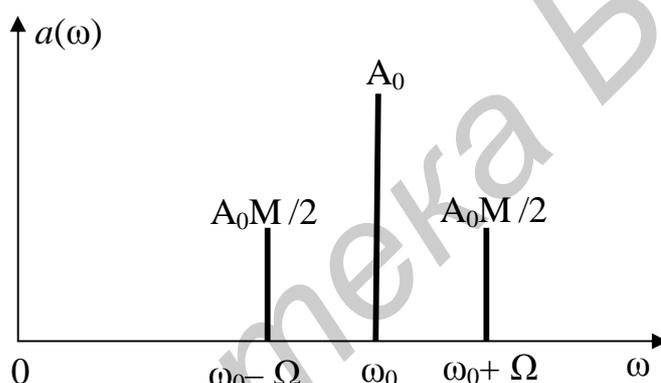


Рис. 44. Спектр АМ-колебания с тональной модуляцией

Таким образом, ширина спектра колебания с тональной амплитудной модуляцией определяется частотой модулирующего колебания:

$$П_{ам}^T = 2\Omega. \quad (59)$$

### 1.7.2.2. Векторное представление АМ с тональной модуляцией

В выбранной системе отсчета (рис. 45) изобразим вектор, соответствующий несущему колебанию с амплитудой  $A_0$ . При этом вектор вращается против часовой стрелки с частотой  $w_0$  и имеет начальную фазу  $j_0$ . В конец этого вектора поместим два вектора одинаковой длины, соответствующим боковым составляющим спектра, вращающимся навстречу друг другу с частотами  $+\Omega$  и  $-\Omega$ .

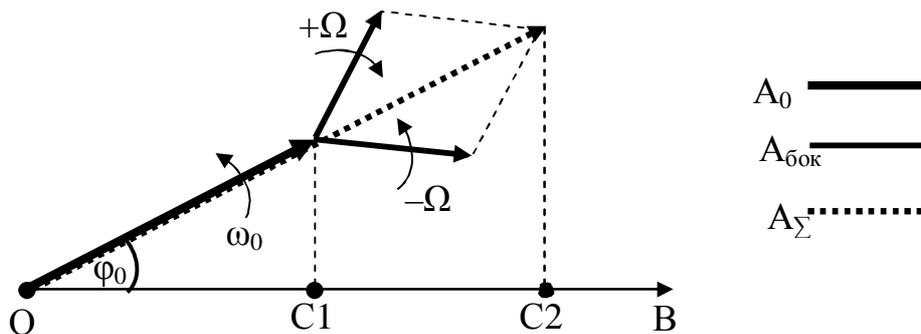


Рис. 45. Векторная диаграмма АМ-колебания

Вектор, образованный суммой векторов боковых составляющих спектра  $A_{бок}$ , будет изменяться по мере их вращения. Это изменение повлечет за собой изменение длины общего вектора  $A_{\Sigma}$ , образованного суммой вектора несущего колебания  $A_0$  и вектора суммы боковых составляющих  $A_{бок}$ .

### 1.7.2.3. Двухтональная модуляция

Рассмотрим случай, когда в качестве модулирующего используется би-гармоническое колебание

$$S(t) = S_1 \cos \Omega_1 t + S_2 \cos \Omega_2 t, \quad (60)$$

тогда

$$a(t) = A_0 [1 + M_1 \cos \Omega_1 t + M_2 \cos \Omega_2 t] \cos \omega_0 t, \quad (61)$$

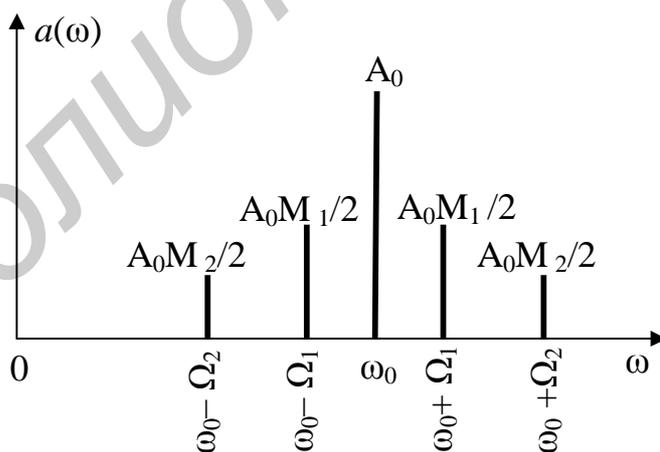


Рис. 46. Спектр двухтонального АМ-колебания

где  $M_1 = \frac{\Delta A_1}{A_0}$  и  $M_2 = \frac{\Delta A_2}{A_0}$  — парциальные коэффициенты глубины модуляции.

Ясно, что спектр будет содержать пять составляющих (рис. 46), а ширина спектра определяется наивысшей частотой управляющего колебания

$$\Pi_{\text{ам}}^{\text{п}} = 2\Omega_2, \quad \Omega_2 > \Omega_1. \quad (62)$$

#### 1.7.2.4. Полигармоническая модуляция

Если в качестве модулирующего используется полигармоническое колебание

$$S(t) = \sum_n S_n \cos \Omega_n t, \quad (63)$$

то ширина спектра определяется максимальной частотой управляющего колебания

$$\Pi_{\text{ам}}^{\text{п}} = 2\Omega_{\text{max}}, \quad (64)$$

а количество спектральных линий в спектре модулированного колебания как

$$m = 1 + 2n,$$

и амплитуды боковых составляющих определяются парциальными коэффициентами модуляции  $M_n$ .

Поскольку количество спектральных линий, отстоящих от несущей слева и справа, может быть достаточно большим, то набор линий, отстоящих справа от несущей, называется верхней боковой полосой (ВБП), а слева – нижней боковой полосой (НБП) (рис. 47).

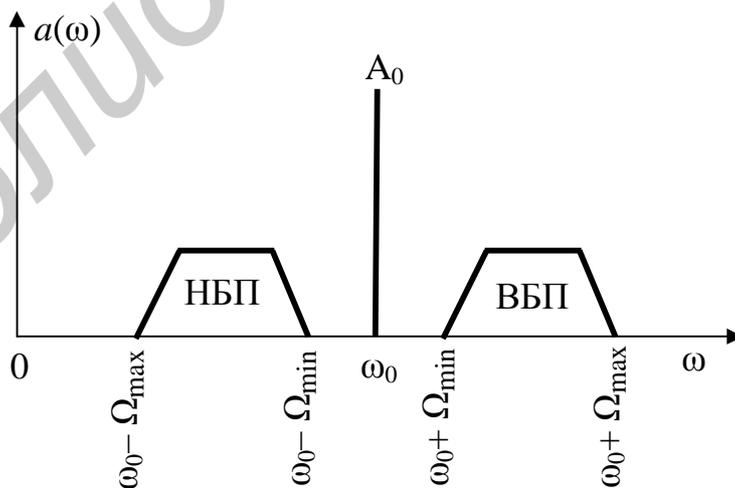


Рис. 47. Спектр полигармонического колебания

### 1.7.2.5. Мощность АМ-колебания

Мощность колебания определяется квадратами спектральных составляющих:

$$P_{AM} = A_0^2 + \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 + \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 = A_0^2 \left[ 1 + \frac{M^2}{2} \right] = A_0^2 \left[ 1 + \frac{\Delta A^2}{2A_0^2} \right] = A_0^2 + 0,5\Delta A^2. \quad (65)$$

Даже при максимальном значении коэффициента модуляции лишь 1/3 мощности будет приходиться на боковые полосы и 2/3 – приходиться на несущее, высокочастотное колебание.

Из рассмотренного материала следует, что для практических целей необходимо уменьшать ширину спектра, а также снижать затраты мощности на генерацию несущего (высокочастотного) колебания.

Для ограничения ширины спектра АМ-колебания можно исключить из него одну из боковых полос, т.к. они являются идентичными. При этом получается и выигрыш в мощности

$$P_{OAM} = A_0^2 + \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 = A_0^2 \left[ 1 + \frac{M^2}{4} \right] = A_0^2 + 0,25\Delta A^2. \quad (66)$$

Можно также предпринять меры по исключению несущей составляющей из спектра. Тогда

$$P_{ПН} = \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 + \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 = 0,5\Delta A^2. \quad (67)$$

В этом случае информационное колебание носит название *с подавленной несущей* (ПН).

Можно исключить и несущую составляющую и одну из боковых полос спектра. Тогда

$$P_{OБП} = \left[ \frac{A_0 M}{2} \right]^2 = 0,25\Delta A^2. \quad (68)$$

В этом случае информационное колебание носит название *с одной боковой полосой* (ОБП).

### 1.7.2.6. Полярная амплитудная модуляция (ПАМ)

Формируется для разделения пары колебаний с различными амплитудными и частотными параметрами. Суть формирования заключается в модуляции верхнего полупериода несущего колебания одним низкочастотным  $S_{\Pi}(t)$ , нижнего полупериода – вторым низкочастотным  $S_{\Delta}(t)$  колебанием (рис. 48).

Спектр ПАМ при полигармонических низкочастотных колебаниях описывается выражением

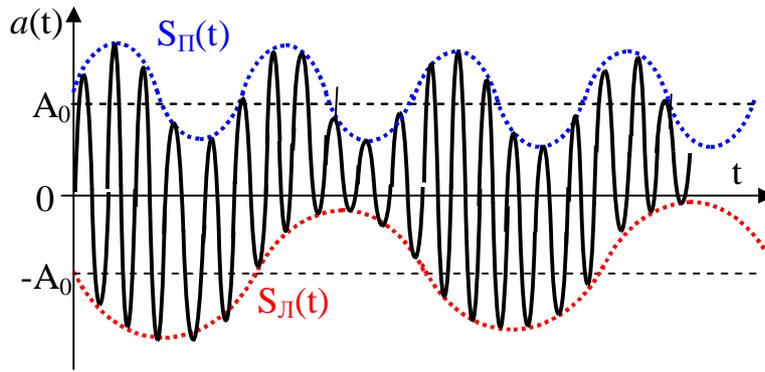


Рис. 48. Полярно-модулированное колебание

$$a(t) = \left[ A_{\Pi} \left( 1 + \sum_n M_n^P \cos \Omega_n t \right) \cos \omega_{\Pi} t + \sum_n M_n^C \cos \Omega_n t \right], \quad (69)$$

где  $A_{\Pi}$ ,  $\omega_{\Pi}$  – амплитуда и частота несущего колебания;

$M_n^P$ ,  $M_n^C$  – парциальные коэффициенты модуляции разностного и суммарного колебаний.

Спектр содержит несущую, нижнюю и верхнюю боковые полосы, а также набор низкочастотных составляющих с амплитудами, определяемыми суммой двух колебаний (рис. 49).

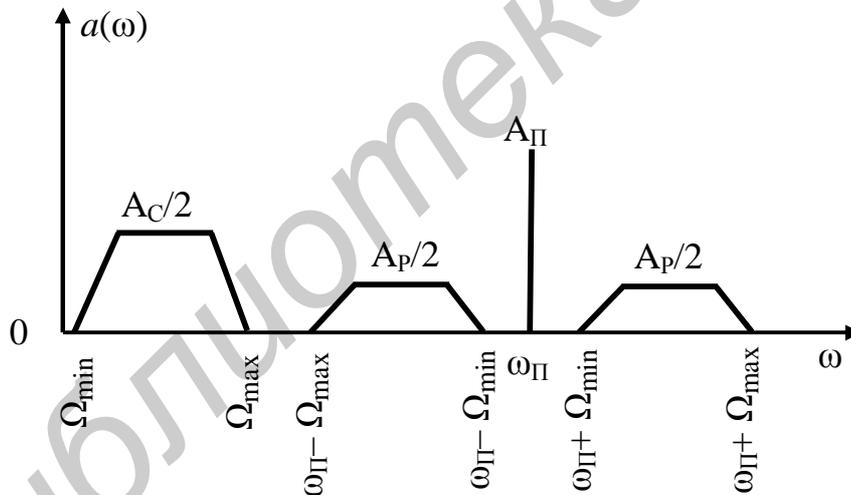


Рис. 49. Спектр полярно-модулированного колебания:  
 $A_C$ ,  $A_P$  – суммарные и разностные амплитуды

### 1.7.3. Колебания с угловой модуляцией

#### 1.7.3.1. Взаимосвязь изменения фазы и частоты во времени

Согласно обобщенной модели радиосигнала для колебаний с угловой модуляцией амплитуда остается неизменной, а угловая компонента  $y(t)$  изменяется во времени.

Для гармонического колебания набег полной фазы в конечный промежуток времени определяется как

$$\Delta y = y(t_2) - y(t_1) = w_0(t_2 - t_1) = w_0 \Delta t. \quad (70)$$

При этом скорость изменения фазы может быть определена как отношение набега  $\Delta y$  к длительности временного промежутка  $\Delta t$ . Когда процесс изменяется во времени, необходимо перейти к интегральному и дифференциальному соотношениям

$$y(t) = \int_0^t w(t) dt, \quad (71)$$
$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$

где  $t_1 = 0$  и  $t_2 = t$  – начальный и конечный моменты времени рассматриваемого промежутка времени. Из данных выражений следует, что *изменение частоты во времени приводит к изменению фазы по закону интеграла, а изменение фазы во времени – к изменению мгновенной частоты по закону производной.*

Это положение определяет взаимосвязь между частотой и фазой, равно как и связь между двумя разновидностями угловой модуляции – частотной и фазовой.

#### 1.7.3.2. УМ-колебания при тональной модуляции

Для уяснения различия между ЧМ и ФМ рассмотрим случай модуляции гармоническим управляющим колебанием. Пусть частота изменяется по закону (рис. 50, а)

$$w(t) = w_0 + \Delta w \sin \Omega t, \quad (72)$$

где  $w_0$  и  $\Omega$  – частоты несущего и модулирующего колебания (как и в случае АМ);  $\Delta w = w_{\max} - w_0$  характеризует максимальное отклонение частоты от ее среднего значения и называется *девиацией частоты*. При сравнении с АМ оказывается, что девиация частоты пропорциональна амплитуде модулирующего колебания

$$\Delta w = k_1 \Delta A, \quad (73)$$

где  $k_1$  – коэффициент пропорциональности (если  $\Delta A \rightarrow B$ , то  $k_1 \rightarrow \frac{\Gamma_{\text{Ц}}}{B}$ ).

При частотной модуляции высокочастотного колебания (рис. 50, б) его амплитуда остается постоянной, а период (частота) изменяется по закону задающего колебания (рис. 50, в).

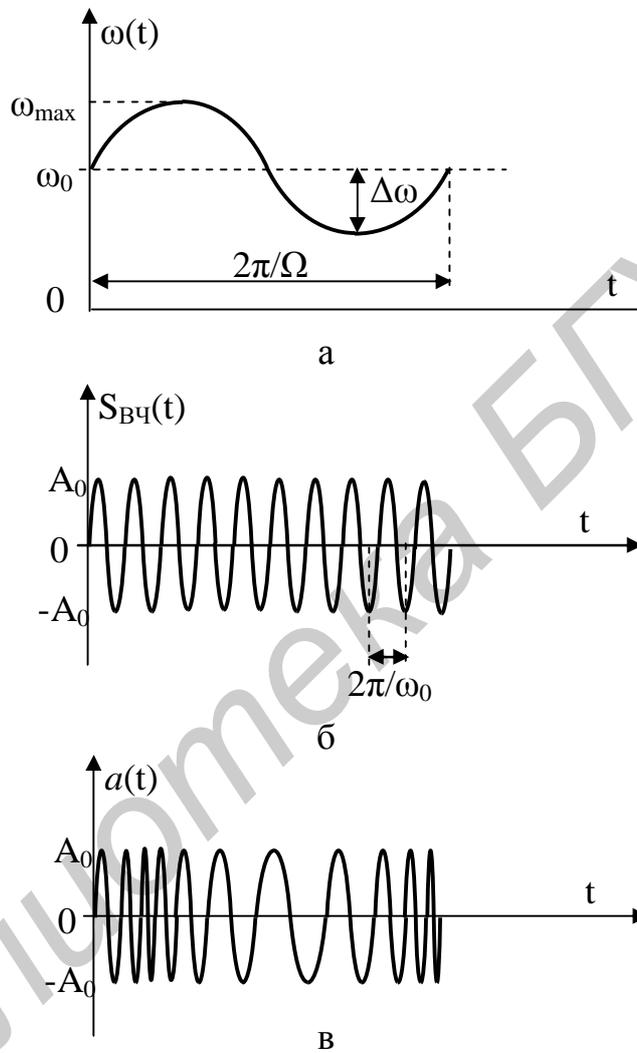


Рис. 50. Формирование УМ-колебания

Определим, как будет изменяться в этом случае фаза. Согласно (71):

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t w(t) dt = \int_0^t (w_0 + \Delta w \sin \Omega t) dt = w_0 t + \frac{\Delta w}{\Omega} \cos \Omega t = \\
 &= y_{\text{cp}} + b \cos \Omega t,
 \end{aligned} \quad (74)$$

откуда видно, что фаза будет изменяться по закону синуса с некоторой амплитудой (рис. 51):

$$b = \frac{\Delta w}{\Omega} = k_2 \Delta A, \quad (75)$$

называемой индексом угловой модуляции (девиацией фазы относительно некоторой средней фазы  $\Psi_{\text{ср}}$ ), который пропорционален амплитуде модулирующего колебания;  $k_2$  – коэффициент пропорциональности (если  $\Delta A \rightarrow B$ , то  $k_2 \rightarrow \frac{1}{B}$ ).

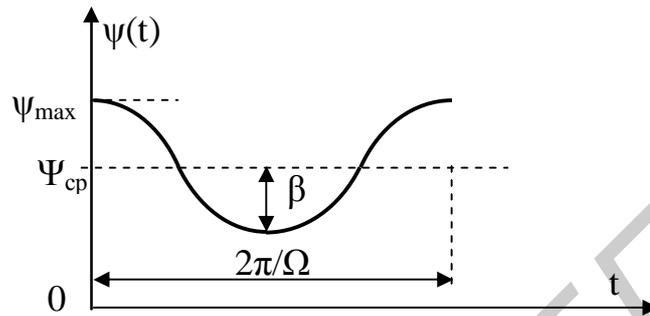


Рис. 51. Изменение полной фазы колебания

Тогда выражение, описывающее радиосигнал с ФМ, можно записать (рис. 50, в)

$$a(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + b \cos \Omega t). \quad (76)$$

Различие между частотной и фазовой модуляцией проявляется при изменении частоты модуляции:

- при ЧМ девиация частоты пропорциональна амплитуде модулирующего колебания и не зависит от  $\Omega$  (рис. 52, а);
- при ФМ индекс угловой модуляции пропорционален амплитуде модулирующего колебания и не зависит от  $\Omega$  (рис. 52, б).

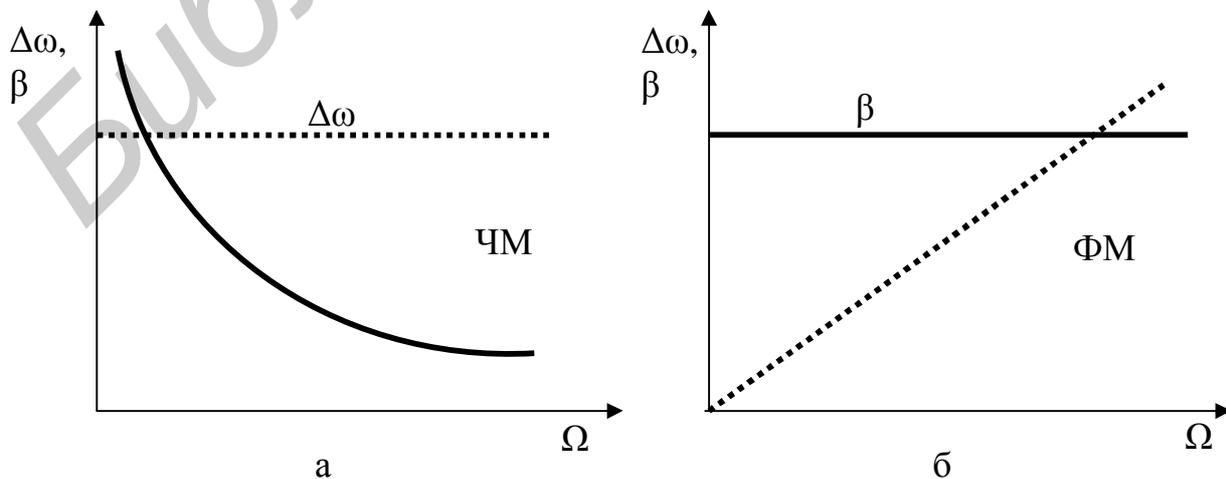


Рис. 52. Зависимость девиации частоты и индекса модуляции от частоты модулирующего колебания

Поскольку при ЧМ индекс угловой модуляции обратно пропорционален  $\Omega$ , то  $\beta$  убывает с ростом частоты модулирующего колебания (см. рис. 52, а). При ФМ  $\beta$  остается постоянной, а девиация прямо пропорциональна  $\Omega$ , поэтому она линейно возрастает с ростом  $\Omega$  (см. рис. 52, б).

### 1.7.3.3. Спектр колебаний с угловой модуляцией

При гармоническом управляющем колебании спектр колебания с угловой модуляцией определяется выражением

$$a(t) = A_0 \left\{ I_0(b) \sin w_0 t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) \left[ \sin (w_0 + n\Omega) + (-1)^n \sin (w_0 - n\Omega) \right] \right\}, \quad (77)$$

здесь  $I_n(b)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. Таким образом, спектр колебания с УМ в общем случае содержит бесконечное число боковых составляющих  $w_0 \pm n\Omega$ .

Функция Бесселя является цилиндрической функцией первого рода и выражается бесконечным сходящимся рядом

$$I_n(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (78)$$

и играет такую же роль, как косинусоидальные функции в декартовой системе координат. Из рис. 53 видно, что эти функции являются затухающими по амплитуде и непериодическими.

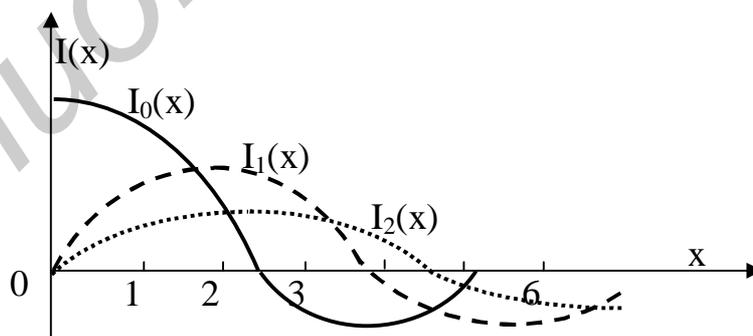


Рис. 53. Функции Бесселя

В табл. 1 приведены корни функции Бесселя различных порядков. Как видно, несущая обнуляется при  $\beta = 2,41$ , затем при  $5,53$  и т.д. Амплитуды первой пары боковых составляющих становятся равными нулю при  $\beta = 3,84$ , затем при  $7,02$  и т.д. Вторая пара боковых составляющих обнуляется при  $5,14$ . Последующие нули будут определяться как  $k = (k - 1) + \pi$ .

Таблица 1

	n	0	1	2	3	4	5
№ корня k	1	2.41	3.84	5.14	6.39	7.59	8.78
	2	5.53	7.02	8.42	9.77	11.1	12.3
	3	8.66	10.2	11.6	13.0	14.4	15.7
	4	11.8	13.3	14.8	16.2	17.6	19.0
	5	14.9	16.5	18.0	19.4	20.8	22.2

На практике же обычно учитывается  $b + 1 + \sqrt{b}$  боковых составляющих при значениях  $0 < b < 25$ , а практически учитываемая ширина спектра определяется как

$$\Pi_{\text{ум}}^{\text{т}} = 2\Omega(b + 1 + \sqrt{b}). \quad (79)$$

Следовательно, при  $b \ll 1$  ширина спектра  $\Pi_{\text{ум}} = 2\Omega$  и отличается от АМ-колебания лишь изменением фазы левой боковой составляющей на  $180^\circ$ . При значениях  $0,5 \leq b \leq 1$  появляется вторая пара боковых и ширина спектра становится равной  $4\Omega$ , при  $1 < b < 2$  ширина спектра  $\Pi_{\text{ум}} = 6\Omega$  и т. д.

При больших значениях  $b \gg 1$  ширина спектра близка к удвоенному значению девиации частоты т.к.  $\Omega \ll \Delta\omega$  и

$$\Pi_{\text{ум}} = 2\Omega \frac{\Delta\omega}{\Omega} + 2\Omega \approx 2\Delta\omega. \quad (80)$$

Заметим, что при малых индексах модуляции (*быстрая модуляция*  $\Delta\omega \ll \Omega$ ) радиокосебание является узкополосным, а при больших индексах (*медленная модуляция*  $\Delta\omega \gg \Omega$ ) – широкополосным.

Приведенные сведения о практически учитываемой ширине спектра УМ-колебаний справедливы и для негармонических модулирующих колебаний.

#### 1.7.4. Сравнение ширины спектров АМ, ЧМ и ФМ

Определим влияние времязадающих и управляющих параметров на частотные характеристики модулированного колебания.

Проведем сравнение ширины спектров колебаний с АМ, ЧМ и ФМ при одновременном изменении вышеуказанных параметров.

Пусть заданы амплитуда и частота высокочастотного колебания  $A_0 = 10$  В,  $f_0 = 1$  МГц. Заданы также частота управляющего колебания  $F = 10$  кГц, коэффициент модуляции  $M = 0,5$  и индекс угловой модуляции  $\beta = 4$ .

Требуется определить, во сколько раз изменится ширина спектров АМ, ЧМ и ФМ, если одновременно увеличивается в два раза амплитуда  $\Delta A$  и уменьшается в два раза частота  $F$  управляющего однотоного колебания.

Определим ширину базового спектра АМ-колебания:

$$\Pi_{\text{ам}}^{\text{Б}} = 2F = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кГц},$$

и ширину с учетом введенных условий изменений:

$$\Pi_{\text{ам}}^{\text{И}} = 2 \frac{F}{2} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ кГц}.$$

Замечания: 1) изменение амплитуды управляющего колебания не влияет на ширину спектра модулированного колебания, изменяется лишь амплитуда боковых спектральных линий, т.к.  $M = \frac{\Delta A}{A_0}$ ;

2) ширина спектра АМ уменьшается в 2 раза.

Определим ширину базового спектра УМ-колебания:

$$\Pi_{\text{ум}}^{\text{Б}} = 2F(b + 1 + \sqrt{b}) = 2 \cdot 10(4 + 1 + 2) = 140 \text{ кГц}$$

и ширину спектра ЧМ-колебания с учетом изменений параметров управляющего колебания:

$$\Pi_{\text{чм}}^{\text{И}} = 2 \frac{F}{2} \left( \frac{2\Delta f}{F/2} + 1 + \sqrt{\frac{4\Delta f}{F}} \right) = 2 \cdot \frac{10}{2} (4 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot \sqrt{4}) = 210 \text{ кГц}.$$

Замечания: 1) следует помнить, что амплитуда управляющего колебания пропорциональна девиации частоты;

2) количество боковых составляющих спектра увеличилось с 7 до 21;

3) частотное расстояние между спектральными линиями уменьшилось в два раза;

4) индекс модуляции в сравнении с базовым увеличился в 4 раза и составил 16. Следует учесть, что при расчете амплитуд составляющих спектра необходимо использовать новый индекс модуляции;

5) ширина спектра увеличилась в  $210/140 = 3/2 = 1,5$  раза.

Ширина спектра ФМ-колебания с учетом изменений параметров управляющего колебания определяется как

$$\Pi_{\text{фм}}^{\text{И}} = 2 \frac{F}{2} (2b + 1 + \sqrt{2b}) = 2 \cdot \frac{10}{2} (2 \cdot 4 + 1 + \sqrt{2 \cdot 4}) = 120 \text{ кГц}.$$

Замечания: 1) следует помнить, что амплитуда управляющего колебания пропорциональна индексу модуляции;

2) количество боковых составляющих спектра увеличилось с 7 до 12.

3) частотное расстояние между спектральными линиями уменьшилось в два раза;

4) индекс модуляции в сравнении с базовым увеличился в 2 раза и составил 8. Следует учесть, что при расчете амплитуд составляющих спектра необходимо использовать новый индекс модуляции;

5) ширина спектра уменьшилась в  $140/120 = 7/6 = 1,16$  раза, а в сравнении с измененным ЧМ-колебанием –  $210/120 = 7/4 = 1,75$  раза.

### 1.7.5. Ограничение спектра колебания с УМ. Паразитная амплитудная модуляция

Ограничение реального спектра колебания с УМ приводит к тому, что амплитуда радиоклебания не остается постоянной. Обобщенно говорят, что колебание имеет смешанную модуляцию, при которой помимо угловой компоненты изменяется и амплитуда. При этом, чем больше ограничение спектра, тем больше проявляется «паразитная» амплитудная модуляция.

Реально такая ситуация возникает из-за несовпадения ширины полосы пропускания частотной характеристики какого-либо устройства и ширины спектра колебания.

*Пример.* Пусть имеется ЧМ-колебание с индексом модуляции 4 и заданными амплитудами и частотами несущего и модулирующего колебаний. Базовый спектр такого радиоклебания приведен на рис. 54, а. Рядом со спектром на рис. 54, б приведена траектория, описываемая суммарным вектором  $A_{\Sigma}$ , когда несущая частота равна нулю:  $\omega_0 = 0$ . Сектор, в котором качается суммарный вектор, определяется углом  $2\Delta\psi$ . Если при построении векторной диаграммы учесть вращение суммарного вектора с частотой  $\omega_0$  (рис. 54, в), то ширина кольца  $\Delta A_{\Pi}$  будет характеризовать уровень паразитной модуляции.

Удалим из базового спектра пару крайних боковых составляющих (рис. 54, г). Траектория суммарного вектора искажается незначительно, угол его сканирования изменяется на несколько градусов (рис. 54, д). Уровень паразитной модуляции возрастает (рис. 54, е).

Последующее удаление пары боковых не приводит к существенному изменению траектории суммарного вектора (рис. 54, ж, з), а  $\Delta A_{\Pi}$  увеличивается.

Когда в спектре остается только две пары боковых составляющих (рис. 54, к), траектория суммарного вектора принимает вид параболы, угол сектора уменьшается на 12 градусов, коэффициент паразитной амплитудной модуляции становится равным 0,21 (рис. 54, л, м).

Если спектр ограничить одной парой боковых составляющих (рис. 54, н), то траектория конца суммарного вектора вырождается в прямую, угол, в котором он качается, составляет 160 градусов (рис. 54, п), а коэффициент паразитной модуляции оказывается равным 0,67 (рис. 54, р).

### 1.8. Импульсная модуляция

К отдельному виду модуляций относят *импульсную* (ИМ), при которой осуществляют изменение одного из параметров последовательности импульсных колебаний.

Когда изменению по закону сообщения подвергается амплитуда импульсов, то имеет место *амплитудно-импульсная модуляция* (АИМ) (рис. 55) и

$$a(t) = A_0 + k_a S(t), \quad (81)$$

где  $A_0$  – амплитуда немодулированных импульсов;  
 $k_a$  – коэффициент пропорциональности между модулирующим колебанием и изменением импульсов (безразмерная величина).

Библиотека БГУИР

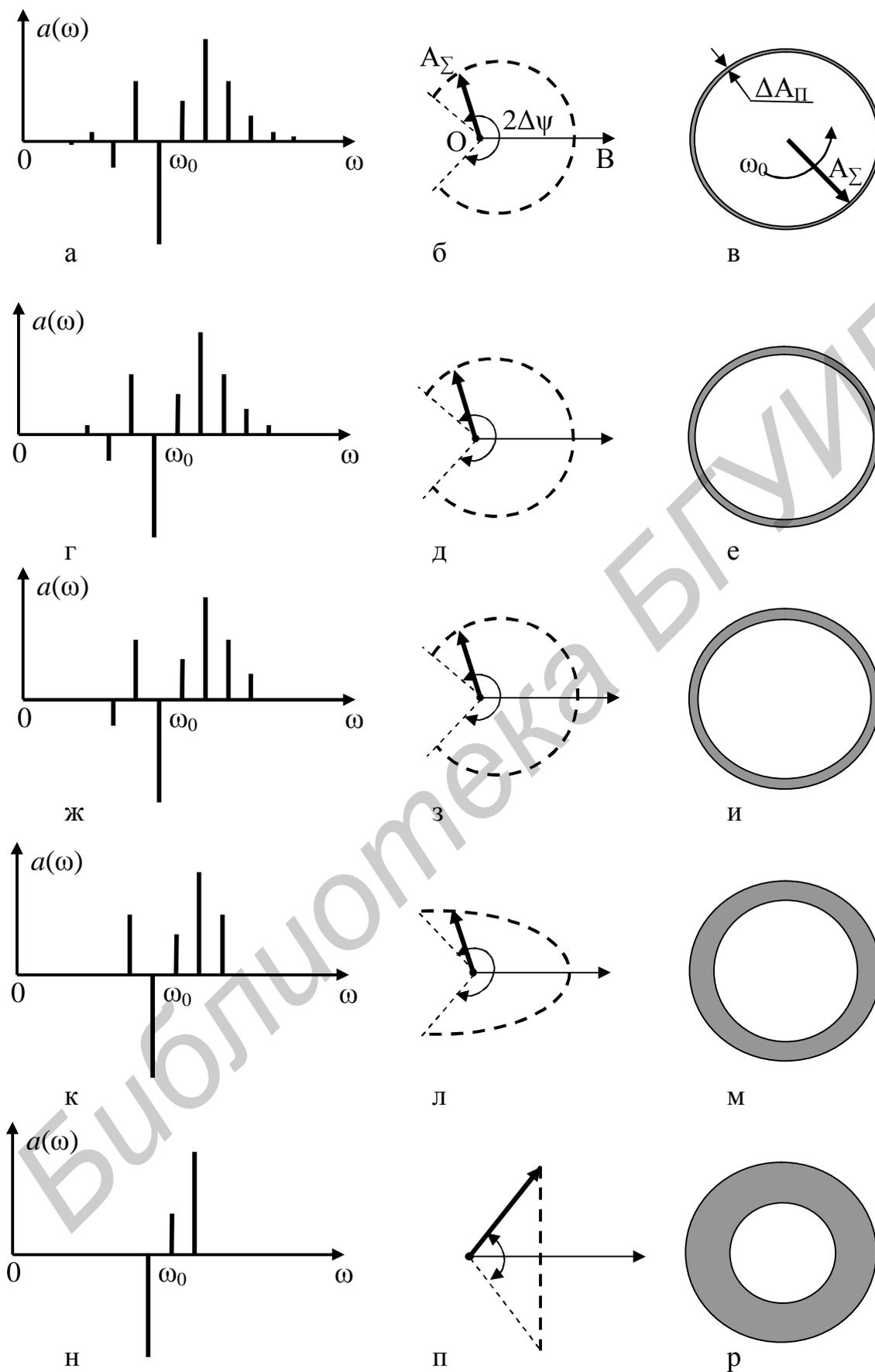


Рис. 54. Ограничение спектра УМ-колебания

Когда амплитуда и период следования импульсов остаются постоянными и по закону тонального колебания изменяется длительность импульсов (рис.56), имеет место *широтно-импульсная модуляция* (ШИМ). Для этого случая

$$t(t) = t_0 + k_{\text{ш}}S(t), \quad (82)$$

где  $t_0$  – длительность немодулированных импульсов;

$k_{\text{ш}}$  – коэффициент пропорциональности между модулирующим напряжением и изменением длительности импульса ( $c/S(t)$ ).

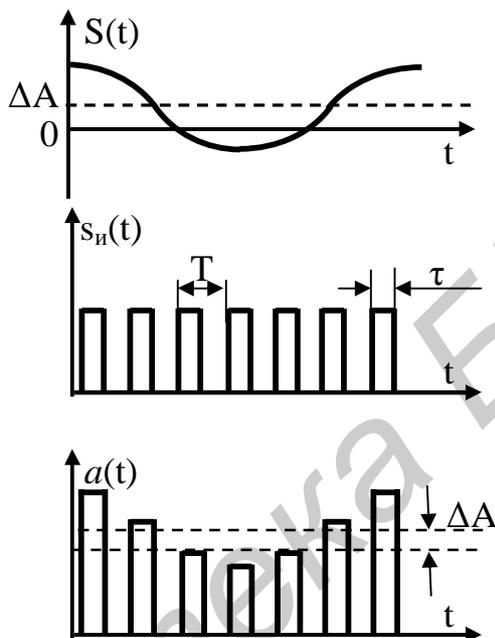


Рис. 55. АИМ-колебание

При этом возможна односторонняя ШИМ (рис. 56, а), связанная с изменением длительности и фиксированным временем между передними фронтами импульсов, и двусторонняя ШИМ (рис 56, б), при которой помимо длительности меняются временные промежутки между импульсами.

Модуляция обобщенно называется *временной импульсной модуляцией* (ВИМ) при изменении периода следования тактовых импульсов по закону заданного колебания

$$T(t) = T_0 + k_{\text{в}}S(t), \quad (83)$$

где  $T_0$  – период следования немодулированной импульсной последовательности;

$k_{\text{в}}$  – коэффициент пропорциональности между модулирующим колебанием и изменением частоты следования импульсов ( $c/S(t)$ ).

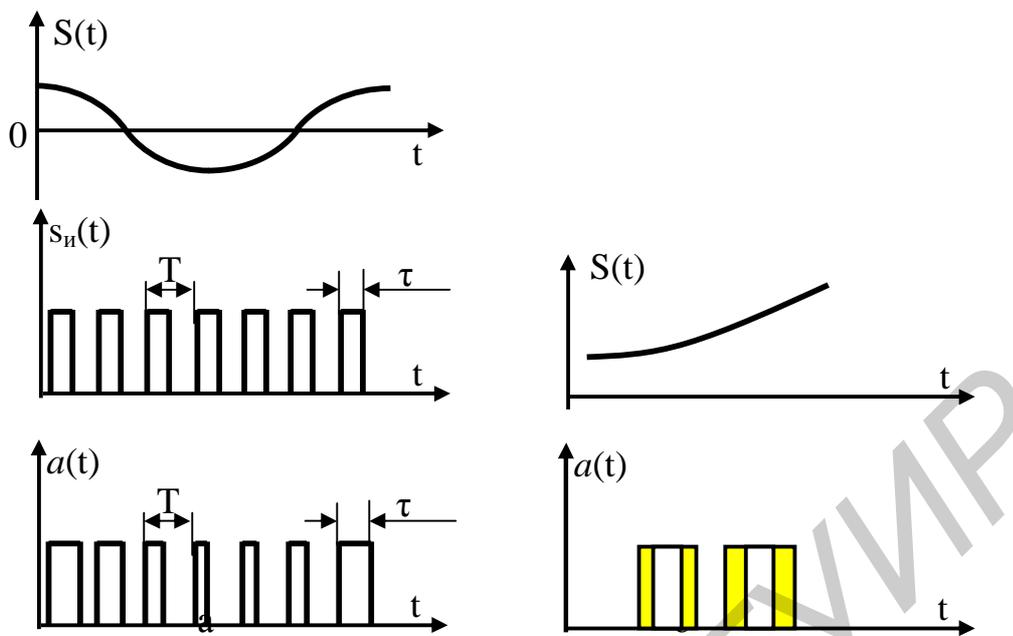


Рис. 56. ШИМ:  
а – односторонняя; б – двухсторонняя

ШИМ делится на частотную – ЧИМ и фазовую – ФИМ. Различия между ними такое же, как и между ЧМ- и ФМ-колебанием.

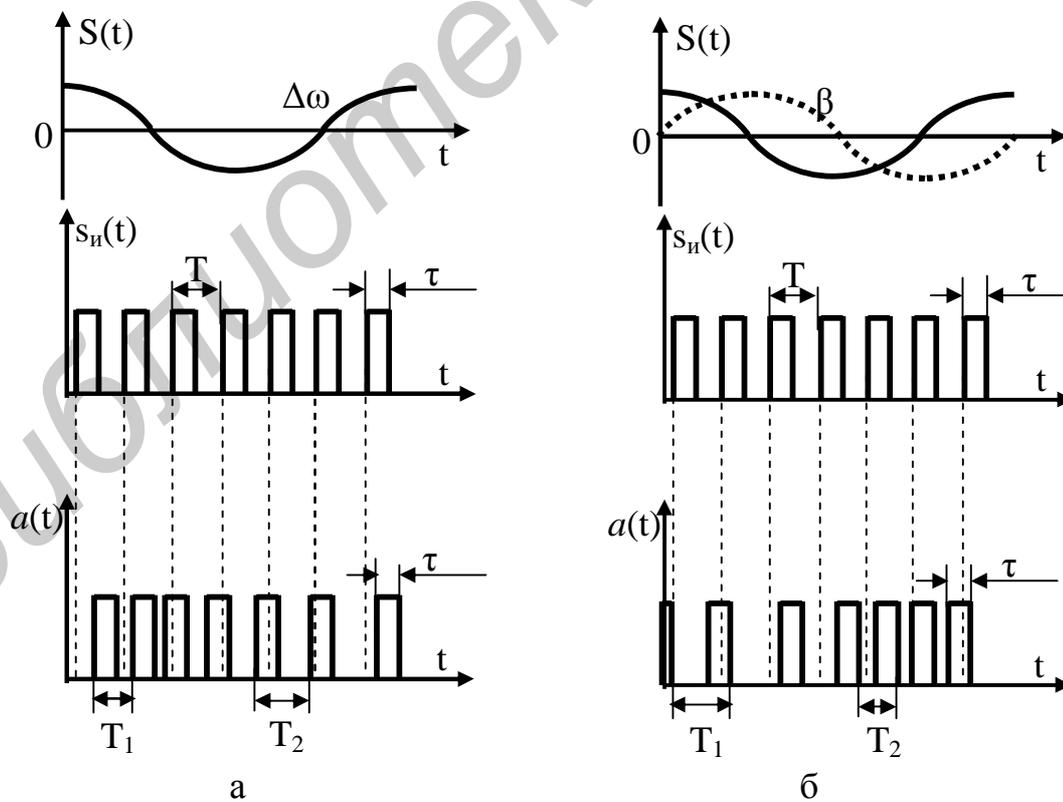


Рис. 57. ЧИМ- (а) и ФИМ-колебания (б)

При тональном изменении частоты по функции  $w(t) = \Delta w \cos \Omega t$  (рис. 57, а) его фазовая составляющая будет изменяться по закону синуса (рис. 57, б):

$$y(t) = \int_0^t w(t) dt = \int_0^t (\Delta w \cos \Omega t) dt = \frac{\Delta w}{\Omega} \sin \Omega t = b \sin \Omega t. \quad (84)$$

Здесь  $\Delta w$ ,  $b$  – девиация частоты и индекс модуляции. Временной сдвиг при этом определяется как

$$\Delta t = \frac{y(t) - y_0}{1/T_0} = b T_0 \sin \Omega t. \quad (85)$$

Спектр импульсно-модулированных колебаний приведен на рис. 58. Как и при ФМ или ЧМ ширина спектра может быть ограничена первым лепестком спектральной характеристики, т.е.  $\Delta f = 1/\tau_0$ . Таким образом, спектр импульсно-модулированного сигнала будет отличаться от спектра импульсной последовательности тем, что в ряд Фурье необходимо подставить формулы, определяющие изменение амплитуды, длительности и периода. При этом спектр становится значительно сложнее:

- 1) около каждой составляющей (как около несущей) появляются свои боковые;
- 2) общая ширина спектра расширяется незначительно, что зависит от вида модуляции и определяется минимальной длительностью импульсно-модулированного сигнала.

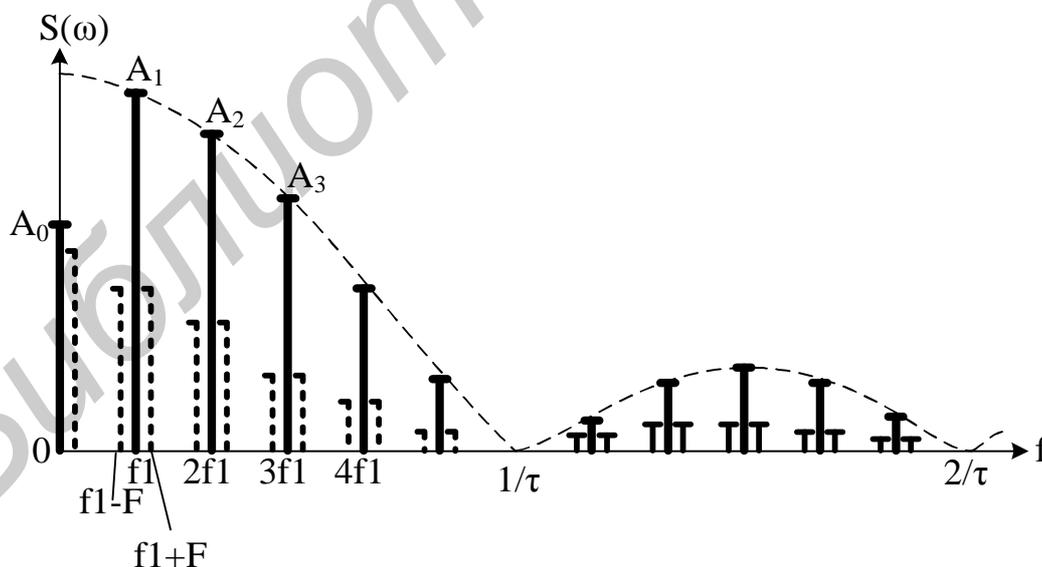


Рис. 58. Обобщенный спектр ИМ-колебаний

Применение импульсной модуляции позволяет увеличить мощность формируемого колебания  $P_{И}$  при сравнительно небольшой его средней мощности  $P_{СР}$ .

Взаимосвязь этих мощностей определяется скважностью импульсной последовательности

$$P_{\text{И}} = P_{\text{СР}} Q, \quad (86)$$

здесь  $Q = T/\phi = 1/q$  – скважность импульсной последовательности;  $q = t/T$  – коэффициент заполнения.

## 1.9. Случайные колебания

Случайные колебания (СК) – это процесс при котором и амплитуда, и частота (фаза) изменяются по случайному характеру. Аналитическое описание такого процесса невозможно. Поэтому для их оценки прибегают к методам статистической радиотехники.

### 1.9.1. Основные оценочные параметры СК

Рассмотрим случайный процесс  $S(t)$  (рис. 59).

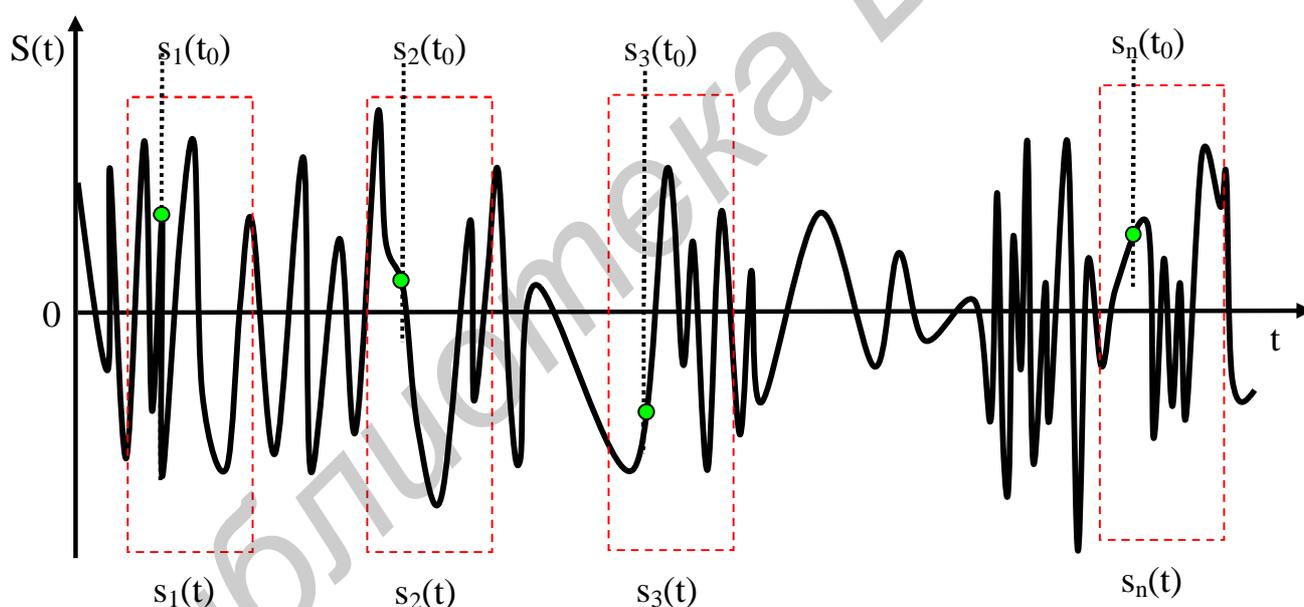


Рис. 59. Случайный процесс

При анализе данного процесса выделяются реализации  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$ , ...  $s_n(t)$  процесса  $S(t)$ , представляющие собой фиксированные фрагменты процесса одинаковых отрезков времени.

Для оценки процесса в дискретный момент времени определяют сечение  $t_0$ . Если сечение проводится по ансамблю реализаций  $s_1(t_0)$ ,  $s_2(t_0)$ ,  $s_3(t_0)$ , ...  $s_n(t_0)$ , то оно называется сечением процесса.

Достаточной характеристикой случайного процесса является плотность вероятности, которая определяется как частота попадания случайной величины в наперед заданный интервал этих величин (рис. 60):

$$P(s' < s_n(t) < s'') = \int_{s'}^{s''} p(s) ds. \quad (87)$$

Функция  $p(s)$  является дифференциальным законом распределения случайной величины  $S$ , а  $P(s)$  есть интегральный закон распределения.

При любом распределении должно выполняться так называемое правило нормировки:

$$\int_{S_{\min}}^{S_{\max}} p(s) ds = 1. \quad (88)$$

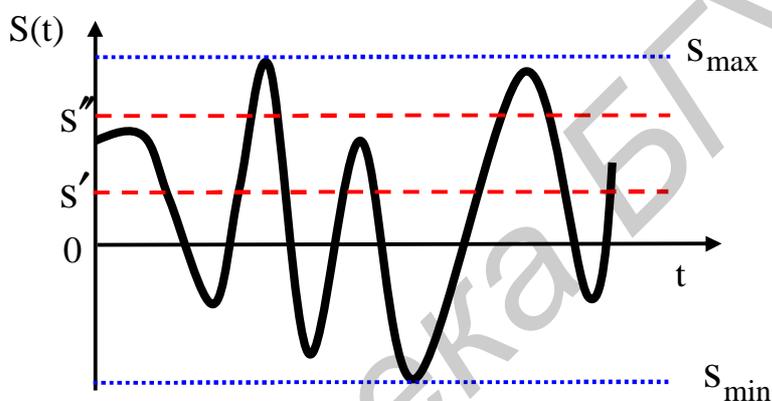


Рис. 60. К определению плотности вероятности и правилу нормировки

Для оценки полученных реализаций определяют среднее значение (первый момент):

– для дискретной величины (по сечению)

$$m_s = \frac{\sum s_n}{n}; \quad (89)$$

– для непрерывной (по ансамблю реализаций)

$$m_s = \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} s p(s) ds. \quad (90)$$

Физически эта величина для электрического процесса имеет смысл постоянной составляющей. Единица измерения математического ожидания совпадает с единицей измерения случайной величины. На рис. 61 приведен пример математического ожидания для выбранной реализации. Как видно, среднее значение несколько смещено относительно нулевого значения. Ясно, что с увеличением числа реализаций среднее будет определено более точно.

Определяют дисперсию (средний квадрат флуктуаций) как отклонение случайной величины от среднего значения (от матожидания):

– для дискретной величины

$$s_s^2 = \frac{\sum (s_n - m_s)^2}{n}; \quad (91)$$

– для непрерывной

$$s_s^2 = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} (s - m_s)^2 p(s) ds. \quad (92)$$

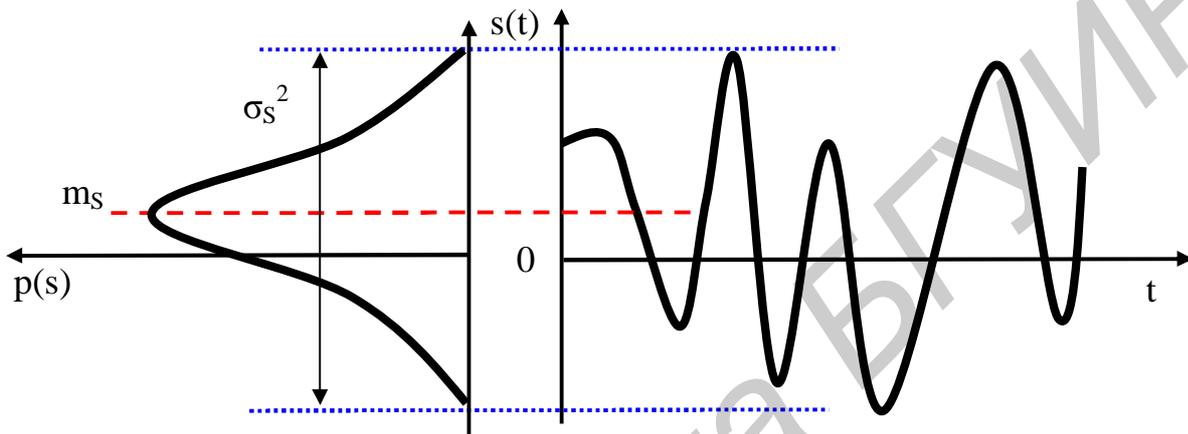


Рис. 61. Матожидание и дисперсия реализации СК

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для электропроцессов имеет смысл средней мощности (условно, приходящейся на сопротивление 1 Ом). Так как площадь под кривой распределения остается постоянной, то ясно, что при увеличении дисперсии кривая растягивается по оси случайных величин.

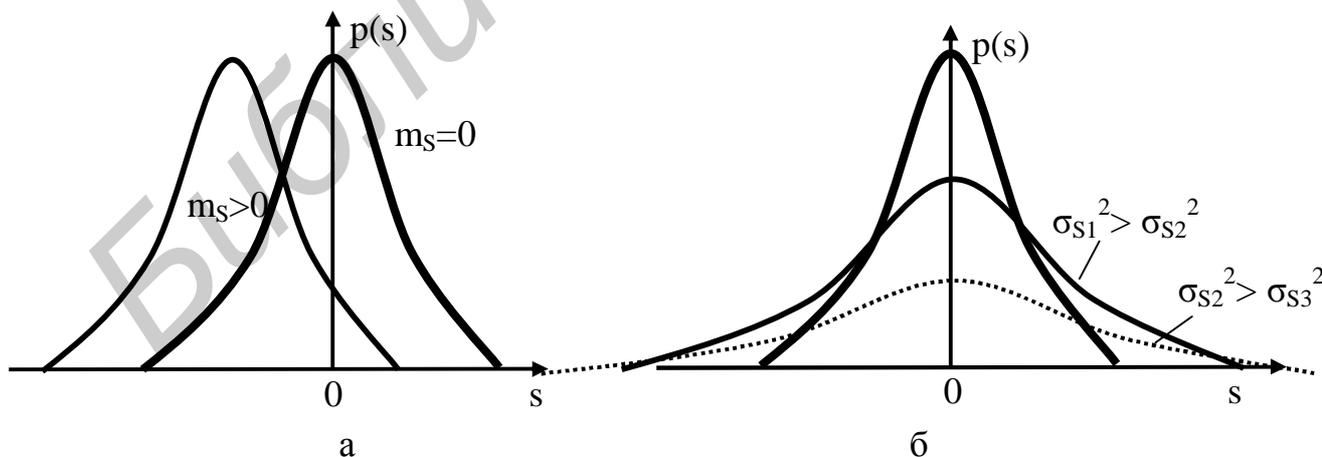


Рис. 62. Распределение плотности вероятности СК:  
а – при различных матожиданиях; б – при различных дисперсиях

На рис. 62 приведены примеры распределения случайных величин при различных матожиданиях и дисперсиях.

Большинство случайных процессов подчиняются нормальному (гауссовому) закону распределения

$$p(s) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{(s-m_s)^2}{2s^2}\right]. \quad (93)$$

Этот закон наиболее часто встречается в природе.

Если взять большое число реализаций в виде гармонических составляющих с отличающимися начальными фазами и амплитудами, то их сумме будет соответствовать нормальный закон распределения. Это есть суть *центральной предельной теоремы*, сформулированной Ляпуновым.

### 1.9.2. Стационарные и нестационарные процессы

При стационарном процессе плотность вероятности не зависит от времени. В противном случае имеет место нестационарный процесс. Более жесткие ограничения накладываются на *эргодический процесс*, когда усреднение по множеству реализаций может быть заменено усреднением по времени в пределах одной реализации. Это означает, что матожидание процесса определяется средним по одной выборке

$$m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt. \quad (94)$$

*Пример.* Пусть задано гармоническое колебание вида

$$s(t) = A_0 \cos(\omega t_1 + j),$$

и полная фаза колебания распределена равномерно в интервале фаз  $0 \dots 2\pi$ .

Определим с учетом начальных условий плотность распределения заданного колебания

$$p(s)ds = 2p(f)df = 2\frac{1}{2p}df,$$

или

$$p(s) = \frac{1}{p} \frac{1}{\left| \frac{ds}{df} \right|}.$$

Производная колебания по полной фазе есть функция синуса, которая может быть заменена аналитически как  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , тогда

$$p(s) = \frac{1}{P} \frac{1}{\sqrt{A_0^2 - s^2(t)}}$$

График этого распределения представляет собой параболу, пьедестал которой определяется амплитудой колебания (рис. 63).

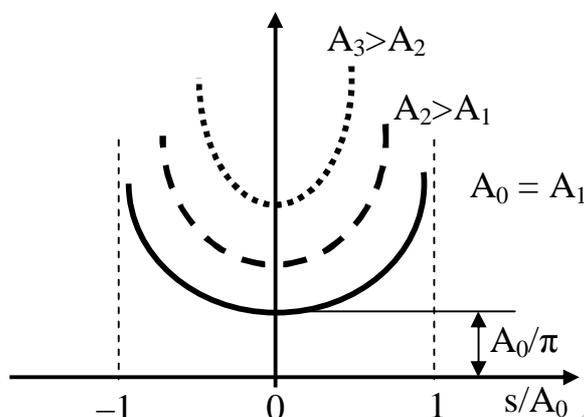


Рис. 63. Распределение плотности вероятности гармонического колебания

### 1.9.3. Частотная характеристика СК

Зададимся вопросом: а можно ли применить аппарат Фурье для оценки СК? При анализе начальных условий задачи оказывается, что характер реализаций существенно различается – их начальные фазы и амплитуды случайны, а значит, спектральный состав фрагментов процесса резко отличается друг от друга. Для оценки действия СК в частотной области вводят понятие *спектральной плотности мощности* (или понятие *энергетического спектра*), характеризующей распределение мощности процесса в частотной области как

$$N(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{|S(j\omega)|^2}{\Delta\omega}. \quad (95)$$

Единица измерения – квадрат спектральной плотности колебания, приведенный к частоте.

### 1.10. Корреляционный анализ колебаний

При анализе случайных процессов можно увидеть, что реализации могут иметь одинаковые матожидание и дисперсию, но существенно различаться по характеру изменения во времени (рис. 64).

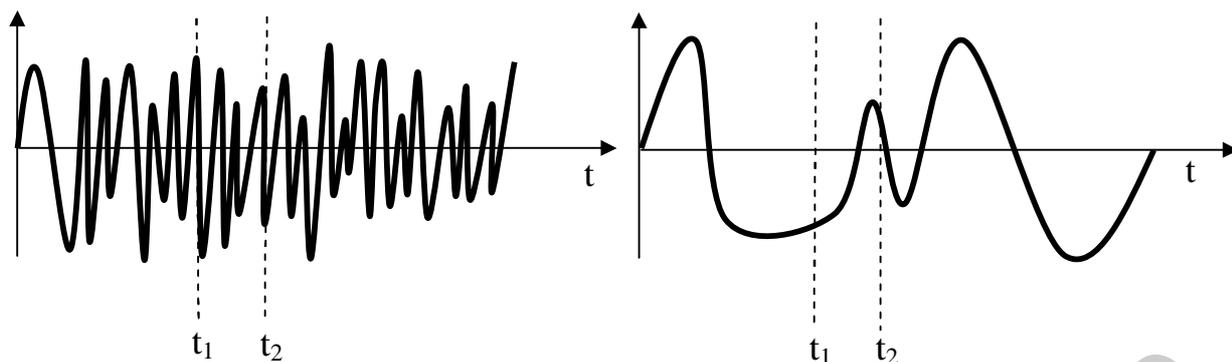


Рис. 64. Реализации колебаний с одинаковыми матожиданием и дисперсией

Это заставляет ввести дополнительный оценочный параметр, который бы характеризовал изменение процесса во временной области. В статистике таким является корреляционный момент, определяемый как произведение отклонений случайной величины от среднего значения в пределах одной или нескольких реализаций.

$$R(t_1, t_2) = \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} M[(S(t_1) - m_{t_1})(S(t_2) - m_{t_2})]. \quad (96)$$

Обобщенно единицей измерения является  $S^2(t)$ .

### 1.10.1. Корреляционный анализ детерминированных колебаний

Для определения характера взаимной связи процесса и его копии применяется понятие автокорреляционной функции

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S(t-t) dt. \quad (97)$$

Если осуществляется сравнение двух независимых колебаний  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , то корреляционная функция называется взаимной:

$$R_{S_1 S_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t-t) dt = R_{12} = R_{21}. \quad (98)$$

В комплексной форме, авто- и взаимная корреляционная функции определяются как

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S^*(t-t) dt, \quad (99)$$

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2^*(t-t) dt, \quad (100)$$

функция, обозначенная звездочкой, есть комплексно-сопряженная функция.

### 1.10.2. Корреляционная функция гармонического колебания

Рассмотрим вопрос об автокорреляционной функции гармонического косинусоидального колебания:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \int_{-T/2}^{T/2} S(t) S^*(t-t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega t + j) A \cos(\omega t + j - \omega t) dt = \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} 0,5A^2 [\cos(2(\omega t + j) + \omega t) + \cos(\omega t)] dt = 0,5A^2 \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

График этой функции представлен на рис. 65. Таким образом, автокорреляционная функция гармонического колебания не зависит от его начальной фазы.

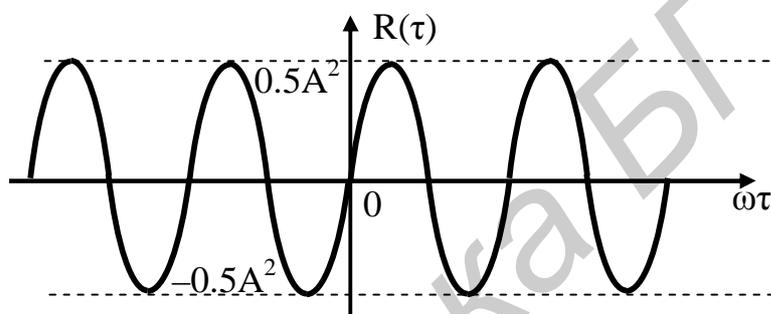


Рис. 65. Автокорреляционная функция косинусоидального колебания

### 1.10.3. Корреляционная функция импульсного колебания

Пусть имеется непериодический импульс. Определим автокорреляционную функцию этого одиночного колебания.

На рис. 66, а показано взаимное расположение оригинала и его копии, сдвинутой на время  $t$  при  $t > 0$ . Закрашенная площадь соответствует области, определяемой произведением  $s(t) s(t-t)$ . Согласно определению

$$R(t) = \int_0^{t_u+t} A^2 dt = A^2(t_u+t).$$

Если проводить смещение копии импульса в левую сторону, соответствующую отрицательным значениям  $t$ , то можно получить такой же результат (см. рис. 66, а).

Расширение длительности второго колебания приводит к расширению корреляционной функции. Когда второе колебание имеет несимметричную форму, то взаимная корреляционная функция будет несимметричной (рис. 66, б).

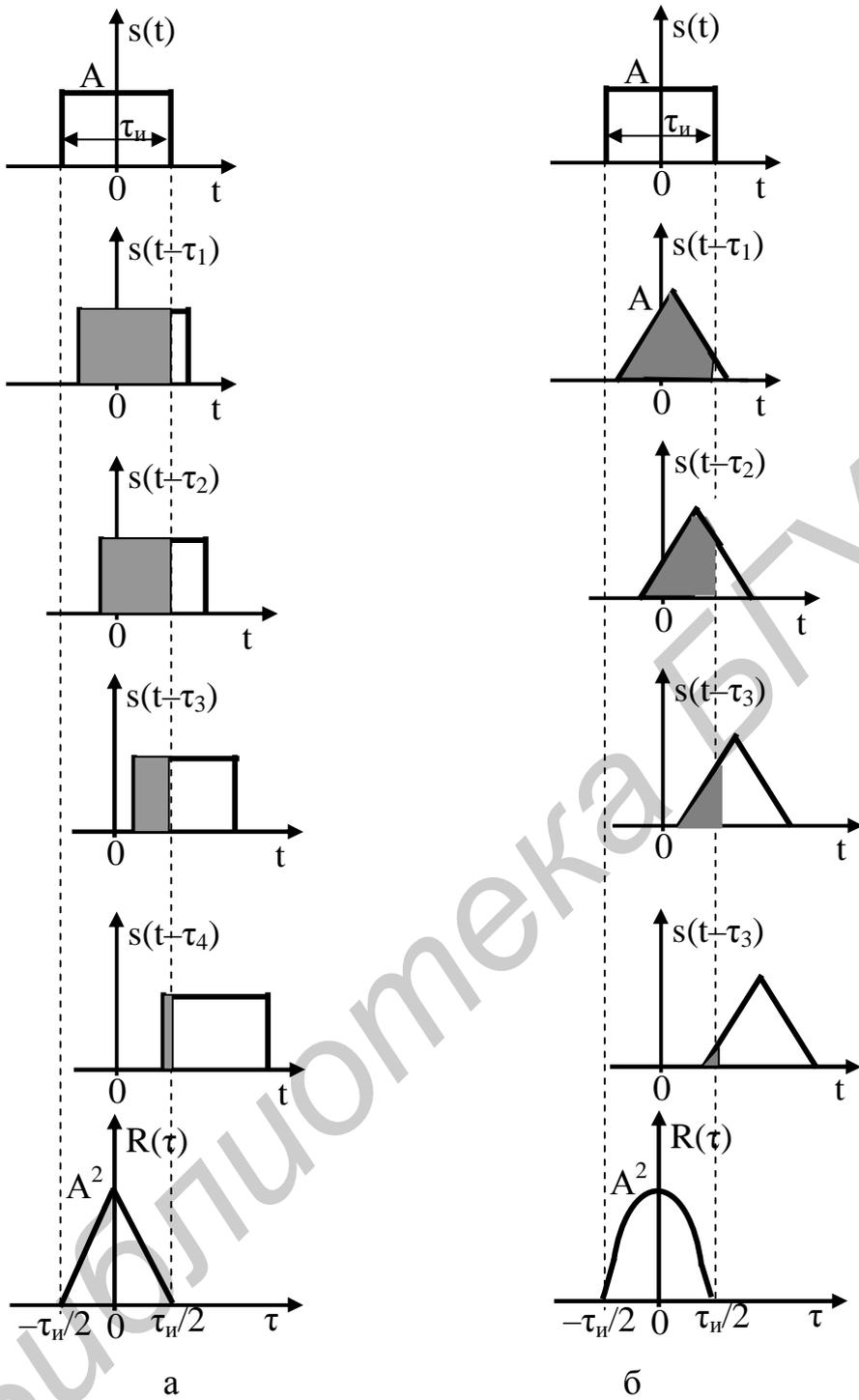


Рис. 66. Авто- (а) и взаимокорреляционная (б) функции

#### 1.10.4. Свойства автокорреляционной функции

Автокорреляционная функция обладает следующими основными свойствами:

1) при  $\phi = 0$  она максимальна и равна энергии сигнала, т.е.

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \mathcal{E},$$

а при анализе СК – его дисперсии;

2) является четной функцией

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t+t) dt = R(-t);$$

3) является убывающей функцией

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

#### 1.10.5. Свойства взаимной корреляционной функции

Взаимная корреляционная функция обладает следующими основными свойствами:

1) при  $t = 0$ :

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \mathcal{E}_{12},$$

где  $\mathcal{E}_{12}$  – взаимная энергия двух колебаний;

2) функция в общем случае не является четной функцией и необязательно достигает максимума при  $t = 0$ ;

3) является убывающей функцией – с ростом абсолютного значения  $\phi$  колебаний с конечной энергией она затухает;

4) обладает зеркальностью, в случае если вместо задержки одного колебания рассматривать его опережение

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+t)s_2(t)dt;$$

$$R_{21}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+t)dt,$$

то  $R_{12}(t) = R_{21}(-t)$ ,  $R_{21}(t) = R_{12}(-t)$ .

### 1.10.6. Связь энергетического спектра и автокорреляционной функции. Теорема Винера–Хинчина

Определим взаимосвязь спектральной характеристики колебания и автокорреляционной функции, используя пару представления Фурье:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) S(t-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(jw) e^{jw t} dw \right] S(t-t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(jw) \left[ \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(t-t) e^{jw t} dt \right] dw. \quad (101)$$

Выражение, входящее в квадратные скобки, согласно теореме смещения во времени, есть спектральная плотность, домноженная на экспоненту  $j\omega t$ :

$$R(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(jw) S^*(jw) e^{jw t} dw.$$

Перемножение комплексно-сопряженной функции есть квадрат модуля этой функции, поэтому

$$R(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |S(jw)|^2 e^{jw t} dw. \quad (102)$$

Сравнивая последнее выражение с обратным преобразованием Фурье, можно определить квадрат спектральной плотности как

$$|S(jw)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-jw t} dt = N(w), \quad (103)$$

который по определению есть энергетический спектр СК.

Выражения (102), (103) определяют суть теоремы Винера–Хинчина, которая утверждает, что энергетический спектр и автокорреляционная функция связаны между собой парой преобразования Фурье. Согласно этой теореме можно сделать следующие заключения:

- 1) чем шире энергетический спектр СК, тем уже его автокорреляционная функция (рис. 67, а);
- 2) чем быстрее изменяется процесс во времени, тем больше он занимает места в частотной области; медленный процесс имеет более узкий энергетический спектр (рис. 67, б).

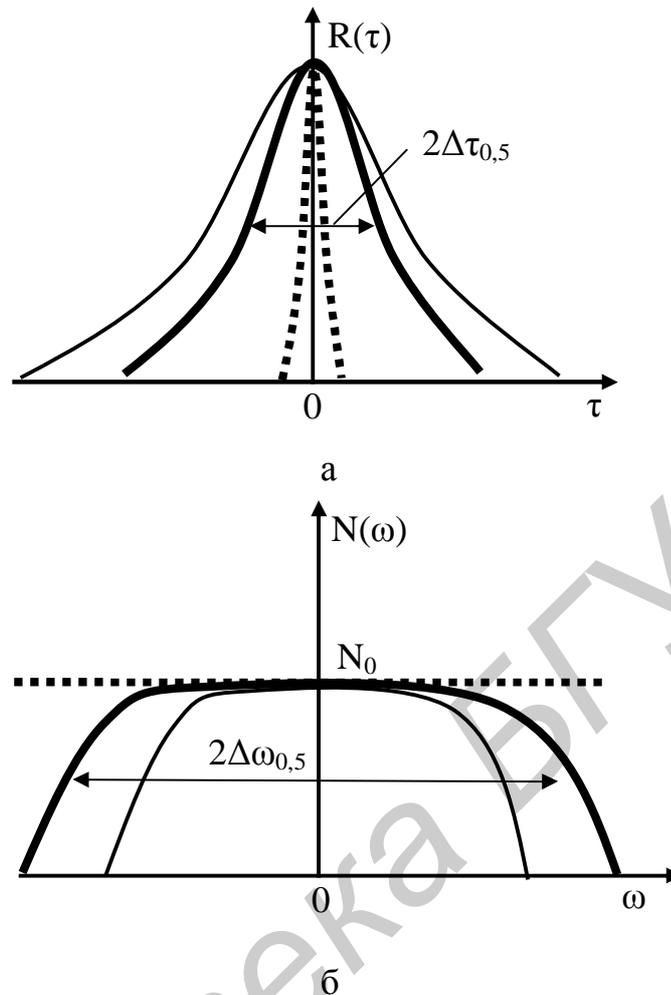


Рис. 67. Взаимосвязь корреляционной функции (а) и спектральной плотности мощности (б)

Для оценки процесса с неопределенными временными параметрами применяют понятие интервала корреляции  $2\Delta t_{0,5}$ , определяемого по половинному уровню корреляции относительно ее максимального значения. При этом связь с шириной энергетического спектра определяется как

$$2\Delta t_{0,5} 2\Delta \omega_{0,5} \approx 1. \quad (104)$$

Применяя аналогичные рассуждения в отношении двух независимых друг от друга колебаний, можно ввести понятие взаимного энергетического спектра, определяемого выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(t) e^{-j\omega t} dt = S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) = N_{12}(\omega). \quad (105)$$

При решении ряда прикладных задач такое аналитическое введение является очень полезным.

## 2. ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ

### 2.1. Основные законы электродинамики

При анализе волновых процессов приходится иметь дело с электромагнитным полем (ЭМП).

В физике принято разделять объекты на вещества и поля. Первые обладают инертной массой, вторые нет. Как же обнаружить (прощупать) ЭМП? Очевидно, что оно обнаруживается посредством взаимодействия с зарядами.

Область науки, занимающаяся изучением электромагнитных полей и их взаимодействием с заряженными частицами, называется *электродинамикой*.

Строго говоря, под ЭМП следует понимать среду, пространственно-временное состояние которой полностью определяется (задается) векторами:

$\dot{\mathbf{E}}$  – напряженности электрического поля  $\left[ \frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$ ;

$\dot{\mathbf{D}}$  – электрического смещения  $\left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ ;

$\dot{\mathbf{H}}$  – напряженности магнитного поля  $\left[ \frac{\text{А}}{\text{м}} \right]$ ;

$\dot{\mathbf{B}}$  – индукции магнитного поля  $\left[ \text{Тл} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right]$ ;

$\dot{\mathbf{d}}$  – плотности тока проводимости  $\left[ \frac{\text{А}}{\text{м}^2} \right]$ .

Эти векторы удовлетворяют четырем уравнениям Максвелла.

#### 2.1.1. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле считается заданным, если они связаны между собой уравнениями Максвелла.

$$1) \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{d}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t}; \quad (102)$$

$$\oint_{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{H}} \, d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{d}} \, d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}} \, d\mathbf{S}; \quad (106)$$

$$2) \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t}; \quad (103)$$

$$\oint_{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{E}} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{B}} \, d\mathbf{S}; \quad (107)$$

$$3) \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = r; \quad (104)$$

$$\oint_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{D}} \, d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{V}} r \, dV; \quad (108)$$

$$4) \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0; \quad (105)$$

$$\oint_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{B}} \, d\mathbf{S} = 0. \quad (109)$$

Эти уравнения имеют строгую последовательность и являются фундаментальными для электродинамики.

Разберем подробно эти уравнения.

### Первое уравнение Максвелла

Это закон Ампера, который говорит о том, что если по проводнику протекает ток, то он создает вихревое магнитное поле  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  (рис. 68).

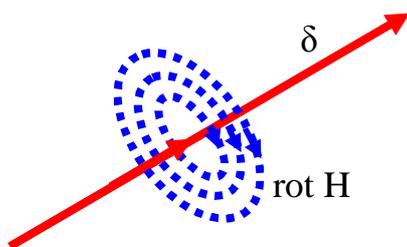


Рис. 68. Формирование магнитного поля

Заслугой Максвелла является конкретизация данного закона введением плотности тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

определяемого свойствами среды и скоростью изменения напряженности электрического поля во времени.

Перепишем первое уравнение Максвелла с учетом закона Ома:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = s \vec{E} + e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Таким образом, формируемое магнитное поле в пространстве с заданной диэлектрической проницаемостью определяется плотностями тока проводимости и тока смещения. Поэтому первое уравнение Максвелла называют законом полного тока.

На рис. 69 приведены примеры появления токов смещения. Переменный ток способен протекать через конденсатор, несмотря на отсутствие проводника. Его протеканию способствует ток смещения (рис. 69, а). При формировании электромагнитного поля в волноводе на его внутренних стенках протекает ток проводимости, который оказывается как бы разомкнутыми в местах максимальной концентрации электрических силовых линий (рис. 69, б). Замкнутый контур образуется токами смещения. Создание поля несимметричной антенной (рис. 69, в) также возможно за счет токов смещения, замыкающих ток проводимости, формируемый на проводнике.

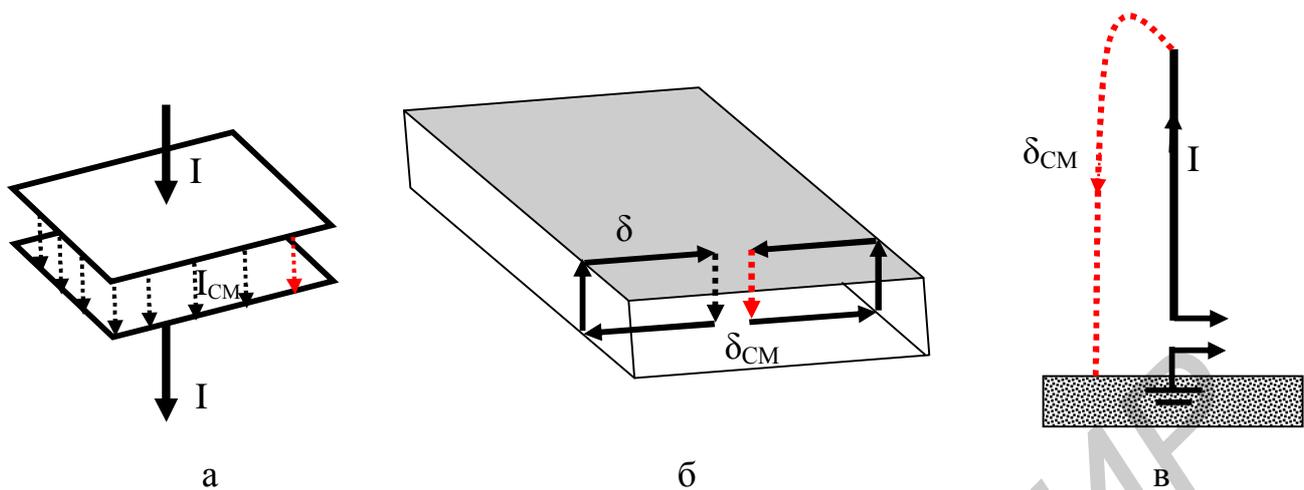


Рис. 69. К пояснению токов смещения

### *Второе уравнение Максвелла*

Это уравнение есть математическая формулировка закона электромагнитной индукции, или закон Фарадея, который говорит о том, что изменение во времени магнитного поля приводит к возбуждению электрического поля (рис. 70). В интегральной формулировке – циркуляция напряженности электрического поля по замкнутому контуру равна с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через площадь, образованную этим контуром.

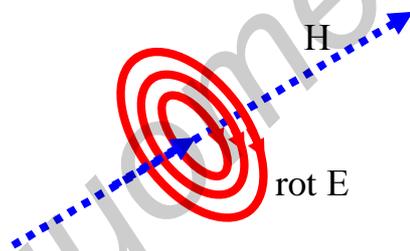


Рис. 70. Формирование электрического поля

Первая пара уравнений Максвелла обобщено говорит о том, что возникновение магнитного поля приводит к появлению электрического, а возникновение электрического поля к появлению магнитного. В результате такого взаимодействия формируется общее электромагнитное поле (рис. 71).

### *Третье и четвертое уравнения Максвелла*

Третье уравнение Максвелла – это закон Гаусса: источником электрического поля является заряд. В другой интерпретации данное уравнение считают обобщением закона Кулона, согласно которому поток вектора электрической индукции через заданный объем определяется зарядом (рис. 72)

$$q = \int_V r \, dV, \quad (110)$$

где  $\rho$  – объемная плотность заряда (Кл/м<sup>3</sup>).

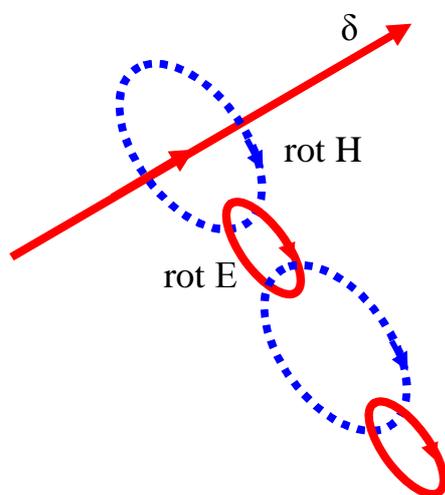


Рис. 71. Формирование электромагнитного поля

Напомним, что дивергенция вектора является отрицательной, если он поглощается объемом (имеет место стока); положительной, если объем является источником, формирующим вектор (исток); нулевой, когда вектор пронизывает данный объем. (рис. 72).

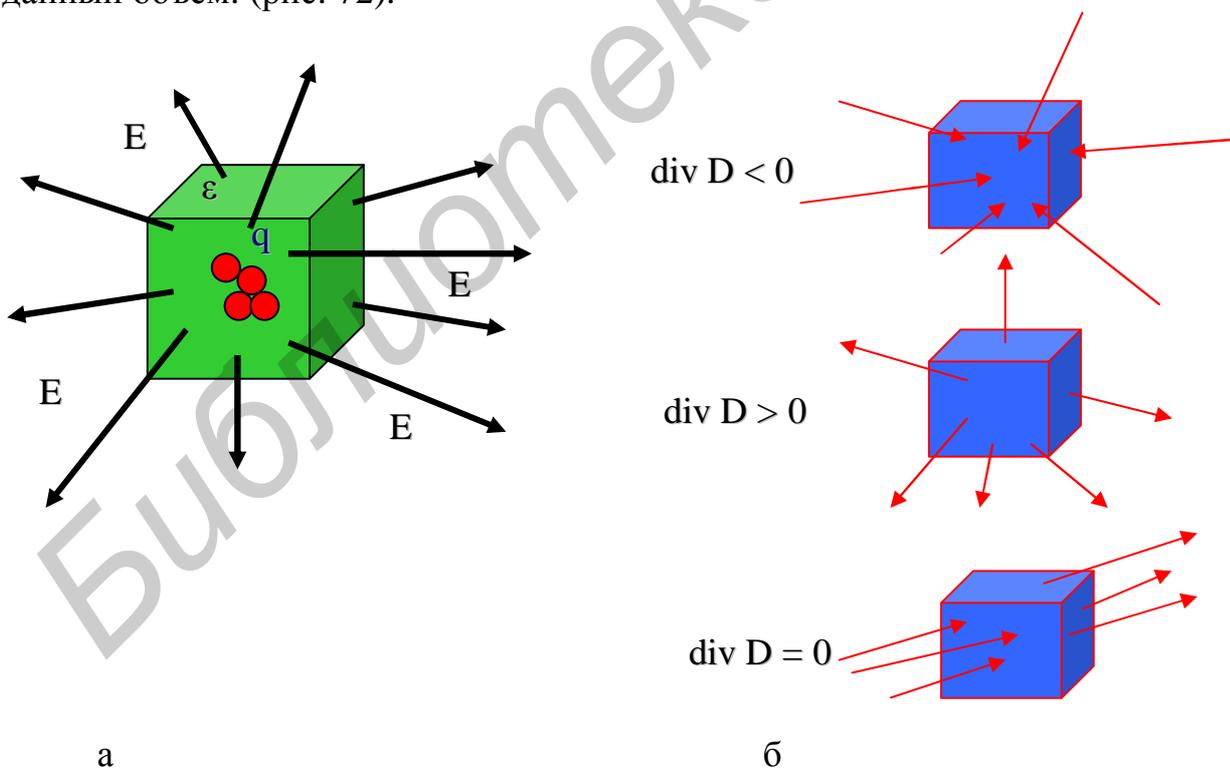


Рис. 72. К пояснению третьего уравнения Максвелла

Четвертое уравнение Максвелла подтверждает отсутствие в природе магнитных зарядов. Его называют законом замкнутости магнитных силовых линий. В интегральной формулировке – поток вектора магнитной индукции через заданную поверхность равен нулю.

### 2.1.2. Материальные уравнения

Уравнения, определяющие взаимосвязь электрической напряженности поля и вектора смещения, магнитной напряженности поля и вектора индукции, носят название материальных:

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad (111)$$

$$\mathbf{B} = m_a \mathbf{H}, \quad (112)$$

$$\mathbf{j} = s_a \mathbf{E}, \quad (113)$$

где  $\epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды (Ф/м);

$m_a$  – абсолютная магнитная проницаемость среды (Гн/м);

$s_a$  – проводимость среды (См/м).

На практике пользуются относительными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}, \quad m = \frac{m_a}{m_0}, \quad (114)$$

где  $\epsilon_0 = 10^9/(36\pi) = 8,842 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость вакуума. В табл. 2, 3 приведены значения относительных проницаемостей и проводимостей для некоторых сред.

Таблица 2

Среда	$\epsilon$	$\sigma$ , См/м
Морская вода	80	1-6
Пресная вода	80	0.001-0.0001
Влажная почва	10-30	0.0003-0.003
Сухая почва	3-6	$1 \cdot 10^{-5}$ - $5 \cdot 10^{-3}$
Дерево	3-4	-
Мрамор	8-10	$10^{-10}$
Стекло	4-10	$10^{-11}$ - $10^{-14}$
Парафин	2,2-2,3	$0,3 \cdot 10^{-18}$
Кислород	1,00055	-

Таблица 3

Среда	$\mu_a$	$\sigma$ , См/м	Примечание
Сталь	$250-3 \cdot 10^4$	1,3-2	Каждая марка стали имеет диапазон значений проницаемости
Железоникелевые сплавы	$2 \cdot 10^3-10^5$	1,3-1,9	Каждая марка сплава имеет диапазон значений проницаемости
Ферриты	50-4000	$10^{-7}-10^{-2}$	Начальное значение без подмагничивания

Формула (113) есть дифференциальная формулировка закона Ома, связывающего плотность тока с напряженностью электрического поля через удельное сопротивление проводников.

Под действием сторонних полей в средах появляются связанные (или свободные) заряды, а также элементарные замкнутые токи, образующие магнитные диполи. При воздействии внешнего электрического поля  $\vec{E}$  происходит смещение связанных зарядов или переориентация электрических диполей элементарных частиц, что приводит к *поляризации* в среде, которая характеризуется вектором поляризации среды  $\vec{P}$ . Этот вектор в общем случае не коллинеарен  $\vec{E}$  и определяется как удельный электрический момент в среде

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_i \vec{p}_i / \Delta V \right) = c_3 \vec{E}, \quad (115)$$

где  $p_i$  – электрические моменты в элементе объема;

$c_3$  – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Под действием магнитного поля  $\vec{H}$  возникает преимущественная ориентация магнитных диполей, т.е. происходит намагничивание среды, характеризуемое вектором намагничивания

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \sum_i \vec{M}_i / \Delta V \right) = c_M \vec{H}, \quad (116)$$

где  $M_i$  – магнитные моменты в элементе объема;

$c_M$  – магнитная восприимчивость вещества.

Таким образом, в отличие от вакуума в среде имеет место связь

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (\epsilon_0 + c_3) \vec{E}, \quad (117)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = (\mu_0 + c_M) \vec{H}. \quad (118)$$

### 2.1.3. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности

Заряды не возникают и не исчезают (т.е. могут возникать или исчезать одновременно). Причиной изменения величины заряда является перемещение зарядов, т.е. электрический ток через ограничивающую поверхность объем:

$$\frac{dq}{dt} = -I. \quad (119)$$

Принимая во внимание, что

$$q = \int_V r dV, \quad I = \oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S},$$

получим

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V r dV. \quad (120)$$

Применим в левой части теорему Остроградского–Гаусса и положим, что  $V$  не изменяется во времени, тогда

$$\int_V \left( \operatorname{div} \mathbf{d} + \frac{\partial r}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Последнее равенство возможно только при выполнении условия

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = -\frac{\partial r}{\partial t}, \quad (121)$$

которое называется *уравнением непрерывности* и является выражением закона сохранения заряда.

### 2.1.4. Классификация сред

Среда называется *линейной*, если зависимости  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{E})$  имеют линейный характер. Если эта зависимость является нелинейной, то среда является *нелинейной*.

Среда называется *однородной*, если ее диэлектрическая и магнитная проницаемости, а также проводимость не зависят от координат в рассматриваемом объеме. В противном случае, когда  $\epsilon_a(x, y, z)$ ,  $\mu_a(x, y, z)$ ,  $S(x, y, z)$ , среда является *неоднородной*.

Среда называется *изотропной*, если ее параметры не зависят от направления, а векторы  $\overset{\cdot}{D} \parallel \overset{\cdot}{E}$ ,  $\overset{\cdot}{B} \parallel \overset{\cdot}{H}$ ,  $\overset{\cdot}{d} \parallel \overset{\cdot}{E}$ . Среда, параметры которой зависят от направления, являются *анизотропными*. Параметры таких сред описываются тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей

$$\overset{\cdot}{e}_a = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}, \quad \overset{\cdot}{m}_a = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{pmatrix}. \quad (122)$$

### 2.1.5. Граничные условия для векторов ЭМП

Граница сред возникает там, где есть отличия параметров сред.

В связи с тем что свойства среды меняются скачкообразно, можно предположить, что векторы ЭМП будут терпеть разрыв на границе раздела двух сред. Это означает, что дифференциальные соотношения на границе теряют смысл и необходимо перейти к уравнениям Максвелла в интегральной форме.

При произвольной ориентации векторов относительно границы раздела следует проводить оценку тангенциальных (касательных) и нормальных составляющих векторов поля на обеих сторонах границы.

#### 2.1.5.1. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов ЭМП

*Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического поля*

Рассмотрим границу раздела двух сред (рис. 73, а).

Выделим элементарный плоский прямоугольный участок вблизи границы, отвечающий следующим трем условиям:

- 1) границу на участке  $\Delta l$  можно считать плоской;
- 2) среды 1 и 2 в пределах этого участка однородны;
- 3) поля в пределах этого участка не изменяются.

Введем систему векторов, определяющих ориентацию плоскости участка и направление обхода его границы (рис. 73, б):

- $\overset{\cdot}{n}$  – вектор нормали к поверхности  $S$  участка;
- $\overset{\cdot}{t}$  – тангенциальный к поверхности  $S$  вектор;
- $\overset{\cdot}{N}$  – вектор бинормали участка.

Данные векторы связаны векторным произведением:  $\overset{\cdot}{t} = \left[ \overset{\cdot}{N}, \overset{\cdot}{n} \right]$ .

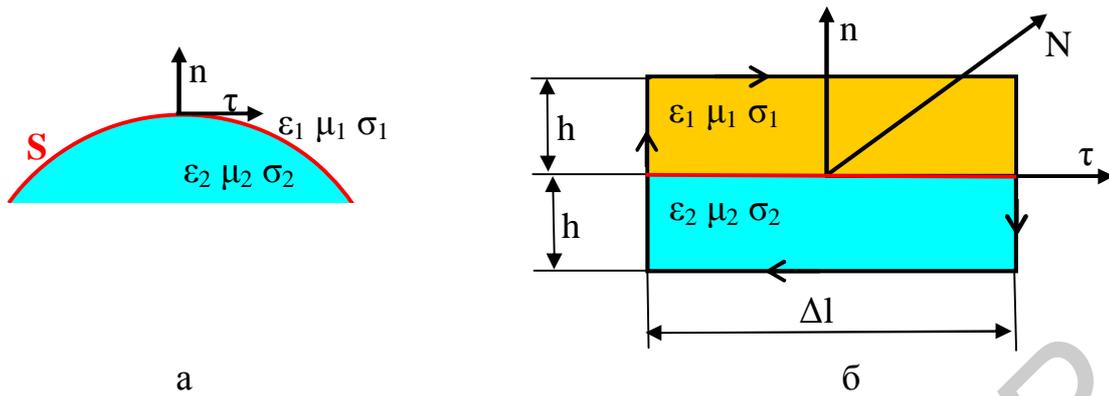


Рис. 73. Граница раздела сред

Запишем второе УМ в интегральной форме:

$$\oint_1 \mathbf{N} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \mathbf{N}.$$

Применим это уравнение к выделенному элементарному участку, используя его свойства:

$$\Delta l \mathbf{t} \left( \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \right) + \Delta_E = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} h \Delta l \mathbf{N}, \quad (123)$$

где  $\Delta_E$  – элемент циркуляции  $\dot{\mathbf{E}}$  по вертикальным участкам контура. Перейдем к пределу  $h \rightarrow 0$ . При этом на границе  $\mathbf{E}_{1,2} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \infty$ , и поэтому правая часть уравнения и  $\Delta_E$  обращаются в нуль. Тогда

$$\mathbf{t} \left( \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \right) = 0 \text{ или } E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad (124)$$

т.е. тангенциальные составляющие  $\dot{\mathbf{E}}$  непрерывны при переходе границы раздела двух сред.

*Граничные условия для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля*

Запишем первое УМ в интегральной форме:

$$\oint_1 \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{d} \mathbf{S} \mathbf{N} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} \mathbf{N}.$$

Сохраняя принятые выше модель и условия, запишем

$$\Delta l \vec{t} \left( \vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) + \Delta_H = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{D}_i}{\partial t} h \Delta l \vec{N} + \sum_{i=1}^2 \vec{d}_i \Delta l h \vec{N}. \quad (125)$$

Перейдем к пределу  $h \rightarrow 0$ . При этом  $\vec{H}_{1,2} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\partial \vec{D}_i}{\partial t} \rightarrow \infty$  на  $S$ . Но для тока такое утверждение неверно, поскольку при определенной идеализации ток может протекать по поверхности, не занимая объем. Введем понятие поверхностного тока:

$$\vec{d}_S = \lim_{h \rightarrow 0} h \vec{d}, \quad \left[ \frac{A}{M^2} \right]. \quad (126)$$

При  $h \rightarrow 0$  получаем

$$\vec{t} \left( \vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) = \vec{d}_S \vec{N}, \text{ или } H_{1t} - H_{2t} = d_{SN}, \quad (127)$$

т.е. разрыв тангенциальных составляющих магнитной напряженности поля численно равен поверхностному электрическому току.

### 2.1.5.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов ЭМП

*Граничные условия для нормальных составляющих векторов  $\vec{D}$*

Рассмотрим цилиндрический объем  $\Delta V$  с основанием  $\Delta S$  и высотами  $h$  в 1 и 2 средах (рис. 74). Объем будем считать элементарным со следующими признаками:

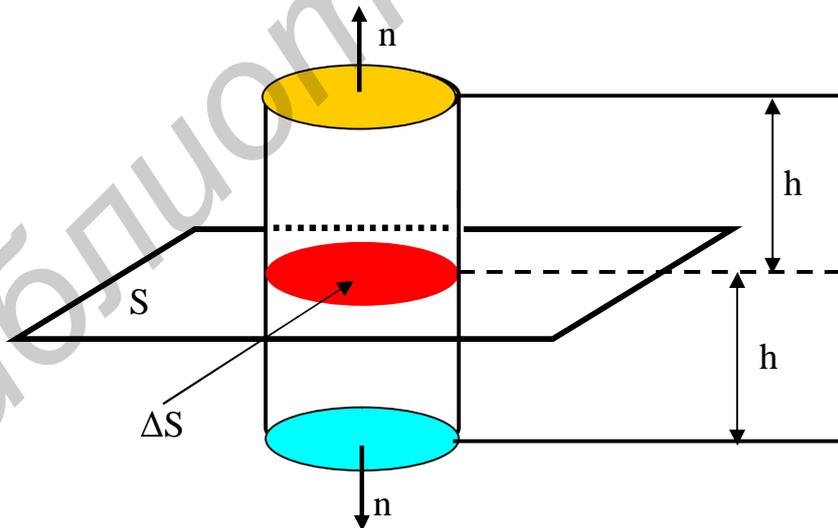


Рис. 74. Постановка задачи

- 1) в пределах объема выделенная площадка считается плоской;
- 2) в пределах объема среды 1 и 2 являются однородными;
- 3) в пределах  $\Delta V$  поля в средах 1 и 2 не изменяются.

Запишем третье УМ в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = q = \int_{\Delta V} r dV.$$

Поскольку существуют поверхностные заряды, введем понятие о плотности поверхностного заряда:

$$\hat{r}_s = \lim_{h \rightarrow 0} h r = \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]. \quad (128)$$

Перепишем третье УМ, учитывая все признаки элементарности объема,

$$\mathbf{n} \Delta S (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) + \Phi_{\text{бок}}^e = \sum_{i=1}^2 r_i \Delta S h, \quad (129)$$

где  $\Phi_{\text{бок}}^e$  – электрический поток через боковую поверхность цилиндра.

Перейдем к пределу  $h \rightarrow 0$ , и учитывая, что  $\mathbf{D}_{1,2} \rightarrow \infty$  и поэтому  $\Phi_{\text{бок}}^e \rightarrow 0$ , получим

$$\mathbf{n}_0 (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \mathbf{c}_s, \quad (130)$$

т.е. разрыв нормальных составляющих вектора смещения равен поверхностной плотности электрического заряда на граничной поверхности.

Когда  $r_s = 0$ , то  $D_{1n} = D_{2n}$  или  $\mathbf{e}_{a1} E_{1n} = \mathbf{e}_{a2} E_{2n}$  и имеет место разрыв нормальных составляющих вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\mathbf{e}_{a2}}{\mathbf{e}_{a1}}, \quad (131)$$

определяемый отличием диэлектрических проницаемостей двух сред.

*Граничные условия для нормальных составляющих векторов  $\mathbf{H}$*

Аналогичные действия с третьим УМ приводят к следующему результату для  $\mathbf{H}_n$ :

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{m_{a2}}{m_{a1}}. \quad (132)$$

Нормальные магнитные составляющие поля терпят разрыв на границе раздела двух сред, если имеется отличие магнитных свойств этих сред.

Когда среда 2 является бесконечно проводящей, то на любой частоте поле в эту среду не проникает. Тогда полученная система ГУ преобразуется в следующую:

$$\left[ \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{n}, \mathbf{E} \end{matrix} \right]_S = 0, \quad \left[ \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{n}, \mathbf{H} \end{matrix} \right]_S = \mathbf{d}_S, \quad D_{\text{in}} = r_S, \quad H_{\text{in}}|_S = 0. \quad (133)$$

В этом случае достаточно двух условий:

$$E_t|_S = 0, \quad H_n|_S = 0. \quad (134)$$

## 2.1.6. Энергия электромагнитного поля

### 2.1.6.1. Удельная мощность сторонних источников в ЭМП

ЭМП является носителем энергии. Электромагнитная энергия может преобразовываться в другой вид энергии: механическую, тепловую, химическую и т.д. Справедливо и обратное – эти виды энергии могут преобразовываться в электромагнитную.

Рассмотрим произведение  $\mathbf{d} \dot{\mathbf{E}}$ :

$$\mathbf{d} \dot{\mathbf{E}} = r \dot{\mathbf{u}} \mathbf{E} = \frac{\Delta q}{\Delta V} \frac{\Delta l}{\Delta t} \mathbf{E} = \frac{\Delta A}{\Delta t \Delta V} = p, \quad (135)$$

где  $\Delta A$  – работа поля в объеме  $\Delta V$  за время  $\Delta t$ ;

$p$  – удельная мощность потерь.

Омические потери определяются как

$$p_{\text{Пс}} = \mathbf{s} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{s} E^2. \quad (136)$$

Плотность тока в заданном объеме может создаваться не только рассматриваемым полем, но и сторонними по отношению к этому полю источниками, поэтому она представляется в виде  $\mathbf{d} = \mathbf{s} \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{d}_{\text{ст}}$ , где  $\mathbf{d}_{\text{ст}}$  – плотность тока сторонних источников. С учетом этого

$$p = \mathbf{d} \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{s} E^2 + \mathbf{d}_{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}} = p_{\text{Пс}} - p_{\text{ст}}, \quad (137)$$

где  $p_{\text{ст}}$  – мощность сторонних источников, отдаваемая данному полю (знак минус определяет убыль).

### 2.1.6.2. Баланс энергии в ЭМП. Вектор Пойнтинга

Домножим первое уравнение Максвелла на  $(-\dot{\mathbf{E}})$ , а второе на  $\dot{\mathbf{H}}$  и сложим их. При этом получим

$$\mathbf{H} \text{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \text{rot} \mathbf{H} = \text{div} \left[ \begin{matrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{E}, \mathbf{H} \end{matrix} \right] = - \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right\} - \mathbf{d} \dot{\mathbf{E}}. \quad (138)$$

Проинтегрируем левую и правую части по объему  $V$  и, используя в левой части теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\begin{aligned} \oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S} &= - \int_V \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right\} dV - \int_V \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} dV = \\ &= - \int_V \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right\} dV + P_{\text{ст}} - P_{\text{пс}}. \end{aligned} \quad (139)$$

Векторное произведение  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$  называется *вектором Пойнтинга*, который указывает величину плотности потока энергии и направление распространения энергии ЭМП. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы электрической и магнитной напряженностей поля (рис. 75).

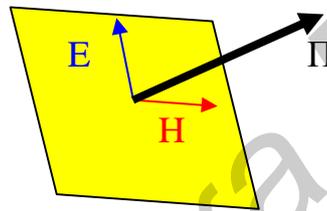


Рис. 75. Вектор Пойнтинга

Установим физический смысл остальных членов (139).

Пусть имеется изолированный от внешнего пространства объем, в котором  $P_{\text{ст}} = 0$ . Тогда имеем

$$P_{\text{пс}} = - \int_V \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right\} dV.$$

Но мощность потерь в изолированном объеме численно равна скорости убывания запасенной энергии  $-\frac{dW}{dt}$ . Следовательно,

$$\int_V \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right\} dV = \frac{dW}{dt}.$$

Когда  $\epsilon_a \neq f(t)$  и  $m_a \neq f(t)$  (диэлектрических и магнитных потерь нет),

то  $\int_V \left\{ \frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial t} \right\} dV = \frac{dW}{dt}$ , где

$$w_e = \frac{\epsilon_a E^2}{2} - \text{удельная энергия электрического поля}; \quad (140)$$

$$w_m = \frac{\mu_a H^2}{2} - \text{удельная энергия магнитного поля}. \quad (141)$$

Пусть потери в объеме отсутствуют, его границы прозрачны для ЭМП, а процесс является установившимся, т.е.  $\frac{dW}{dt} = 0$ .

В этом случае

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = P_{ct}. \quad (142)$$

Возвращаясь к исходному уравнению баланса энергии ЭМП, имеем

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + P_{ns} + \frac{dW}{dt} = P_{ct}. \quad (143)$$

Этот закон сохранения энергии для ЭМП носит название теоремы Умова–Пойнтинга.

## 2.2. Монохроматические электромагнитные поля

### 2.2.1. УМ в комплексной форме

В большинстве случаев при решении электродинамических задач предполагается, что ЭМП имеет монохроматический характер, т.е. частота колебаний векторов ЭМП постоянна. В этом случае используется метод комплексных амплитуд, при котором векторную величину представляют в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m \cos(\omega t + j) = \text{Re} \left( \mathbf{r}_m e^{j\omega t} \right), \quad \mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m e^{j\omega t}. \quad (144)$$

В дальнейшем будем пользоваться комплексными векторами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ .

Введем понятие комплексной диэлектрической проницаемости как

$$\epsilon_a = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{D}_m}{\mathbf{E}_m} e^{-j\Delta_E} = \epsilon'_a - j\epsilon''_a, \quad (145)$$

где  $\Delta_E$  – угол диэлектрических потерь.

Аналогично для магнитной проницаемости

$$\mu_a = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{B}_m}{\mathbf{H}_m} e^{-j\Delta_H} = \mu'_a - j\mu''_a, \quad (146)$$

где  $\Delta_H$  – угол магнитных потерь.

Тогда уравнения Максвелла в комплексной форме можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{j}, \quad (147)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{H}, \quad (148)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = r/e_a, \quad (149)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (150)$$

### 2.2.2. Комплексный вектор Умова–Пойнтинга. Теоремы об активной и реактивной мощностях

Представим комплексные амплитуды электрического и магнитного полей в виде полусумм комплексно-сопряженных составляющих:

$$\vec{E} = \operatorname{Re}(E_m \exp(j\omega t)) = \frac{1}{2}(E_m \exp(j\omega t) + E_m^* \exp(-j\omega t))$$

и

$$\vec{H} = \operatorname{Re}(H_m \exp(j\omega t)) = \frac{1}{2}(H_m \exp(j\omega t) + H_m^* \exp(-j\omega t)).$$

Определим вектор Пойнтинга

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{4}([\vec{E}_m \vec{H}_m^*] + [\vec{E}_m^* \vec{H}_m] + [\vec{E}_m \vec{H}_m] \exp(j2\omega t) + [\vec{E}_m^* \vec{H}_m^*] \exp(-j2\omega t)) = \\ &= \Pi_{\text{cp}} + \Pi_{\text{кол}}. \end{aligned} \quad (151)$$

Как видно, этот вектор содержит два слагаемых, первое из которых есть среднее значение – не изменяющееся во времени

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_m \vec{H}_m^*], \quad (152)$$

а второе – колеблющаяся составляющая

$$\Pi_{\text{кол}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_m \vec{H}_m] \exp(j2\omega t). \quad (153)$$

При анализе гармонических полей полагают

$$\Pi_{\text{cp}} = \operatorname{Re} \vec{\Pi}, \quad (154)$$

тогда может быть сформулирована теорема об активной мощности:

$$\int_S \vec{\Pi}_{\text{cp}} dS + \overline{P_{\Pi}} = P_a, \quad (155)$$

здесь  $\overline{P_{\Pi}}$  – средняя (за период) мощность потерь. Ее смысл заключается в том, что активная мощность  $P_a$ , развиваемая в заданном объеме, расходуется на ак-

тивную мощность излучения через граничную поверхность  $S$  и на потери в этом объеме.

Для реактивной мощности также формулируется теорема в виде

$$\operatorname{Im} \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + 2w(\overline{W}_m + \overline{W}_e) = P_r. \quad (156)$$

Она говорит о том, что затраты на реактивную мощность источников расходуется на излучение и восстановление энергий в заданном объеме.

### 2.2.3. Волновые уравнения. Уравнения Гельмгольца

Применим ко второму уравнению Максвелла операцию  $\operatorname{rot}$ :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -m \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Подставим в правую часть полученного уравнения правую часть первого уравнения, тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -m \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{d} \right].$$

Используем известное тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \nabla^2 \vec{F},$$

тогда

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -me \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - m \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}.$$

Проведем сортировку членов с учетом третьего уравнения Максвелла:

$$\nabla^2 \vec{E} - me \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{e} \operatorname{grad} r + m \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}.$$

Окончательно для составляющих электрического поля в выбранной системе координат получим

$$\nabla^2 E_i - me \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{1}{e} \operatorname{grad} r + m \frac{\partial d_i}{\partial t}. \quad (157)$$

В случае, когда заряды и токи отсутствуют,

$$\nabla^2 \underline{\underline{E}} - m\epsilon \frac{\partial^2 \underline{\underline{E}}}{\partial t^2} = 0. \quad (158)$$

При учете потерь левая часть уравнение (157) дополняется частной производной поля по времени, домноженной на параметры среды, определяющие потери

$$\nabla^2 \underline{\underline{E}} - m\epsilon \frac{\partial^2 \underline{\underline{E}}}{\partial t^2} - ms \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} = \frac{1}{e} \text{grad } r + m \frac{\partial d_{\text{ст}}}{\partial t}. \quad (159)$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены относительно напряженности магнитного поля. В результате волновое уравнение принимает вид

$$\nabla^2 \underline{\underline{H}}_i - m\epsilon \frac{\partial^2 \underline{\underline{H}}_i}{\partial t^2} = -\text{rot } d. \quad (160)$$

В случае отсутствия зарядов и токов

$$\nabla^2 \underline{\underline{H}} - m\epsilon \frac{\partial^2 \underline{\underline{H}}}{\partial t^2} = 0. \quad (161)$$

При учете потерь уравнение (160) принимает вид

$$\nabla^2 \underline{\underline{H}} - m\epsilon \frac{\partial^2 \underline{\underline{H}}}{\partial t^2} - ms \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} = -\text{rot } d_{\text{ст}}. \quad (162)$$

В комплексном виде волновые уравнения, не учитывающие потерь в среде и при отсутствии зарядов и токов, принимают вид

$$\nabla^2 \dot{\underline{\underline{E}}} + w^2 \dot{m}\dot{\epsilon} \dot{\underline{\underline{E}}} = 0, \quad (163)$$

$$\nabla^2 \dot{\underline{\underline{H}}} + w^2 \dot{m}\dot{\epsilon} \dot{\underline{\underline{H}}} = 0. \quad (164)$$

Эти уравнения носят название *однородных уравнений Гельмгольца*.

*Решение обобщенного волнового уравнения*

Запишем обобщенное волновое уравнение в виде

$$\nabla^2 \dot{\underline{\underline{F}}} + k^2 \dot{\underline{\underline{F}}} = 0. \quad (165)$$

Раскроем оператор набла

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = 0.$$

Будем искать решение в виде  $F = X(x)Y(y)Z(z)$ , тогда

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 YZX = 0.$$

Домножим левую часть полученного уравнения на  $1/YZX$ , получим

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0.$$

Представим волновое число

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (166)$$

тогда волновое уравнение может быть сведено в систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 &= 0, \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 &= 0, \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решением уравнений данной системы является следующее:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x, \\ Y(y) &= A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y, \\ Z(z) &= A_3 \sin k_z z + B_3 \cos k_z z, \end{aligned}$$

а общее решение принимает вид

$$\begin{aligned} F &= (A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x) (A_2 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y) \times \\ &\times (A_3 \sin k_z z + B_3 \cos k_z z). \end{aligned} \quad (167)$$

#### 2.2.4. Электродинамические потенциалы

Установим связь между электрической и магнитной напряженностью поля и потенциалами в заданном пространстве как функциями, характеризующими силы по перемещению электрических и магнитных зарядов.

Введем магнитный потенциал как

$$\mathbf{\dot{B}} = \text{rot } \mathbf{\dot{A}}, \quad (168)$$

принимая во внимание четвертое уравнение Максвелла ( $\text{div rot } \mathbf{\dot{A}} = 0$ ).

Тогда из второго уравнения Максвелла следует, что

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (169)$$

С учетом того, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$  (напряженность поля определяется скоростью изменения скалярного потенциала) и  $\text{rot grad } \Phi = 0$ , получим

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi. \quad (170)$$

Сформулируем теперь уравнения, определяющие электродинамические потенциалы  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$ , с использованием калибровки Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} + em \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (171)$$

получим

$$\nabla^2 \mathbf{A} - em \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -m\mathbf{d}, \quad (172)$$

$$\nabla^2 \Phi - em \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{r}{e}. \quad (173)$$

Как видно, данные уравнения по структуре не отличаются от волновых для векторов электрического и магнитного полей.

### 2.2.5. Электрический вектор Герца

Введем понятие электрического вектора Герца  $\dot{\Pi}^e$ , связанного с магнитным потенциалом как

$$\mathbf{A} = em \frac{\partial \dot{\Pi}^e}{\partial t}. \quad (174)$$

Тогда согласно условию калибровки Лоренца (171) скалярный потенциал  $\Phi$  оказывается связанным с  $\dot{\Pi}^e$  как

$$\Phi = -\text{div } \dot{\Pi}^e. \quad (175)$$

Подчеркнем, что указанные определения возможны только при  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ , т.е. для переменных полей.

Напряженности поля  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  при введенном векторе Герца определяются выражениями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{m} \text{rot } \mathbf{A} = e \text{ rot} \left( \frac{\partial \mathbf{\Pi}^e}{\partial t} \right), \quad (176)$$

$$\mathbf{E} = -em \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^e}{\partial t^2} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}^e. \quad (177)$$

После несложных преобразований уравнений Максвелла с применением (176), (177) можно получить волновое уравнение для вектора Герца:

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}^e - em \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^e}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{r}}{e} \dot{p}_{\text{ст}}. \quad (178)$$

Полученное уравнение по структуре не отличается от уравнения для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$ . При этом источником  $\mathbf{\Pi}^e$ , как видно из (178), является сторонняя поляризация  $\dot{p}_{\text{ст}}$ .

### 2.2.6. Принцип перестановочной двойственности

Проведем сравнение первого и второго, третьего и четвертого уравнений Максвелла на предмет их симметрии. Для того чтобы они стали симметричными, необходимо дополнить второе уравнение некоторой фиктивной плотностью магнитного тока, а четвертое уравнение – фиктивной объемной плотностью заряда.

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \rightarrow \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ 2) \text{ rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \rightarrow \text{ rot } \mathbf{E} = \mathbf{d}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ 3) \text{ div } \mathbf{D} = r & \rightarrow \text{ div } \mathbf{D} = r, \\ 4) \text{ div } \mathbf{B} = 0 & \rightarrow \text{ div } \mathbf{B} = r_m. \end{array}$$

Тогда становится ясным, что, производя замену в первом уравнении Максвелла

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}_m,$$

получим второе уравнение.

Производя замену в третьем уравнении Максвелла типа

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, r \rightarrow r_m,$$

получим четвертое уравнение.

Дополняя рассуждения симметрией материальных уравнений, можно ввести принцип перестановочной двойственности:

$$\begin{aligned} \vec{H} &\leftrightarrow \vec{E}, \\ \vec{D} &\leftrightarrow \vec{B}, \\ \vec{d} &\leftrightarrow \vec{d}_m, \\ r &\leftrightarrow r_m, \\ e &\leftrightarrow m. \end{aligned}$$

Такой подход позволяет упростить решение ряда электродинамических задач. Так, при известном решении относительно одного вектора электромагнитного поля можно сразу найти решение для другого, или, зная описание параметров одного типа среды, представить параметры среды другого типа.

## 2.3. Плоская ЭМВ

### 2.3.1. Распространение ЭМВ в среде без потерь

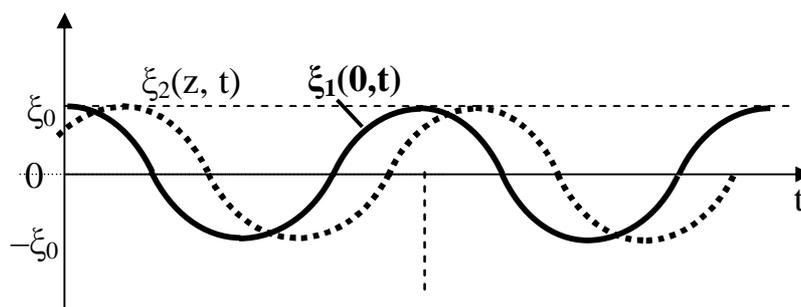
Пусть в некотором пространстве задана величина, описываемая выражением

$$x(z, t) = x_0 \cos(\omega t - bz), \quad (179)$$

где  $x_0$ ,  $\omega$ ,  $b$  – фиксированные значения. Говорят, что эта зависимость является математической моделью *однородной плоской волны*.

Как пространственная, так и временная зависимости описываются гармоническими функциями. Если  $z = 0$ , то  $x(0, t) = x_0 \cos \omega t$  (рис. 76, а). Когда  $z \neq 0$ , процесс оказывается смещенным относительно начального положения на фазу  $bz/\omega$  (радиан).

В фиксированный момент времени (рис. 76, б) при приращении по координате  $z$  функция смещается на расстояние, равное  $\Omega t/b$ .



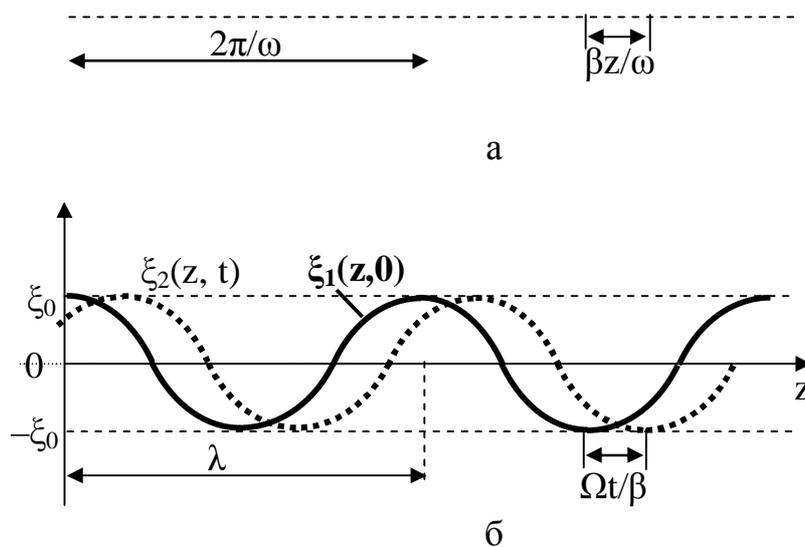


Рис. 76. Смещения плоской волны во времени (а) и пространстве (б)

ЭМВ описывается следующими параметрами и характеристиками.

*Фазовая скорость*  $V_\phi$  – скорость перемещения фронта ЭМВ. Фронт волны – это поверхность равных фаз ЭМВ. Математически фронт волны определяется из условия равенства нулю производной по времени фазового угла  $j = \omega t - kz$ . Другим условием является неизменность фазы волны для различных моментов времени и расстояний  $\omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z) = \omega t - kz$ , откуда

$$V_\phi = \frac{\partial z}{\partial t} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}. \quad (180)$$

Фронт волны может быть плоским (рис. 77), сферическим (рис. 78) и цилиндрическим. При этом волны называются плоскими, сферическими, цилиндрическими и описываются соответствующими ортогональными системами координат – декартовой, сферической (рис. 79, а) и цилиндрической (рис. 79, б).

*Длина волны*  $l$  определяется как кратчайшее расстояние вдоль направления распространения между точками с одинаковой фазой поля (перемещение фронта волны за период колебаний  $T$ )  $\omega t - kz = \omega(t + T) - k(z + l)$ , откуда

$$l = \frac{\omega T}{k} = V_\phi T = \frac{2\pi}{k}. \quad (181)$$

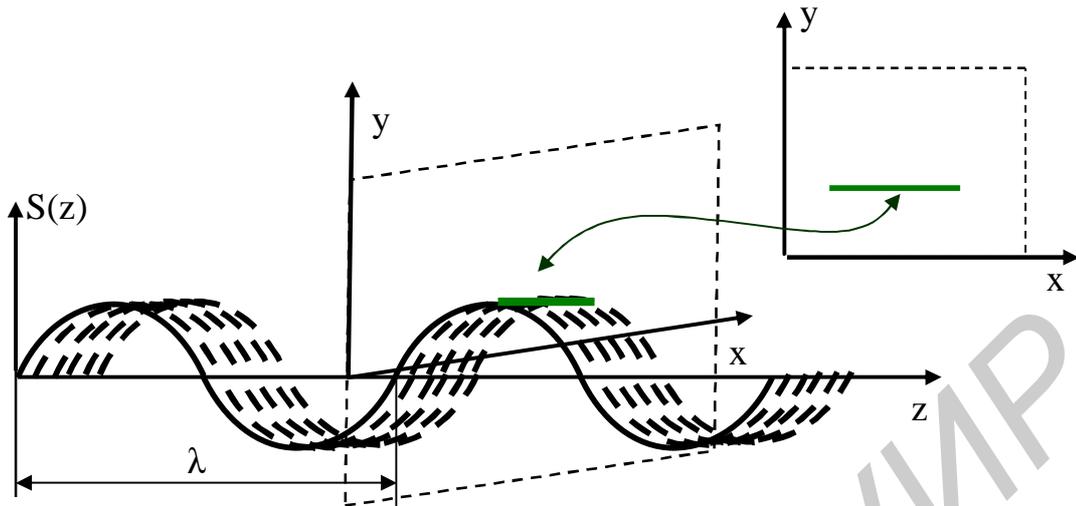


Рис. 77. Плоская ЭМВ

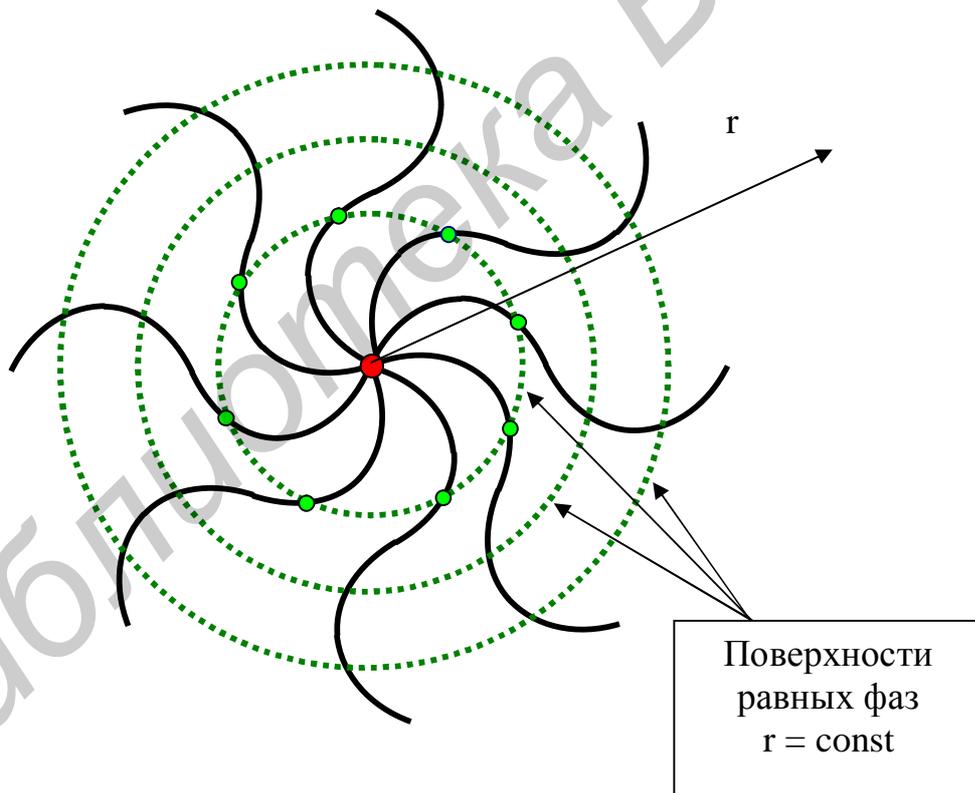


Рис. 78. Сечение сферической ЭМВ

В среде без потерь диэлектрическая  $\epsilon$  и магнитная  $\mu$  проницаемости среды являются вещественными и волновое сопротивление определяется как

$$Z_C = \frac{E_{mx}}{H_{my}} = \sqrt{\frac{m}{e}}. \quad (182)$$

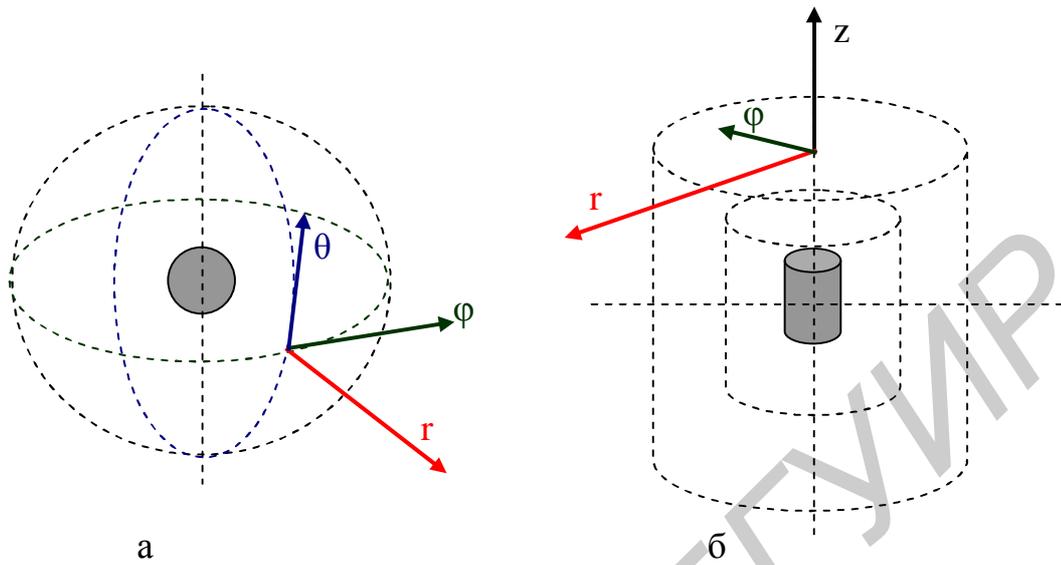


Рис. 79. Цилиндрическая и сферическая системы отсчета

Среднее значение вектора плотности потока мощности

$$\Pi_{cp} = \frac{Z_C}{2} H_m^2 = \frac{1}{2Z_C} E_m^2. \quad (183)$$

*Групповая скорость* некогерентной ЭМВ  $V_{гр}$  определяется как скорость движения максимума группы волн, составляющих спектр радиоклебания. Для узкополосного процесса ( $\Delta w \ll w_0$ ) в приближении линейной зависимости фазовой постоянной от частоты можно записать условие постоянства фазы при перемещении группы колебаний в виде

$$(w_0 + \Delta w)(t + \Delta t) - (k_0 + \Delta k)(z + \Delta z) = (w_0 + \Delta w)t - (k_0 + \Delta k)z,$$

откуда

$$V_{гр} \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta w}{\Delta k}, \text{ или } V_{гр} = \frac{\partial w}{\partial k}, \quad (184)$$

где  $\frac{\partial w}{\partial k} \approx \frac{\Delta w}{\Delta k}$  – производная при  $w = w_0$  и  $k = k_0$ .

В среде без потерь фазовая и групповая скорости равны между собой:

$$V_{\phi} = V_{гр} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (185)$$

### 2.3.2. Поляризация волн

Ориентация вектора электрической напряженности поля в пространстве в выбранной системе координат определяет *поляризацию ЭМВ*.

Если некоторый вектор изменяется во времени и пространстве по закону

$$s(z, t) = s_0 \cos(kz - \omega t)$$

и не изменяет своего направления в пространстве, то имеет место *линейная поляризация*.

Когда вектор  $s(z, t)$  коллинеарен оси  $x$  и в любой точке плоскости  $xOz$  ортогонален оси  $Oz$ , то этот вид линейной поляризации называют *вертикальной*. Такую поляризацию можно сформировать, например, с помощью вертикального вибратора заданной длины (рис. 80).

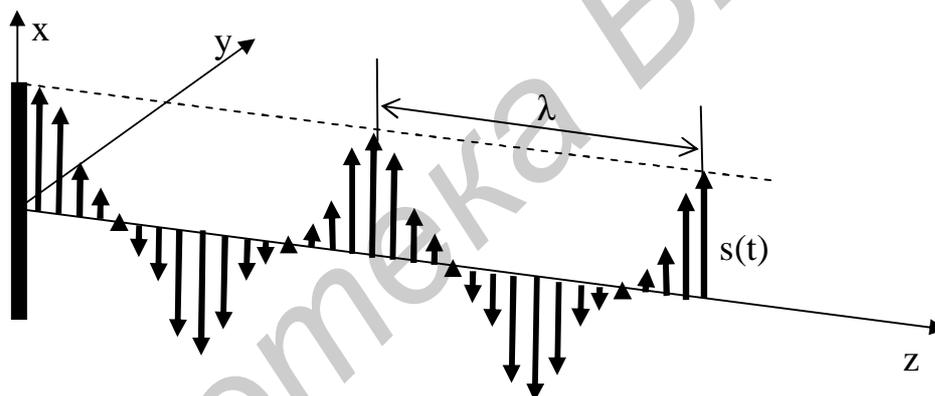


Рис. 80. Вертикальная поляризация волны

Когда вектор  $s(z, t)$  коллинеарен оси  $y$  и в любой точке плоскости  $yOz$  ортогонален оси  $Oz$ , то поляризацию называют *линейной горизонтальной* (рис. 81).

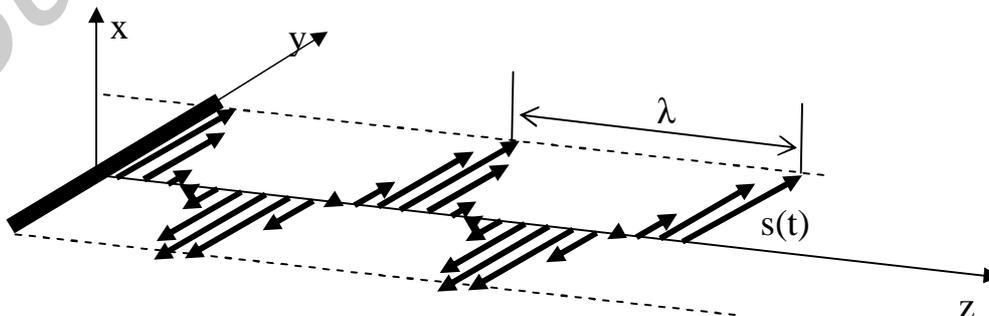


Рис. 81. Горизонтальная поляризация волны

Рассмотрим две волны с заданными амплитудами  $s_1$  и  $s_2$  и различными начальными фазами  $j_1$  и  $j_2$ , поляризованные в двух ортогональных плоскостях по отношению к направлению их распространения:

$$s_1(t,z) = s_1 \cos(kz - \omega t + j_1), \quad (186)$$

$$s_2(t,z) = s_2 \cos(kz - \omega t + j_2). \quad (187)$$

При этом будем считать, что они формируются двумя электрическими вибраторами одинаковой длины с токами  $I_x$  и  $I_y$ , расположенными в фиксированной точке  $z = 0$  (рис. 82).

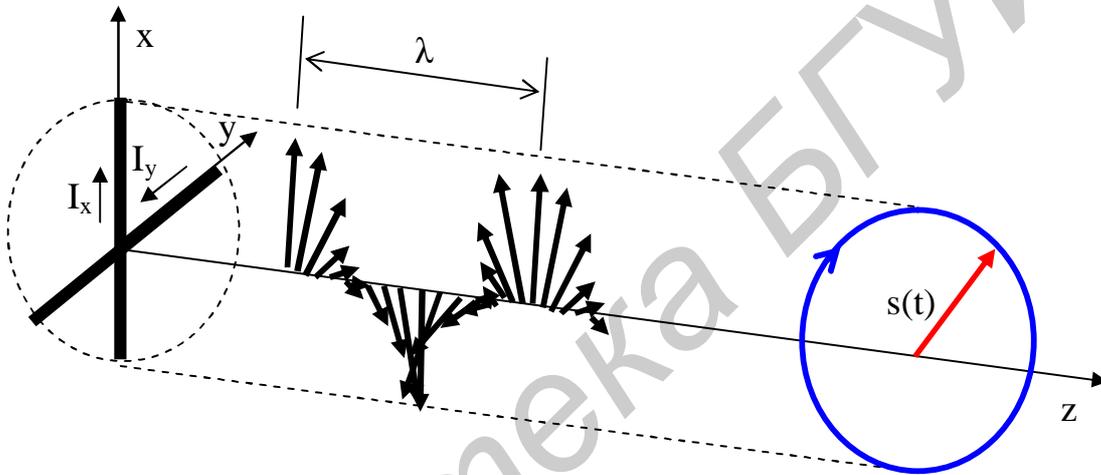


Рис. 82. Волна правой поляризации

Результатом сложения двух волн является

$$s(t,z) = \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t + j_1) + \mathbf{e}_y s_2 \cos(kz - \omega t + j_2) = s_m e^{jJ}, \quad (188)$$

здесь  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  – орты системы координат;

$s_m = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$  – амплитуда суммарной волны;

$J = \arctg \left[ \frac{s_2}{s_1} \right]$  – фазовое различие формирующих волн.

Пусть  $j_1 = j_2 = 0$ , тогда

$$s(t, z) = (\mathbf{e}_x s_1 + \mathbf{e}_y s_2) \cos(kz - \omega t) \quad (189)$$

и суммарный вектор оказывается линейно поляризованным, а его наклон в плоскости  $xOy$  определяется соотношением амплитуд  $S_1$  и  $S_2$ .

Если  $s_2 = 0$ , то поляризация является вертикальной. Когда  $s_1 = 0$ , то имеет место горизонтальная поляризация волны.

Пусть  $j_1 = 0$  и  $j_2 = -p/2$ , тогда

$$\begin{aligned} s(t, z) &= \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y s_2 \cos(kz - \omega t - p/2) = \\ &= \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y s_2 \sin(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (190)$$

и соотношение волн в плоскости  $xOy$  меняется во времени и пространстве, так как  $\text{tg} J = \text{tg}(kz - \omega t)$ , то

$$J = kz - \omega t \quad (191)$$

и при фиксированном значении координаты  $z_0$  вектор  $s(t, z_0)$  с течением времени будет вращаться с угловой скоростью  $\omega = 2\pi c/l$  вокруг оси  $Oz$ , соответствующей направлению распространения волны. Полному обороту вектора  $s(t, z)$  соответствует расстояние, равное длине волны  $l$ . Действительно, из (191) следует, что при  $J = kz - \omega t = 2\pi$  расстояние  $z = l(1 + [\omega t/2\pi])$ .

Если амплитудные значения  $s_1$  и  $s_2$  равны, то конец суммарного вектора движется по кругу с радиусом  $s_1$ , описывая в пространстве спиралевидную траекторию правого вращения (рис. 83). Такая поляризация волны называется *поляризацией правого вращения*, или *правой поляризацией*.

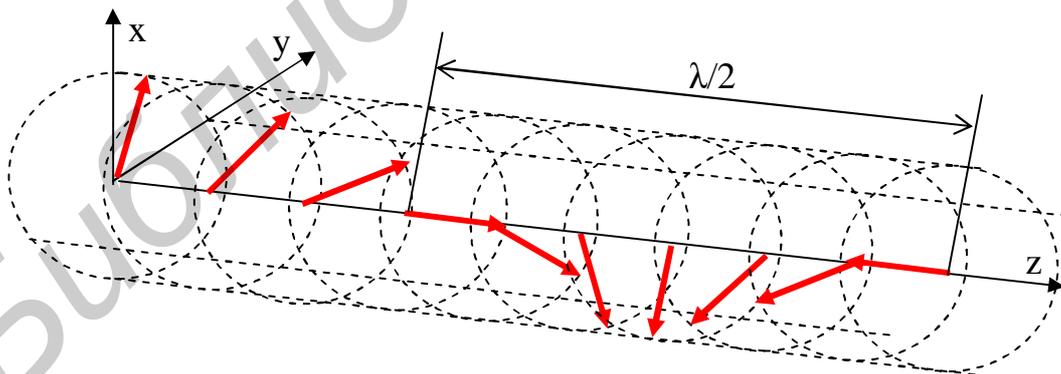


Рис. 83. Траектория правой волны

Волна с круговой поляризацией может быть сформирована за счет изменения другой компоненты аргумента колеблющейся функции

$$s(t, z) = \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y s_2 \cos(k[z - \Delta z] - \omega t). \quad (192)$$

Если амплитудные значения  $s_1$  и  $s_2$  равны, то суммарный вектор движется по кругу с радиусом  $s_1$ , против часовой стрелки по спирали (рис. 84). Такая поляризация волны называется *поляризацией левого вращения*, или *левой поляризацией*.

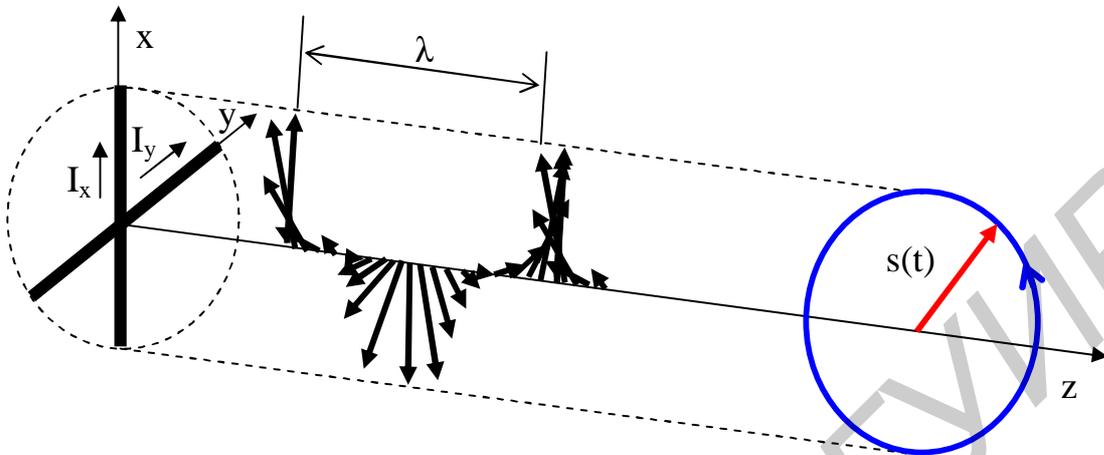


Рис. 84. Волна левой поляризации

Пусть  $j_1 = 0$  и  $j_2 = -p/2$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t, z) &= \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y s_2 \cos(kz - \omega t + p/2) = \\ &= \mathbf{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) - \mathbf{e}_y s_2 \sin(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (193)$$

Оценим, каким должно быть смещение формирователей поля относительно друг друга, учитывая вышеприведенные размышления по созданию волн круговой поляризации. При фиксированной частоте потребуем  $k\Delta z = p/2$ , тогда  $\frac{2p}{l}\Delta z = \frac{p}{2}$  или  $\Delta z = \frac{l}{4}$ , следовательно, фазировку можно осуществлять разносом вибраторов в пространстве при условии идентичности напряженностей поля (рис. 85).

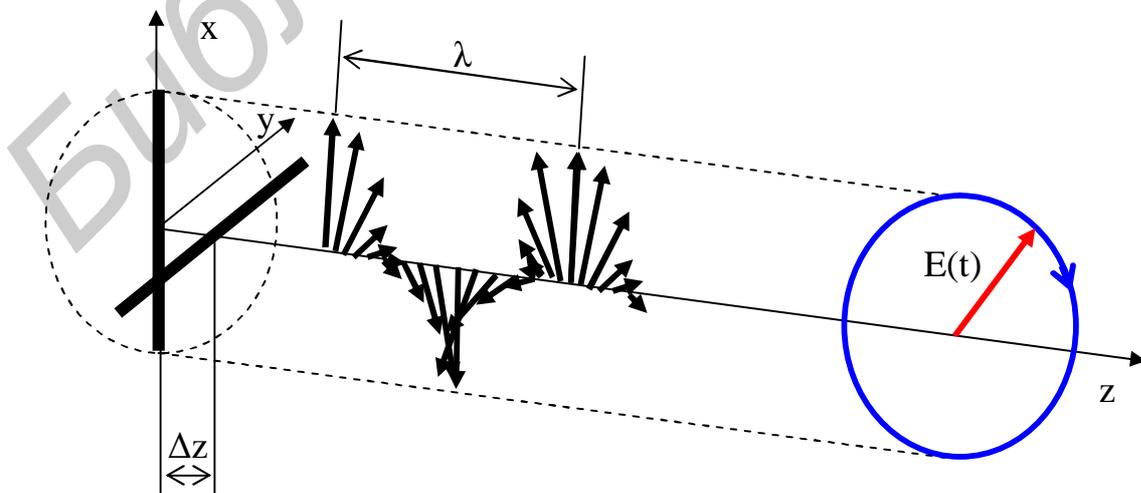


Рис. 85. Формирование правой волны за счет дистанционного

### разноса источников

Можно обеспечить крен результирующего вектора электрической напряженности поля за счет создания дополнительного поля по оси  $Oz$  (рис. 86):

$$s(t, z) = \vec{e}_x s_1 \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_y s_2 \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_z s_3 \cos(kz - \omega t). \quad (194)$$

Реально ситуация, связанная с наклоном фронта вертикально поляризованной волны, возникает за счет рефракции, которая проявляется из-за отличия плотностей слоев атмосферы. Нижние слои атмосферы являются самыми плотными, верхние – менее плотными. В результате происходит наклонение фронта волны, до тех пор пока он не станет соответствовать изгибу Земли (т.е. станет горизонтально поляризованным).

► *И здесь возникает интересная техническая задача, связанная, с одной стороны, с созданием крена фронта волны, и, с другой стороны – с выявлением условий, приводящих к возникновению крена волны.*

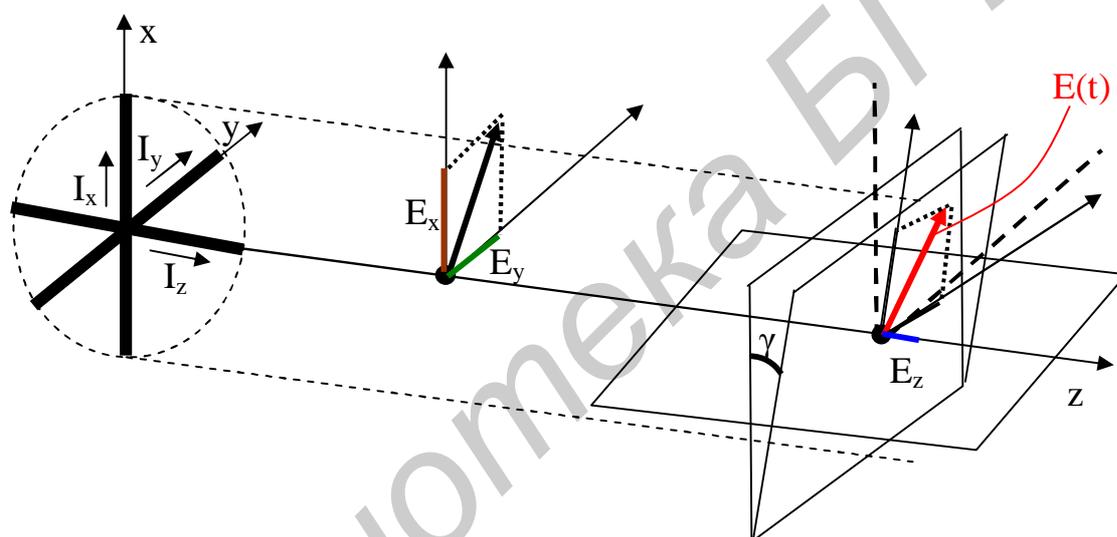


Рис. 86. Формирование крена фронта волны

При различных амплитудах формируемого поля можно трансформировать вид поляризации. При этом обобщенно следует говорить об эллиптической форме поперечного сечения траектории движения вектора электрической напряженности поля (рис. 87, а), т.е. об *эллиптической поляризации* волны. Таким образом, на формирование поляризационной структуры волны существенное влияние оказывает соотношение амплитуд поля двух линейных вибраторов

$$\left[ \frac{E_x}{s_1} \right]^2 + \left[ \frac{E_y}{s_2} \right]^2 = 1. \quad (195)$$

Данное уравнение является уравнением эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами  $2s_1 \times 2s_2$ .

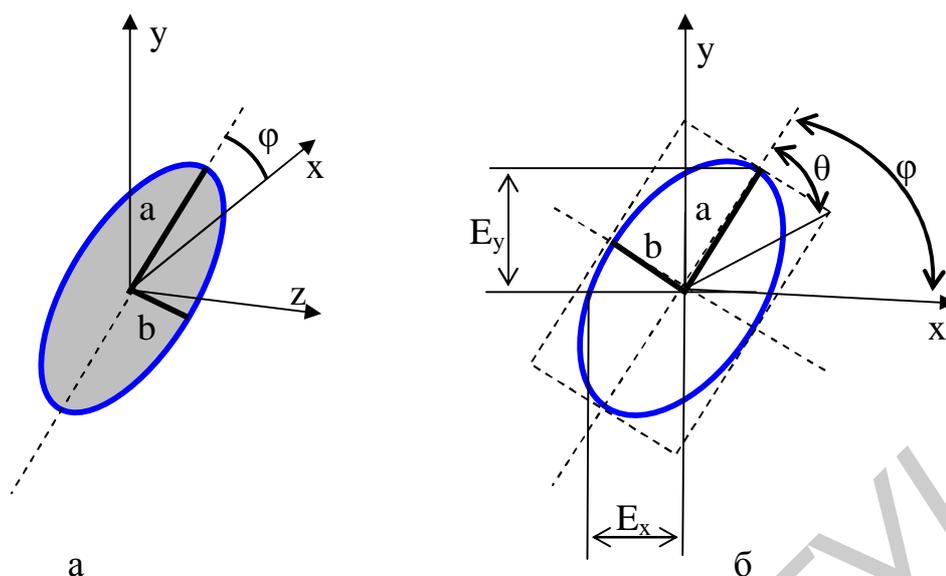


Рис. 87. Эллиптически поляризованная ЭМВ:  
а – поперечное сечение; б – параметры

Для оценки вида или степени поляризации вводят понятие *коэффициента эллиптичности*, под которым понимают отношение малой  $b$  и большой  $a$  полуосей эллипса (рис. 87, б):

$$k_{\text{э}} = b/a. \quad (196)$$

В принятой геометрии отсчитывают угол  $\varphi$ , который характеризует преимущественную поляризацию ЭМВ.

Таким образом,  $k_{\text{э}} = 0$  при линейной,  $k_{\text{э}} = \pm 1$  при левой (+) и правой (-) круговых поляризациях, промежуточным значениям соответствует эллиптическая поляризация.

Другим параметром является угол эллиптичности

$$q = \text{arctg} \left[ \frac{b}{a} \right], \quad (197)$$

который характеризует пространственную ориентацию главной оси эллипса при трансформациях прямоугольника, в который он вписан.

► *Как повлияет пространственное смещение вибраторов, формирующих поле, на поляризацию волны? Можно ли компенсировать возможные искажения поляризации?*

Рассмотрим случай, когда горизонтальный вибратор смещен относительно оси  $Oy$  на некоторый угол  $\xi$  (рис. 88). Очевидно, что такое положение приведет к изменению поперечных проекций вектора электрической напряженности и, как следствие, к наклону суммарного вектора. При фазировке, соответствующей созданию круговой поляризации, происходит преобразование круга в

эллипс. Таким образом, ошибки пространственных смещений формирующих источников будут всегда приводить к эллиптической поляризации ЭМВ.

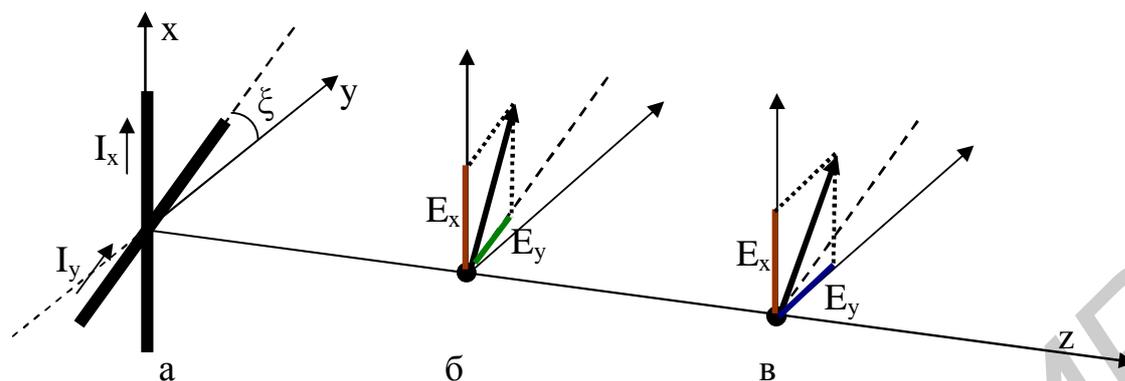


Рис. 88. Влияние пространственных смещений источников на формирование поляризации:  
 а – источники; б – проекции вектора  $E$  при смещении источников;  
 в – проекции вектора  $E$  без смещения источников (для сравнения)

*Линейно поляризованная волна как сумма двух круговых волн*

Выше формирование поляризации волн производилось исходя из суперпозиции линейно поляризованных волн. Однако волну линейной поляризации можно сформировать путем суммирования двух волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения.

Пусть заданы две волны эллиптической поляризации левого и правого вращения с одинаковой амплитудой. Результатом суммирования данных волн в пространстве будет являться взаимное уничтожение двух волн.

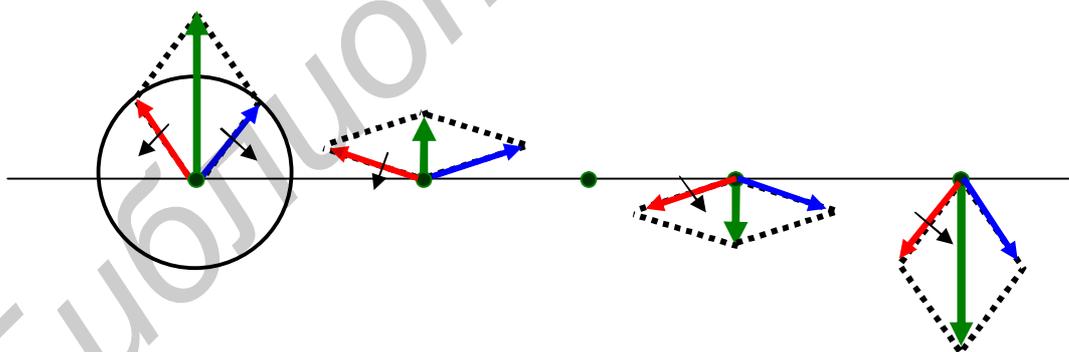


Рис. 89. Формирование линейной поляризации волнами кругового вращения

Если волны имеют круговые поляризации, то ситуация изменяется и суммарная волна будет иметь линейную поляризацию (рис. 89). Причем наклон вектора электрической напряженности поля будет определяться соотношением амплитуд волн круговой поляризации.

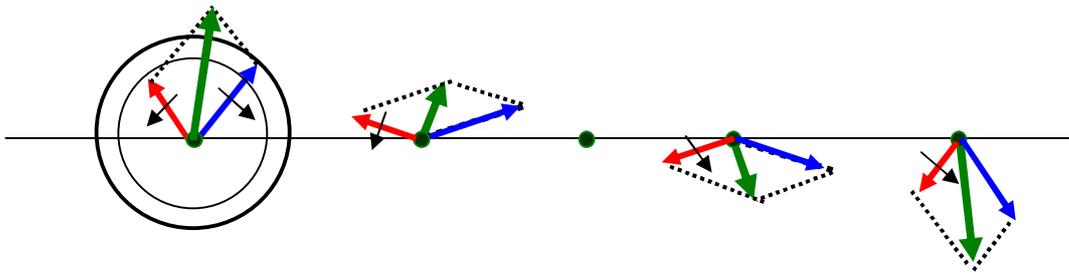


Рис. 90. Эллиптическая поляризация при суперпозиции волн кругового вращения

При нарушении равенства коэффициентов эллиптичности двух волн (рис. 90) суперпозиция даст волну эллиптической поляризации, имеющей коэффициент, равный

$$k_{\ominus} = \sqrt{k_{\ominus+}^2 + k_{\ominus-}^2}, \quad (198)$$

где  $k_{\ominus+}$ ,  $k_{\ominus-}$  – коэффициенты эллиптичности левой и правой волн.

### Поляризационная модуляция

Принудительное изменение одного из параметров эллиптически поляризованной волны по закону передаваемого сообщения (колебания) называется *поляризационной модуляцией (ПМ)*.

В соответствии с введенными параметрами эллиптической поляризации следует выделить следующие виды ПМ:

1) *угла эллиптичности (ПМ<sub>φ</sub>)\**, – при которой изменению во времени подвергают форму эллипса, вложенного в прямоугольник, у которого меняется угол между диагональю и его широкой стороной, а угол преимущественной поляризации остается постоянным (рис. 91);

2) *угла ориентации поляризационного эллипса (ПМ<sub>θ</sub>)\**, – угла преимущественной поляризации, когда изменению подвергается ориентация в пространстве большой оси эллипса поляризации, а коэффициент эллиптичности остается неизменным (рис. 92);

3) *смешанную (или совмещенную) (ПМ<sub>φ,θ</sub>)\**, – при которой изменяется и угол эллиптичности, и угол преимущественной поляризации.

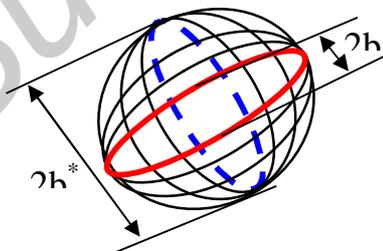


Рис. 91

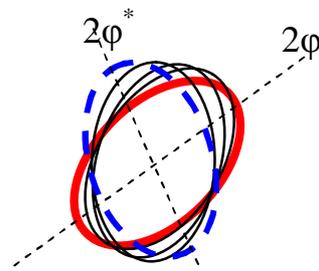


Рис. 92

\* – принятое в технической литературе обозначение

### 2.3.3. Распространение ЭМВ в среде с потерями

В среде с конечной проводимостью часть энергии электромагнитного поля превращается в тепловую из-за возникающих токов проводимости. Диэлектрическая проницаемость среды имеет комплексный характер  $\epsilon_a = \epsilon_a \left( 1 - j \frac{S}{\omega \epsilon_a} \right)$ ,

а волновое число состоит из вещественной и мнимой частей:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a m_a} = a - jb, \quad (199)$$

где  $a = \omega \left[ 0.5 m_a \epsilon_a \left( \sqrt{1 + \left( \frac{S}{\omega \epsilon_a} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$  – фазовая постоянная;

$$b = \omega \left[ 0.5 m_a \epsilon_a \left( \sqrt{1 + \left( \frac{S}{\omega \epsilon_a} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \text{ – коэффициент затухания;}$$

$\gamma$  – удельная электропроводность среды.

В процессе распространения ЭМВ амплитуда векторов поля убывает по экспоненциальному закону  $E(z) = E_0 \exp(-bz)$ , ослабевая в  $e$  раз на расстоянии  $d = b^{-1}$ , называемом *глубиной проникновения* поля в среду. Волновое сопротивление среды становится комплексным

$$Z_C = \sqrt{\frac{m_a}{\epsilon_a}} = Z_C \sqrt{\cos d} \exp(jj), \quad (200)$$

где  $d = \arctg \left( \frac{S}{\omega \epsilon_a} \right)$ ;  $j = \frac{d}{2}$  – аргумент волнового сопротивления среды;

$$Z_C = Z_0 \sqrt{\frac{m_r}{\epsilon_r}} \text{ – волновое сопротивление среды без учета потерь;}$$

$\epsilon_r$  и  $m_r$  – вещественные части относительной диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

### 2.3.4. Распространение радиоволн в анизотропных средах

Среды, в которых параметры  $\epsilon$ ,  $m$  и  $S$  зависят от направления поля электромагнитной волны, называют *анизотропными*.

Наибольший практический интерес представляет процесс взаимодействия электромагнитных волн с ферритами и ионизированным газом в постоянном магнитном поле.

Наличие на одной из оболочек атомов феррита электронов с некомпенсированным спиновым моментом приводит к тому, что в подмагничивающем поле спиновые магнитные моменты  $\vec{M}$  стремятся ориентироваться вдоль силовых линий магнитного поля. Однако воздействие механического момента электрона (он является вращающейся корпускулярной частицей) вызывает *прецессию* спиновых моментов вокруг направления подмагничивающего поля  $\vec{H}_0$  с частотой  $\omega_H = \frac{m_0 q H_0}{m}$ , где  $q$ ,  $m$  – заряд и масса электрона (рис. 93, а).

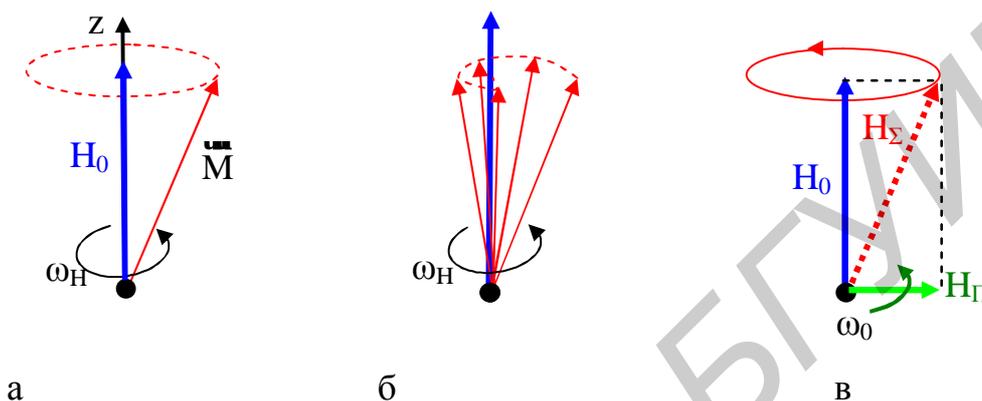


Рис. 93. Прецессия спиновых моментов

В реальных ферромагнитных средах с потерями конец вектора магнитного момента  $\vec{M}$  движется по свертывающейся спирали (рис. 93, б), но при воздействии слабого внешнего гармонического поля  $H_{\parallel}$  возникает «вынужденная» прецессия (рис. 93, в).

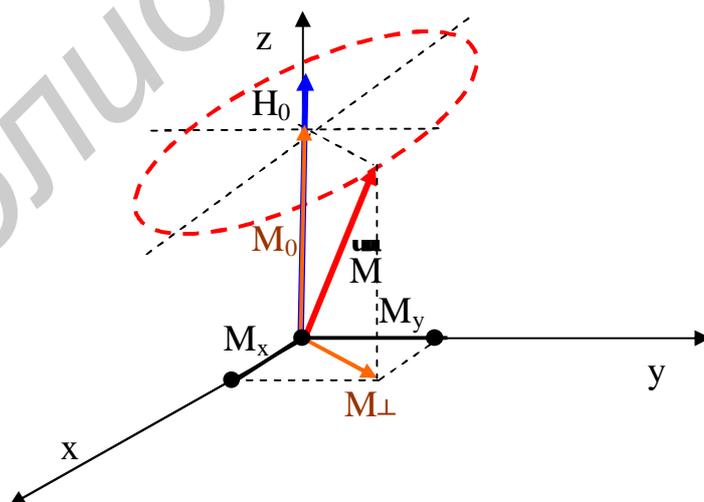


Рис. 94. Прецессия в феррите

Представим вектор  $\vec{M}$  в виде суммы продольной  $\vec{M}_0$  и поперечной  $\vec{M}_\perp$  компонент (рис. 94). Прецессирующую поперечную компоненту запишем как циркулярно поляризованную  $\vec{M}_\perp = M_x + jM_y$ . Тогда магнитная индукция при внешнем воздействии будет содержать дополнительные составляющие. Так, при наличии  $H_x$ :

$$\vec{B} = e_x m_0 (\vec{H}_x + \vec{M}_x) + j e_y m_0 \vec{M}_y. \quad (201)$$

Аналогичные процессы наблюдаются в замагниченной плазме. Если под действием гармонической составляющей  $\vec{E}_x$  внешней волны в постоянном магнитном поле  $\vec{H}_0 = e_z H_0$  электрон движется со скоростью  $\vec{V}_\perp$ , то на него наряду с электрической  $\vec{F}_3 = q\vec{E}$  будет также действовать магнитная сила Лоренца  $\vec{F}_M = qm_0[\vec{V}_\perp, \vec{H}_0]$ , изменяющая направление его движения (рис. 95). Траектория движения электрона будет представлять собой эллипс в перпендикулярной к  $\vec{H}_0$  плоскости, с правовинтовым вращением.

Как и в случае магнитной анизотропии, поперечную компоненту вектора поляризации  $\vec{P}_\perp$  представляем суммой ортогональных составляющих  $\vec{P}_\perp = e_x P_x + j e_y P_y$ . При воздействии внешней электромагнитной волны с компонентой электрического поля  $\vec{E}_x$  вектор смещения будет содержать две составляющие:

$$\vec{D} = e_x (e_0 \vec{E}_x + P_x) + j e_y P_y. \quad (202)$$

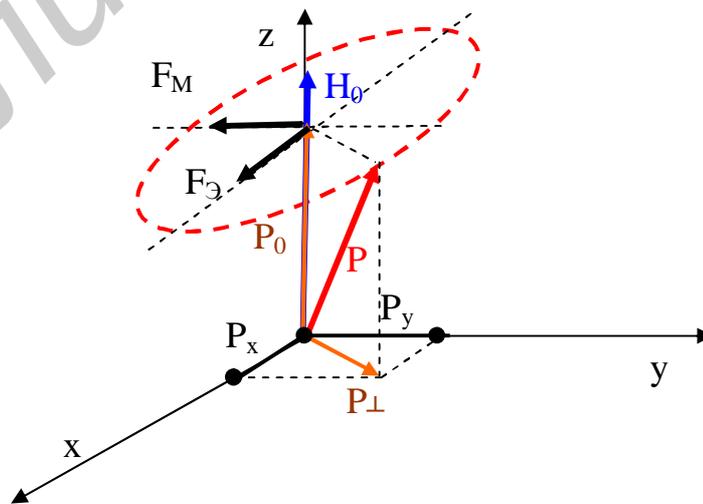


Рис. 95. Прецессия в замагниченной плазме

Резонансные свойства эффекта взаимодействия электромагнитных волн с анизотропной средой наиболее четко проявятся при совпадении:

- вида поляризации волны с направлением вращения векторов  $\dot{\mathbf{M}}_{\perp}$  и  $\dot{\mathbf{P}}_{\perp}$ ;
- частот прецессии и внешнего воздействия.

### Тензор проницаемости

Для изучения особенностей распространения электромагнитных волн в анизотропных средах необходима аналитическая форма записи ее параметров.

Рассмотрим случай продольно намагниченного ионизированного газа, когда постоянная распространения  $\mathbf{k}$  и поле подмагничивания  $\mathbf{H}_0$  совпадают с осью Oz. Движение ионов учитывать не будем, т.к. они практически не влияют на происходящие процессы в диапазоне радиочастот из-за большой массы частиц.

Используя закон Ньютона  $\mathbf{F} = m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ , можно записать уравнение движения электрона под действием поля распространяющейся электромагнитной волны в виде

$$mj\omega\mathbf{V} = q\mathbf{E} + qm_0[\mathbf{V}, \mathbf{H}_0]. \quad (203)$$

После подстановки в (1.38) вектора  $\mathbf{E} = e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z$  получим составляющие скорости движения электронов:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{q}{m} \left[ \frac{-j\omega E_x}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{\omega_H E_y}{\omega^2 - \omega_H^2} \right]; \\ v_y &= \frac{q}{m} \left[ \frac{\omega_H E_x}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{j\omega E_y}{\omega^2 - \omega_H^2} \right]; \\ v_z &= \frac{q}{m} \frac{E_z}{j\omega}. \end{aligned} \quad (204)$$

Подстановка (204) в выражение для плотности полного электрического тока в плазме

$$d_{\Sigma} = d_{\text{см}} + d_{\text{пр}} = s\omega e_0 \mathbf{E}, \quad (205)$$

где  $d_{\text{см}} = j\omega e_0 \mathbf{E}$  – плотность тока смещения;

$d_{\text{пр}} = r\mathbf{V} = eN\mathbf{V}$  – плотность тока проводимости,

позволяет представить параметры среды в виде тензора диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_z = \begin{vmatrix} e_1 & je_2 & 0 \\ -je_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix}, \quad (206)$$

где  $e_1 = 1 - \frac{\Omega^2}{w^2 - w_H^2}$ ;

$$e_2 = \frac{w_H}{w} \frac{\Omega^2}{w^2 - w_H^2}; \quad (207)$$

$$e_3 = 1 - \frac{\Omega^2}{w^2} - \text{компоненты тензора};$$

$$\Omega = q \sqrt{\frac{N_e}{e_0 m}} - \text{плазменная частота, соответствующая частоте колебаний}$$

электронов с концентрацией  $N_e$  около положения равновесия после прекращения действия возмущающих сил.

При взаимодействии электромагнитной волны с поперечно намагниченной плазмой, когда подмагничивающее поле ориентировано вдоль  $Oy$ , а постоянная распространения совпадает с осью  $Oz$  ( $H_0 = e_y H_0$ ,  $k \parallel e_z$ ), векторное произведение  $[\nabla, H_0]$  в уравнении движения электрона (1.38) преобразуется к виду

$$[\nabla, H_0] = -e_0 H_0 \nabla_x + e_z H_0 \nabla_x, \quad (208)$$

и после совместного решения с уравнением полного тока (1.40) тензор диэлектрической проницаемости принимает вид

$$\epsilon_y = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & -je_2 \\ 0 & e_3 & 0 \\ je_2 & 0 & e_1 \end{vmatrix} \quad (209)$$

с компонентами  $e_i$ , определенными в выражении (207).

Используя уравнение движения магнитного момента некомпенсированного электрона феррита  $j\omega M = \frac{qm_0}{m} [M_\Sigma, H_\Sigma]$  в суммарном поле подмагничивания и внешней электромагнитной волны с вектором  $H_\Sigma = H_0 + H$ , при условии слабых гармонических воздействий ( $H_0 \gg H$ ) несложно получить по аналогии с

параметрами намагниченного ионизированного газа два тензора магнитной проницаемости

$$\underline{\underline{\mu}}_z = \begin{vmatrix} m_1 & -jm_2 & 0 \\ jm_2 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix}, \quad \underline{\underline{\mu}}_y = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & jm_2 \\ 0 & m_3 & 0 \\ -jm_2 & 0 & m_1 \end{vmatrix}, \quad (210)$$

где компоненты тензора

$$m_1 = 1 - \frac{M_0}{H_0} \frac{w_H^2}{w^2 - w_H^2}; \quad m_2 = \frac{M_0}{H_0} \frac{ww_H}{w^2 - w_H^2}; \quad m_3 \approx m_1, \quad (211)$$

где  $m_1$  – магнитная проницаемость феррита без подмагничивания.

При учете потерь в ферритах и столкновении частиц в ионизированном газе компоненты тензоров проницаемости (207) будут комплексными величинами с конечными значениями на резонансной частоте.

#### *Особенности распространения плоской волны в анизотропных средах*

Тензорный характер параметров  $\underline{\underline{\epsilon}}_a$  и  $\underline{\underline{\mu}}_a$  приводит к возникновению новых физических эффектов при распространении электромагнитных волн в анизотропных средах.

Рассмотрим наиболее простые идеализированные случаи распространения плоских волн в безграничных однородных анизотропных средах.

Входящую в анизотропную среду линейно поляризованную электромагнитную волну представим суперпозицией волн правой  $\underline{\underline{E}}^{(+)}$ ,  $\underline{\underline{H}}^{(+)}$  и левой  $\underline{\underline{E}}^{(-)}$ ,  $\underline{\underline{H}}^{(-)}$  круговых поляризаций с векторами половинной амплитуды:

$$\underline{\underline{E}}^{(+)} = 0,5 \underline{\underline{E}}_m (\underline{\underline{e}}_x + j\underline{\underline{e}}_y); \quad (212)$$

$$\underline{\underline{H}}^{(+)} = 0,5 \underline{\underline{H}}_m (\underline{\underline{e}}_x - j\underline{\underline{e}}_y);$$

$$\underline{\underline{E}}^{(-)} = 0,5 \underline{\underline{E}}_m (\underline{\underline{e}}_x - j\underline{\underline{e}}_y);$$

$$\underline{\underline{H}}^{(-)} = 0,5 \underline{\underline{H}}_m (\underline{\underline{e}}_x + j\underline{\underline{e}}_y), \quad (213)$$

где  $\underline{\underline{E}}_m$ ,  $\underline{\underline{H}}_m$  – комплексные амплитуды векторов поля исследуемой волны.

Используя материальное уравнение  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\epsilon}}_0 \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{E}}$  и составляющие тензора (206), с учетом выражений (212), (213) можно записать для проекций векторов смещения электромагнитной волны в продольно намагниченной плазме следующие соотношения:

$$\mathbf{D}_x^{(+)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 (e_1 - e_2); \quad \mathbf{D}_y^{(+)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 (-j e_2 + j e_1); \quad (214)$$

$$\mathbf{D}_x^{(-)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 (e_1 + e_2); \quad \mathbf{D}_y^{(-)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 (-j e_2 - j e_1) \quad (215)$$

и представить поле распространяющихся волн с круговыми поляризациями в виде

$$\mathbf{D}^{(+)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 e^{(+)} (\mathbf{e}_x + j \mathbf{e}_y) \exp j(\omega t - k^+ z); \quad (216)$$

$$\mathbf{D}^{(-)} = 0,5 \mathbf{E}_m e_0 e^{(-)} (\mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y) \exp j(\omega t - k^- z); \quad (217)$$

$$\mathbf{B}^{(+)} = 0,5 m_a \mathbf{H}_m^{(+)} \exp j(\omega t - k^+ z); \quad (218)$$

$$\mathbf{B}^{(-)} = 0,5 m_a \mathbf{H}_m^{(-)} \exp j(\omega t - k^- z), \quad (219)$$

где  $e^{(+)} = e_1 - e_2$ ;  $e^{(-)} = e_1 + e_2$ ;  $k^+ = k_0 \sqrt{e^{(+)}}$ ;  $k^- = k_0 \sqrt{e^{(-)}}$ .  
(220)

При распространении циркулярно поляризованных волн в продольно намагниченном феррите аналогичным способом анализируется структура поля в анизотропной среде с помощью выражений (212), (213), составляющих тензора  $\mu_2$  (210) и материального уравнения  $\mathbf{B} = m_0 \mu_2 \mathbf{H}$ . В этом случае магнитная и электрическая индукции для право- и левополяризованных волн имеют вид

$$\mathbf{B}^{(+)} = 0,5 m_0 m^{(+)} \mathbf{H}^{(+)} \exp(-j k^+ z); \quad \mathbf{D}^{(+)} = 0,5 e_a \mathbf{E}^{(+)} \exp(-j k^+ z); \quad (221)$$

$$\mathbf{B}^{(-)} = 0,5 m_0 m^{(-)} \mathbf{H}^{(-)} \exp(-j k^- z); \quad \mathbf{D}^{(-)} = 0,5 e_a \mathbf{E}^{(-)} \exp(-j k^- z), \quad (222)$$

где  $m^{(+)} = m m_1 - m_2$ ;  $m^{(-)} = m_1 + m_2$ ;  $k^+ = k_0 \sqrt{m^{(+)}}$ ;  $k^- = k_0 \sqrt{m^{(-)}}$ .

Из полученных соотношений (216)–(222) видно, что плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией при распространении в анизотропной среде с продольным подмагничиванием распадается на две волны с круговой поляризацией, для которых намагниченная плазма и феррит представляют собой изотропную среду с эффективными скалярными параметрами:

$$e^{(+)} = 1 - \frac{\Omega^2}{w(w - w_H)}; \quad m^{(+)} = 1 - \frac{M_0}{H_0} \frac{w_H}{w - w_H} \quad (223)$$

в случае правой круговой поляризации и

$$e^{(-)} = 1 - \frac{\Omega^2}{w(w + w_H)}; m^{(-)} = 1 - \frac{M_0}{H_0} \frac{w_H}{w + w_H} \quad (224)$$

в случае левого направления вращения вектора поляризации.

Обе волны имеют разные постоянные распространения (при конечных величинах подмагничивающего поля) и фазовые скорости

$$V_{\phi}^{(+)} = V_0 / \sqrt{e^+ m^+}; V_{\phi}^{(-)} = V_0 / \sqrt{e^- m^-}, \quad (225)$$

здесь  $V_0$  – фазовая скорость волны при отсутствии подмагничивающего поля.

Волновое сопротивление для каждой из этих волн также различно:

$$Z^{(+)} = Z_C \left( \frac{m^+}{e^+} \right)^{\frac{1}{2}}; Z^{(-)} = Z_C \left( \frac{m^-}{e^-} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (226)$$

где  $Z_C$  – характеристическое сопротивление исследуемой среды при отсутствии поля подмагничивания.

Изменение напряженности постоянного магнитного поля наиболее сильно сказывается на характеристиках волны с правой круговой поляризацией, так как частотные зависимости проницаемостей (207) имеют резонансный характер, а величины  $e^{(+)}$ ,  $m^{(+)}$  обращаются в бесконечность на гиромангнитной частоте. В реальных условиях распространения любая среда обладает потерями, поэтому проницаемости (223), (224) являются комплексными величинами и имеют конечные значения на резонансной частоте.

Учитывая (212)–(222), можно представить суммарное поле в виде

$$\mathbf{E}_{\Sigma}(z) = \mathbf{E}_m \exp\left(-j \frac{k^+ + k^-}{2} z\right) \left[ \mathbf{e}_x \cos\left(\frac{k^- - k^+}{2} z\right) + \mathbf{e}_y \sin\left(\frac{k^- - k^+}{2} z\right) \right]. \quad (227)$$

Анализ последнего выражения показывает, что по мере перемещения ЭМВ вдоль оси  $Oz$  в продольно намагниченной плазме или феррита (рис. 96, а) суммарный вектор напряженности электрического поля будет смещаться в плоскости  $xOy$  по часовой стрелке на угол  $q = \frac{z(k^- - k^+)}{2}$  (рис. 96, б), так как принятой величине подмагничивающего поля соответствует неравенство  $V_{\phi}^{(+)} > V_{\phi}^{(-)}$ . Поворот плоскости поляризации в процессе распространения плоской волны называется *эффектом Фарадея*, а среды, способствующие возникновению данного эффекта, – *гиротропными*. При этом наблюдается невзаимный эффект – при изменении направления распространения (рис 96, в) вектор  $E$  будет докручен на угол  $\theta$  в сравнении с первоначальным распространением ЭМВ.

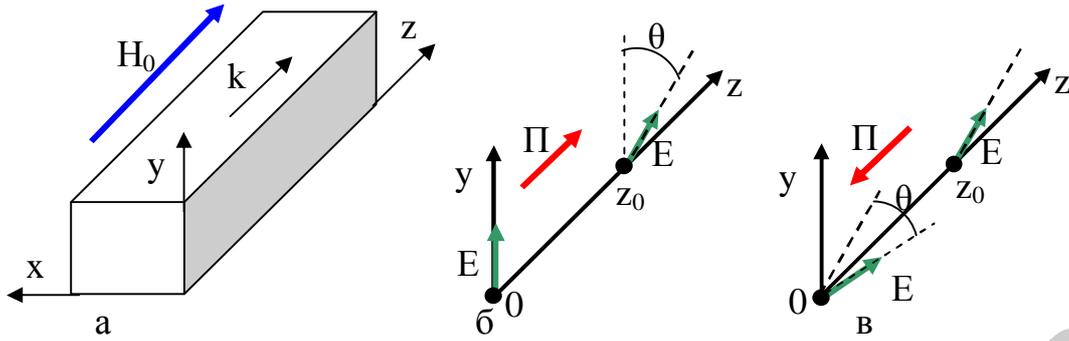


Рис. 96. К пояснению эффекта Фарадея

Из-за отличия величин характеристических сопротивлений среды  $Z^{(+)}$ ,  $Z^{(-)}$  для волн круговой поляризации (226) амплитуды напряженностей электрических полей  $\mathbf{E}^{(+)}$  и  $\mathbf{E}^{(-)}$  также не равны, поэтому электрическое поле суммарной волны  $\mathbf{E}_{\Sigma}(z)$  будет эллиптически поляризованным.

Если однородная плоская волна распространяется в безграничной анизотропной среде перпендикулярно направлению подмагничивающего поля  $\mathbf{H}_0 = e_y H_0$ , то постоянная распространения, фазовая скорость и характеристическое сопротивление среды определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 k &= k_{об} = w \sqrt{e_0 e_3 m_a} = k_0 \sqrt{e_3}; \\
 V_{\Phi}^{об} &= V_0 / \sqrt{e_3}; \\
 Z_{об} &= \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{H}_x} = Z_C / \sqrt{e_3}.
 \end{aligned} \tag{228}$$

Как видно, параметры данной волны не зависят от величины поля подмагничивания и соответствуют характеристикам волны при распространении в изотропной среде (без постоянного магнитного поля). Поэтому эта волна называется *обыкновенной*.

Параметры *необыкновенной* волны для среды, описываемой эквивалентной диэлектрической проницаемостью вида  $e_{\perp} = \frac{e_1^2 - e_2^2}{e_1} = 2 \frac{e^{(+)} e^{(-)}}{e^{(+)} + e^{(-)}}$ , определяются как

$$\begin{aligned}
 k &= k_{нб} = w \sqrt{e_0 e_{\perp} m_a} = k_0 \sqrt{e_{\perp}}; \\
 V_{\Phi}^{нб} &= V_0 / \sqrt{e_{\perp}}; \\
 Z_{нб} &= \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{H}_y} = Z_C / \sqrt{e_{\perp}}.
 \end{aligned} \tag{229}$$

При распространении плоской линейно поляризованной волны в поперечно намагниченном феррите наблюдаются те же закономерности: волна произвольной ориентации распадается на обыкновенную с постоянной распространения  $k_{об} = k_0 \sqrt{m_3}$  и необыкновенную:

$$k_{нб} = k_0 \sqrt{m_{\perp}}; \quad m_{\perp} = 2 \frac{m^{(+)} m^{(-)}}{m^{(+)} + m^{(-)}}, \quad (230)$$

распространяющиеся с разными фазовыми скоростями.

Вследствие отличия фазовых скоростей обыкновенной и необыкновенной волн  $V_{\Phi}^{об} < V_{\Phi}^{нб}$  в процессе распространения будут изменяться разность фаз между ними и соответственно поляризация суммарной волны (рис. 97). Преобразование линейной поляризации плоской волны в эллиптическую при распространении в анизотропной среде с поперечным намагничиванием называется *эффектом Коттон-Мутона* (рис. 97, а).

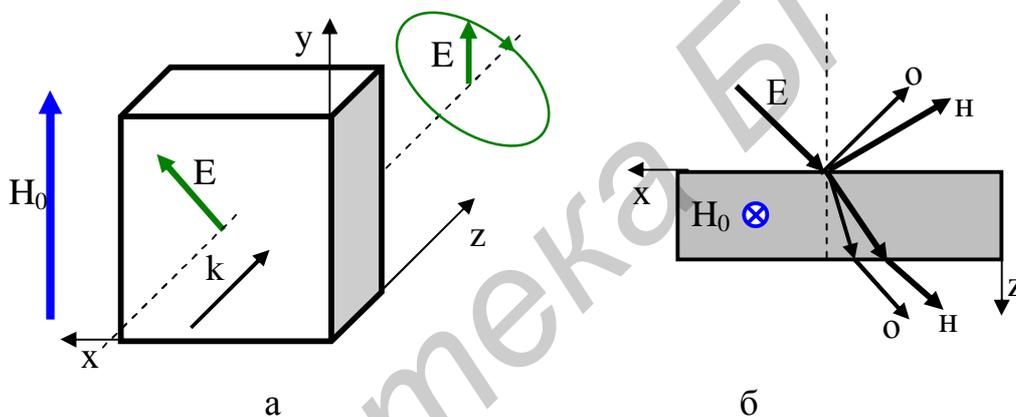


Рис. 97. Поперечное подмагничивание ферритов:  
а – геометрия задачи; б – двойное лучепреломление

Рассмотренные эффекты наиболее четко проявляются в неограниченной среде. Наличие границ раздела с анизотропной средой и наклонное падение электромагнитных волн приводят к усложнению процесса взаимодействия и происходящих явлений:

- за счет многократных отражений от границы слоя продольно намагниченного ионизированного газа или феррита результирующая волна окажется эллиптически поляризованной даже в случае линейной поляризации падающей волны, а связь угла поворота оси эллипса поляризации с длиной анизотропного образца стает нелинейной;
- при наклонном падении на границу образца с поперечным подмагничиванием может произойти двойное лучепреломление (отражение) – расщепление преломленных (отраженных) лучей, один из которых соответствует обыкновенной волне, а другой – необыкновенной (рис. 97, б).

## 2.3.5. Наклонное падение волны на границу раздела двух сред

### 2.3.5.1. Законы отражения и преломления волн

Пусть плоская ЭМВ падает на границу раздела двух сред (рис. 98), характеризующихся абсолютными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_1, \mu_1$  в первой и  $\epsilon_2, \mu_2$  – во второй средах.

Плоскость, содержащая нормаль к границе раздела и вектор Пойнтинга падающей волны  $\vec{\Pi}_n$ , называется *плоскостью падения волны*. Угол между вектором Пойнтинга падающей волны  $\vec{\Pi}_n$  и нормалью к границе раздела называется *углом падения*  $\theta$ , а угол между вектором Пойнтинга отражённой волны  $\vec{\Pi}_o$  и нормалью – *углом отражения*  $\theta_o$ . Угол между вектором Пойнтинга преломленной волны  $\vec{\Pi}_{np}$  и внутренней нормалью к поверхности раздела двух сред называется *углом преломления*  $\theta_{np}$ .

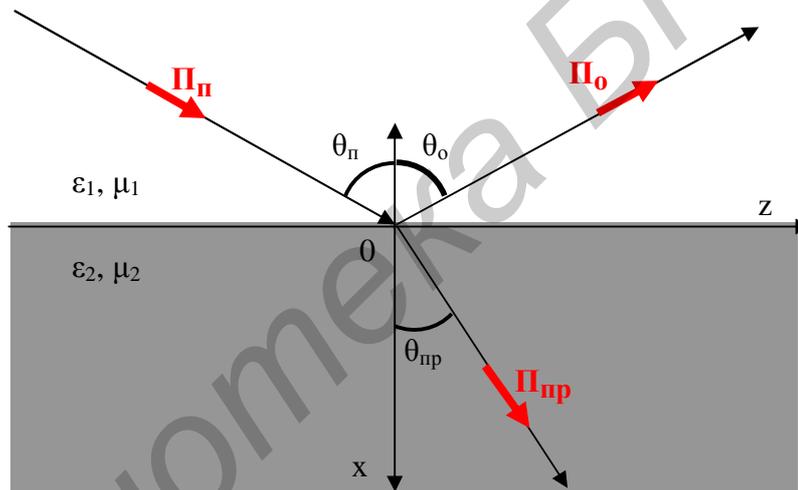


Рис. 98. Падение ЭМВ на границу раздела сред

Согласно граничным условиям, являющимся следствием решения уравнений Максвелла, несложно установить связь между углами падения, отражения и преломления в виде закона синусов:

$$k_1 \sin q = k_1 \sin q_o = k_2 \sin q_{np}, \quad (231)$$

где  $k_1 = w\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ ,  $k_2 = w\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$  – волновые числа двух сред.

Из (224) следует, что

$$q = q_o, \quad (232)$$

$$\frac{\sin q}{\sin q_{np}} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_{2a} \mu_{2a}}{\epsilon_{1a} \mu_{1a}}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (233)$$

где  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 m_1}$ ,  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 m_2}$  – коэффициенты преломления сред;

$n_{21}$  – относительный коэффициент преломления из первой среды во вторую.

Выражения (232), (233) представляют собой известные из оптики законы отражения и преломления плоских волн и носят названия *законов Снелля*.

Отношение синусов углов падения и преломления равно постоянной величине  $n_{21}$ , зависящей только от параметров граничащих сред.

При  $n_2 > n_1$ ,  $n_{21} > 1$  (оптическая плотность второго диэлектрика больше, чем первого), согласно (233) имеем  $\sin q_{\text{пр}} = \sin q / n_{21} < \sin q$ . В этом случае каждому углу падения и соответствует вещественный угол преломления  $\theta_{\text{пр}}$ , вследствие чего при всех значениях и во второй среде существует однородная плоская преломленная волна. При преломлении волны в оптически более плотную среду направление ее распространения (см. рис. 98) приближается к нормали ( $q_{\text{пр}} < q$ ).

Если оптическая плотность второй среды меньше, чем первой ( $n_2 < n_1$ ,  $n_{21} < 1$ ), то  $\sin q_{\text{пр}} > \sin q$  и  $q_{\text{пр}}$  имеет вещественное значение лишь при  $\sin q \leq n_{21}$ . При этих углах падения во второй среде существует однородная плоская преломленная волна и ее направление распространения приближается к границе раздела ( $q_{\text{пр}} > q$ ). Большим углам падения, определяемым неравенством

$$\sin q > n_{21}, \quad (234)$$

соответствуют значения  $\sin q > 1$ , и  $q_{\text{пр}}$  имеет комплексное значение. Неравенство (234) представляет собой условие, при котором во второй среде не существует однородной плоской преломленной волны и происходит *полное внутреннее отражение*.

Поскольку законы отражения и преломления одинаковы для вертикальной и горизонтальной поляризации падающей волны, то они справедливы и при ее произвольной поляризации.

### 2.3.5.2. Коэффициенты отражения и прохождения

*Коэффициенты отражения и прохождения* (коэффициенты Френеля) позволяют выразить амплитуды и начальные фазы отраженной и преломленной волн через параметры падающей волны и электромагнитные характеристики граничащих сред.

При горизонтальной (перпендикулярной) поляризации ЭМВ уравнения, связывающие комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн, имеют вид (рис. 99)

$$\underline{E}_{n0} + \underline{E}_{отр0} = \underline{E}_{пр0}; \quad \frac{\cos q}{Z_{c1}} (\underline{E}_{n0} - \underline{E}_{отр0}) = \frac{\cos q}{Z_{c1}} \underline{E}_{пр0}, \quad (235)$$

где  $\underline{E}_{n0}$ ,  $\underline{E}_{отр0}$ ,  $\underline{E}_{пр0}$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн;

$Z_{c1} = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ ,  $Z_{c2} = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$  – характеристические импедансы сред.

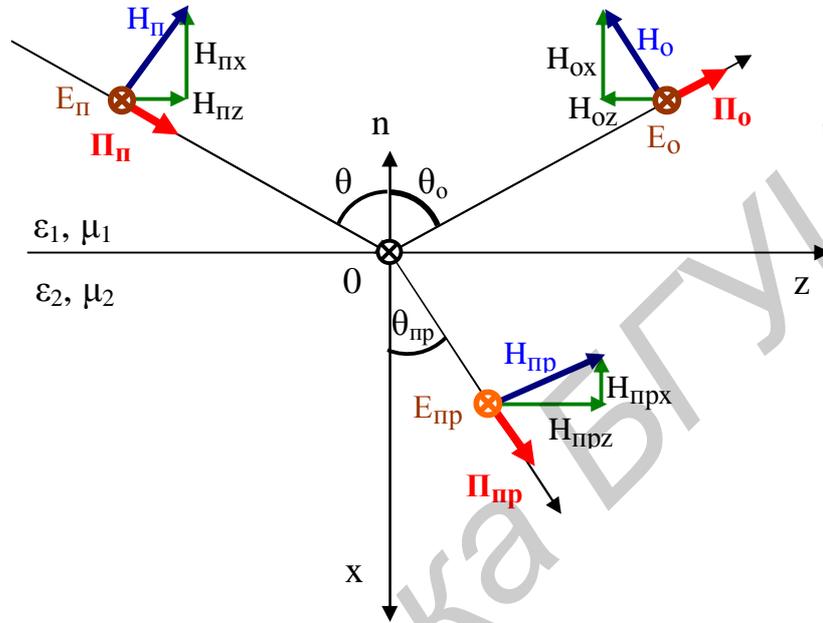


Рис. 99. Падение горизонтально поляризованной ЭМВ на границу раздела сред

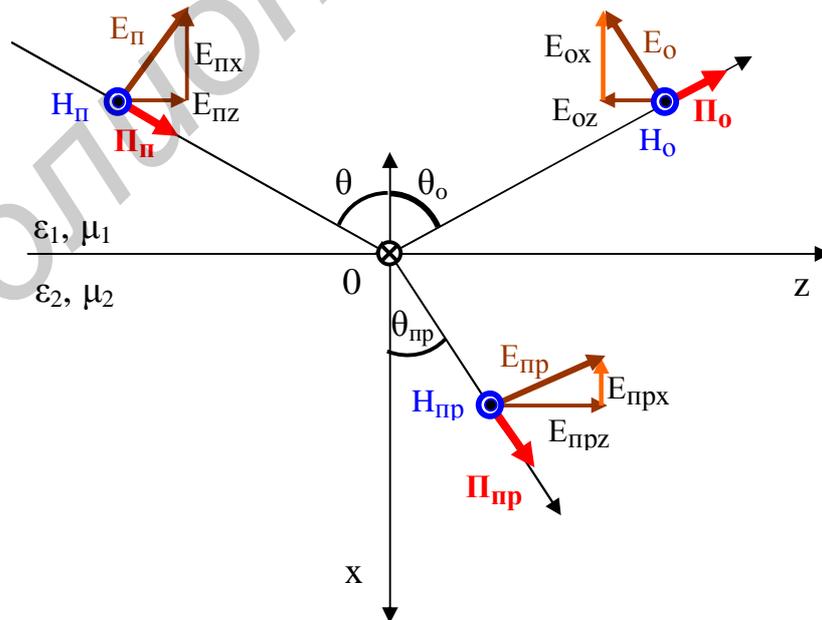


Рис. 100. Падение вертикально поляризованной ЭМВ на границу раздела сред

Из (235) несложно определить коэффициенты Френеля, полагая, что

$$R_{\perp} = \frac{E_{oy}}{E_{ny}} \Big|_{x=0} = \frac{E_{отр0}}{E_{n0}}, \quad T_{\perp} = \frac{E_{пры}}{E_{ny}} \Big|_{x=0} = \frac{E_{пр0}}{E_{n0}}. \quad (236)$$

Используя (236), соотношения (235) можно записать в виде

$$1 + R_{\perp} = T_{\perp}; \quad 1 - R_{\perp} = \frac{Z_{c1} \cos q_{пр}}{Z_{c2} \cos q} T_{\perp}. \quad (237)$$

Решение системы (237) позволяет определить коэффициент отражения

$$R_{\perp} = \frac{E_{отр0}}{E_{n0}} = \frac{Z_{c2} \cos q - Z_{c1} \cos q_{пр}}{Z_{c2} \cos q + Z_{c1} \cos q_{пр}} \quad (238)$$

и коэффициент прохождения

$$T_{\perp} = \frac{E_{пр0}}{E_{n0}} = \frac{2Z_{c2} \cos q}{Z_{c2} \cos q + Z_{c1} \cos q_{пр}}. \quad (239)$$

При вертикальной (параллельной) поляризации ЭМВ (рис. 100) уравнения, связывающие комплексные амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн, имеют вид

$$\begin{cases} \cos q (E_{n0} + E_{отр0}) = \cos q_{пр} E_{пр0}, \\ \frac{1}{Z_{c1}} (E_{отр0} + E_{n0}) = \frac{1}{Z_{c2}} E_{пр0}. \end{cases} \quad (240)$$

Для коэффициентов отражения и прохождения по определению имеем

$$R_{\parallel} = \frac{E_{отрз}}{E_{пз}} \Big|_{x=0} = \frac{E_{отр0}}{E_{n0}}; \quad T_{\parallel} = \frac{E_{прыз}}{E_{пз}} \Big|_{x=0} = \frac{\cos q_{пр}}{\cos q} \frac{E_{пр0}}{E_{n0}}. \quad (241)$$

Используя (241), соотношения (240) можно записать в виде

$$1 + R_{\parallel} = T_{\parallel}; \quad R_{\parallel} - 1 = -\frac{Z_{c1} \cos q}{Z_{c2} \cos q_{пр}} T_{\parallel}. \quad (242)$$

Решение системы (244) позволяет определить коэффициент отражения Френеля

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_{\text{отр}0}}{\mathcal{E}_{\text{п}0}} = \frac{\mathcal{E}_{c2} \cos q_{\text{пр}0} - \mathcal{E}_{c1} \cos q}{\mathcal{E}_{c2} \cos q_{\text{пр}} + \mathcal{E}_{c1} \cos q} \quad (243)$$

и коэффициент прохождения Френеля

$$\mathcal{T}_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_{\text{пр}0}}{\mathcal{E}_{\text{п}0}} = \frac{2\mathcal{E}_{c2} \cos q}{\mathcal{E}_{c2} \cos q_{\text{пр}} + \mathcal{E}_{c2} \cos q}. \quad (244)$$

Определим коэффициенты отражения и прохождения на границе раздела немагнитных сред.

В выражениях (238), (239) и (243), (244) можно исключить угол преломления, если ограничиться случаем немагнитных сред ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) и положить  $\mathcal{E}_{c1}/\mathcal{E}_{c2} = \mathcal{R}_{21}$ .

Учитывая, что  $\cos q_{\text{пр}} = \sqrt{1 - \sin^2 q_{\text{пр}}} = \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 q}/n_{21}$ , коэффициенты Френеля принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\cos q - \sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q}}{\cos q + \sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q}}, \\ \mathcal{T}_{\perp} = \frac{2\cos q}{\cos q + \sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q}}; \end{array} \right. \quad (245)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\parallel} = \frac{\mathcal{R}_{21}^2 \cos q - \sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q}}{\mathcal{R}_{21}^2 \cos q + \sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q}}, \\ \mathcal{T}_{\parallel} = \frac{2\mathcal{R}_{21} \cos q}{\sqrt{\mathcal{R}_{21}^2 - \sin^2 q} + \mathcal{R}_{21} \cos q}. \end{array} \right. \quad (246)$$

Если первая среда по параметрам приближается к вакууму ( $\epsilon_1 = 1$ ), выражения (245) и (246) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\perp} = \frac{\cos i - \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 i}}{\cos i + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 i}}, \\ \mathcal{T}_{\perp} = \frac{2\cos i}{\cos i + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 i}}; \end{array} \right. \quad (247)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{\parallel} = \frac{\mathcal{E}_2 \cos q - \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - \sin^2 q}}{\mathcal{E}_2 \cos q + \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - \sin^2 q}}, \\ \mathcal{R}_{\perp} = \frac{2\mathcal{E}_2 \cos q}{\sqrt{\mathcal{E}_2^2 - \sin^2 q} + \mathcal{E}_2 \cos q}. \end{array} \right. \quad (248)$$

При определении коэффициентов отражения Френеля для волн с круговой поляризацией можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_R = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{\perp} + \mathcal{R}_{\parallel}) = -\frac{\sin^2 q}{\mathcal{E}_2 \cos q + 1}, \\ \mathcal{R}_L = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{\perp} - \mathcal{R}_{\parallel}) = -\frac{\mathcal{E}_2 \cos q}{\mathcal{E}_2 \cos q + 1}, \end{array} \right. \quad (249)$$

где  $\mathcal{R}_R$  – коэффициент отражения для волны с согласной поляризацией (правого вращения);

$\mathcal{R}_L$  – коэффициент отражения для волны с кроссполяризационным компонентом (левого вращения).

Выражения (249) справедливы для случая падения на границу раздела волны круговой поляризации с правым направлением вращения.

### 2.3.5.3. Полное прохождение волны через границу раздела

При падении плоских ЭМВ на границу раздела двух сред при определённых условиях коэффициент отражения может обращаться в нуль. Угол падения, при котором падающая волна полностью, без отражения, проникает из одной среды в другую, называется *углом Брюстера*  $q_B$ .

Угол Брюстера удовлетворяет одному из двух уравнений

$$Z_{c2} \cos q_B - Z_{c1} \cos q_{\text{пр}B} = 0 \quad (250)$$

при перпендикулярной поляризации, либо

$$Z_{c1} \cos q_B - Z_{c2} \cos q_{\text{пр}B} = 0 \quad (251)$$

при параллельной поляризации.

Здесь под  $q_{\text{пр}B}$  понимается угол преломления, соответствующий углу падения  $q_B$ .

Уравнения (250), (251) взаимно противоречат друг другу, т.е. явление полного преломления можно наблюдать либо при перпендикулярной, либо при параллельной поляризации.

Для параллельной поляризации угол Брюстера определяется из выражения

$$\sin q_{\text{Б||}} = \sqrt{\frac{e_2(m_1 e_2 - m_2 e_1)}{m_1(e_2 - e_1)(e_2 + e_1)}}. \quad (252)$$

При  $m_1 = m_2$  (252) примет вид

$$\sin q_{\text{Б||}} = \sqrt{\frac{e_2}{e_2 + e_1}}. \quad (253)$$

При  $m_1 \neq m_2$  и  $e_2 > e_1$  знаменатель в (252) положителен и существование угла Брюстера выполняется при условии, когда

$$m_1 e_2 > m_2 e_1 \text{ или } m_2 e_2 > m_1 e_1. \quad (254)$$

Если  $m_1 \neq m_2$  и  $e_2 < e_1$ , знаменатель в (253) отрицателен и для физического существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенств

$$m_1 e_2 < m_2 e_1 \text{ или } m_2 e_2 < m_1 e_1. \quad (255)$$

Для перпендикулярной поляризации угол полного преломления определяется из выражения

$$\sin q_{\text{Б}\perp} = \sqrt{\frac{m_2(e_1 m_2 - e_2 m_1)}{e_1(m_2 - m_1)(m_2 + m_1)}}. \quad (256)$$

При  $e_2 = e_1$  выражение (2.49) примет вид

$$\sin q_{\text{Б}\perp} = \sqrt{\frac{m_2}{m_2 + m_1}}, \quad (257)$$

и когда  $e_2 \neq e_1$ ,  $m_2 > m_1$ , знаменатель в (256) положителен и физическое существование угла Брюстера выполняется при условии

$$m_2 e_1 > m_1 e_2 \text{ или } m_2 e_2 > m_1 e_1. \quad (258)$$

Если  $e_2 \neq e_1$  и  $m_2 < m_1$ , знаменатель в (256) отрицателен и для физического существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенств

$$m_2 e_1 < m_1 e_2 \text{ или } m_2 e_2 < m_1 e_1. \quad (259)$$

### 2.3.5.4. Полное внутреннее отражение

Рассмотрим случай падения плоской однородной волны на границу раздела, при котором не будет происходить распространения плоских волн во второй среде, т.е. преломление будет отсутствовать. Для физического существования угла падения вторая среда должна быть оптически менее плотной по сравнению с первой.

Из (231) следует, что

$$\sin q_{\text{пр}} = \frac{\sin q}{n_{21}} = \frac{k_1 \sin q}{k_2} \quad (260)$$

и при  $n_{21} < 1$   $\sin q_{\text{пр}} > 1$ , которое удовлетворяется лишь при некотором комплексном угле преломления  $q_{\text{пр}} = mp/2 + jc$ , где  $m = 1, 3, 5, \dots$ . В этом случае

$$\sin q_{\text{пр}} = \sin\left(\frac{mp}{2} + jc\right) = \cos jc = \text{ch}c > 0. \quad (261)$$

Комплексный угол преломления характеризует полное отражение падающей волны от оптически менее плотного диэлектрика и существование в оптически менее плотном диэлектрике вместо однородной плоской преломленной волны так называемой *поверхностной волны*. Совокупность этих явлений называется *полным внутренним отражением*.

При значениях  $\sin q > n_{21}$  и  $\sin q_{\text{пр}} > 1$

$$\begin{aligned} \cos q_{\text{пр}} &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 q_{\text{пр}}} = \pm j \sqrt{\sin^2 q_{\text{пр}} - 1} = \pm j \sqrt{\frac{\sin^2 q - n_{21}^2}{n_{21}^2}} = \\ &= \pm j \frac{x}{n_{21}^2} = \pm j \frac{k_1}{k_2} x. \end{aligned} \quad (262)$$

В случае, например, горизонтальной поляризации вектор напряжённости электрического поля преломленной волны содержит только одну составляющую  $E_y$  (см. рис. 99) и описывается зависимостью

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{пр}} = \underline{\mathbf{y}}_0 \underline{\mathbf{E}}_{\text{пр}0} \exp\left(-jk_2 (x \cos q_{\text{пр}} + z \sin q_{\text{пр}})\right), \quad (263)$$

где  $\underline{\mathbf{y}}_0$  – орт-вектор;

$x, z$  – текущие координаты волны в декартовой системе координат.

Подстановка (262) в (263) даёт

$$\mathbf{E}_{\text{пр}} = \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_{\text{пр}0} \exp(-jk_1(x\cos q + z\sin q)). \quad (264)$$

Из (264) следует, что амплитуда поля во второй среде экспоненциально затухает с увеличением расстояния  $x$  от границы раздела. При этом коэффициенты отражения принимают вид

$$\mathbf{R}_{\perp} = \frac{m_2 \cos q + jm_1 x}{m_2 \cos q - jm_2 x}; \quad \mathbf{R}_{\parallel} = -\frac{e_2 \cos q + je_1 x}{e_2 \cos q + je_2 x}. \quad (265)$$

Из (265) следует, что модули коэффициентов отражения равны единице, т.е.

$$R_{\perp} = e^{j2d_{\perp}}; \quad R_{\parallel} = -e^{j2d_{\parallel}}, \quad (266)$$

где  $d_{\perp} = \arctg\left(\frac{m_1 x}{m_2 \cos q}\right)$ ,  $d_{\parallel} = \arctg\left(\frac{e_1 x}{e_2 \cos q}\right)$ .

В первой среде при полном внутреннем отражении напряжённости поля при нормальной поляризации имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\text{н}} + \mathbf{E}_{\text{отр}} = \mathbf{y}_0 2E_{\text{н}0} \cos(k_1 x \cos q + d_{\perp}) \exp(-jk_1 z \sin q - d_{\perp}); \\ \mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{H}_{\text{н}} + \mathbf{H}_{\text{отр}} = -\frac{2E_{\text{н}0}}{Z_{c1}} [\mathbf{x}_0 \sin q \cos(k_1 x \cos q + d_{\perp}) + \\ + Z_0 j \cos q \sin(k_1 x \cos q + d_{\perp})] \exp(-jk_1 z \sin q - d_{\perp}), \end{cases} \quad (267)$$

а для параллельной поляризации

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_{\text{н}} + \mathbf{E}_{\text{отр}} = -2E_{\text{н}0} [(\mathbf{x}_0 \sin q \cos(k_2 x \cos q + d_{\parallel}) + \\ + Z_0 j \cos q \sin(k_1 x \cos q + d_{\parallel})) \exp[-j(k_1 z \sin q - d_{\parallel})]]; \\ \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}_{\text{н}} + \mathbf{H}_{\text{отр}} = -\mathbf{y}_0 \frac{2E_{\text{н}0}}{Z_{c2}} \cos(k_1 x \cos q + d_{\parallel}) \exp[-j(k_1 z \sin q - d_{\parallel})]. \end{cases} \quad (268)$$

Анализ (267), (268) показывает, что поверхности равных фаз и поверхности равных амплитуд не совпадают. ЭМВ, у которой плоские волновые поверхности и плоские поверхности одинаковых амплитуд не совпадают друг с другом, называется *неоднородной плоской волной*.

Фазовая скорость волны в первой среде вдоль границы раздела (вдоль координаты  $z$ ) оказывается  $V_\phi = w/k_1 \sin q = V_1 / \sin q > V_1$  больше скорости распространения плоской волны в первой среде. Поскольку фазовая скорость результирующей волны в первой среде больше скорости волны, свободно распространяющейся в этой же среде, то результирующую волну называют *ускоренной*.

Неоднородная плоская волна (267) или (268) характеризуется длиной волны  $\Lambda$ , определяемой расстоянием, на которое распространяется волновой фронт (вдоль оси  $z$ ) за время одного периода колебаний

$$\Lambda = V_\phi T = \frac{2p}{k_1 \sin q} = \frac{I_1}{\sin q}, \quad (269)$$

где  $I_1 = I_0 / n_1$  – длина волны в первой среде;

$I_0$  – длина волны в свободном пространстве.

Волны вида (267) или (268) наряду с поперечными составляющими обоих векторов  $\dot{\mathbf{E}}_1$  и  $\dot{\mathbf{H}}_1$  имеют также *продольную* составляющую векторов, ориентированную вдоль направления  $z$ . Такие ЭМВ называют *поперечно-продольными*. Они подразделяются на волны магнитного класса, или класса  $\mathbf{H}$ , который характеризуется наличием продольной составляющей вектора  $\dot{\mathbf{H}}$  (волна, описываемая соотношением (267)), и волны электрического класса, или класса  $\mathbf{E}$ , который характеризуется наличием продольной составляющей вектора  $\dot{\mathbf{E}}$  (волна, описываемая соотношением (268)).

Во второй среде поле характеризуется с помощью коэффициентов прохождения

$$\mathbf{T}_\perp = \frac{2m_2 \cos q}{m_2 \cos q - jm_1 x}; \quad \mathbf{T}_\parallel = \frac{2n_{21} e_1 \cos q}{e_2 \cos q - je_1 x}. \quad (270)$$

При этом напряжённости поля для нормально поляризованных волн имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{2\perp} = \mathbf{y}_0 \mathbf{E}_{n0} \mathbf{T}_\perp \exp[-k_1(x + jz \sin q)]; \\ \mathbf{H}_{2\perp} = -(\mathbf{x}_0 \sin q + \mathbf{z}_0 jx) \frac{\mathbf{E}_{n0} \mathbf{T}_\perp}{Z_{c2} n_{21}} \exp[-k_1(x + jz \sin q)], \end{cases} \quad (271)$$

а для параллельно поляризованных –

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{2\parallel} = -(\mathbf{x}_0 \sin q + \mathbf{z}_0 jx) \frac{\mathbf{E}_{n0} \mathbf{T}_\parallel}{n_{21}} \exp[-k_1(x + jz \sin q)]; \\ \mathbf{H}_{2\parallel} = -\mathbf{y}_0 \frac{\mathbf{E}_{n0} \mathbf{T}_\parallel}{Z_{c2}} \exp[-k_1(x + jz \sin q)]. \end{cases} \quad (272)$$

Формулы (271), (272) определяют неоднородную плоскую волну, волновые поверхности которой  $z = \text{const}$  перпендикулярны поверхностям равных амплитуд  $z = \text{const}$ . Эта волна характеризуется коэффициентом фазы  $b = k_1 \sin q$ , равным коэффициенту фазы в первой среде. Следовательно, фазовые скорости волн в первой и во второй средах вдоль границы раздела одинаковы, а значит, равны и длины волн.

Учитывая, что  $k_1 \cos q > k_2$  и  $V_\phi = V_2 / k_1 \sin q < V_2$ , фазовые скорости волн (271) и (272) во второй среде оказываются меньше скорости волны  $V_2 = 1/\sqrt{\epsilon_2 m_2}$ , свободно распространяющейся в этой же среде. Поэтому такие волны получили название *замедленных*.

Амплитуды векторов  $\dot{E}_2$  и  $\dot{H}_2$  экспоненциально затухают с увеличением расстояния  $x$  от границы раздела. Скорость затухания определяется произведением  $k_1 x = k_1 \sqrt{\sin^2 q - n_{21}^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 q - k_2^2}$  и возрастает с увеличением угла  $i$ .

Таким образом, при полном внутреннем отражении в оптически менее плотной среде вдоль границы раздела распространяется поперечно-продольная замедленная волна с экспоненциальным затуханием амплитуды поля по мере удаления от границы раздела. Эта волна фактически существует лишь в некотором слое, прилегающем к поверхности раздела, и поэтому носит название *поверхностной волны*.

### 3. ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ

#### 3.1. Волны в линиях передачи

*Линия передачи* – это линия, по которой производится локализованная передача электромагнитной энергии на заданное расстояние. В зависимости от частотного диапазона и метода направленной локализации энергии линии передачи (ЛП) делятся на проводные, коаксиальные, волноводные, полосковые и открытого типа (рис. 101).



Рис. 101. Классификация ЛП

Проводные ЛП представляют собой проволочные линии из двух или более проводников. Коаксиальные ЛП имеют внешнюю оболочку, локализирующую

щую ЭМП в окрестности проводников, находящихся в области, ограниченной этой оболочкой. Волноводы представляют собой металлические трубы, заполненные диэлектриком, в котором происходит распространение ЭМВ. Полосковые линии концентрируют ЭМП в пространстве между пластинами. ЛП открытого типа имеют различные практические реализации и основаны на принципах оптического распространения ЭМВ.

### 3.1.1. Классификация волн

В основу классификации волн в ЛП положены различия в структурах силовых линий векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Различают четыре типа волн в ЛП.

1. *T-волны* – поперечные волны, которые не имеет продольных составляющих ЭМП  $E_z = 0$  и  $H_z = 0$  (рис. 102, а). В литературе можно встретить обозначение ТЕМ (Transversion Electro-Magnetic).

2. *E-волны* – волны электрического типа, которые помимо поперечных компонентов  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  имеют продольную электрическую составляющую ЭМП  $E_z \neq 0$  и  $H_z = 0$  (рис. 102, б). По-другому их называют поперечно-магнитными ТМ (Transversion Magnetic – поперечно-магнитное).

3. *H-волны* – волны магнитного типа, которые помимо поперечных компонентов  $E_{\perp}$  и  $H_{\perp}$  имеют продольную магнитную составляющую ЭМП  $E_z = 0$  и  $H_z \neq 0$  (рис. 102, в). По-другому их называют поперечно-электрическими и обозначают символом ТЕ (Transversion Electric – поперечно-электрическое).

4. *EH- или HE-волны* – смешанные (гибридные) волны, которые имеют все поперечные и продольные компоненты ЭМП (рис. 102, г).

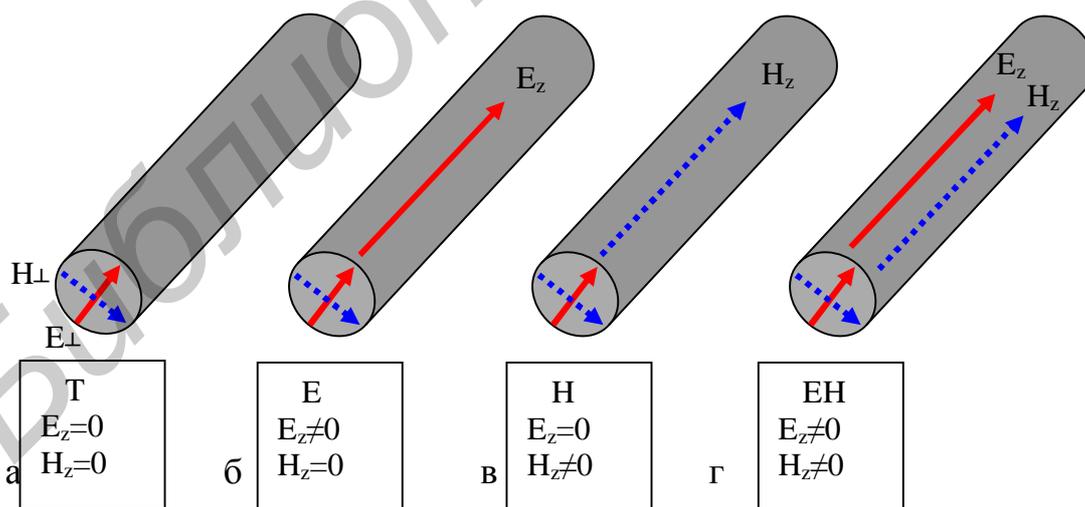


Рис. 102. Типы волн в линиях передачи

### 3.1.2. Быстрые и медленные волны

Напомним, что с этими понятиями мы уже встречались в разд. 2 при рассмотрении направленных волн.

Перепишем (107) в виде

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}, \quad (273)$$

тогда для Т-волны имеем  $k_z = k$  и фазовая скорость не будет отличаться от скорости плоской волны в среде с заданными параметрами  $v^T = c/\sqrt{\epsilon}$ .

Если рассматривать незатухающие волны, для которых  $k_z$  вещественно, то при  $k_{\perp}^2 > 0$  эти волны будут *быстрыми*, поскольку

$$\begin{aligned} k_z &< k, \\ v_{\phi} &> v^T, \end{aligned} \quad (274)$$

где  $v_{\phi}$  – скорость данной волны;

$v^T$  – скорость Т-волны в среде с заданными параметрами.

Е- и Н-волны являются быстрыми волнами, поскольку их фазовые скорости превышают скорость распространения волны в вакууме.

Если  $k_{\perp}^2 < 0$ , то

$$\begin{aligned} k_z &> k, \\ v_{\phi} &< v^T \end{aligned} \quad (275)$$

и волны называются *медленными*.

### 3.1.3. Режимы волн в ЛП

Любую ЛП можно представить эквивалентной длинной линией, а нерегулярности, возникающие в линии – их эквивалентными сопротивлениями в виде сосредоточенных элементов и включений. Тогда можно использовать при анализе линий передачи конечной длины основные понятия теории длинных линий. В этом случае напряжению  $\dot{U}$  и току  $\dot{I}$  в длинной линии можно поставить в соответствие электрическую  $\dot{E}$  и магнитную  $\dot{H}$  напряженности поля, а распределенным емкости и индуктивности – абсолютные диэлектрическую  $\epsilon_a$  и магнитную  $\mu_a$  проницаемости. Напряжение и ток в случае однородной длинной линии без потерь в любом ее сечении  $z$  (рис. 103) можно представить в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_{\text{пад}}(z) + \dot{U}_{\text{отр}}(z) = \dot{U}_{\text{м пад}} e^{j\beta z} + \dot{U}_{\text{м отр}} e^{-j\beta z}, \\ \dot{I} &= \dot{I}_{\text{пад}}(z) + \dot{I}_{\text{отр}}(z) = \frac{1}{Z_B} (\dot{U}_{\text{м пад}} e^{j\beta z} - \dot{U}_{\text{м отр}} e^{-j\beta z}),\end{aligned}\quad (276)$$

где  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_B}$  – фазовая постоянная;

$\lambda_B$  – длина волны в линии;

$Z_B$  – волновое сопротивление линии.

Комплексная амплитуда падающей волны  $\dot{U}_{\text{пад}}(z)$  определяется мощностью генератора. Отношение комплексных амплитуд напряжения отраженной  $\dot{U}_{\text{отр}}(z)$  и падающей волн  $\dot{U}_{\text{пад}}(z)$  в данном сечении линии  $z$  зависит от нагрузки и называется *коэффициентом отражения по напряжению*:

$$\dot{\Gamma}(z) = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(z)}{\dot{U}_{\text{пад}}(z)} = \frac{U_{\text{м отр}}}{U_{\text{м пад}}} e^{j2\beta z} = \dot{\Gamma}_H e^{j2\beta z}.\quad (277)$$

Здесь комплексная величина

$$\dot{\Gamma}_H = |\Gamma_H| e^{j\theta_H}\quad (278)$$

является коэффициентом отражения от нагрузки в сечении  $z = 0$  (где включена нагрузка линии).

С учётом выражения (277) напряжение и ток в линии можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{U}_{\text{пад}}(z) + \dot{U}_{\text{отр}}(z) = \dot{U}_{\text{пад}}(z) [1 + \dot{\Gamma}(z)], \\ \dot{I}(z) &= \frac{1}{Z_B} [\dot{U}_{\text{пад}}(z) - \dot{U}_{\text{отр}}(z)] = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(z)}{Z_B} [1 - \dot{\Gamma}(z)].\end{aligned}\quad (279)$$

Важным параметром, характеризующим режим в длинной линии, является сопротивление  $Z(z)$ , равное отношению комплексных амплитуд напряжения и тока в данном сечении линии:

$$Z(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_B \frac{1 + \dot{\Gamma}(z)}{1 - \dot{\Gamma}(z)} = R(z) + jX(z),\quad (280)$$

или в нормированном (приведенном к волновому сопротивлению линии) виде:

$$Z^*(z) = \frac{Z(z)}{Z_B} = R^*(z) + jX^*(z) = \frac{1 + \dot{\Gamma}(z)}{1 - \dot{\Gamma}(z)}.\quad (281)$$

Проводимость  $\dot{Y}(z)$  в данном сечении линии при этом определяется как

$$\dot{Y}(z) = \frac{1}{\dot{Z}(z)} = \frac{1}{Z_B} \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)} = G(z) + jB(z), \quad (282)$$

$$Y^*(z) = \frac{1}{Z^*(z)} = G^*(z) + jB^*(z) = \frac{1 - \Gamma^*(z)}{1 + \Gamma^*(z)}.$$

Из выражений (281) и (282) с учетом (278) можно получить

$$\dot{\Gamma}(0) = \frac{Z^*(0) - 1}{Z^*(0) + 1} = \frac{Z_H^* - 1}{Z_H^* + 1}. \quad (283)$$

Таким образом, в каждом сечении  $z$  существует простая и однозначная связь (281), (282) между параметрами  $\dot{\Gamma}(z)$  и  $\dot{Z}(z)$  или  $\dot{Y}(z)$ , характеризующими существующий в длинной линии режим.

На практике для определения коэффициента отражения широко используется экспериментально определенное распределение амплитуды результирующего напряжения (или тока) вдоль линии. Амплитуда результирующего напряжения в сечении  $z$ , удаленном от нагрузки к генератору на расстояние  $|z|$ , равна модулю напряжения (280), который в линии без потерь с учётом (278) и (279) определяется выражением

$$U_m(z) = U_{m \text{ пад}} \sqrt{1 + |\Gamma_H|^2 + 2|\Gamma_H| \cos(2bz - j_n)}. \quad (284)$$

На рис. 103 представлена зависимость нормированной по отношению к амплитуде падающей волны амплитуды  $U_m(z)$  от координаты  $z$ .

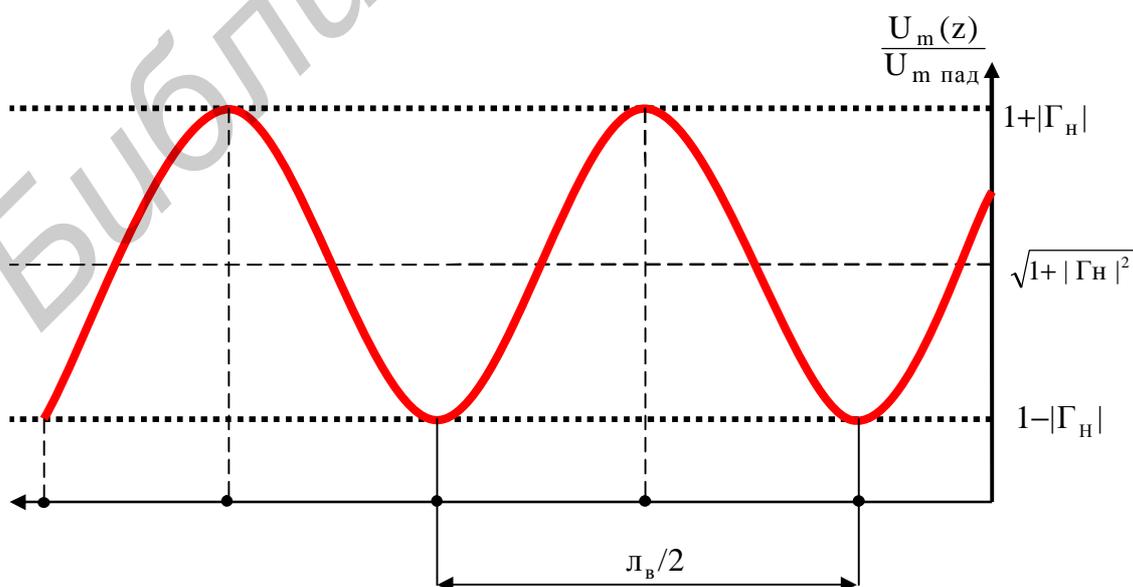


Рис. 103. Распределение напряжения вдоль линии

Как видно из рис. 103, эта зависимость имеет периодический характер. Напряжение достигает минимума, равного  $1-|\Gamma_H|$ , в точках, где  $\cos(2bz_n - j_n) = -1$ , при

$$2bz_n = (2n+1)p + j_n, \quad (285)$$

и максимума, равного  $1+|\Gamma_H|$ , когда  $\cos(2bz'_n - j_n) = 1$  при

$$2bz'_n = 2np + j_n, \quad (286)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – порядковый номер минимума или максимума, отсчитанного от нагрузки линии. Расстояние между соседними минимумами или максимумами одинаково и равно половине длины волны в данной линии.

Отношение максимального и минимального значений амплитуды напряжения называется *коэффициентом стоячей волны* (КСВ или  $K_c$ ):

$$КСВ = \frac{U_{m \max}}{U_{m \min}} = \frac{1 + |\Gamma_H|}{1 - |\Gamma_H|}. \quad (287)$$

Помимо КСВ используют обратную ему величину, называемую *коэффициентом бегущей волны* (КБВ или  $K_b$ ):

$$КБВ = \frac{1}{КСВ} = \frac{1 - |\Gamma_H|}{1 + |\Gamma_H|}. \quad (288)$$

По известному значению КСВ или КБВ можно определить модуль коэффициента отражения

$$|\Gamma_H| = \frac{КСВ - 1}{КСВ + 1} = \frac{1 - КБВ}{1 + КБВ}. \quad (289)$$

Аргумент коэффициента отражения от нагрузки ( $z = 0$ ) можно найти из (284):

$$j_n = 2bz_1 - p, \quad (290)$$

где  $z_1$  – координата ближайшего к нагрузке минимума.

Рассмотренные выше параметры характеризуют режим распространения волны в длинной линии.

Если  $Z_H^* = 1$ , т.е.  $Z_H = Z_B$ , то согласно (283)  $|\Gamma_H| = 0$ . Согласованная с линией нагрузка, сопротивление которой равно волновому сопротивлению линии, не создает отраженной волны и поглощает всю мощность падающей волны.

Линия с согласованной нагрузкой ведет себя подобно бесконечной регулярной линии: в ней существует режим бегущей волны, характеризуемый параметрами  $Z'(z)=1$ ,  $|\Gamma| = 0$ , КСВ = 1, КБВ = 1.

Если  $Z_H = jX_H$  (сопротивление нагрузки реактивно),  $Z_H = 0$  («короткое замыкание») или  $Z_H = \infty$  («холостой ход»), то величина  $|\Gamma| = 1$ , т.е. нагрузки полностью отражают падающую волну. В линии с такими нагрузками устанавливается режим стоячей волны, характеризуемый параметрами  $Z^*(z) = jX^*(z)$ ,  $|\Gamma| = 1$ , КСВ =  $\infty$ , КБВ = 0.

Режимы бегущей и стоячей волн являются предельными. В общем случае в линии существует так называемый смешанный режим, для которого  $Z_H^* = R_H^* \pm jX_H^*$ ,  $0 < |\Gamma| < 1$ ,  $1 < \text{КСВ} < \infty$ ,  $1 > \text{КБВ} > 0$ .

На рис. 104 показаны типичные графики распределения напряжения вдоль линии при различных значениях  $\Gamma$ , получаемые из выражения (284) для передающей линии без потерь.

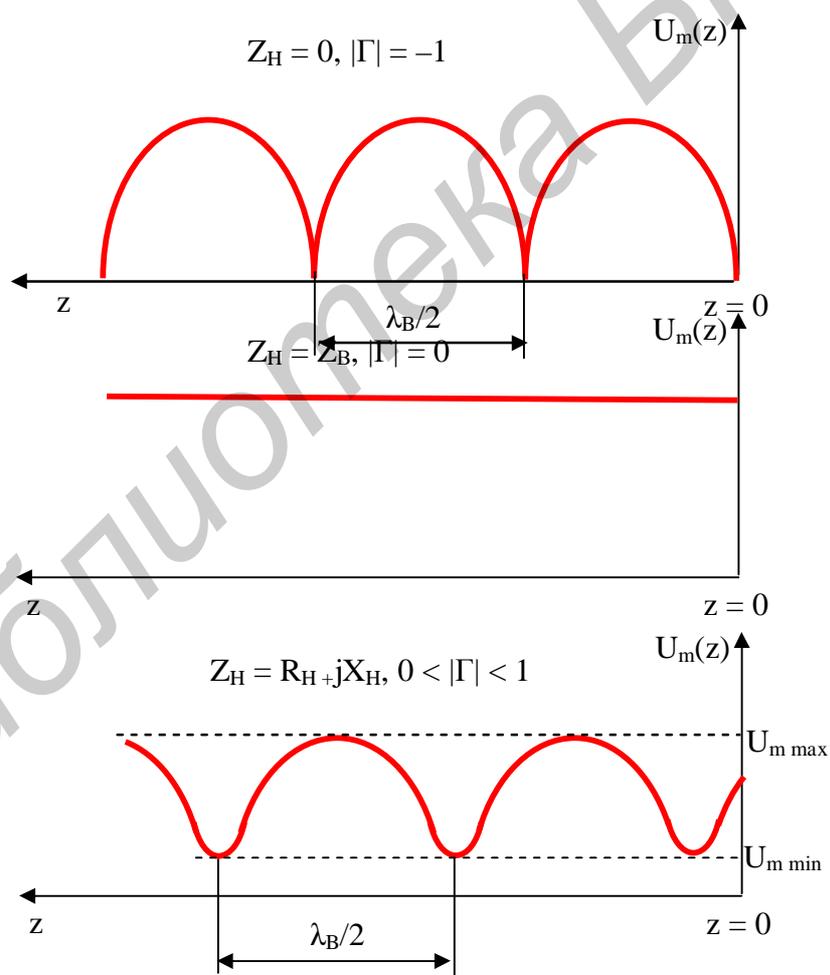


Рис. 104. Распределение напряжения в линии

### 3.2. Волны в прямоугольном волноводе

Для решения задачи по определению структуры ЭМП в прямоугольном волноводе необходимо решить волновые уравнения относительно продольных составляющих электрического и магнитного векторов поля. На рис. 105 представлена геометрия задачи. Волновод с прямоугольным сечением помещен в декартовую систему координат. Площадь сечения с изменением  $z$  не изменяется и определяется размерами стенок  $a \times b$ .

#### 3.2.1. Волны электрического типа

Решение волнового уравнения для продольной составляющей электрической напряженности поля при граничных условиях

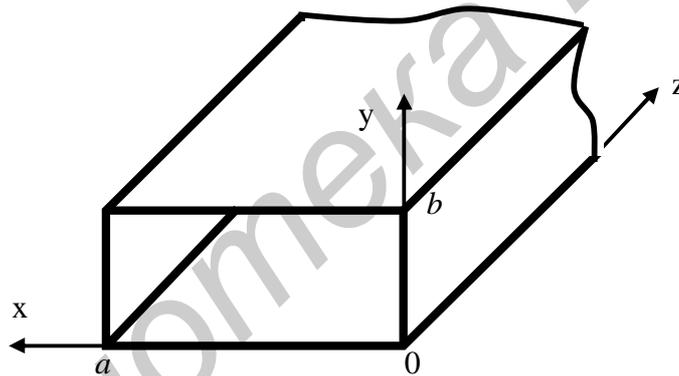


Рис. 105. Геометрия задачи

$$E_z = 0 \text{ при } x = 0, a; y = 0, b \quad (291)$$

представляется в виде

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (292)$$

т.е.  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Волновые поперечные числа определяются как  $k_x = \frac{m\pi}{a}$  и  $k_y = \frac{n\pi}{b}$ , поэтому

$$k_{mn}^e = \sqrt{\left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2}. \quad (293)$$

Критическая длина волны  $\lambda_{mn}^e$  при этом рассчитывается как

$$\lambda_{mn}^e = \frac{2p}{k_{mn}^e} = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}}. \quad (294)$$

Наибольшая критическая длина волны оказывается у  $E_{11}$ -волны:

$$\lambda_{11}^e = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Структура ЭМП для данной волны представлена на рис. 106.

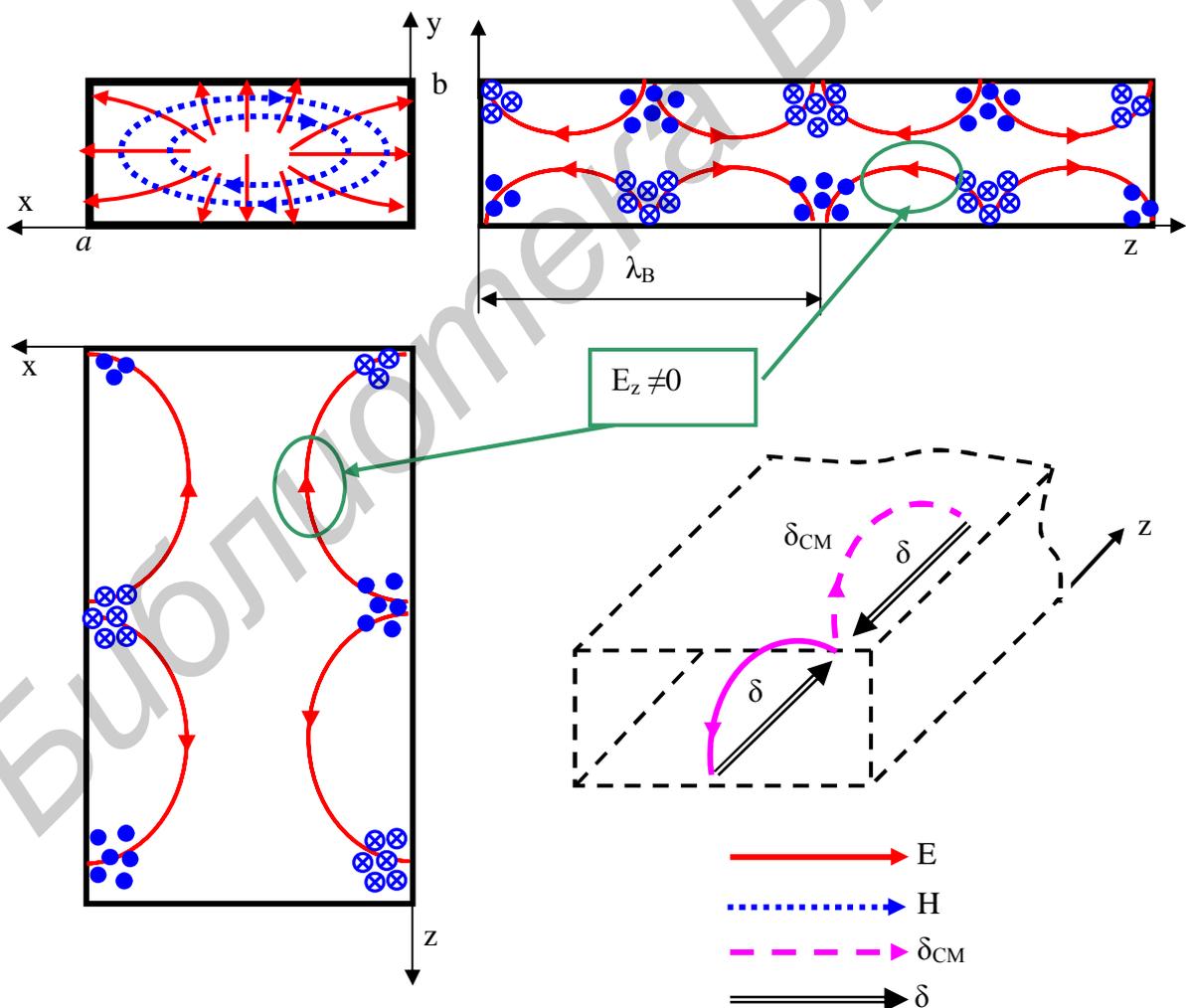


Рис. 106. Структура поля волны  $E_{11}$

При увеличении индексов  $m$  и  $n$  картина поля  $E_{11}$  мультиплицируется  $m$  раз по  $Ox$  и  $n$  раз по  $Oy$ . Алгоритм построения структуры ЭМП в поперечном сечении волновода приведен на рис. 107.

### 3.2.2. Волны магнитного типа

Решение волнового уравнения для продольной составляющей электрической напряженности поля при граничных условиях

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b. \quad (295)$$

Используя, как и ранее, метод разделения переменных, получим общее решение в виде

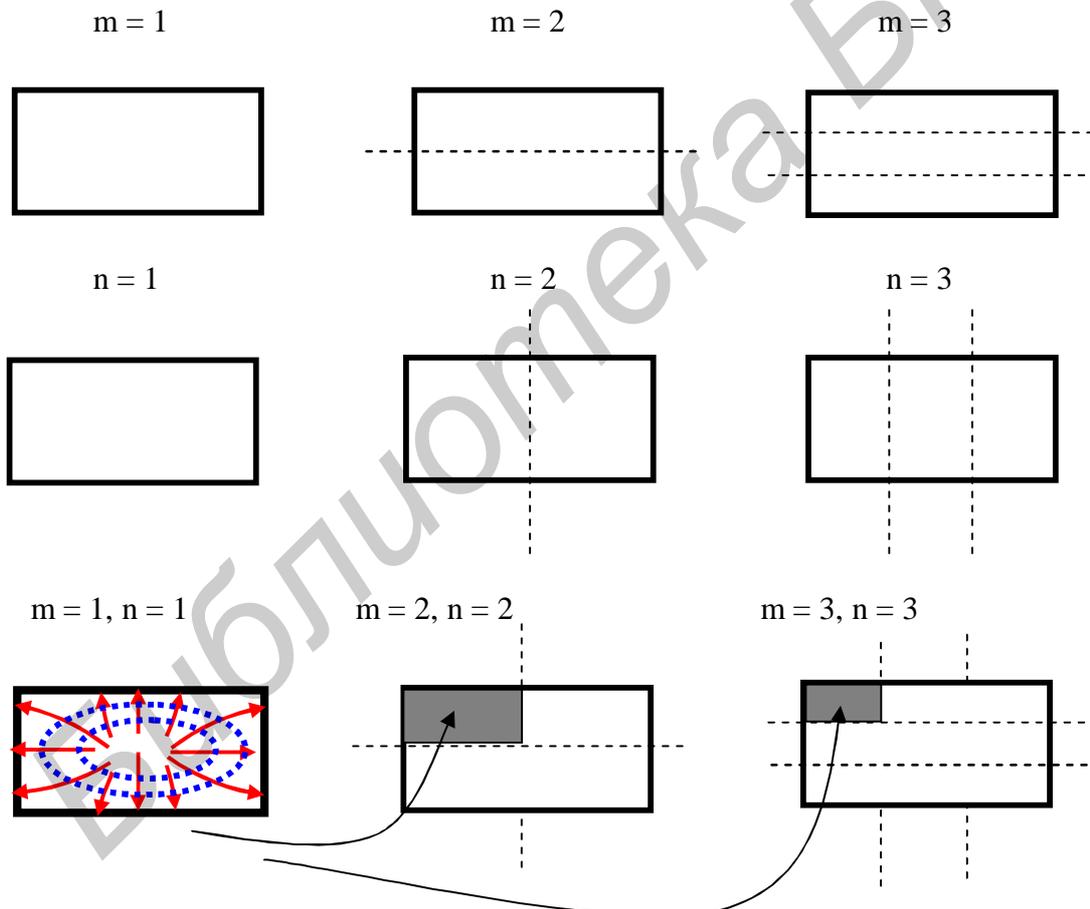


Рис. 107. Алгоритм построения ЭМП произвольной волны электрического типа

$$H_z = H_0 \cos \frac{mpx}{a} \cos \frac{npy}{b}, \quad (296)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$$k_{mn}^m = \sqrt{\left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2}, \quad (297)$$

$$l_{mn}^m = \frac{2p}{k_{mn}^m} = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}}.$$

Построим структуру полей Н-волн в прямоугольном волноводе, используя установленные выше правила.

Анализ длин волн (297) показывает, что самой длинной волной в прямоугольном волноводе оказывается волна  $H_{10}$ . Структура ЭМП данной волны приведена на рис. 108.

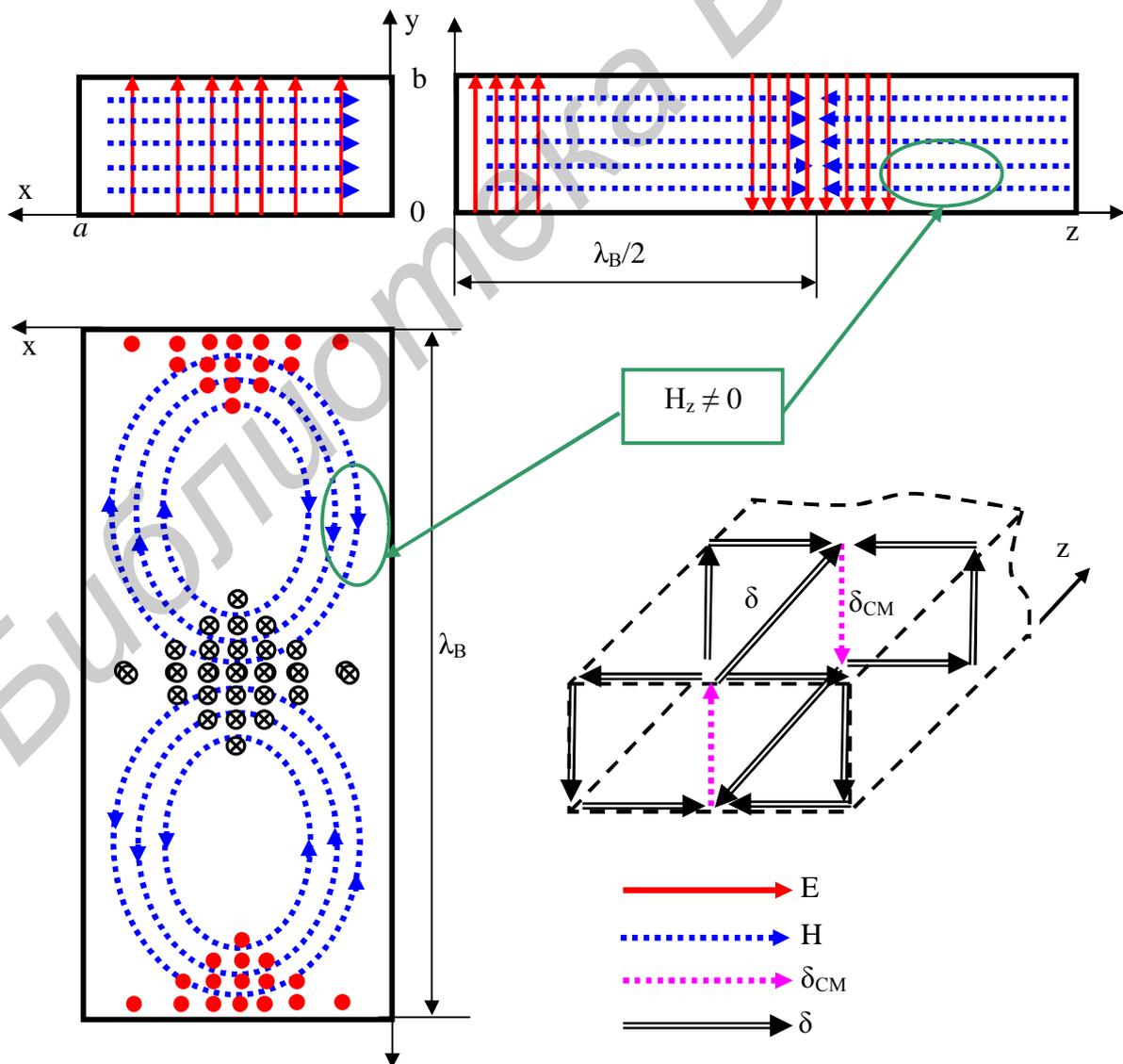
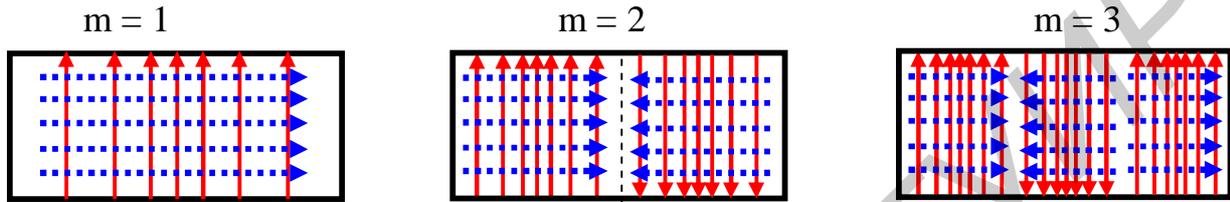


Рис. 108. Распределение силовых и токовых линий волны  $H_{10}$ 

Следуя рассуждениям по построению структуры ЭМП для волн электрического типа, можно представить картину поля при развитии подстрочных индексов волны магнитного типа. При увеличении первого индекса при нулевом втором происходит мультиплицирование по координате  $0x$  – структура поля  $H_{10}$  повторяется  $m$  раз с соответствующей инверсией направлений составляющих ЭМП (рис. 109)

Рис. 109. Структура ЭМП  $H_{m0}$  при развитии первого индекса

При развитии двух индексов в ранжированной ячейке повторяется структура ЭМП волны  $H_{11}$  (рис. 110).

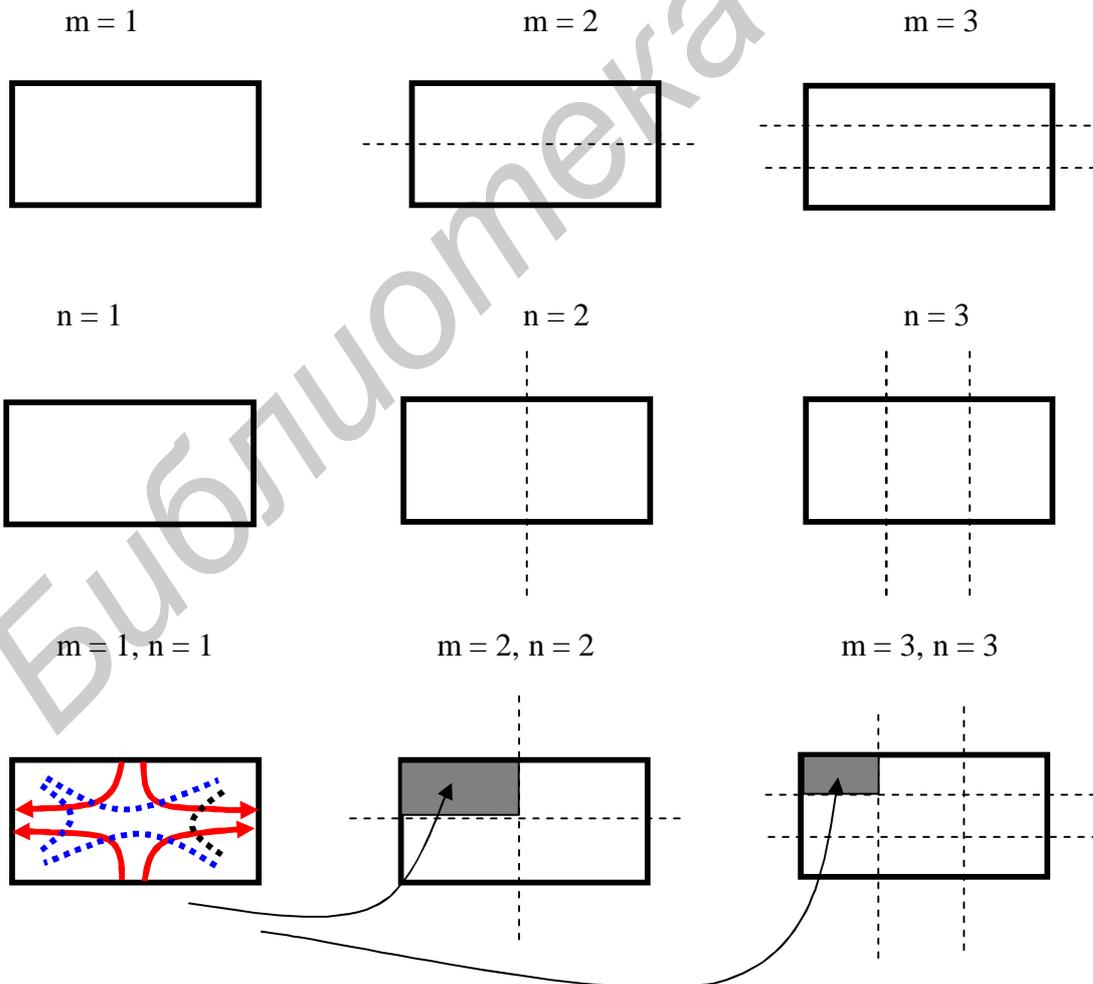


Рис. 110. Алгоритм построения ЭМП произвольной волны магнитного типа

Из полученных решений для волн Е- и Н-типа следует:

1. В волноводе может существовать бесконечное число волн (мод) –  $H_{mn}$  и  $E_{mn}$ . Подстрочные индексы отвечают за распределение стоячих полувольт, укладывающихся по осям  $Ox$  и  $Oy$ .
2. Наибольшей критической длиной волны обладает волна  $H_{10} - l_{10}^m = 2a$ . Она называется *основным (низшим) типом*, все остальные волны являются волнами (модами) *высшего типа*.
3. Ближайшим к  $H_{10}$  типом волны является  $H_{20}$ , длина которой определяет нижнюю границу так называемого *одномодового режима* работы волновода.
4. Волны электрического сорта  $E_{0m}$  и  $E_{n0}$  в прямоугольном волноводе существовать не могут.
5. Структура поля волн высшего типа определяется мультипликацией волн  $H_{11}$  и  $E_{11}$ .

### 3.2.3. П- и Н-образные волноводы

Главным недостатком прямоугольного волновода является ограничение рабочего диапазона частот, определяемого размерами его поперечного сечения. А можно ли расширить частотный диапазон? Можно, если изменить конфигурацию поперечного сечения.

На практике для решения этого вопроса применяются так называемые П- и Н-образные волноводы (рис. 111). Их применение основано на концентрации силовых линий в зазоре  $s$  (рис. 112), что позволяет трансформировать поле основной волны в квази Т-волну, увеличив диапазон одномодового режима.

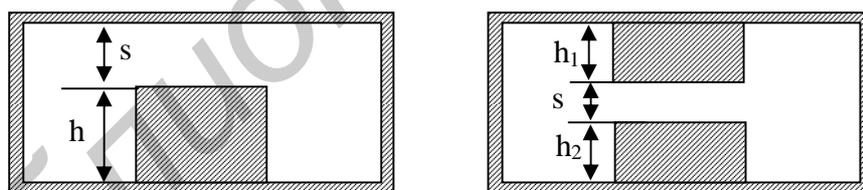


Рис. 111. П- и Н-образные волноводы

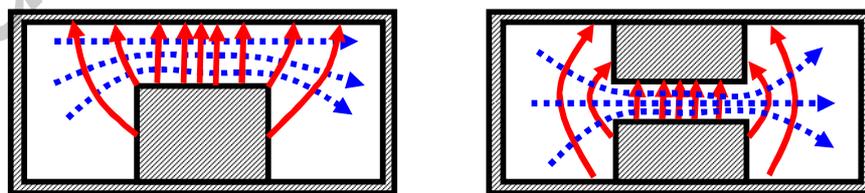


Рис. 112. Структура ЭМП П- и Н-образного волновода

Применение таких волноводов позволяет расширить частотный диапазон максимум в два раза.

Трансформировать поперечное сечение позволяют прямоугольные стержни, которые вводятся в волновод с прямоугольным сечением. При реализации Н-образных волноводов стремятся к симметричности конфигурации сечения, когда высоты пьедесталов  $h_1$  и  $h_2$  выбираются одинаковыми.

### 3.3. Волны в волноводе с круглым сечением

#### 3.3.1. Волны электрического типа

Воспользуемся цилиндрической системой координат, как это показано на рис. 113.

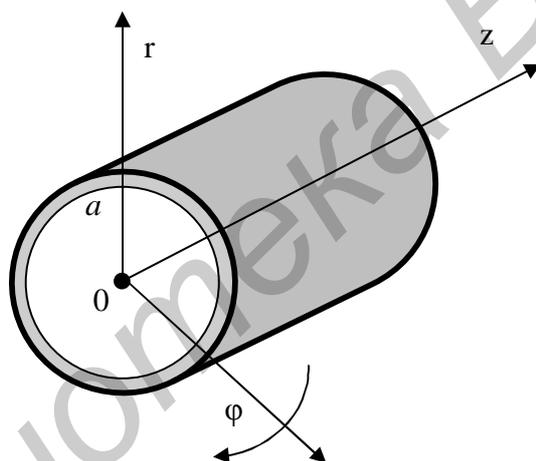


Рис. 113. Волновод с круглым сечением

Граничные условия данной задачи записываются в виде

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \text{ при } r = a; \\ E_\varphi &= 0 \text{ при } r = a, \end{aligned} \quad (298)$$

где  $a$  – внутренний радиус волновода.

В полярной системе координат

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial j} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial j} \right) \right\} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial j^2}.$$

Таким образом, волновое уравнение для вектора электрической напряженности поля в системе координат  $r, \varphi$  записывается как

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial j^2} + k^2 E_z = 0. \quad (299)$$

Воспользуемся методом разделения переменных и представим искомые решения  $E_z = R(r)\Phi(j)$ . Подставляя его в (299) и преобразовывая, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dj^2} + l^2 \Phi &= 0, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R &= 0. \end{aligned} \quad (300)$$

Решение системы уравнения для продольной составляющей ЭМП имеет вид

$$E_z = E_0 J_n \left( \frac{n_{mn} r}{a} \right) \cos nj, \quad (301)$$

здесь  $n_{mn}$  – корни функции Бесселя.

Критические длины волн типов  $E_{mn}$  определяются корнями функции Бесселя:

$$l_{mn}^e = \frac{2pa}{n_{mn}^e}. \quad (302)$$

### 3.3.2. Волны магнитного типа

В рассматриваемом случае краевая задача дополняется граничными условиями

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = a. \quad (303)$$

Решение находится в виде

$$H_z = H_0 J_n \left( \frac{m_{mn} r}{a} \right) \cos nj, \quad (304)$$

здесь  $m_{mn}$  – корень производной по аргументу  $J'_m(m_{mn}) = 0$ .

Критическая длина волны определяется выражением

$$l_{mn}^m = \frac{2pa}{m_{mn}}. \quad (305)$$

В табл. 4 приведены значения корней функции Бесселя нулевого и первого порядков и их производных с соответствующими критическими длинами E- и H - типов волн, выраженными через радиус волновода.

Таблица 4

Волны E-типа			Волны H-типа		
Тип	$V_{mn}$	$L_{KP}$	Тип	$M_{mn}$	$L_{KP}$
$E_{01}$	2,405	$2,62 a$	$H_{01}$	3,832	$1,64 a$
$E_{11}$	3,832	$1,64 a$	$H_{11}$	1,841	$3,41 a$

E- и H-волны более высоких порядков имеют меньшие длины критических волн. Низшей волной в волноводе с круглым сечением является волна  $H_{11}$ . Следующая по длине  $L_{KP}$  – волна  $E_{01}$ , а затем две волны  $E_{11}$  и  $H_{01}$ , имеющие одинаковые критические длины волн. Магнитные и электрические волны, имеющие одинаковые длины критических волн в волноводе произвольного сечения, называются *вырожденными*.

Используя правила изображения поля, проанализируем структуру некоторых типов волн.

1. Структура волны  $E_{01}$  в поперечном и продольном сечениях изображена на рис. 114. Она является электрической волной основного типа с наибольшей критической длиной волны. Первый нулевой индекс при этом указывает на то, что эта волна азимутально-симметричная.

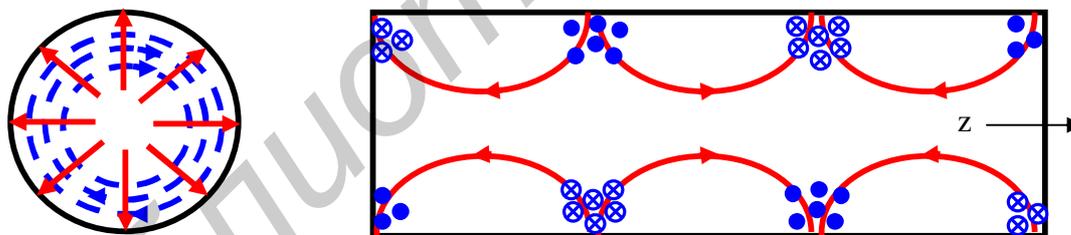
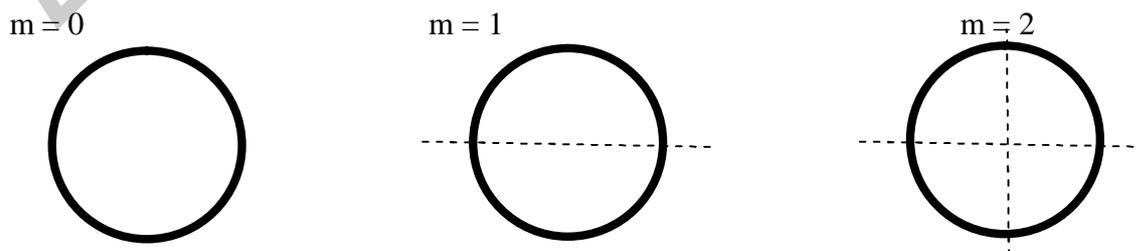


Рис. 114. Структура ЭМП волны  $E_{01}$

2. Увеличение азимутального  $n$  и радиального  $m$  индексов приводит к следующему развитию структуры поля (рис. 115).



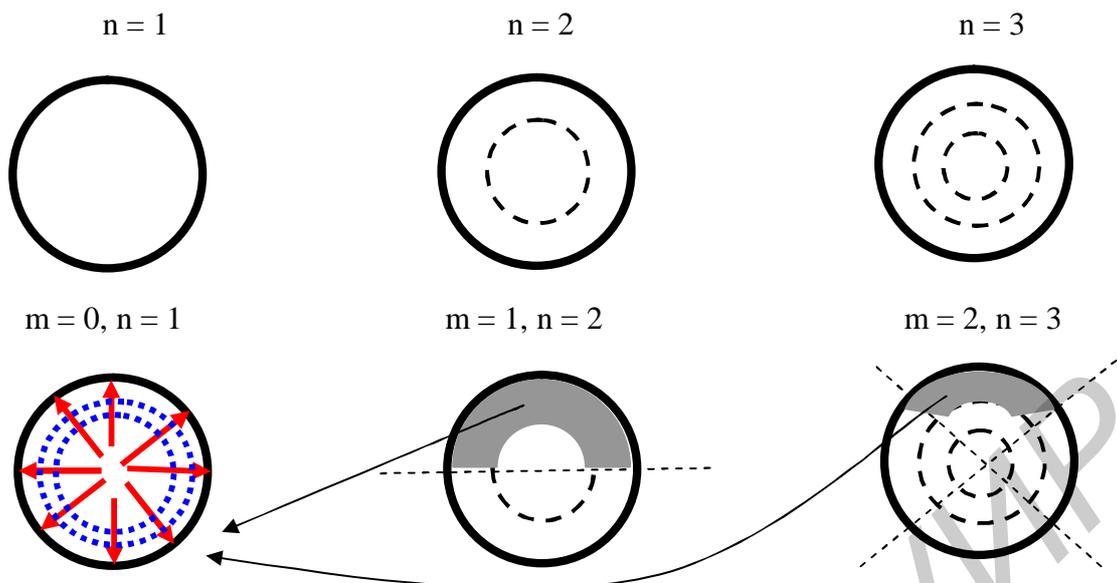


Рис. 115. Алгоритм построения структуры ЭМП в поперечном сечении круглого волновода для произвольной волны электрического типа 3. Структура волны  $H_{01}$  изображена на рис. 116. Нулевой азимутальный индекс указывает на то, что волна – азимутально-симметричная.

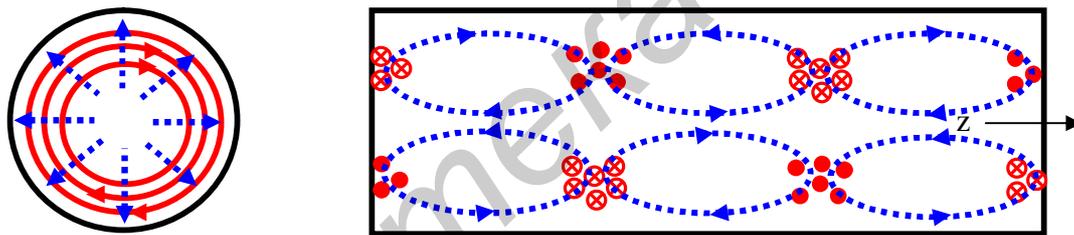


Рис. 116. Структура ЭМП волны  $H_{01}$

4. Несимметричная волна  $H_{11}$  изображена на рис. 117. Это волна является доминантной – её критическая длина волны максимальна среди других, как  $H_{mn}$ -, так и  $E_{mn}$ -волн.

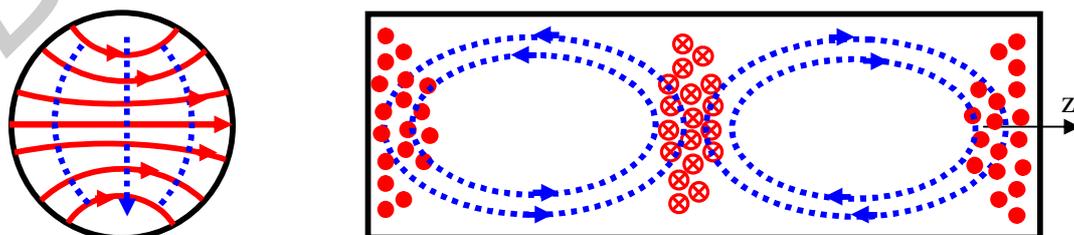


Рис. 117. Структура ЭМП волны  $H_{11}$

5. Алгоритм построения ЭМП магнитного типа в волноводе круглого сечения аналогичен алгоритму для электрических волн. При этом за базовую структуру ЭМП принимается поле волны  $H_{11}$ .

### 3.4. Т-волны в линиях передачи

Характерным для данного типа волн является отсутствие продольных составляющих ЭМП. Волна Т-типа не имеет частотной дисперсии, т.е. фазовая скорость распространения ЭМВ не отличается от скорости света и определяется лишь параметрами диэлектрика, заполняющего пространство распространения.

#### 3.4.1. Коаксиальная линия

Эта линия представляет собой два соосных цилиндра с радиусами  $R$  и  $r_1$ , между которыми имеется диэлектрик (рис. 118). Аналитическое представление ЭМП в такой системе описывается в цилиндрической системе координат.

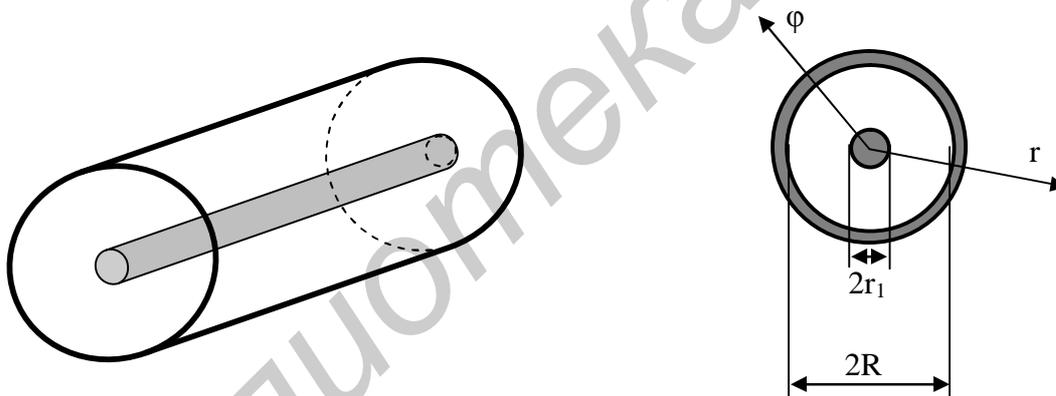


Рис. 118. Коаксиальный волновод

Структура ЭМП в коаксиальном волноводе представлена на рис. 119. Как видно, она содержит лишь поперечные составляющие ЭМП. Расстояние между пучностями определяется диэлектрическим заполнением пространства между проводниками.

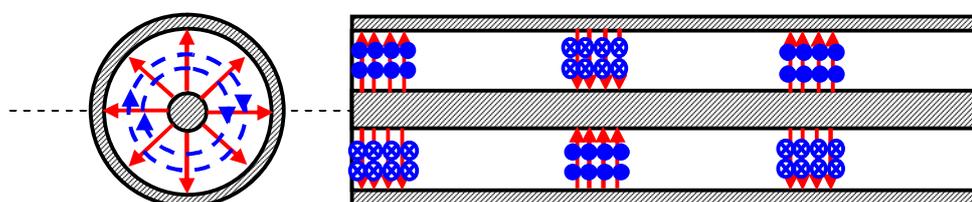


Рис. 119. Структура поля Т-волны в коаксиальном волноводе

Рабочая полоса частот коаксиальной линии может быть определена как разность критических частот ближайшего высшего и основного типов колебаний. Для основной волны (Т- волны)  $I_{кр}^T = \infty$ , т.е. по коаксиальной линии могут распространяться электромагнитные волны любой длины. Однако с укорочением длины волны в коаксиальной линии появляются высшие типы волн. Первым высшим типом является волна  $H_{11}$ , критическая длина которой  $I_{кр}^{H_{11}} = 2p(R + r_1)$ . Структура поля этой волны показана на рис. 120.

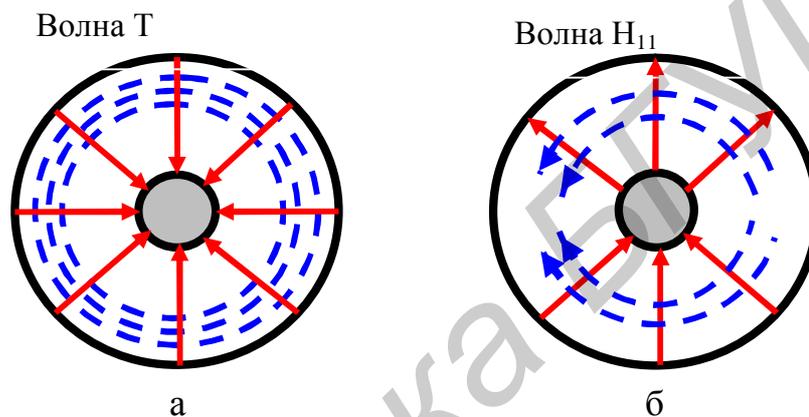


Рис. 120. Структуры поля Т-волны (а) и  $H_{11}$ -волны (б)

Таким образом, при изменении радиуса внутреннего проводника коаксиального кабеля от 0 до  $r_1$  критическая длина первой волны высшего типа меняется незначительно. Если между проводниками коаксиального кабеля имеется диэлектрик, создающий эффективную диэлектрическую проницаемость кабеля  $\epsilon_3$ , то критическая длина волны увеличится в  $\sqrt{\epsilon_3}$  раз.

### 3.4.2. Полосковая линия

Несимметричная полосковая линия (ПЛ), показанная на рис. 121, является одной из наиболее часто используемых ЛП СВЧ-диапазона. Она представляет собой тонкие полоски металла, между которыми находится слой диэлектрика, называемый подложкой. Диэлектрические свойства подложки позволяют существенно уменьшить поперечные размеры линии. Основным типом волны несимметричной ПЛ является квазиТ-волна. Такое название волны обусловлено незначительным появлением продольных составляющих ЭМП.

Конструктивные параметры определяются на основе электростатического анализа, осуществляемого исключительно численным тестированием.

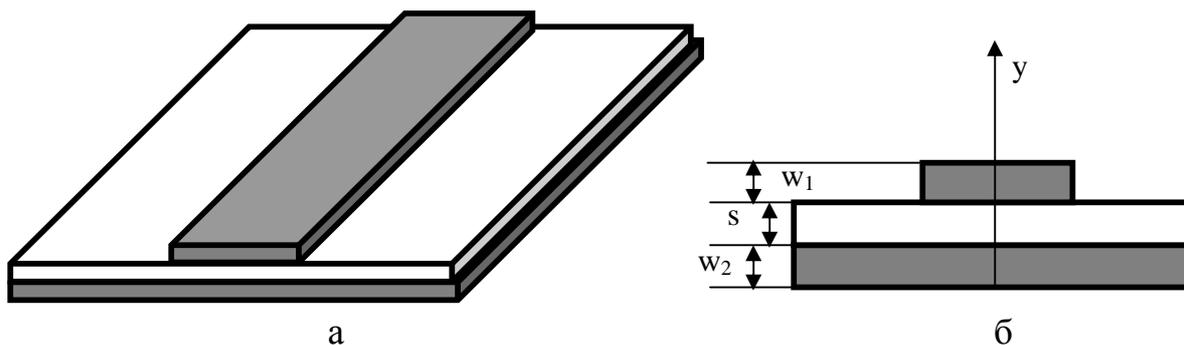


Рис. 121. Несимметричный полосковый волновод:  
а – общий вид; б – поперечное сечение

Структура ЭМП и параметры ПЛ определяются геометрическими размерами полосок, толщиной и свойствами диэлектрического слоя.

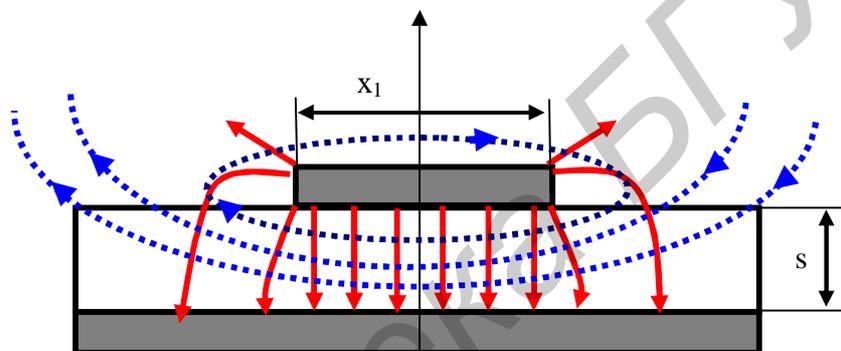


Рис. 122. Структура поля Т-волны в несимметричном полосковом волноводе

На рис. 122 представлена картина распределения силовых линий ЭМП, которая демонстрирует влияние толщины слоя диэлектрика на ее структуру и в общем – о необходимости дополнительной локализации формируемого поля.

## 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 4.1. Излучение ЭМВ в свободном пространстве

#### 4.1.1. Общие замечания

В свободном пространстве ЭМВ обладает поперечной структурой: входящие в ее состав взаимосвязанные электрические и магнитные поля перпендикулярны друг другу, а также направлению распространения и характеризуются векторами напряженностей электрического  $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_x E_m \cos(\omega t - kz)$  и магнитного  $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_y H_m \cos(\omega t - kz)$  полей.

В вакууме напряженности поля связаны соотношением

$$\frac{E_m}{H_m} = z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 120\rho, \text{ [Ом]}, \quad (306)$$

где  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – электрическая и магнитная постоянные, соответственно соотношение (306) имеет размерность сопротивления и носит название *волнового сопротивления* свободного пространства.

Если источник электромагнитного поля, помещенный в точке А (рис. 123), характеризуется мощностью излучения Р, то для изотропного (ненаправленного) излучателя плотность потока мощности на расстоянии r определяется как

$$\Pi = P/4\pi r^2, \text{ [Вт/м}^2\text{]}. \quad (307)$$

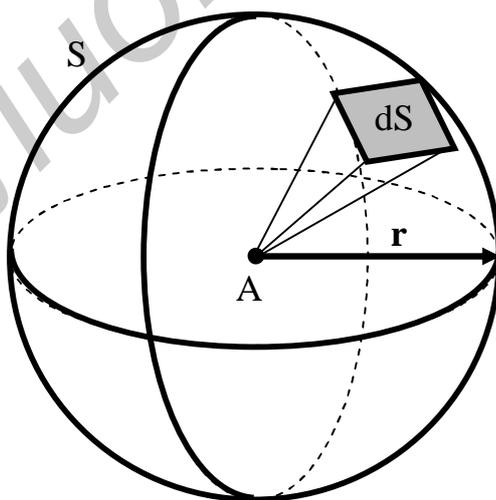


Рис. 123. К определению плотности потока мощности на расстоянии

В то же время плотность потока мощности для гармонической волны определяется как

$$\Pi = \frac{1}{2} E_m H_m. \quad (308)$$

Приравнявая (307) и (308), с учетом (306) определим напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от источника:

$$E_m = \frac{\sqrt{60P}}{r}. \quad (309)$$

Для действующего значения напряженности поля  $E_d = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$  выражение (309) примет вид

$$E_d = \frac{\sqrt{30P}}{r}. \quad (310)$$

Если в качестве излучателя используется направленный излучатель с коэффициентом направленного действия (КНД)

$$\text{КНД} = \frac{P_{\text{НА}}}{P_{\text{ИИ}}}, \quad (311)$$

где  $P_{\text{НА}}$  и  $P_{\text{ИИ}}$  – плотности потоков мощности, создаваемых направленным и изотропным излучателями, то расчетные формулы (309) и (310) примут вид

$$E_m = \frac{\sqrt{60P \text{ КНД}}}{r}, \quad (312)$$

$$E_d = \frac{\sqrt{30P \text{ КНД}}}{r}. \quad (313)$$

Как следует из выражений (312), (313) коэффициент направленного действия показывает, во сколько раз нужно увеличить мощность, подводимую к изотропному излучателю, чтобы он на удалении  $r$  создавал такую же напряженность поля, как и направленный излучатель.

## 4.1.2. Элементарные источники электромагнитного поля

### 4.1.2.1. Диполь Герца

На рис. 124 показан элементарный электрический вибратор – диполь Герца в виде короткого проводника, по которому течет ток  $I(z) = I_m \exp j\omega t$ . Ди-

поле расположен вдоль оси  $z$  прямоугольной системы координат  $xyz$ . Амплитуда тока  $I_m$  и его начальная фаза во всех точках диполя одинаковы, так как длина диполя  $dz \ll l$ . На рисунке показана точка наблюдения  $M$  в дальней зоне, заданная сферическими координатами  $r, \theta, \varphi$ .  $M'$  – проекция точки  $M$  на плоскость  $xy$ .

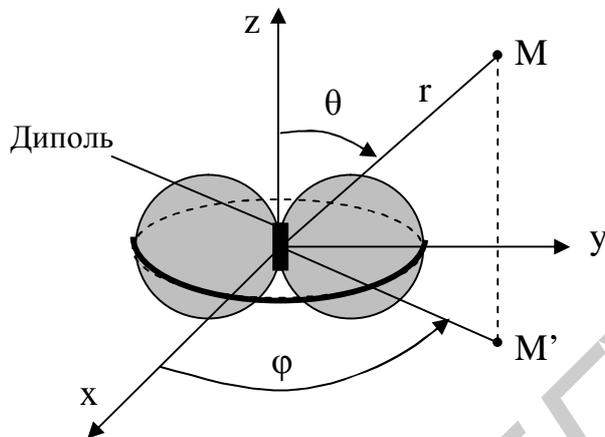


Рис. 124. ДН диполя Герца

В электродинамике получено выражение, определяющее комплексную амплитуду вектора  $\underline{E}$  поля диполя в дальней зоне (здесь и в дальнейшем под дальней зоной будем понимать удаление от источника излучения, при котором обеспечивается плоский фронт ЭМВ)

$$dE \approx j \frac{60 p I_m}{l} \cdot \frac{\exp(jkr)}{r} \cdot F(q, j) dz, \quad (314)$$

где  $r$  – расстояние от диполя до точки  $P$  в дальней зоне;

$k = \frac{2\pi}{l}$  – волновое число свободного пространства;

$F(q, j) = \cos q$  – диаграмма направленности диполя в плоскости  $E$ ;

$F(q, j) = 1$  – диаграмма направленности диполя в плоскости  $H$ .

Из выражения (314) следует, что в дальней зоне поле диполя Герца представляет собой сферическую волну, на что указывает множитель  $\exp(jkr)/r$ .

#### 4.1.2.2. Элементарный магнитный излучатель

Элементарный магнитный излучатель является физической моделью элементарного магнитного вибратора. Так же как и диполь Герца, элементарный магнитный излучатель в дальней зоне создает сферическую волну, однако плоскости  $E$  и  $H$  меняются местами, ДН определяется выражениями:

в плоскости  $E$   $F(q) = 1$ ,

в плоскости  $H$   $F(q) = \cos q$ .

Пространственная зависимость поля имеет такую же форму, как у диполя Герца. При этом ось магнитного вибратора ориентирована вдоль оси  $z$ . Плоскостью  $E$  является плоскость  $xOy$ , плоскостью  $H$  – плоскость  $j = \text{const}$ . Поляризация поля в дальней зоне линейная.

#### 4.1.2.3. Элементарный излучатель Гюйгенса

Элементарный излучатель Гюйгенса представляет собой бесконечно малый участок фронта плоской волны  $dS$ . Пусть фронт совпадает с плоскостью  $xOy$ , а вектор фазовой скорости волны направлен вдоль оси  $z$  (рис. 125):

$$E_s(x, y, t) = E_0(x, y) \exp j\Psi(x, y) \exp j\omega t, \quad (315)$$

$$H_s(x, y, t) = H_0(x, y) \Psi(x, y) \exp j\omega t \quad (316)$$

где  $E_0(x, y), H_0(x, y)$  – амплитуды векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ,  
 $\Psi(x, y)$  – начальная фаза.

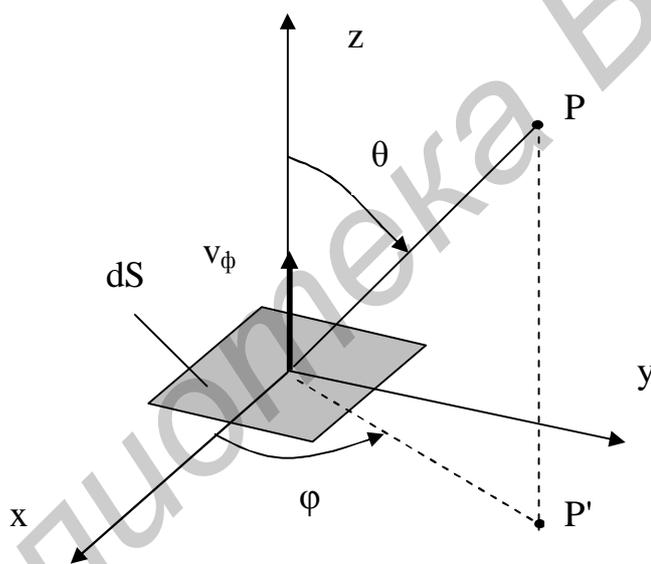


Рис. 125. Элементарный излучатель Гюйгенса

Тогда комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  поля элемента Гюйгенса в дальней зоне определяется выражением

$$dE \approx \frac{E_0(x, y) \exp j\Psi(x, y)}{2lr} \exp jkr(1 + \cos q) dS, \quad (317)$$

из которого следует, что поле элемента Гюйгенса представляет собой сферическую волну, а направленность не зависит от угла  $j$  и в любой плоскости  $j = \text{const}$  определяется выражением  $F(q) = 1 + \cos q$ . Элемент Гюйгенса излучает поле с максимальной амплитудой в направлении  $q = q$  (в направлении вектора фазовой скорости волны) и не излучает в обратном направлении  $q = p$ .

## 4.2. Дифракция ЭМВ в свободном пространстве

Совокупность явлений, происходящих при взаимодействии ЭМВ с неоднородностью (объектом), имеющей отличающиеся от окружающей среды параметры, называется *дифракцией волн* на этих объектах. Под явлением дифракции обычно понимается поведение волн в некоторой области, имеющей границу раздела сред. Сущность решения *дифракционных (краевых, граничных)* задач заключается в определении частичных (рассеянных, преломленных) полей по заданному первичному, но, как правило, практический интерес представляет дифракционное (результатирующее) поле.

### 4.2.1. Дифракция Фраунгофера

Рассмотрим задачу дифракции ЭМВ на отверстии. Аналитическое исследование явления дифракции на отверстии является достаточно сложной математической задачей. Сложность решения зависит от многих параметров, главными из которых являются: форма отверстия, электромагнитные параметры экрана, характер амплитудно-фазового распределения поля в плоскости отверстия, спектральные характеристики ЭМП, а также расстояние от экрана до точки наблюдения.

Пусть плоский экран выполнен из идеально проводящего (непрозрачного) материала; когда экран облучается плоской ЭМВ с длиной волны  $\lambda$ , а отверстие в нем имеет прямоугольную форму площадью  $S = ab$  (рис. 126). Фронт падающей волны параллелен плоскости экрана.

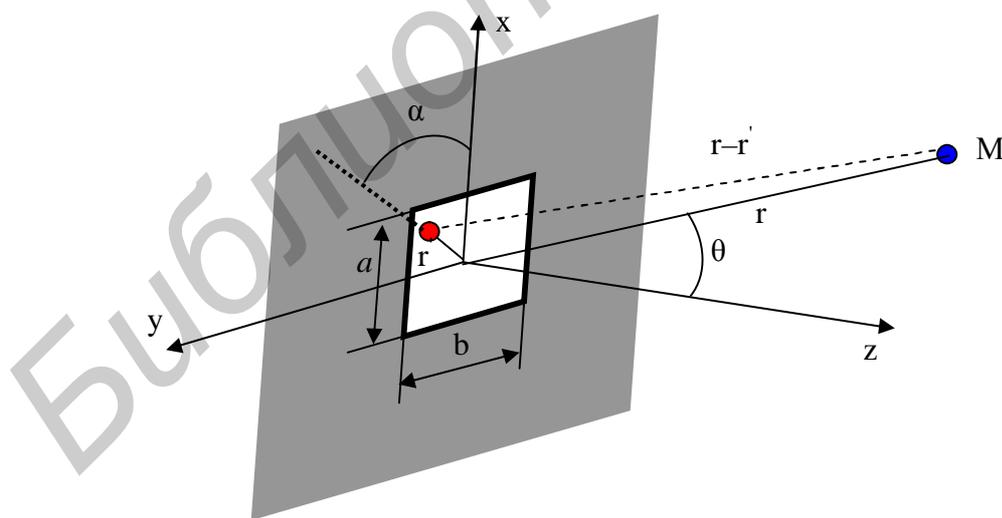


Рис. 126. К задаче о дифракции ЭМВ на отверстии

Наиболее интересными с практической точки зрения случаями являются следующие:

– дифракция Фраунгофера, когда  $d_1 = \frac{a}{\sqrt{1z}} \ll 1$  и  $d_2 = \frac{b}{\sqrt{1z}} \ll 1$ ,

– дифракция Френеля, когда  $d_1 \gg 1$  и  $d_2 \gg 1$ .

Решение этих задач осуществляется на основе метода Гюйгенса в приближении Кирхгофа. Приближение Кирхгофа состоит в том, что на поверхности экрана и отверстия распределение поля соответствует представлениям геометрической оптики: поле в пределах отверстия равно полю падающей волны и отсутствует на затененной поверхности экрана. Отраженная волна от «освещенной» области экрана не оказывает влияния на источник ЭМП.

Поле излучения элемента Гюйгенса в дальней зоне  $r \gg l$  имеет вид

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E}_m \approx \frac{jkE_m^S \Delta S}{4p} (1 + \cos q) \left( \mathbf{q}_0 \cos a - \mathbf{a}_0 \sin a \right) \frac{e^{-jkr}}{r}; \\ \Delta \mathbf{H}_m \approx \frac{jkE_m^S \Delta S}{4pZ_0} (1 + \cos q) \left( \mathbf{q}_0 \sin a + \mathbf{a}_0 \cos a \right) \frac{e^{-jkr}}{r}, \end{cases} \quad (318)$$

где  $k = 2p/l$  – волновое число;

$E_m^S$  – амплитуда поля падающей волны в плоскости отверстия  $S = ab$ ;

$\Delta S$  – площадь элемента Гюйгенса;

$\mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{a}_0$  – угловые орт-векторы.

Согласно методу Гюйгенса, поле в точке наблюдения М определяется путем векторного интегрирования элементов Гюйгенса по площади отверстия. Результат интегрирования имеет вид

$$\mathbf{E}_m^B(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \frac{jk \mathbf{A} ab}{2p} \frac{e^{-jkr}}{r} \left( \mathbf{q}_0 \cos a - \mathbf{a}_0 \sin a \right) f(q) F(u) F(v), \quad (319)$$

где  $\mathbf{A} = A e^{j\omega t}$  – комплексная амплитуда напряженности электрического поля с частотой  $\omega$  на отверстии;

$f(q) = \frac{1}{2}(1 + \cos q)$  – функция направленности элемента Гюйгенса (в плоскости  $\mathbf{b} = \text{const}$  представляет собой кардиоиду);

$$F(u) = \frac{\sin(u)}{u};$$

$$u = \frac{1}{2} ka \sin q \cos a;$$

$$F(v) = \frac{\sin(v)}{v};$$

$$v = \frac{1}{2} kb \sin q \cos a.$$

Излучение отверстия в область  $z > 0$  удобно характеризовать при помощи функции излучения

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \frac{E_m^B(\mathbf{q}, \mathbf{a})}{E_{\max}^B} = f(\mathbf{q})F(u)F(v), \quad (320)$$

где  $E_{\max}^B$  – максимальное значение напряженности поля в (320), наблюдаемое при  $\mathbf{q} = 0$ .

Первый сомножитель  $f(\mathbf{q})$  входящий в (320), есть не что иное, как характеристика направленности элемента Гюйгенса. Вторым и третьим множителями  $F(u)$  и  $F(v)$  отображают эффект наложения локальных волн, создаваемых всеми элементами Гюйгенса на отверстии  $S$ . Так как при  $a \gg l$  ( $b \gg l$ ) эти множители изменяются гораздо быстрее, чем функция  $f(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ , и фактически определяют характеристику направленности отверстия, они получили название *интерференционных множителей*. При этом функции  $F(u)$ ,  $F(v)$  подчиняются уже известной функции, описывающей спектральную характеристику импульсного колебания. Ширина лепестка зависит от геометрических размеров отверстия ( $a \times b$ ), длины волны  $\lambda$  и положения точки наблюдения.

#### 4.2.2. Дифракция Френеля

По мере приближения точки наблюдения к экрану волновой процесс на отверстии имеет более сложный характер. При  $d_1 \gg 1$  и  $d_2 \gg 1$  имеет место *дифракция Френеля*, когда результат интегрирования выражается через специальные функции, называемые интегралами Френеля:

$$E_m^S(x, y, z) = \frac{j}{2} E_m^0(z) [C(u) - jS(u)] \Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - jS(v)] \Big|_{v_1}^{v_2}, \quad (321)$$

$$H_m^S(x, y, z) = \frac{j}{2} H_m^0(z) [C(u) - jS(u)] \Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - jS(v)] \Big|_{v_1}^{v_2},$$

где  $u_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x \pm \frac{a}{2} \right)$ ;  $v_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{2z}} \left( x \pm \frac{b}{2} \right)$  – вспомогательные переменные;

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^u \cos(t^2) dt; \quad S(u) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^u \sin(t^2) dt \quad \text{– интегралы Френеля;}$$

$E_m^0, H_m^0$  – напряженности поля падающей волны.

Интегралы Френеля являются нечетными функциями, т.е.

$$C(u) = -C(-u); \quad S(u) = -S(-u). \quad (322)$$

Для характеристики поля дифракции удобно ввести дифракционный множитель

$$F(u, v) = \frac{E_m^S}{E_m^0} = \frac{F_m^S}{F_m^0}, \quad (323)$$

который, согласно (321), выражается

$$F(u, v) = F(u)F(v) = \left[ \frac{e^{-j\frac{p}{4}}}{\sqrt{2}} \Phi(u) \right] \left[ \frac{e^{-j\frac{p}{4}}}{\sqrt{2}} \Phi(v) \right], \quad (324)$$

где

$$\Phi(u) = [C(u_2) - jS(u_2)] - [C(u_1) - jS(u_1)]; \quad (325)$$

$$\Phi(v) = [C(v_2) - jS(v_2)] - [C(v_1) - jS(v_1)].$$

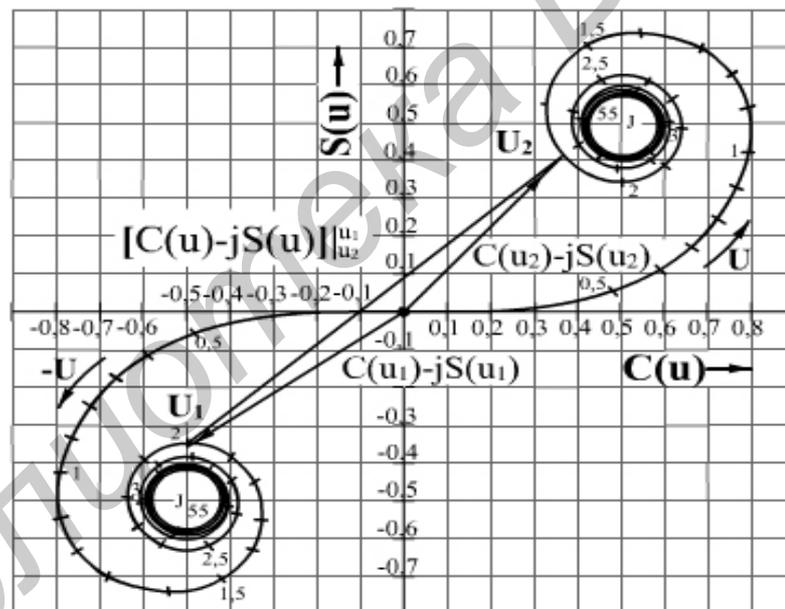


Рис. 127. Спираль Карню

Например, для определения  $\Phi(u)$  необходимо вычислить разность двух значений комплексной функции  $C(u) - jS(u)$ . Наглядность этим действиям придаёт диаграмма в виде спирали Карню, представленной на рис. 127. По осям декартовой системы координат отложены  $C(u)$  и  $S(u)$ , а кривая соединяет точки, отвечающие равным аргументам  $u$  этих функций (значения  $u$  нанесены на самой кривой). Для вычисления  $\Phi(u)$  необходимо выбрать точки  $u_1$ ,  $u_2$  и соединить их с началом координат. При этом полученные радиусы-векторы изобра-

жают комплексные числа, а их разность изображается результирующим вектором, соединяющим точки  $u_1$  и  $u_2$ .

Согласно (325), можно исследовать дифракционный множитель в плоскостях поляризации. Полагая  $v = 0$ , когда  $u \rightarrow \text{var}$ , исследуют поле в плоскости E, а при  $u = 0$ ,  $v \rightarrow \text{var}$  – в плоскости H.

Если значения параметров  $|u|$  или  $|v|$  велики, то точки лежат вблизи фокусов спирали Карню. При симметричном расположении отверстия относительно линии визирования AM (рис. 128) и  $u, v \rightarrow \text{var}$ , согласно (325), получим

$$\Phi(u) = \Phi(v) = \sqrt{2} e^{-j\frac{p}{4}}. \quad (326)$$

Для дифракции на поглощающей полуплоскости, расположенной, например, в плоскости E, на основании выражений (324) имеем

$$\Phi(u,v) = 1, \quad F(u) = \frac{e^{j\frac{p}{4}}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} - C(u) - j \left[ \frac{1}{2} - S(u) \right] \right], \quad (327)$$

где  $u = x_0 \sqrt{\frac{2(l_1 + l_2)}{l_1 l_2}}$  берётся со знаком «+», если расстояние от кромки экрана до линии визирования  $x_0 > 0$ , и со знаком «-», если  $x_0 < 0$  (рис. 128).

Модуль и фазовая компонента дифракционного множителя для поглощающей полуплоскости (327) определяются выражениями

$$|\Phi(u)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - C(u) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} - S(u) \right]^2}, \quad (328)$$

$$j = \frac{p}{4} - \text{arctg} \left[ 0,5 \frac{1 - 2S(u)}{1 - 2C(u)} \right] \quad (329)$$

и приведены на рис. 129, а и 129, б соответственно.

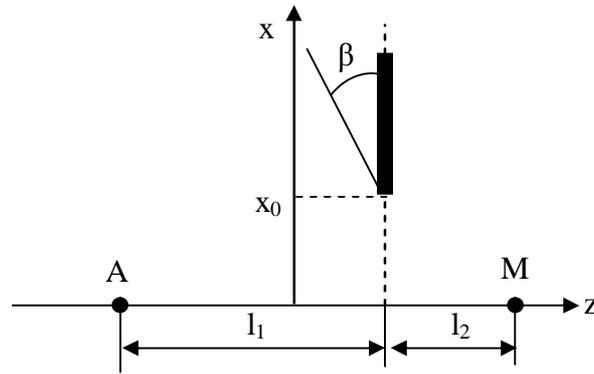


Рис. 128. К определению аргумента дифракционного множителя

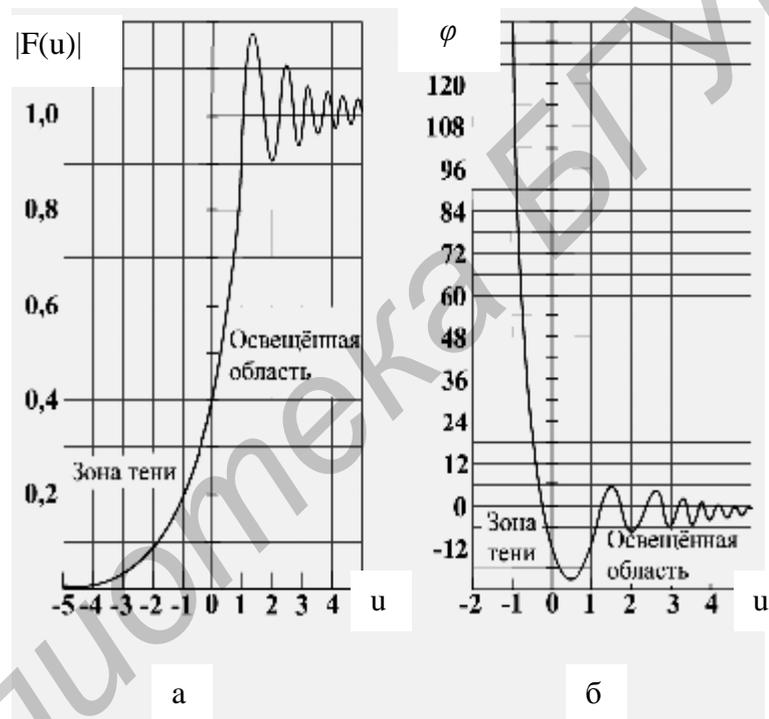


Рис. 129. Модуль (а) и фазовая компонента (б) дифракционного множителя

Как видно из рис. 129, в освещенной области ( $x_0 > 0$ ) наблюдаются осцилляции амплитуды и фазы, которые объясняются интерференцией прямой волны с волной, отражённой краем экрана. В области тени  $x_0 < 0$  обе эти величины изменяются монотонно.

Поворот плоскости экрана, при котором не меняется его проекция на плоскость, перпендикулярную направлению распространения, не вызывает изменения ослабления. Если проекция края экрана на плоскость не горизонтальна, а повернута на некоторый угол  $\beta$  (см. рис. 128), то при расчёте поля величину  $x_0$  следует отсчитывать по перпендикуляру к проекции края экрана.

### 4.3. Способы распространения радиоволн

В однородной среде ЭМВ распространяются прямолинейно с постоянной скоростью и называются *прямыми*. Связь прямой волной (лучом) возможна при наличии геометрической видимости между корреспондирующими пунктами.

При расположении излучателей вблизи земной поверхности ЭМВ распространяются вдоль Земли. Такие волны называются *земными*. Механизм распространения этих ЭМВ несколько отличается от прямого тем, что в точке приема присутствует как прямая, так и отраженная от подстилающей среды волна.

При поднятых над земной поверхностью излучающих источниках процесс распространения ЭМВ осуществляется в слое тропосферы, свойства которой изменяются с высотой. ЭМВ, распространяющиеся на большие расстояния за счет рассеяния на локальных неоднородностях тропосферы или рефракции, называются *тропосферными*.

Выше тропосферы атмосфера характеризуется ионизированным составом, обладающим способностью отражать (преломлять) ЭМВ. Являясь электрически неоднородной средой, ионосфера, как и тропосфера, рассеивает падающие на нее ЭМВ. *Ионосферными*, или *пространственными* волнами называются ЭМВ, распространяющиеся на большие расстояния и огибающие земной шар в результате однократного или многократного их отражения от ионосферы, а также рассеяния на неоднородностях ионосферы и ионизирующих следах метеоров.

*Пространство, эффективно участвующее в процессе распространения радиоволн*

При распространении ЭМВ от источника к точке приема необходимо оценить размеры области пространства, в которой сосредоточена основная доля передаваемой энергии, а также оценить ее влияние на процессы распространения.

В рамках метода геометрической оптики считается, что эта область вырождается в линию, которая называется лучом. Однако понятно, что энергия волны не может распространяться вдоль тонкой линии, соединяющей терминальные точки (точки приема и передачи).

Для выяснения формы и поперечных размеров этой линии воспользуемся принципом Гюйгенса, который гласит: каждая точка, лежащая на поверхности фронта распространяющейся волны, возбужденной первичным источником, является источником вторичных сферических волн. Новое положение фронта распространяющейся ЭМВ в пространстве есть огибающая суперпозиции вторичных сферических волн.

Более общей и строгой является формулировка принципа Гюйгенса в виде формулы Кирхгофа (рис. 130):

$$F = -\frac{1}{4p} \int_S \left[ F_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial F_S}{\partial n} \right] dS, \quad (330)$$

где  $dS$  представляет собой элемент поверхности фронта распространяющейся волны,  $F_S$  выражает составляющую электрического или магнитного поля в этой точке.

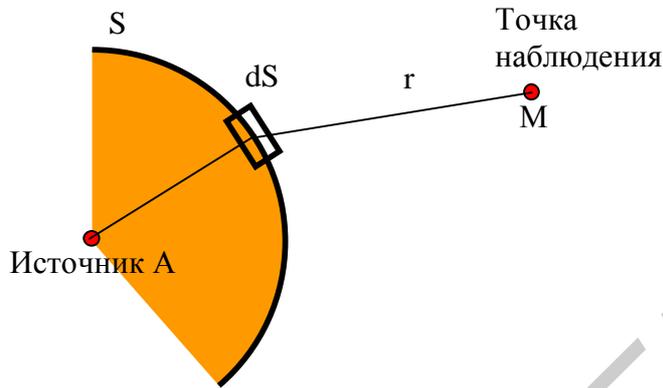


Рис. 130. К определению составляющих ЭМП

Из выражения (330) следует, что для определения поля в точке  $M$  необходимо знать не только значения  $F_S$  на поверхности  $S$ , но и значения производной от  $F_S$  по внешней нормали к этой поверхности.

Зная при известной мощности источника в точке  $A$  значения  $F_S$  и  $\frac{dF_S}{dn}$  на поверхности  $S$ , можно по формуле (330) вычислить ЭМП в точке  $M$ . Принцип Гюйгенса позволяет определить область пространства между точками  $A$  и  $M$  (рис. 131, а), которая существенно участвует в переносе энергии ЭМП.

Пусть источник излучения формирует сферический фронт волны радиусом  $l_1$ . Для определения зон Френеля проведем из точки  $M$  (см. рис. 131, а) семейство прямых, пересекающих поверхность сферы в точках, удаленных от  $M$  на расстояние  $(l_2 + l/2)$ . Это семейство образует конические поверхности, пересекающие плоскость рисунка по прямым  $MN_1$  и  $MN'_1$ . Аналогичным образом построим конические поверхности высших порядков, для которых  $MN_n = MN'_n = l_2 + n l/2$ . Пересечения конических поверхностей со сферой образуют на ее поверхности систему концентрических окружностей (рис. 131, б). Участки, образующие фазовые различия ЭМВ на заданных удалениях от точки наблюдения, получили название *зон Френеля*. Первая зона Френеля представляет собой часть сферы, ограниченную окружностью, а зоны высших порядков имеют форму колец.

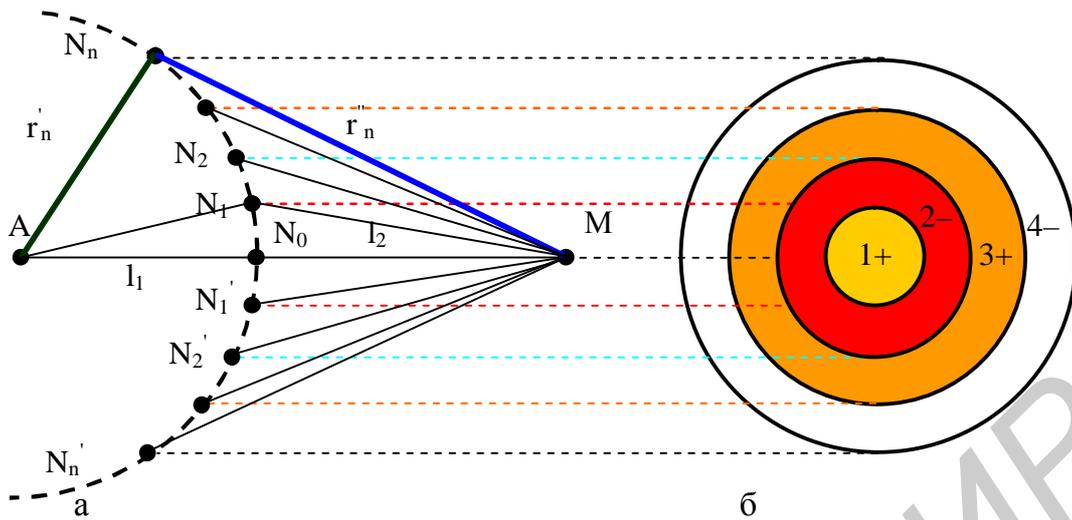


Рис. 131. Формирование зон Френеля

Воображаемые источники вторичных волн (так называемые виртуальные источники), расположенные в пределах первой зоны, характеризуются тем, что создаваемые ими фазы колебаний в точке М отличаются от фазы, создаваемой центральным виртуальным излучателем в точке  $N_0$ , не более чем на  $\pi$ , так как разность хода в  $\frac{l}{2}$  соответствует сдвигу фазы на  $180^\circ$ . Фаза колебаний, создаваемых виртуальными излучателями второй зоны, отличается от фазы источника  $N_0$  на величину от  $\pi$  до  $2\pi$ . На рис. 131, б это условно отмечено четностью зон: нечетные зоны маркируются знаком «+», а четные – знаком «-».

В курсе физической оптики показано, что действие излучателей, расположенных в смежных зонах высших порядков, взаимно компенсируется тем полнее, чем выше порядковый номер смежных зон. В результате такой попарной нейтрализации действие излучателей всех зон эквивалентно действию примерно половины мощности излучателей первой зоны. Таким образом, первая зона Френеля и ограничивает область пространства, существенно участвующую в передаче энергии.

Определим радиусы зон Френеля. Из поставленной задачи следует

$$\begin{aligned} AN_1 = AN'_1 = r_1; & & AN_n = AN'_n = r_n'; \\ & & BN_n = BN'_n = r_n''; \end{aligned} \quad (331)$$

$$MN_1 = MN'_1 = r_1'';$$

тогда

$$r_1' + r_2'' = l_1 + l_2 + \frac{l}{2}; \quad (332)$$

$$r_n' + r_n'' = l_1 + l_2 + \frac{l}{2}.$$

Из треугольников  $AN_nN_0$  и  $MN_nN_0$  видно

$$\begin{aligned} AN_n = r_n' &= \sqrt{l_1^2 + b_n^2}; \\ MN_n = r_n'' &= \sqrt{l_2^2 + b_n^2}. \end{aligned} \quad (333)$$

Учитывая, что  $b_n \ll l_1$ ;  $b_n \ll l_2$ , выражение (333) можно преобразовать, используя бином Ньютона:

$$r_n' = l_1 \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{l_1^2}} \approx l_1 + \frac{b_n^2}{2l_1}; \quad (334)$$

$$r_n'' = l_2 \sqrt{1 + \frac{b_n^2}{l_2^2}} \approx l_2 + \frac{b_n^2}{2l_2}. \quad (335)$$

Используя совместно (334), (335) и (332), получим

$$l_1 + \frac{b_n^2}{2l_1} + l_2 + \frac{b_n^2}{2l_2} \approx l_1 + l_2 + n \frac{l}{2}, \quad (336)$$

откуда определяется выражение для радиуса зон Френеля

$$b_n \approx \sqrt{\frac{n l_1 l_2 l}{l_1 + l_2}}. \quad (337)$$

Из полученной формулы следует, что радиусы зон Френеля определяются произведением  $l_1$  и  $l_2$ . Если это интерпретировать как площадь прямоугольника при заданном значении полупериметра  $l_1 + l_2 = \text{const}$ , то можно констатировать, что максимальной площадью обладает квадрат ( $l_1 = l_2$ ). Тогда максимальный радиус зоны Френеля расположен посередине трассы. Так как по определению  $r_n' + r_n'' = l_1 + l_2 + n \frac{l}{2} = \text{const}$  характеризует геометрическое место точек, сумма расстояний которых есть величина постоянная, и область на плоскости представляет собой эллипс, то *существенная* для передачи энергии область пространства имеет форму эллипсоида вращения, ограниченного несколькими (обычно 5...7) пространственными зонами Френеля. Как следует из (337), радиус существенной области при распространении ЭМВ зависит от длины волны.

## 4.4. Особенности распространения радиоволн в тропосфере

### 4.4.1. Строение атмосферы Земли и основные параметры тропосферы

Атмосферу принято делить на нижнюю и верхнюю (рис. 132). Слой, прилегающий к поверхности Земли, является воздушным. В состав нижней атмосферы входит тропосфера, находящаяся на удалении 8–10 км, и стратосфера, удаленная до 60 км от поверхности Земли. Верхняя часть атмосферы называется ионосферой – слой толщиной от 60 до 2000 км. За границей верхней атмосферы следует безвоздушное пространство.

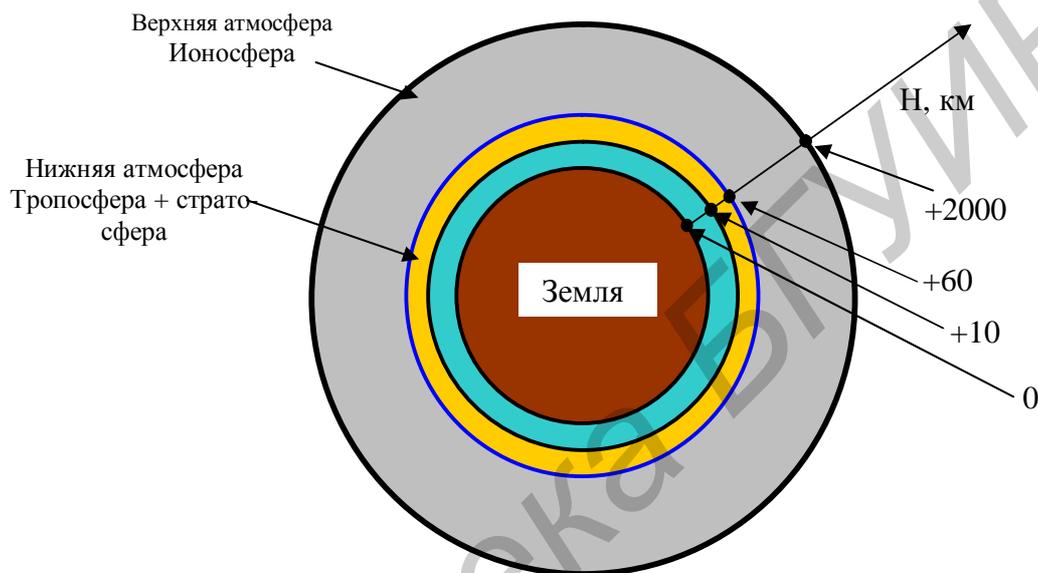


Рис. 132. Атмосфера Земли

Состав газов с изменением высоты имеет примерно одинаковый состав и включает: 78 % – азот ( $N_2$ ), 21 % – кислород ( $O_2$ ), 1 % – прочие элементы ( $O_3$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ , инертные газы и др.). При этом наблюдается убывание температуры с высотой. Высотный градиент температуры  $g_{t^0} = \frac{dt^0}{dh}$  составляет в нижних слоях тропосферы 5 град./км, в верхних слоях – 7 град./км. Среднее значение  $g_{t^0} = 6$  град./км. Причина постепенного убывания температуры воздуха с высотой состоит в том, что тропосфера почти прозрачна для солнечных лучей и, пропуская их, практически не нагревается. Основной поток солнечной энергии поглощается поверхностью Земли. Нагретая поверхность Земли является источником тепловой радиации, которая нагревает тропосферу снизу вверх, причем возникающие в ней из-за неравномерного нагревания отдельных участков земной поверхности восходящие и нисходящие потоки воздуха создают *турбулентность* атмосферы.

Основными параметрами, характеризующими свойства тропосферы, являются: давление  $P$  (мбар), абсолютная температура  $T$  (измеряется в градусах Кельвина,  $T = t^0C + 273^0$ ) и абсолютная влажность  $W$  (мбар).

С ростом  $h$  давление изменяется в соответствии с формулой

$$P = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h}, \quad (338)$$

где  $p_0$  – давление на уровне поверхности Земли,

$T$  – абсолютная температура,

$g$  – ускорение силы тяжести,

$M$  – масса грамм-молекул газа.

С точки зрения процессов РРВ в тропосфере интерес представляет не давление и температура, а коэффициент преломления  $n$ , связанный с относительной диэлектрической проницаемостью воздуха соотношением

$$n = \sqrt{\epsilon} = 1 + \left( \frac{77,6g \cdot 10^{-6}}{T} \right) \left( P + 4810 \frac{1}{T} \right). \quad (339)$$

При нормальных атмосферных условиях коэффициент преломления у поверхности Земли оценивается величиной  $n = 1,000325$ . Поскольку это достаточно малая величина, то для удобства обычно используется *индекс преломления*, под которым понимают

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 = \frac{77,6}{T} \left( P + 4810 \frac{1}{T} \right). \quad (340)$$

Коэффициент преломления и индекс преломления характеризуются экспоненциальной зависимостью от  $h$ :

$$\begin{aligned} n(h) &= 1 + 289 \cdot 10^6 \exp(-1,36 \cdot 10^{-4}h), \\ N(h) &= 289 \exp(-1,36 \cdot 10^{-4}h). \end{aligned} \quad (341)$$

В условиях нормальной тропосферы индекс преломления  $N$  у поверхности Земли равен 325 и монотонно убывает с возрастанием высоты. Так, на высоте 9 км  $N = 109$  и не меняется в зависимости от времени года и широты местности.

Следствием изменения усредненной величины  $\epsilon$  с ростом высоты по экспоненциальному закону является *рефракция*, т.е. искривление траектории радиоволны. Флуктуационные изменения  $\epsilon$  с высотой приводят к сравнительно слабому рассеянию метровых и более коротких волн. Наличие слоистых неоднородностей (облака) сопровождается рассеянием и отражением радиоволн, что может привести к многолучевому распространению и, следовательно, к замиранию сигналов.

Отклонение высотной зависимости от экспоненциальной приводит к возникновению волноводного распространения радиоволн в тропосфере. В тропосферных волноводах могут распространяться лишь волны, у которых длина волны меньше критической. Так как высота тропосферного волноводного канала (ТВК) обычно не превышает нескольких метров, то в нем могут распространяться радиоволны метровых и более коротких волн.

#### 4.4.2. Рефракция радиоволн в тропосфере

##### 4.4.2.1. Явление тропосферной рефракции

Поскольку показатель преломления тропосферы убывает с высотой, наклонные радиолучи преломляются и отклоняются к Земле. Законы преломления в тропосфере наиболее просто устанавливаются с использованием второго закона Снелля для плоскопараллельной слоистой модели тропосферы (с последующим предельным переходом), как показано на рис. 133. В соответствии со вторым законом Снелля

$$\frac{\sin j_n}{\sin i_n} = \frac{n_{n-1}}{n_n}. \quad (342)$$

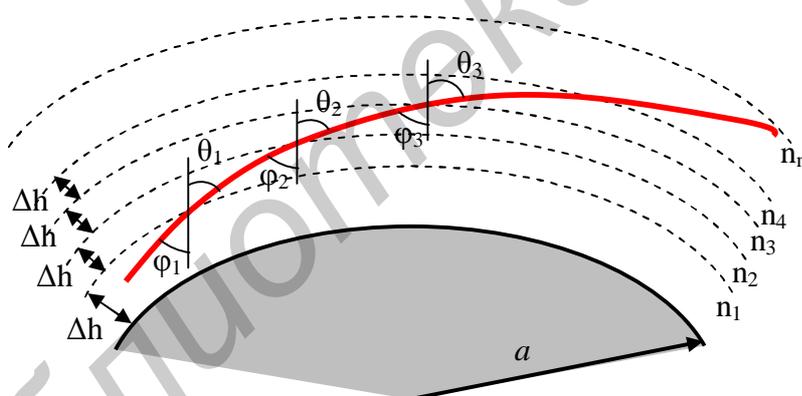


Рис. 133. Преломление ЭМВ в тропосфере

Как следует из рис. 133,

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= j_2, \\ q_n &= j_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

Таким образом, (342) можно переписать в виде

$$\frac{\sin j_n}{\sin j_{n-1}} = \frac{n_{n-1}}{n_n}, \quad (344)$$

или

$$n_n \sin j_n = n_{n-1} \sin j_{n-1} = \text{const.} \quad (345)$$

Переходя к пределу  $\Delta h \rightarrow 0$ , получаем точное уравнение

$$n \sin j = \text{const}, \quad (346)$$

которое можно рассматривать как уравнение радиолуча в плоском неоднородном диэлектрике – тропосфере.

Рассчитаем радиус кривизны радиолуча с (рис. 134).

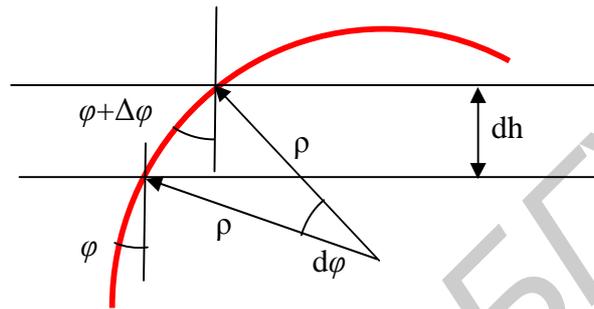


Рис. 134. К расчету радиуса кривизны радиолуча

Поскольку  $dh$  – бесконечно тонкий слой, из рис. 134 находим

$$r = \frac{dh / \cos j}{dj}. \quad (347)$$

Определим теперь  $dj \cos j$  из уравнения радиолуча (346):

$$\begin{aligned} d(n \sin j) + n dj \cos j &= 0; \\ d(n \sin j) &= 0; \\ dj \cos j &= -\frac{dn \sin j}{n}. \end{aligned} \quad (348)$$

Подставляя (348) в (347), получим

$$r = -\frac{n}{\sin j \frac{dn}{dh}}, \quad (349)$$

где  $\frac{dn}{dh} = g_n$  – градиент коэффициента преломления.

Выражение (349) является общим для любого плоского неоднородного диэлектрика и для любого луча (любое  $j$ ). В случае же тропосферы  $n \approx 1$  и, поскольку интерес представляют пологие лучи,  $\sin j \approx 1$ . Учитывая последние условия, найдем

$$r = -\frac{1}{g_n} = -\frac{10^6}{g_N \frac{dN}{dn}}, \quad (350)$$

где  $g_N$  – градиент индекса преломления.

Из (350) следует, что при линейном изменении  $n$  с ростом высоты  $h$   $c = \text{const}$ , причем, если  $g_N < 0$ , то  $r > 0$ , т.е. радиолуч отклоняется в сторону Земли.

Согласно (349), искривление траектории возрастает с увеличением угла  $j$  от  $0$  до  $90^\circ$ , имея максимальную кривизну при  $j = \frac{\rho}{2}$  и прямолинейную траекторию  $r = \infty$  при  $j = 0$ .

#### 4.4.2.2. Учет тропосферной рефракции при распространении земных волн

Интерференционные формулы справедливы в предположении, что как прямой, так и отраженный лучи распространяются по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью. В реальных условиях ни одно из этих условий не выполняется, так как из-за тропосферной рефракции прямой и отраженный от поверхности Земли лучи распространяются по криволинейным траекториям. Поэтому геометрическая разность хода лучей, входящая в интерференционные формулы, отличается от таковой при прямолинейных траекториях, что влечет за собой изменение множителя ослабления. Кроме того, в нижних слоях тропосферы коэффициент преломления больше, чем в верхнем, и, следовательно, скорость РРВ в нижних слоях ниже скорости распространения ЭМВ в верхних слоях тропосферы. В этих условиях на величину множителя ослабления влияет оптическая разность хода лучей. Наиболее просто явление рефракции учитывается спрямлением траектории радиолуча с одновременной заменой истинного радиуса земного шара  $a$  на эквивалентный радиус  $a_3$ .

Значение эквивалентного радиуса определяется из условия сохранения относительной кривизны между лучом и поверхностью Земли в действительных условиях и в эквивалентной схеме распространения (рис. 135).

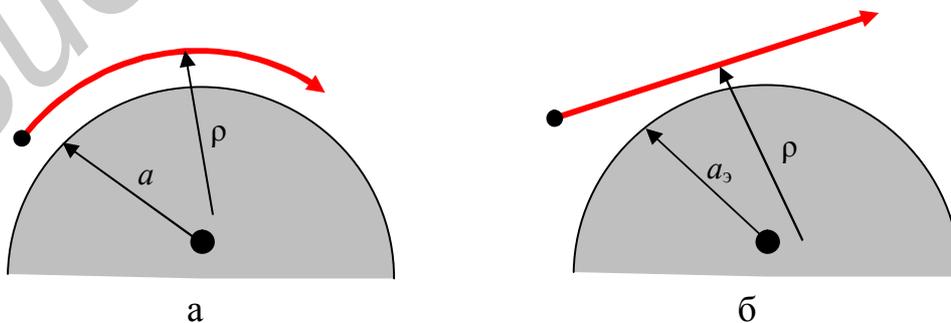


Рис. 135. Эквиваленты распространения ЭМВ

Относительной кривизной в аналитической геометрии называется разность  $\frac{1}{a} - \frac{1}{r}$ . Приравнивая значения относительной кривизны (см. рис. 135, а и рис. 135, б), находим  $\frac{1}{a} - \frac{1}{r} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{\infty}$ , откуда

$$a_3 = \frac{a}{1 - a/r} = \frac{a}{1 + a \frac{dN}{dh} 10^{-6}} = \frac{a}{1 + a g_N 10^{-6}}. \quad (351)$$

Обозначая через  $K$  отношение эквивалентного радиуса Земли к действительному, с учётом (351) находим

$$K = \frac{a_3}{a} = \frac{1}{1 + a g_N \cdot 10^{-6}}. \quad (352)$$

При нормальной рефракции градиент индекса преломления  $g_N = -4 \cdot 10^{-6}$  1/м. Подставляя это значение в (352) и учитывая, что  $a = 6370$  км, находим  $K = 4/3$  и  $a_3 \approx 8500$  км.

С учётом тропосферной рефракции дальность прямой видимости  $r_0$  примет вид

$$r_0 = \sqrt{2aK} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}), \quad (353)$$

или при замене  $a$  на  $a_3$ :

$$r_{0[\text{км}]} = 4,12 (\sqrt{h_{1[\text{м}]}} + \sqrt{h_{2[\text{м}]}}). \quad (354)$$

В оптическом диапазоне, в котором влияние постоянного дипольного момента молекул воды практически не проявляется, расстояние прямой видимости определяется соотношением

$$r'_{0[\text{км}]} = 3,83 (\sqrt{h_{1[\text{м}]}} + \sqrt{h_{2[\text{м}]}}). \quad (355)$$

При пользовании интерференционными формулами, в которые радиус Земли явно не входит, учёт влияния тропосферной рефракции осуществляется одновременно с учётом сферичности Земли.

#### 4.4.2.3. Виды тропосферной рефракции

Под влиянием определённых метеорологических условий в тропосфере может возникнуть распределение индекса преломления  $N$ , отличающегося от нормального режима. В соответствие со значением градиента индекса преломления  $g_N$  ( $g_n$ ) и радиуса кривизны луча  $s$  (350), тропосферную рефракцию

можно разделить на три вида: *отрицательную*, *нулевую* (отсутствие рефракции) и *положительную* (рис. 136, а).

*Отрицательной рефракцией* принято называть те виды рефракции, при которых индекс преломления  $N$  не убывает, как обычно, с высотой, а возрастает, т.е. когда  $g_N > 0$ , что в соответствии с выражением (350) определяет отрицательное значение радиуса кривизны  $r < 0$  (траектория радиолуча обращена выпуклостью вниз). Отрицательная рефракция представляет собой довольно редкое явление, с возможностью возникновения которого необходимо считаться.

*Положительная рефракция* возникает в тех случаях, когда индекс  $N$  уменьшается с высотой, т.е. когда  $g_N < 0$ . Траектория волны при этом обращена выпуклостью вверх.

Среди положительных видов тропосферной рефракции различают: *пониженную* (когда искривление лучей меньше, чем при нормальной рефракции), *нормальную*, *повышенную* (при которой искривление лучей больше, чем при нормальной, но не достигает критического значения), *критическую* (при которой радиус кривизны равен радиусу земного шара) и *сверхрефракцию* (при которой лучи искривляются больше, чем при критической рефракции).

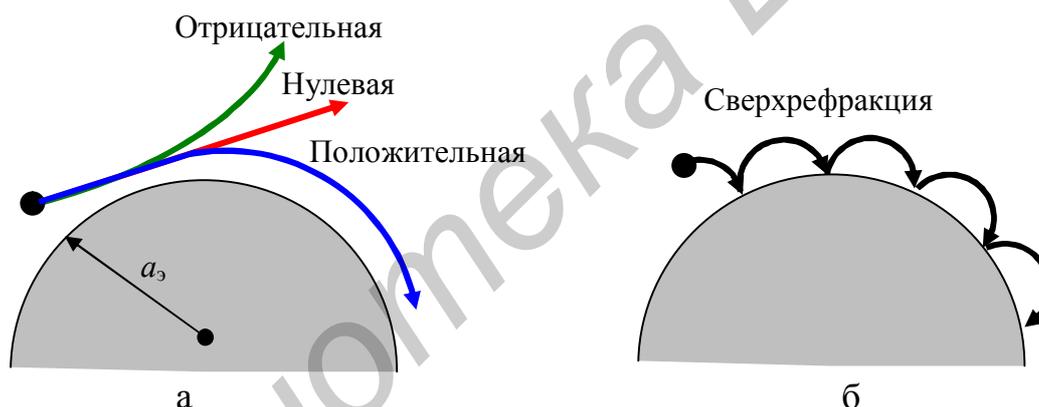


Рис. 136. Виды рефракции:

а – ориентация радиолуча относительно горизонта; б – сверхрефракция

При сверхрефракции (рис. 136, б) радиус кривизны луча меньше радиуса земного шара, поэтому лучи, имеющие небольшие углы возвышения, испытывают в тропосфере полное внутреннее отражение и возвращаются на поверхность Земли. Таким образом, за счёт явления сверхрефракции возникает волноводный механизм РРВ или тропосферный волноводный канал (ТВК). В ТВК могут распространяться только такие волны, длины которых не превосходит критического значения. Критическая длина волны связана с высотой атмосферного волновода  $h_0$  приближённым отношением

$$I_{кр} \approx 0,085 h_0^{3/2}, \quad (356)$$

где  $I_{кр}$  измеряется в сантиметрах, а  $h_0$  – в метрах.

## 4.5. Распространение радиоволн в ионосфере

### 4.5.1. Состав ионосферы

*Ионосфера* – верхняя часть атмосферы Земли, подверженная действию ионизирующего солнечного и космического излучений.

Вплоть до высоты 90 км атмосфера имеет такой же состав газов, как у поверхности Земли. На этих высотах в состав атмосферы входят  $O_2$  и  $N_2$ , а также небольшие количества Ar,  $CO_2$ , Ne, He,  $H_2$  (по удельному объему менее 1 %). Под действием силы тяжести более массивные молекулы, с одной стороны, стремятся занять самое низкое положение в атмосфере, а с другой стороны, силы диффузии противодействуют этой тенденции. В результате возникает некоторое динамическое равновесие, характеризующее распределение газов по высоте в верхних слоях атмосферы.

На высотах более 100 км в спектральном составе солнечного излучения преобладает ультрафиолетовое излучение, которое полностью поглощается в нижних, более плотных слоях атмосферы. В частности, под действием ультрафиолетовых лучей с длиной волны короче 0,24 мкм происходит диссоциация кислорода по схеме  $O_2 + h\nu \rightarrow O + O$ , а под действием волн короче 0,128 мкм – диссоциация азота по схеме  $N_2 + h\nu \rightarrow N + N$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж/с – постоянная Планка. Реакция диссоциации азота протекает менее эффективно, чем диссоциация кислорода (скорости диссоциации различаются примерно в  $10^6$  раз). Экспериментально установлено, что диссоциация  $O_2$  начинается с высоты порядка 90 км, а реакции, приводящие к образованию N, – с высоты 200 км. Таким образом, в интервале высот от 100 – 300 км состав газов характеризуется наличием атомов кислорода O и азота N. Область постоянного состава газов простирается до высоты 90 км, после чего начинается рассеяние (стратификация) атмосферы. Почти до высоты 300 км доминирующей частью атмосферы является  $N_2$ . Молекулярный кислород практически исчезает на высотах выше 210 км. Атомарный кислород становится преобладающей частью атмосферы на высотах 300 км и более. В интервале высот под действием солнечного излучения образуется область озона ( $O_3$ ), а в интервале от 60 до 90 км под влиянием фотохимических реакций образуется окись азота NO. На высотах 400 км и выше наблюдается повышенное содержание гелия, а на еще больших высотах – водорода.

### 4.5.2. Механизмы ионизации и рекомбинации

Процесс ионизации заключается в отрывании электронов от наружной оболочки атомов, в результате чего электрическое равновесие нарушается и атом приобретает заряд.

Для перевода атома или молекулы в ионизированное состояние им необходимо сообщить некоторую энергию, называемую *энергией ионизации*. Эта энергия измеряется в электрон-вольтах (эВ):  $W = qU$ .

Среди многих известных видов ионизации особый интерес представляют фото- и ударная ионизация. При первом механизме энергия ионизации передается квантом энергии – фотоном и возможна только в случае, если энергия кванта (фотона)  $h\nu$  превышает работу ионизации  $W$ :

$$h\nu > W. \quad (357)$$

Тогда несложно определить критическую длину волны ионизирующего излучения:

$$l_{\text{кр}} = \frac{c}{W} h. \quad (358)$$

В табл. 5 представлены значения ионизирующих (критических) длин волн. Здесь длины критической волны выражены в ангстремах ( $1\text{Å} = 10^{-10}\text{ м} = 10^{-4}\text{ мкм}$ ). Напомним, что видимая область оптического спектра занимает интервал от 0,4 до 0,75 мкм ( $4000\text{...}7500\text{ Å}$ ). Следовательно, длины волн ионизирующего излучения лежат в той области ультрафиолетового излучения, которая не достигает поверхности Земли ( $l > 2900\text{ Å}$ ).

Таблица 5

Газ	O <sub>2</sub>	O	N <sub>2</sub>	N	He	H <sub>2</sub>	H	NO
$l_{\text{кр}}, \text{Å}$	1026	910	795	850	503	802	910	1340

Аналогично при ударной ионизации вырывание электронов может произойти только в том случае, если кинетическая энергия частицы  $\frac{mv^2}{2}$  больше работы ионизации  $W$ . Таким образом, условие ионизации  $\frac{mv^2}{2} > W$ .

Если электрон с зарядом  $q$  движется в поле с разностью потенциалов  $U$ , то он приобретает энергию

$$qU = \frac{mV^2}{2}. \quad (359)$$

Зная данные об энергии  $W$  (табл. 5), несложно с учетом (359) и (358) определить при известной массе частиц необходимую для ионизации скорость движения  $v$ .

Основным и практически единственным источником ионизации является Солнце, которое излучает коротковолновое ультрафиолетовое излучение ( $I = 100...1000\text{Å}$ ), а нагретая до нескольких тысяч градусов солнечная корона создает рентгеновское излучение ( $I = 1...100\text{Å}$ ). Так как энергия квантов рентгеновского излучения во много раз превышает энергию ионизации газов, то они тем более легко производят ионизацию.

Наряду с лучистой энергией Солнце выбрасывает во всех направлениях поток заряженных частиц, образующих так называемый «солнечный ветер». Достигая атмосферы Земли и проникая в нее, эти корпускулярные потоки создают ударную ионизацию. Отклоняясь под действием магнитного поля Земли, корпускулярные потоки попадают в затененную часть атмосферы, недоступную для ультрафиолетового и рентгеновского излучения.

Наряду с ионизацией в атмосфере наблюдается *рекомбинация*, т.е. воссоединение свободных электронов с положительными ионами.

### 4.5.3. Строение ионосферы

Наблюдения за состоянием ионизации верхних слоёв атмосферы показывают, что в ней возникают несколько ионизированных областей, плавно переходящих одна в другую. Зависимость электронной концентрации  $N_e$  от высоты  $h$  для дневного и ночного времени суток по современным представлениям позволяет ранжировать слои ионосферы (рис. 137).

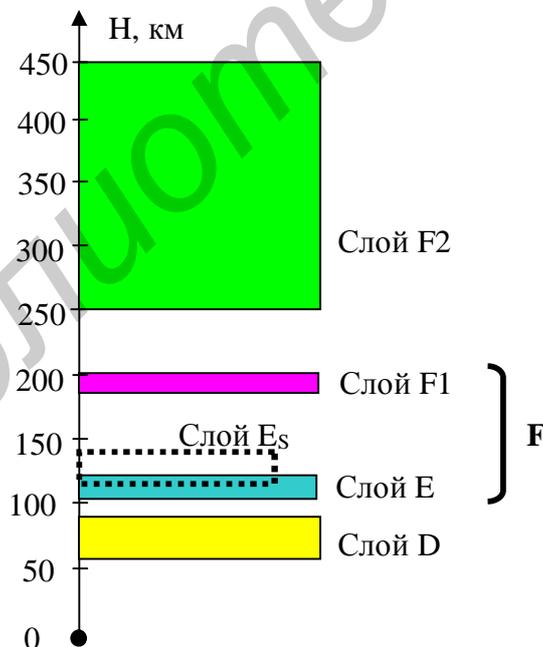


Рис. 137. Слои ионосферы

В дневные часы возникают четыре максимума, или ступени ионизации, получившие название слоёв (областей): D (60 – 80 км), E (100 – 120 км), F<sub>1</sub> (180 – 200 км) и F<sub>2</sub> (250 – 450 км).

После заката Солнца, когда прекращается образование новых электронов, начинается процесс рекомбинации, который особенно бурно протекает в плотных слоях атмосферы. Этим объясняется почти мгновенное исчезновение слоя D. В ночные часы ионосфера состоит только из двух ионизированных областей: слоя E и слоя  $F_1$ , которые принято объединять и обозначать слоем F. Слои D, E и  $F_1$  являются достаточно устойчивыми и стабильными образованиями. Электронная концентрация этих слоёв почти однозначно определяется высотой Солнца и достигает максимальных значений в полуденные часы. Слой  $F_2$  очень неустойчив и подвержен случайным изменениям.

На рис. 137 пунктирными линиями на высоте 120–130 км показан спорадический слой  $E_s$ . Данные экспериментальных исследований показывают, что слой  $E_s$  представляет собой скопление электронных облаков, имеющих решётчатую структуру. Время существования этого слоя изменяется в широких пределах, но не превышает нескольких часов. Горизонтальная протяжённость слоя  $E_s$  измеряется сотнями километров. Иногда эта область достаточно быстро перемещается со скоростью до 300 км/ч. Существующие гипотезы связывают образование слоя  $E_s$  с просачиванием заряжённых частиц из расположенной выше области  $F_2$  под действием турбулентных воздушных масс. В образовании этого слоя могут играть роль потоки метеоров.

#### 4.5.4. Преломление и отражение радиоволн в ионосфере

Механизм распространения ионосферных волн во многом схож с механизмом РРВ в тропосфере Земли. Поэтому радиус траектории луча в ионосфере может быть приближенно определен на основе закона синусов для плоско-слоистой модели (рис. 138).

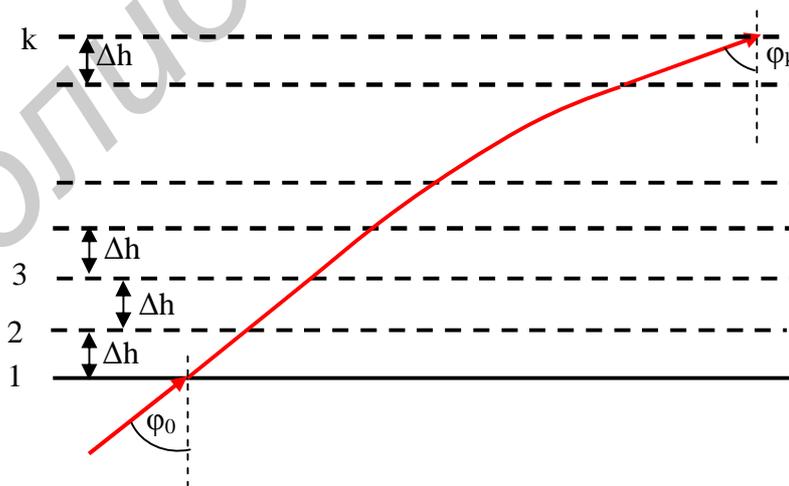


Рис. 138. Плоскостроистая модель ионосферы

$$R = \frac{n_{\text{и}}}{\sin j \left( -\frac{dn_{\text{и}}}{dh} \right)}, \quad (360)$$

где  $n_{\text{и}}$  – коэффициент преломления в ионосфере;

$j$  – угол элемента траектории с нормалью к преломляющему слою.

Для поворота луча к земной поверхности угол  $j_{\text{n}} = P/2$ , и поэтому (360)

примет вид

$$R = \frac{n_{\text{и}}}{\left( -\frac{dn_{\text{и}}}{dh} \right)}. \quad (361)$$

Подставляя в (361) дополнительное условие поворота радиоволны  $R < a + h$  ( $a$  – радиус земного шара,  $h$  – ширина преломляющего слоя), находим

$$\frac{dN_{\text{e}}}{dn} > \frac{2 N_{\text{e}}^2 f^2}{80,8(a + h)}. \quad (362)$$

Полученная формула показывает, что в точке поворота волны электронная концентрация  $N_{\text{e}}$  должна возрастать с высотой, причем вертикальный градиент электронной концентрации  $\text{grad}_{N_{\text{e}}} = \frac{dN_{\text{e}}}{dh}$  не должен быть меньше некоторого критического значения.

Иногда условие поворота луча удобно представить через угол падения  $j_0$  (см. рис. 138). На основе закона синусов можно записать

$$n_0 \sin j_0 = n_{\text{k}} \sin j_{\text{k}}. \quad (363)$$

Учитывая, что вблизи Земли  $n_0 \approx 1$  и  $j_{\text{k}} = P/2$ , находим

$$\sin j_0 = \sqrt{1 - 80,8 \frac{N_{\text{e}}}{f_{\text{кр}}^2}}. \quad (364)$$

Полагая в формуле (364)  $j_0 = 0$ , получим условие отражения вертикально падающих на ионосферу волн:

$$f_{\text{кр}} \approx 9\sqrt{N_{\text{e}}}. \quad (365)$$

Частота  $f_{\text{кр}} = \frac{\Omega_0}{2p}$  является плазменной частотой для ионизированного газа с электронной концентрацией  $N_{\text{e}}$ .

Используя (365), условие поворота луча можно представить в виде

$$\sin j_0 = \sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}. \quad (366)$$

Из (366) несложно выразить требуемую рабочую частоту  $f$  при заданных  $j_0$  и  $f_{кр}$ :

$$f = f_{кр} \frac{1}{\cos j_0} = f_{кр} \sec j_0. \quad (367)$$

Соотношение (367) называют *законом секанса*, который устанавливает связь между наклонно и вертикально падающими на ионосферу волнами, отражающимися от области с одинаковой электронной концентрацией.

Учитывая, что распределение  $N_e$  по высоте неоднородно и имеет ряд максимумов, соответствующих слоям D, E, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, существуют и соответствующие им значения частот  $f_{кр}$  (365). Эти частоты называются *критическими* частотами слоев и обозначаются в соответствии с отражающим слоем  $f_{крD}$ ;  $f_{крE}$ ;  $f_{крF1}$ ;  $f_{крF2}$ .

Следует отметить, что при вертикальном падении волны на ионосферу отражение происходит от слоя, в котором диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{и} = 0$ . Из условия (364) следует, что при заданном значении  $N_e$  в области максимума  $f_{кр}$  всегда можно подобрать такое значение угла падения  $j_0$  на нижнюю границу ионосферы, при котором условие поворота будет выполнено.

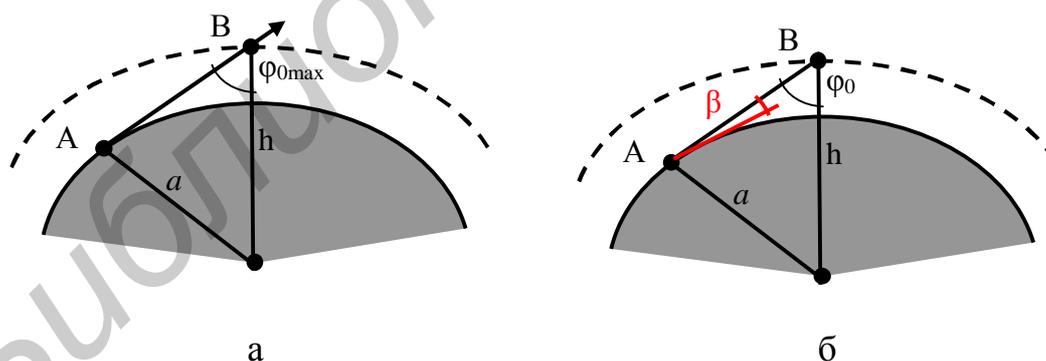


Рис. 139. К определению угла падения на ионосферный слой:  
а – максимальный угол падения; б – учет кривизны поверхности Земли

Благодаря сферической форме Земли верхние значения угла  $j_0$  ограничены некоторым максимальным значением, так как даже для пологого угла, касающегося в точке А поверхности Земли (рис. 139, а), угол падения определяется формулой  $j_{0max} = a / (a + h)$ . Ограничение значений угла падения на нижнюю

границу ионосферы приводит к тому, что радиоволны не всегда отражаются от ионосферы, а проходят сквозь нее во внешнее пространство.

Для того чтобы учесть влияние кривизны поверхности Земли, найдем соотношение между углом возвышения  $\beta$  и углом падения  $j_0$  (рис. 139, б) для отражающего слоя, расположенного на высоте  $h$ . Из треугольника OAB имеем  $\sin j_0 = \cos b / \left(1 + \frac{h}{a}\right)$  и с учетом (364), пренебрегая величинами второго порядка, имеем

$$\frac{\cos^2 b}{1 + 2h/a} \approx 1 - \frac{80,8N_e}{f^2}. \quad (368)$$

Из соотношения (368) несложно определить связь между частотой радиоволны и значением  $N_e$  в точке поворота луча при заданном угле возвышения  $\beta$ :

$$f = \left[ \frac{80,8N_e(1 + 2h/a)}{\sin^2 b + 2h/a} \right]^{1/2}. \quad (369)$$

Формула (369) показывает, что чем выше частота сигнала, тем большая требуется концентрация  $N_e$  для поворота волны.

Учитывая, что  $N_e$  с ростом высоты изменяется не монотонно, а проходит ряд последовательных максимумов, соответствующих слоям D, E, F<sub>1</sub> и F<sub>2</sub>, для трассы заданной протяженности будут существовать максимальные значения частот (соответствующие значениям максимальным  $N_e$  для каждого слоя), называемых *максимально применимыми частотами*  $f_{МПЧ}$  для каждого ионосферного слоя (рис. 140).

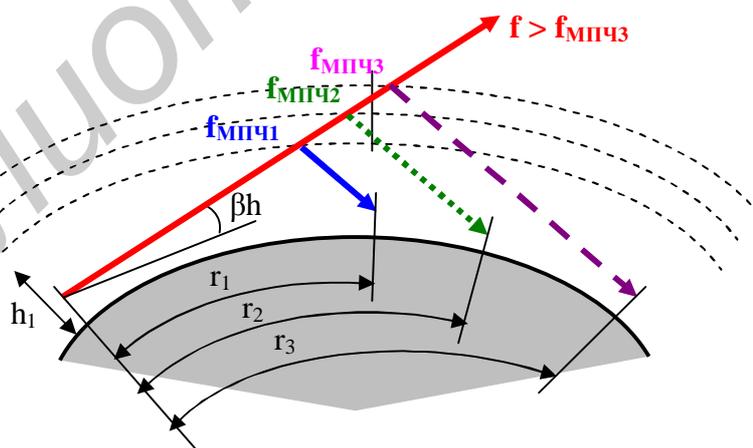


Рис. 140. МПЧ по слоям ионосферы

Наибольшая из применимых частот называется максимальной применимой частотой трассы заданной протяженности.

Изменяя угол возвышения  $\beta$  в (369), несложно видеть, что наибольшего значения  $f$  достигает при  $b = 0$ . При этом (369) примет вид

$$f_{\text{МПЧ}} = \left[ \frac{80,8N_{e \text{ max}}(a + 2h)}{2h} \right]^{1/2}. \quad (370)$$

Из этого следует, что для определения  $f_{\text{МПЧ}}$ , а следовательно, дальности связи  $r_n$  (см. рис. 140), необходимо знать высоту  $h$  и соответствующее значение  $N_{e \text{ max}}$  отражающего слоя.

Библиотека БГУИР

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кураев, А. А. Электродинамика и распространение радиоволн / А. А. Кураев, Т. Л. Попкова, А. К. Сеницын. – Минск : Бестпринт, 2004.
2. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн : учеб. пособие для вузов / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989.
3. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн – М. : Радио и связь, 1988.
4. Вольман, В. И. Техническая электродинамика / В. И. Вольман, Ю. В. Пименов. – М. : Связь, 2002.
5. Кравченко, И. Т. Теория волновых процессов / И. Т. Кравченко. – М. : Едиториал УРСС, 2003.
6. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М. : Сов. радио, 1977.
7. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1988.
8. Черенкова, Е. Л. Распространение радиоволн : учеб. пособие / Е. Л. Черенкова, О. В. Чернышев. – М. : Радио и связь, 1984.
9. Альперт, Я. Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера / Я. Л. Альперт. – М. : Наука, 1972.
10. Гололобов, Д. В. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства: В 3 ч. – Минск : БГУИР. Ч. 1. Распространение радиоволн / Д. В. Гололобов, В. Б. Кирильчук, 2004; Ч. 2. Фидерные устройства / Д. В. Гололобов, В. Б. Кирильчук, 2005; Ч. 3. Антенны / Д. В. Гололобов, В. Б. Кирильчук, О. А. Юрцев, 2006.

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ.....	6
1.1. Классификация колебаний.....	6
1.2. Описание гармонического колебания .....	11
1.3. Суперпозиция колебаний.....	12
1.3.1. Соотношение фаз колебаний .....	12
1.3.2. Сложение одночастотных колебаний с разными амплитудами и фазами.....	14
1.3.3. Суперпозиция произвольного числа колебаний одной частоты .....	17
1.3.4. Суперпозиция двух колебаний с разными частотами .....	17
1.4. Аналитическое описание периодических колебаний.....	19
1.4.1. Гармонический анализ периодических колебаний.....	19
1.4.2. Синтез колебаний. Эффект Гиббса.....	25
1.4.3. Распределение мощности в спектре периодического колебания .....	25
1.4.4. Преобразование колебаний.....	26
1.5. Аналитическое описание непериодических колебаний.....	28
1.5.1. Гармонический анализ непериодических колебаний.....	28
1.5.2. Свойства преобразования Фурье (теоремы о спектрах).....	31
1.6. Связь спектров периодического и непериодического колебаний.....	32
1.7. Модулированные колебания.....	33
1.7.1. Общие положения .....	33
1.7.2. Амплитудно-модулированные колебания.....	34
1.7.2.1. Однотональная модуляция.....	34
1.7.2.2. Векторное представление АМ с тональной модуляцией.....	36
1.7.2.3. Двухтональная модуляция .....	37
1.7.2.4. Полигармоническая модуляция .....	38
1.7.2.5. Мощность АМ-колебания .....	39
1.7.2.6. Полярная амплитудная модуляция (ПАМ) .....	39
1.7.3. Колебания с угловой модуляцией .....	40
1.7.3.1. Взаимосвязь изменения фазы и частоты во времени.....	40
1.7.3.2. УМ-колебания при тональной модуляции .....	41
1.7.3.3. Спектр колебаний с угловой модуляцией .....	44
1.7.4. Сравнение ширины спектров АМ, ЧМ и ФМ .....	45
1.7.5. Ограничение спектра колебания с УМ. Паразитная амплитудная модуляция.....	46
1.8. Импульсная модуляция .....	47
1.9. Случайные колебания .....	52
1.9.1. Основные оценочные параметры СК .....	52
1.9.2. Стационарные и нестационарные процессы.....	55

1.9.3. Частотная характеристика СК .....	56
1.10. Корреляционный анализ колебаний .....	56
1.10.1. Корреляционный анализ детерминированных колебаний .....	57
1.10.2. Корреляционная функция гармонического колебания .....	58
1.10.3. Корреляционная функция импульсного колебания .....	58
1.10.4. Свойства автокорреляционной функции .....	60
1.10.5. Свойства взаимной корреляционной функции.....	60
1.10.6. Связь энергетического спектра и автокорреляционной функции. Теорема Винера–Хинчина.....	61
2. ОСНОВЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ.....	63
2.1. Основные законы электродинамики .....	63
2.1.1. Уравнения Максвелла .....	63
2.1.2. Материальные уравнения.....	67
2.1.3. Закон сохранения заряда. Уравнение непрерывности.....	69
2.1.4. Классификация сред .....	69
2.1.5. Граничные условия для векторов ЭМП .....	70
2.1.5.1. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов ЭМП .....	70
2.1.5.2. Граничные условия для нормальных составляющих векторов ЭМП.....	72
2.1.6. Энергия электромагнитного поля.....	74
2.1.6.1. Удельная мощность сторонних источников в ЭМП.....	74
2.1.6.2. Баланс энергии в ЭМП. Вектор Пойнтинга.....	74
2.2. Монохроматические электромагнитные поля .....	76
2.2.1. УМ в комплексной форме .....	76
2.2.2. Комплексный вектор Умова–Пойнтинга. Теоремы об активной и реактивной мощности .....	77
2.2.3. Волновые уравнения. Уравнения Гельмгольца .....	78
2.2.4. Электродинамические потенциалы .....	80
2.2.5. Электрический вектор Герца .....	81
2.2.6. Принцип перестановочной двойственности .....	82
2.3. Плоская ЭМВ .....	83
2.3.1. Распространение ЭМВ в среде без потерь .....	83
2.3.2. Поляризация волн.....	87
2.3.3. Распространение ЭМВ в среде с потерями .....	95
2.3.4. Распространение радиоволн в анизотропных средах .....	95
2.3.5. Наклонное падение волны на границу раздела двух сред.....	105
2.3.5.1. Законы отражения и преломления волн .....	105
2.3.5.2. Коэффициенты отражения и прохождения .....	106
2.3.5.3. Полное прохождение волны через границу раздела.....	110
2.3.5.4. Полное внутреннее отражение.....	112
3. ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ .....	116
3.1. Волны в линиях передачи .....	116
3.1.1. Классификация волн.....	116

3.1.2. Быстрые и медленные волны .....	117
3.1.3. Режимы волн в ЛП .....	118
3.2. Волны в прямоугольном волноводе .....	122
3.2.1. Волны электрического типа .....	122
3.2.2. Волны магнитного типа .....	124
3.2.3. П- и Н-образные волноводы .....	128
3.3. Волны в волноводе с круглым сечением.....	128
3.3.1. Волны электрического типа .....	128
3.3.2. Волны магнитного типа .....	130
3.4. Т-волны в линиях передачи .....	132
3.4.1. Коаксиальная линия .....	133
3.4.2. Полосковая линия.....	134
4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....	136
4.1. Излучение ЭМВ в свободном пространстве .....	136
4.1.1. Общие замечания.....	136
4.1.2. Элементарные источники электромагнитного поля.....	137
4.1.2.1. Диполь Герца .....	137
4.1.2.2. Элементарный магнитный излучатель .....	138
4.1.2.3. Элементарный излучатель Гюйгенса.....	139
4.2. Дифракция ЭМВ в свободном пространстве .....	140
4.2.1. Дифракция Фраунгофера .....	140
4.2.2. Дифракция Френеля .....	142
4.3. Способы распространения радиоволн.....	146
4.4. Особенности распространения радиоволн в тропосфере .....	150
4.4.1. Строение атмосферы Земли и основные параметры тропосферы .....	150
4.4.2. Рефракция радиоволн в тропосфере .....	152
4.4.2.1. Явление тропосферной рефракции.....	152
4.4.2.2. Учет тропосферной рефракции при распространении земных волн .....	154
4.4.2.3. Виды тропосферной рефракции.....	155
4.5. Распространение радиоволн в ионосфере.....	157
4.5.1. Состав ионосферы .....	157
4.5.2. Механизмы ионизации и рекомбинации.....	157
4.5.3. Строение ионосферы .....	159
4.5.4. Преломление и отражение радиоволн в ионосфере .....	160
ЛИТЕРАТУРА.....	165

Учебное издание

**Гололобов Дмитрий Владимирович**

***ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН***

Конспект лекций  
для студентов специальности  
I-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности»  
всех форм обучения

Редактор Т. П. Андрейченко  
Корректор Е. Н. Батурчик  
Компьютерная верстка Е. Г. Реут

---

Подписано в печать  
Гарнитура «Таймс».  
Уч.-изд. л. 10,0.

Формат 60x84 1/16.  
Печать ризографическая.  
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.  
Усл. печ. л.  
Заказ 408.

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.  
220013, Минск, П. Бровка, 6