

УДК 621.372.512

ЦЕПИ ФИЛЬТРАЦИИ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ НАРАСТАЮЩЕВОЛНОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЕРЕДАЧИ

В.Н. ШАШОК, А.Г. ФИЛИППОВИЧ

Военная академия Республики Беларусь
Минск-57, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 19 марта 2012 г.

Описан новый способ аппроксимации функции передачи фильтров-прототипов, полученный введением нулей передачи в нарастающеволовную функцию. Показаны частотные характеристики цепей с предлагаемой модифицированной нарастающеволовой функцией передачи. Приведены разностное уравнение и амплитудно-частотная характеристика БИХ-фильтра с рассматриваемой функцией передачи.

Ключевые слова: модифицированная функция передачи, синтез цепей фильтрации, фильтр-прототип.

Введение

Применение в задачах синтеза цепей фильтрации нарастающеволовой функции в качестве аппроксимирующей позволяет приблизить частотные характеристики таких цепей в полосе пропускания к характеристике идеального фильтра [1]. Данные цепи в полосе пропускания имеют амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) высокой равномерности и фазочастотную характеристику (ФЧХ) повышенной линейности, близкую к ФЧХ цепей с максимально плоской функцией передачи [2]. В полосе подавления нарастающеволовая функция занимает промежуточное значение между равноволовой и максимально плоской. Повышение крутизны АЧХ в переходной области цепей с нарастающеволовой функцией передачи, обеспечение бесконечного затухания на фиксированных частотах могут быть реализованы введением в данную функцию нулей передачи. Кроме того, это позволяет использовать аналитические методы в задачах широкополосного согласования для нагрузок, имеющих такие нули передачи.

Модифицированная нарастающеволовая функция передачи

Нарастающеволовая функция, предлагаемая к использованию в качестве аппроксимирующей, на плоскости комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$ имеет вид

$$K(-s^2, n, m, \varepsilon) = \frac{k^2}{1 + \varepsilon^2 (-1)^{n-m} s^{2(n-m)} T_{Cheb}^2(m, s)}, \quad (1)$$

где $k \leq 1$ – константа, характеризующая максимальный уровень передачи; ε – коэффициент неравномерности функции в полосе пропускания; $T_{Cheb}(m, s)$ – обобщенный полином Чебышева первого рода порядка m .

Введение в функцию (1) комплексно сопряженных нулей передачи $s_x^0 = j\omega_x^0$ и $s_x^{0*} = -j\omega_x^0$ позволяет реализовать цепи фильтрации и согласования с бесконечным вносимым затуханием на фиксированных частотах ω_x^0 . Так как нули передачи должны быть реализованы за пределами полосы пропускания, то для фильтра-прототипа $\omega_x^0 > 1$. Такое введение реализуется умножением числителя нарастающеволовой функции на полином, образованный нулями передачи:

$$\prod_{x=0}^q (s^2 - (j\omega_x^0)^2)^2, \quad (2)$$

где x – номер двойной комплексно сопряженной пары.

Для сохранения заданного максимального уровня передачи умножим свободный член характеристического полинома функции (1) на полином (2), а для обеспечения единичной полосы пропускания по заданному уровню неравномерности ε все оставшиеся члены характеристического полинома умножим на коэффициент, представляющий значение полинома (2) на единичной частоте:

$$\prod_{x=0}^q (s^2 - (j\omega_x^0)^2)^2 \Big|_{\text{при } s=j}. \quad (3)$$

Таким образом, модифицированная нарастающе-волновая функция с нулями передачи примет вид

$$K(-s^2, n, m, \varepsilon)_M = \frac{k^2 \prod_{x=0}^q (s^2 - (j\omega_x^0)^2)^2}{\prod_{x=0}^q (s^2 - (j\omega_x^0)^2)^2 + \varepsilon^2 \prod_{x=0}^q (j^2 - (j\omega_x^0)^2)^2 (-1)^{n-m} s^{2(n-m)} T_{Cheb}^2(m, s)}. \quad (4)$$

Так как полином (2) образован двойными комплексно сопряженными парами, расположенными на мнимой оси комплексной плоскости s -переменной, то его корни подчиняются квадрантной симметрии, благодаря чему коэффициенты полинома Гурвица являются действительными и цепи фильтрации с выбранной функцией передачи имеют физическую реализуемость.

В ходе дальнейшего рассмотрения функции (4) примем $k=1$. В качестве примера введем в нарастающе-волновую функцию передачи $K(-s^2, 5, 3, 0,509)$, приведенную в [3], нули передачи на частотах $\omega_0^0 = 1,347$ и $\omega_1^0 = 1,945$. При выбранных условиях функция (4) примет вид

$$K(-s^2, 5, 3, 0,509)_1 = \frac{2,122 \cdot 10^{-2} s^8 + 0,238 s^6 + 0,956 s^4 + 1,631 s^2 + 1,0}{-0,452 s^{10} - 0,656 s^8 - 1,640 \cdot 10^{-2} s^6 + 0,956 s^4 + 1,631 s^2 + 1,0}. \quad (5)$$

Функции передачи мощности соответствует функция передачи по напряжению $K(s, n, m, \varepsilon)_M$, при условии $K(s, n, m, \varepsilon)_M K(-s, n, m, \varepsilon)_M = K(-s^2, n, m, \varepsilon)_M$.

Модуль данной функции в s -координатах образует поверхность, приведенную на рис. 1. Сечение полученной поверхности плоскостью $s = j\omega$ представляет АЧХ цепи с функцией передачи (5).

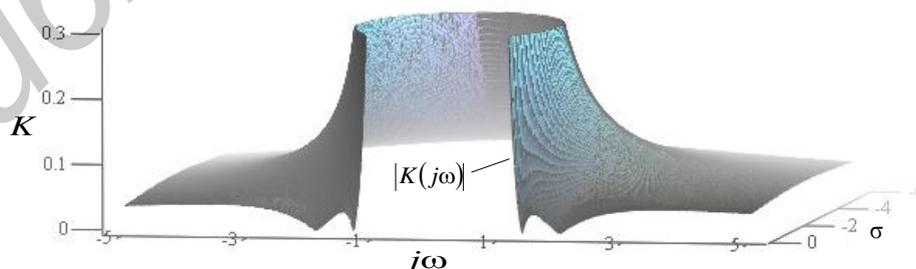


Рис. 1. Сечение поверхности, образованной функцией $|K(s, 5, 3, 0,509)_M|$, вертикальной плоскостью $s = j\omega$ в области нулей передачи $\omega_0^0 = 1,346$ и $\omega_1^0 = 1,945$

Данное сечение представляет собой квадрат АЧХ фильтра-прототипа, синтезированного на основе выбранной функции передачи. Вид квадрата АЧХ для рассматриваемой функции передачи мощности показан на рис. 2 а, на котором также приведены функции передачи мощ-

ности цепей с нарастающеволновой, равноволновой, максимально плоской и эллиптической аппроксимацией при аналогичных условиях.

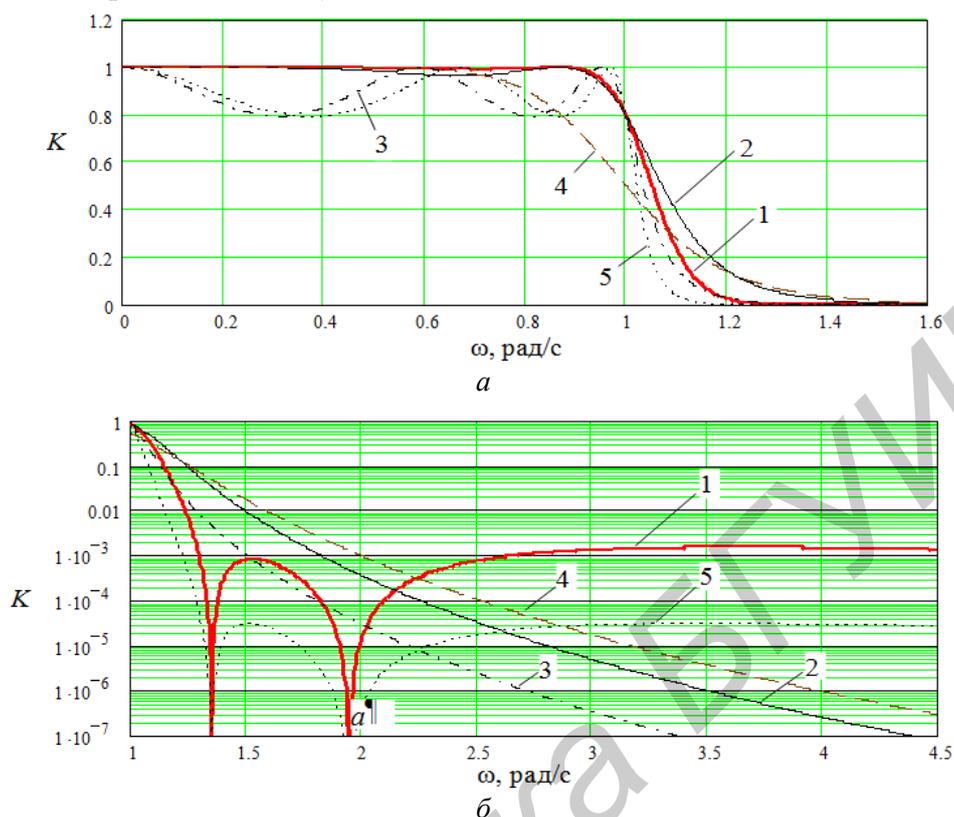


Рис. 2. Вид в полосе пропускания (а); полосе подавления (б) модифицированной нарастающеволновой (1), нарастающеволновой (2), равноволновой (3), максимально плоской (4) и эллиптической (5) функций передачи мощностей фильтров-прототипов при $n=5$, $m=3$, $\varepsilon = 0,509$ и $k=1$ и нулях передачи $\omega_0^0 = 1,346$ и $\omega_1^0 = 1,945$

Вид рассматриваемых функций передачи мощности в полосе подавления приведен на рис. 2 б. Модифицированная нарастающеволновая функция имеет наибольшую равномерность в полосе пропускания по сравнению с другими рассматриваемыми функциями. В переходной области и полосе подавления поведение данной функции подобно поведению эллиптической функции. Цепи, синтезированные на основе модифицированной нарастающеволновой функции, обладают повышенной крутизной в переходной полосе, а в области нулей передачи имеют повышенное затухание, однако за пределами данной области такое преимущество теряется.

Положение полюсов и нулей функции (5) на плоскости комплексной s -переменной показано на рис. 3.

Функция содержит восемь нулей передачи $s_0^0 = s_3^0 = j1,347$, $s_1^0 = s_2^0 = j1,945$, $s_4^0 = s_7^0 = -j1,347$, $s_5^0 = s_6^0 = -j1,945$, которые расположены на мнимой оси и образуют две двойные комплексно сопряженные пары. Как и исходная нарастающеволновая функция, модифицированная функция содержит два действительных полюса и четыре пары комплексно сопряженных, которые трансформируются в точки с координатами: $s_0 = 1,189$; $s_1 = 0,62+j0,871$; $s_2 = 0,134+j1,038$; $s_3 = -0,134+j1,038$; $s_4 = -0,62+j0,871$; $s_5 = -1,189$; $s_6 = -0,62-j0,871$; $s_7 = -0,134-j1,038$; $s_8 = 0,134-j1,038$; $s_9 = 0,62-j0,871$.

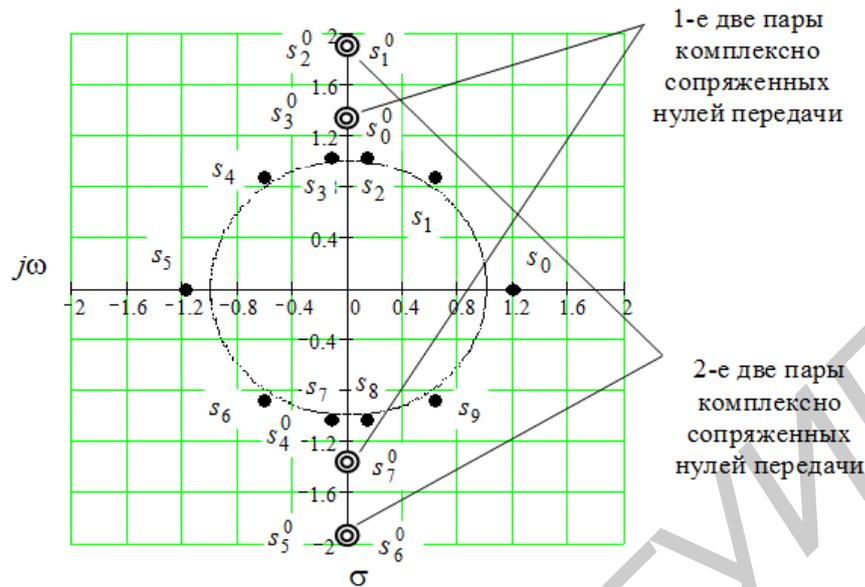


Рис. 3. Положение нулей и полюсов функции (5) на плоскости комплексной переменной s

Так как полюса функции передачи мощности имеют квадрантную симметрию, то образованный ими полином Гурвица имеет действительные коэффициенты и определяется следующими выражениями:

при нечетном n

$$p(s) = \prod_{i=\frac{n+1}{2}}^{\frac{3n-1}{2}} (s - s_i), \quad (6)$$

при четном n

$$p(s) = \prod_{i=\frac{n}{2}}^{\frac{3n-1}{2}} (s - s_i), \quad (7)$$

где i – номер полюса функции (4).

Нули передачи расположены на мнимой оси двойными комплексно сопряженными парами и также подчиняются квадрантной симметрии. Нули передачи, отнесенные к левой полуплоскости, образуют полином

$$c(s) = \prod_{x=0}^q (s^2 - (j\omega_x^0)^2). \quad (8)$$

Из (4) модифицированная нарастающе-волновая функция передачи по напряжению, выраженная через (6), (7) и (8), может быть записана следующим образом:

$$K(s, n, m, \varepsilon)_M = \frac{k c(s)}{\varepsilon 2^{m-1} c(j) p(s)}. \quad (9)$$

Для рассматриваемого примера с учетом известных нулей и полюсов передачи функции (5) выражение (9) примет вид

$$K(s, 5, 3, 0,509)_M = \frac{0,146s^4 + 0,816s^2 + 1}{0,672s^5 + 1,812s^4 + 2,932s^3 + 3,172s^2 + 2,171s + 1}. \quad (10)$$

Сечение функции (9) плоскостью $s = j\omega$ образует частотную характеристику цепи, реализующей данную функцию передачи. Вид модуля выбранной в качестве примера функции (10) приведен на рис. 4 а. АЧХ фильтра-прототипа, реализующего данную функцию, в полосе

пропускания обладает высокой равномерностью, повышенной крутизной спада в переходной области и полностью соответствует исходной функции передачи мощности (см. выражение (5) и рис. 2).

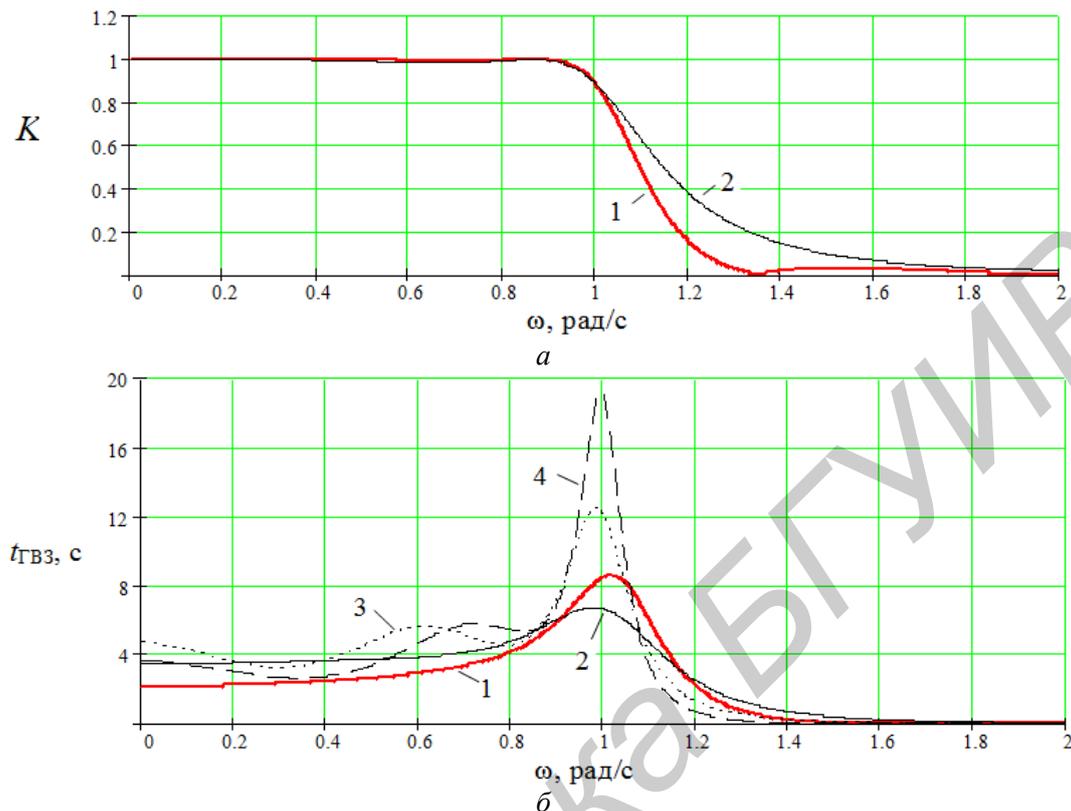


Рис. 4. Вид АЧХ (а), группового времени запаздывания (б) цепей с модифицированной нарастающе-волновой (1), нарастающе-волновой (2), равноволновой (3) и эллиптической (4) функциями передачи при $n = 0,509, m = 3, \epsilon = 0,509$

Для оценки линейности ФЧХ фильтра-прототипа с выбранной функцией передачи на рис. 4 б приведена его функция группового времени запаздывания. В качестве сравнительных на рисунке также приведены функции группового времени запаздывания прототипов с нарастающе-волновой, равноволновой и эллиптической аппроксимацией при аналогичных условиях.

Введение двух нулей передачи $\omega_0^0 = 1,346$ и $\omega_1^0 = 1,945$ в нарастающе-волновую функцию $K(s, 5, 3, 0,509)$ приводит к увеличению неравномерности группового времени запаздывания с 3,656 до 6,967 с. Однако и в этом случае неравномерность остается меньше данного параметра цепей с равноволновой и эллиптической аппроксимацией при аналогичных условиях (соответственно 7,835 и 16,041 с). Кроме того, в отличие от цепей с равноволновой и эллиптической аппроксимацией, цепи с модифицированной нарастающе-волновой функцией передачи обладают повышенной линейностью начального участка ФЧХ.

БИХ-фильтр с модифицированной нарастающе-волновой функцией передачи

С учетом билинейного преобразования [4, 5] нули передачи модифицированной нарастающе-волновой функции переносятся на единичную окружность комплексной z -плоскости. На рис. 5 приведено положение на z -плоскости нулей и полюсов функции (10), преобразованных с левой s -полуплоскости (см. рис. 3) при частоте дискретизации $f_d = 120 \cdot 10^6$ Гц.

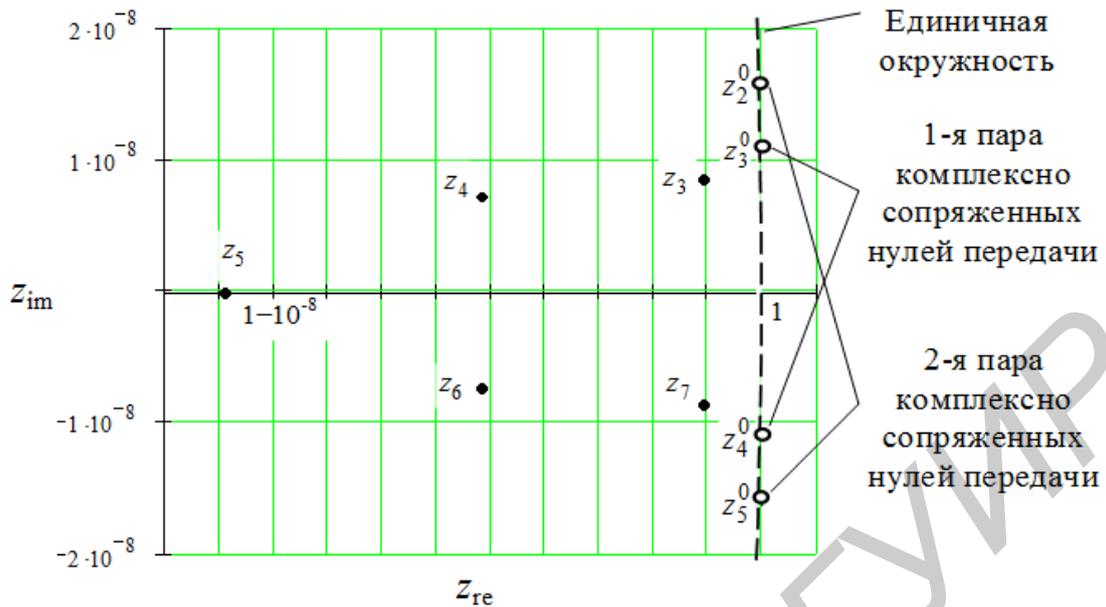


Рис. 5. Положение нулей и полюсов функции $K(z, 5, 3, 0, 509)_m$ на комплексной z -плоскости

Разностное уравнение низкочастотного БИХ-фильтра с граничной частотой $f_z = 0,7 \cdot 10^6$ Гц, синтезированного на основе фильтра-прототипа с модифицированной функцией передачи (10) и с выбранной выше частотой дискретизации, имеет вид

$$K(z, 5, 3, 0, 509)_m = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2} + b(3)z^{-3} + b(4)z^{-4} + b(5)z^{-5}}{1 - a(1)z^{-1} - a(2)z^{-2} - a(3)z^{-3} - a(4)z^{-4} - a(5)z^{-5}},$$

где $b(0) = b(5) = 3,787\ 607\ 891\ 174\ 105\ 53 \cdot 10^{-3}$; $b(1) = b(4) = -1,133\ 436\ 001\ 428\ 852\ 493 \cdot 10^{-2}$;

$b(2) = b(3) = 7,546\ 798\ 981\ 304\ 620\ 79 \cdot 10^{-3}$; $a(1) = 4,900\ 191\ 855\ 299\ 502\ 323$;

$a(2) = -9,606\ 685\ 611\ 921\ 039\ 757$; $a(3) = 9,418\ 673\ 153\ 170\ 838\ 36$;

$a(4) = -4,618\ 062\ 676\ 020\ 305\ 865$; $a(5) = 9,058\ 831\ 857\ 546\ 245\ 315 \cdot 10^{-1}$.

Форма АЧХ рассчитанного БИХ-фильтра $|K(z, 5, 3, 0, 509)_i|_{z=e^{j\omega T}} = |K(j\omega, 5, 3, 0, 509)_i|$ приведена на рис. 6 и она полностью соответствует форме АЧХ исходного фильтра-прототипа (см. рис. 4 а).

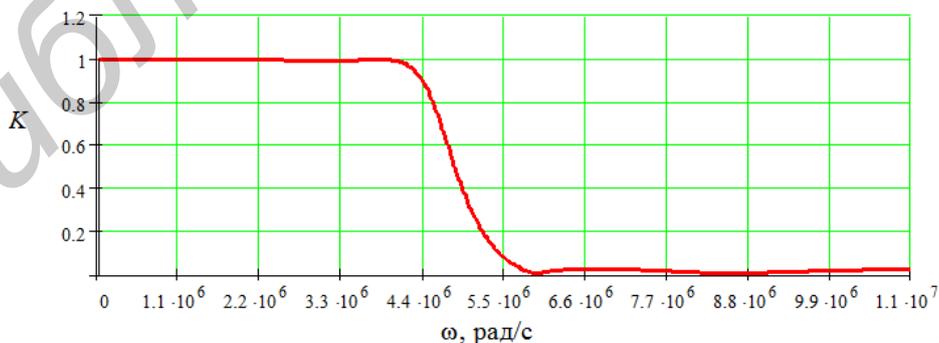


Рис. 6. АЧХ БИХ-фильтра с функцией передачи $K(z, 5, 3, 0, 509)_m$ и нулями передачи $\omega_0^0 = 1,346$ и $\omega_1^0 = 1,945$

Заключение

Таким образом, введение нулей передачи в нарастающе-волновую функцию позволяет синтезировать цепи с АЧХ, обладающей высокой равномерностью в полосе пропускания и повышенной крутизной спада в переходной полосе. В то же время такая модификация функции передачи приводит к ухудшению равномерности ФЧХ и неравномерности внеполосного затухания синтезированных цепей. Однако при этом фазочастотные искажения сигналов, вносимые такими цепями, не превышают искажения, вносимые цепями, синтезированными на основе равноволновой и эллиптической функций передачи.

FILTERS WITH MODIFIED RISING RIPPLE TRANSFER FUNCTIONS

V.N. SHASHOK, G.A. FILIPPOVICH

Abstract

The new method for approximation the transfer function of the prototype filters and resulting introduction of the transfer zeros in Rising Ripple function are described. The frequency characteristics of the circuits with the proposed modified Rising Ripple transfer function are shown. The difference equation and the amplitude-frequency characteristic of IIR filter with the given transfer function are presented.

Список литературы

1. Филиппович Г.А, Шашок В.Н. // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2010, № 1. С. 65–72.
2. Шашок В.Н. // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. 2011, № 3. С. 94–100.
3. Шашок В.Н. // Докл. БГУИР. 2011, № 8 (62). С. 52–58.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов по спец. «Радиотехника. – 4-е изд., перераб. и доп. М., 2003.
5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. М., 2006.