

Министерство образования и науки Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра теоретических основ радиотехники

В.М. Дашенков

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ
ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ**

Методическое пособие

для лабораторных и практических занятий по дисциплинам

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ
для студентов специальностей
РАДИОТЕХНИКА и РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

МИНСК 1996

УДК 621. 391. 1

В.М. Дашенков . Исследование колебаний линейных и нелинейных систем методом фазовой плоскости : Методическое пособие для лабораторных и практических занятий. - Мн. : БГУИР, 1996 . - 32 с.

С использованием специально разработанной программы на ЭВМ в лабораторной работе исследуются движения линейного осциллятора, нелинейного маятника и автоколебательных систем с мягким и жестким возбуждением. Программа допускает построение поля направлений, изоклин, фазовых траекторий и графиков зависимостей колебаний от времени.

Ил. 18, табл. 1, список лит. - 2 назв.

Содержание

1. Краткие теоретические сведения
 - 1.1. Фазовая плоскость , интегральные кривые , поле направлений , изоклины , особые точки , предельные циклы
 - 1.2. Линейный осциллятор
 - 1.3. Маятник
 - 1.4. Автоколебательные системы
 2. Программа “ РР”
 3. Порядок выполнения работы
 - 3.1. Исследование линейного осциллятора
 - 3.2. Исследование маятника
 - 3.3. Исследование автоколебательных систем
 4. Домашнее задание
 5. Контрольные вопросы
- ЛИТЕРАТУРА

Библиотека БГУИР

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Цель работы. Изучение колебаний линейных и нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, на фазовой плоскости.

1. Краткие теоретические сведения

1.1. Фазовая плоскость, интегральные кривые, поле направлений, изоклины, особые точки, предельные циклы

Состояние (фаза) системы с n степенями свободы описывается заданием $2n$ переменных, т.е. определяется точкой в $2n$ -мерном пространстве координат. Это пространство состояний называется *фазовым пространством*. В физике и математике метод фазового пространства является важным инструментом исследования поведения сложных систем. Для систем с одной степенью свободы фазовое пространство вырождается в *фазовую плоскость*, и метод приобретает особую физическую наглядность. По сути метод фазовой плоскости является графоаналитическим методом интегрирования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка типа

$$d^2x/dt^2 + F(x,y) dx/dt + \Phi(x,y) x = 0, \quad (1)$$

где

$$y = dx/dt.$$

Фазовое пространство является пространством переменных (x,y) . Физический смысл x и y определяется природой изучаемого объекта. Так, в механике x - координата материальной точки, а y - ее скорость, в электротехнике x может быть напряжением, током, зарядом, магнитным потоком и т.д.

В каждый данный момент времени состояние системы характеризуется значениями $x(t)$ и $y(t)$, т.е. положением так называемой изображающей точки на фазовой плоскости (рис.1).

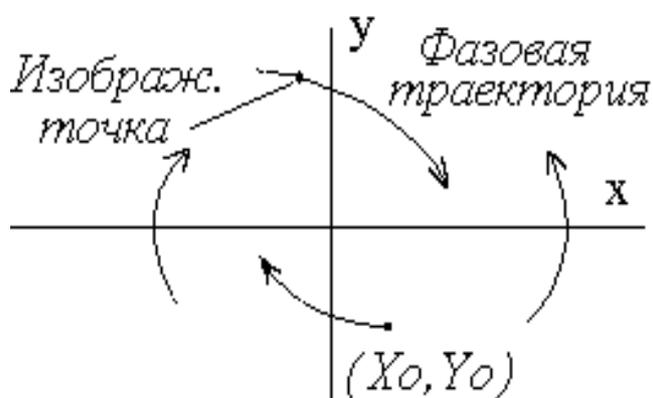


Рис . 1

С течением времени $x(t)$ и $y(t)$ изменяются, и изображающая точка перемещается по фазовой плоскости. Траектория движения изображающей точки называется *фазовой траекторией*. Направление движения по фазовой траектории определяется местоположением точки. Так, в верхней полуплоскости ($y > 0$), где

скорость положительна, движение сопровождается увеличением x , т.е. точка смещается вправо. В нижней полуплоскости ($y < 0$), где скорость отрицательная, смещение происходит влево. При переходе через ось x скорость и направление движения меняют знак, поэтому здесь $dx / dy = 0$.

Через каждую точку на фазовой плоскости проходит как минимум одна траектория. В зависимости от начальных условий, т.е. от исходного положения (X_0, Y_0) изображающей точки движение происходит по той фазовой траектории, которая проходит через (X_0, Y_0) .

Рисунок фазовой плоскости, заполненный фазовыми траекториями, называется *фазовым портретом* системы.

Найдем уравнение фазовой траектории. Для этого уравнение второго порядка (1) представим в виде системы из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -F(x,y) y - \Phi(x,y) x \end{cases} \quad (2)$$

или в более общем виде

$$\begin{cases} dx/dt = P(x,y), \\ dy/dt = Q(x,y). \end{cases}$$

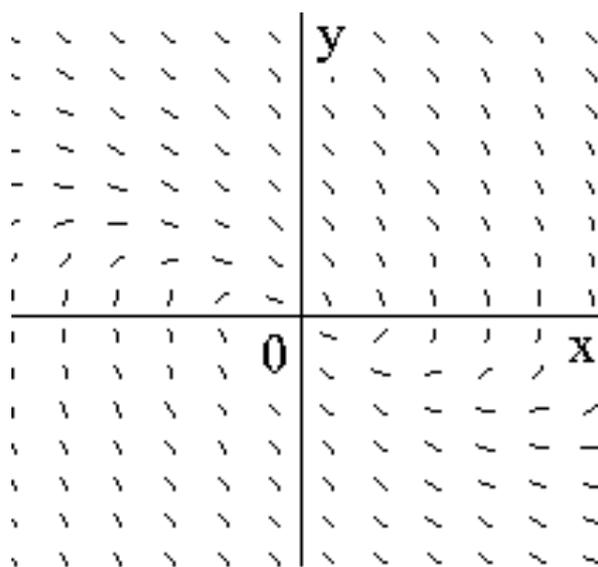
Поделив уравнения друг на друга и исключив тем самым зависимость от времени, получим

$$dy/dx = Q(x,y)/P(x,y), \quad (3)$$

что является уравнением *интегральных кривых*, совпадающих, как правило, с фазовыми траекториями. Встречаются, однако, случаи, когда одной интегральной кривой соответствуют сразу несколько фазовых траекторий.

В отдельных случаях уравнение (3) допускает непосредственное интегрирование, но в большинстве случаев переменные не разделяются, и

приходится прибегать к различным обходным приемам, используя численные или графоаналитические методы.



Самый простой метод, дающий возможность, не интегрируя (3), составить представление о фазо-вом портрете - это изобразить на фазовой плоскости *поле направлений* траекторий, т.е. покрыть фазовую плоскость сетью из отрезков векторов, направленных по касательным к фазовым траекториям (рис. 2). Аналогично воспроизводят форму силовых линий магнитного поля, помещая туда железные опилки.

Рис. 2

Метод изоклин использует ту же идею, но в отличие от предыдущего метода, где производная dy/dx определяется в отдельных заданных точках (x,y) , здесь находят геометрическое место точек (линию) на фазовой плоскости, в которых угол наклона касательных к фазовой траектории один и тот же :

$$dy/dx = k = Const .$$

Для этого задают k и находят линию, определяемую уравнением

$$k = Q(x,y)/P(x,y) . \quad (4)$$

Такая линия называется *изоклиной* (линией равных наклонов). При различных k строится семейство изоклин (рис. 3), по которым затем можно построить сами фазовые траектории.

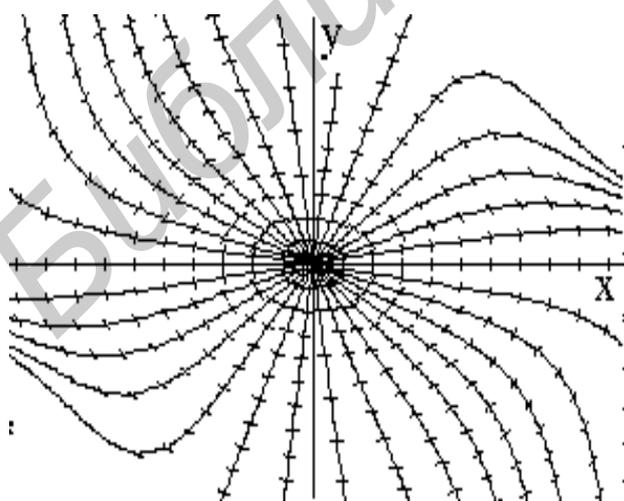


Рис.3

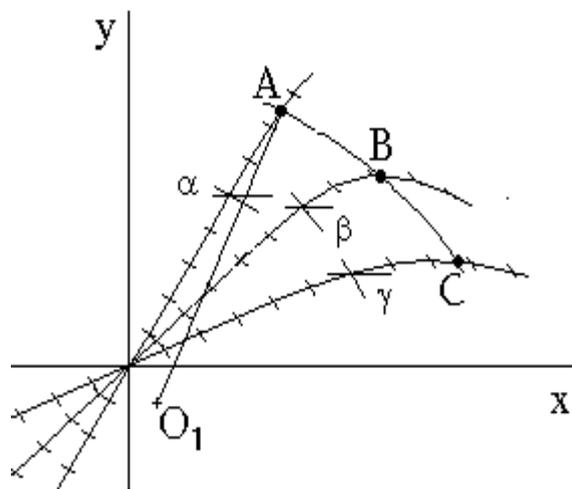


Рис. 4

Для этого нужно взять две соседние изоклины с углами касательных α и β и некоторую точку А (рис. 4). Через точку А под углом $(\alpha+\beta)/2$ проводят прямую, которая пересекает другую изоклину в точке В. Далее точки А и В соединяют дугой окружности радиусом O_1A так, чтобы касательные к дуге в точках А и В совпали с направлением касательных к фазовой траектории. Дугу АВ с некоторым приближением можно принять за отрезок фазовой траектории. Далее от точки В аналогичным способом проводят дугу к соседней изоклине в точку С и т. д. В результате фазовая траектория представляется, как совокупность дуг окружностей разных радиусов.

Методы численного интегрирования. С широким внедрением ЭВМ становятся доступны методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является метод Рунге-Кутты, суть которого заключается в итерационном пошаговом нахождении приращений переменных x и y при заданном малом приращении времени Δt .

Метод прост и удобен. Именно он и использован в программе данной лабораторной работы для построения фазовых траекторий и зависимостей $x(t)$ и $y(t)$.

Неособые и особые точки. Если для точки (x,y) правая часть уравнения (3), т.е. $Q(x,y)/P(x,y)$, определяющая угол наклона касательной, есть функция однозначная, то через данную точку под указанным углом проходит только одна фазовая траектория. Такие точки фазовой плоскости называются *неособыми*. Точки, для которых сказанное несправедливо, называются *особыми*. В них $Q(x,y)/P(x,y)=0/0$, т.е. $dx/dt=P(x,y)=0$ и $dy/dt=Q(x,y)=0$. Скорость и ускорение здесь равны нулю, значит, точки являются состояниями равновесия. Направление касательной в них неопределено, поэтому через них проходят интегральные кривые под разными наклонами, что физически означает возможность перехода в состояние равновесия и выхода из него разными путями.

Состояния равновесия и соответствующие им особые точки могут быть *устойчивыми и неустойчивыми*. Состояние считается устойчивым, если любые достаточно малые отклонения от него со временем затухают. Состояние неустойчиво, если хотя бы одно из этих отклонений нарастает. Тип особой точки определяют по характеру движения системы в ее окрестности. Классификация типов особых точек будет сделана ниже.

Предельные циклы. Важным видом фазовых траекторий являются изолированные замкнутые траектории, не проходящие через особые точки, называемые предельными циклами. Движение по предельному циклу соответствует периодическим (не обязательно гармоническим!) колебаниям, когда

$$x(t) = x(t + T) \text{ и } y(t) = y(t + T), \quad \text{где } T - \text{ период колебаний.}$$

Различают три типа предельных циклов: *устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые*.

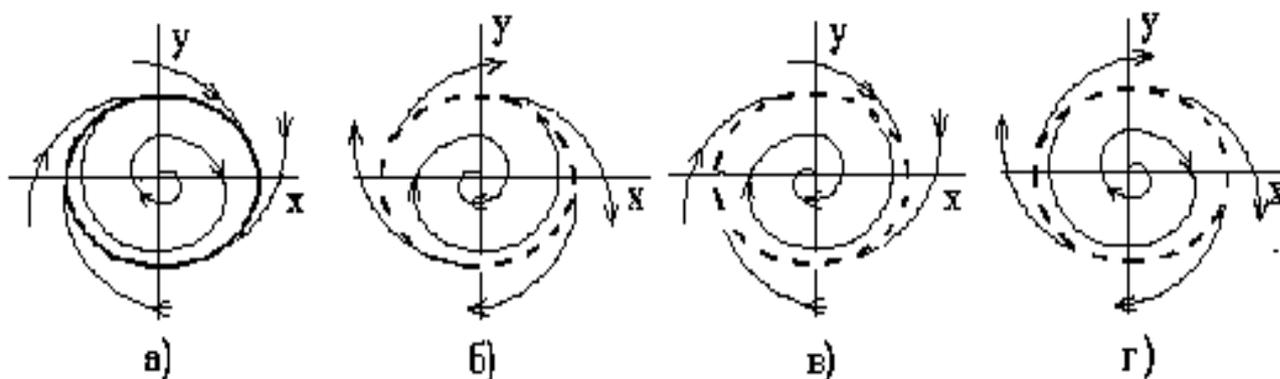


Рис. 5

Устойчивым называют предельный цикл (рис.5,а), на который "накручиваются" все близлежащие фазовые траектории. Любая изображающая точка, находящаяся вблизи устойчивого цикла, со временем переходит на него.

Неустойчивым называется цикл (рис. 5,б), с которого фазовые траектории "скручиваются". Изображающая точка, сошедшая с неустойчивого цикла, удаляется от него.

Полуустойчивыми называются циклы, на которые снаружи траектории накручиваются (или скручиваются), а изнутри скручиваются (или накручиваются) (рис. 5,в и 5,г).

На практике движение по неустойчивым и полуустойчивым циклам нереализуемо, т.к. любая флуктуация уводит систему от периодического движения по циклу. Устойчивые циклы физически реализуемы, движению по ним соответствуют периодические колебания, называемые *автоколебаниями*. Их совершают так называемые *автоколебательные системы* (генераторы колебаний).

Познакомимся с фазовой плоскостью и характером движений некоторых линейных и нелинейных систем.

1.2. Линейный осциллятор

Дифференциальное уравнение свободных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид

$$d^2x/dt^2 + E dx/dt + Cx = 0. \quad (5)$$

Такое уравнение описывает электрический колебательный контур, маятник при малых амплитудах колебаний и др. системы. Коэффициенты E и C определяют соответственно затухание системы и ее реактивные свойства.

Для линейного осциллятора согласно (2) и (3) уравнением интегральных кривых будет

$$dy/dx = -(Ey + Cx)/y, \quad (6)$$

а уравнением изоклин

$$y = -Cx / (k + E). \quad (7)$$

Как видно, изоклины являются прямыми, проходящими через начало координат, с углом, определяемым коэффициентом k .

Характер движения системы и типы особых точек зависят от значений коэффициентов E и C и их взаимной комбинации, как показано на EC -плоскости (рис. 6) и в табл.1.

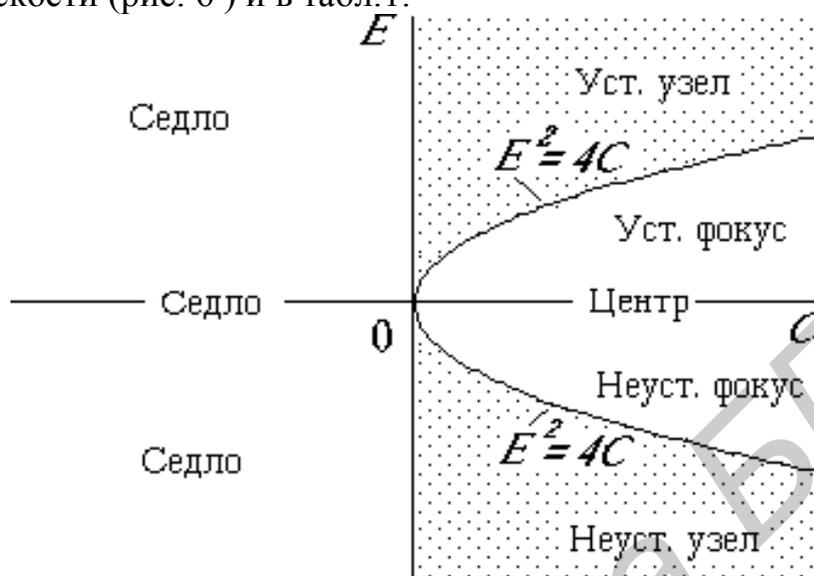
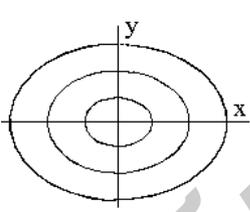
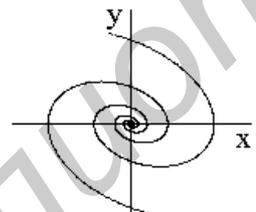
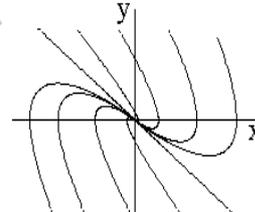
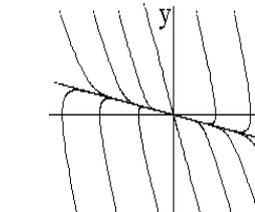
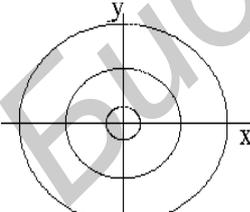
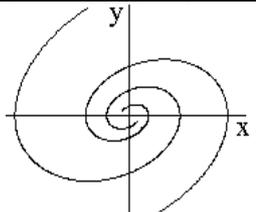
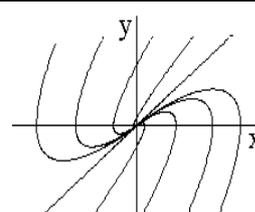
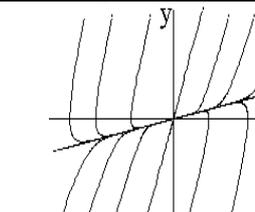


Рис. 6

Табл. 1

$E = 0$	$ E < E_{кр}$	$ E = E_{кр}$	$ E > E_{кр}$	
				$E > 0$
	Уст. фокус	Устойчивый узел		
				$E < 0$
Центр	Неуст. фокус	Неустойчивый узел		

Рассмотрим случаи, когда $C > 0$ (правая полуплоскость) на рис. 6.

При $E = 0$ система совершает незатухающие гармонические колебания. Уравнение (6) в данном случае допускает прямое интегрирование и дает

$$C x^2 + y^2 = R^2,$$

где R - константа интегрирования, физически означающая амплитуду колебаний. Фазовые траектории образуют семейство концентрических эллипсов (при $C = 1$ - окружностей) с особой точкой типа *центр* в начале координат. За период колебаний изображающая точка делает полный оборот по своему эллипсу, не сходя с него, т.е. совершаются колебания с постоянной амплитудой. Фазовые траектории здесь, хотя и замкнуты, но *не являются циклами*.

При $|E| < E_{кр}$ движение носит колебательный характер, затухающий или нарастающий в зависимости от знака E . Фазовые траектории имеют вид скручивающихся или раскручивающихся спиралей с особой точкой типа *устойчивый или неустойчивый фокус* в начале координат.

Значению $|E| = E_{кр}$ соответствует переходу в область апериодических колебаний. Критерием перехода является тот факт, что среди изоклин появляются такие, которые сами являются интегральными кривыми, т.е. для них совместно выполняются

$$k = y/x \quad \text{и} \quad k = - (Ey + Cx) / y,$$

откуда следует уравнение для k :

$$k^2 + E k + C = 0,$$

имеющее решение

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} E \pm \frac{1}{2} \sqrt{E^2 - 4C}. \quad (8)$$

Вещественные значения k получаются, если величина под корнем положительная, что и определяет

$$E_{кр} = + 2\sqrt{C}. \quad (9)$$

Если $|E| = |E_{кр}|$ (граница раздела апериодической и колебательной областей), то среди интегральных кривых имеется только одна, которая является одновременно и изоклиной:

$$y = kx = -0.5 E_{кр} x = + \sqrt{C} x, \quad (+ \text{ для } E < 0, \quad - \text{ для } E > 0).$$

В апериодических областях, где $|E| > |E_{кр}|$, таких кривых две:

$$y = k_{1,2} x.$$

В этом вам предстоит убедиться при выполнении работы.

Движение при $|E| > |E_{кр}|$ носит характер апериодически затухающий или нарастающий. Особая точка называется *узлом*, соответственно устойчивым при $E > 0$ и неустойчивым при $E < 0$.

Вид фазовых траекторий и типы особых точек при $C > 0$ показаны в табл. 1.

Системы, для которых в уравнении (5) коэффициент $C < 0$, обладают упругой отталкивающей силой. На рис.6 им соответствует левая полуплоскость. Примером такой системы является маятник вблизи верхнего неустойчивого положения равновесия. Начало координат на фазовой плоскости является неустойчивой особой точкой типа *седло*.

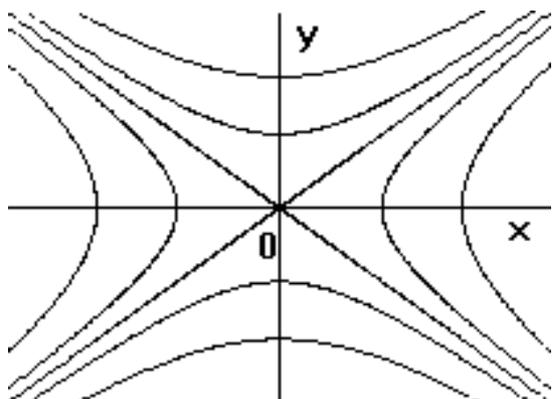


Рис. 7

Фазовый портрет показан на рис.7.

Из уравнения (8) видно, что при $C < 0$ и любом E имеются две изоклины - интегральные прямые, проходящие через начало координат. Все другие траектории через начало координат не проходят. Таким образом, единственный путь перехода в состояние равновесия - это движение по данным траекториям. Для достижения равновесия теоретически требуется бесконечное время, т.к. по мере приближения к равновесию

скорость стремится к нулю. Практически оказывается, что равновесие недостижимо, т.к. за бесконечное время движения наверняка флуктуации собьют систему с данной траектории на одну из соседних, которая уже не проходит через начало координат и по которой система навсегда уйдет от состояния равновесия.

1.3. Маятник

Маятник (рис.8) обычно рассматривают, как пример линейного осциллятора. Однако это верно лишь при малых амплитудах колебаний. При больших амплитудах маятник ведет себя как типично нелинейная система.

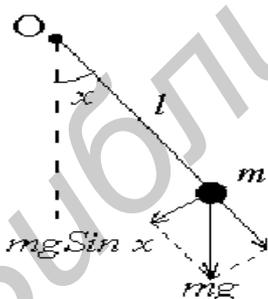


Рис. 8

Уравнение движения маятника имеет вид :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + h \frac{ds}{dt} + m g \sin x = 0 ,$$

где x - угловое отклонение от положения равновесия, $s = l x$ - отклонение по дуге, g - ускорение силы тяжести, h - коэффициент трения, l - длина .

Переходя к угловой координате, получим

$$d^2 x / dt^2 + E dx / dt + C \sin x = 0 , \tag{10}$$

где $E = h l / m$, $C = g / l$.

Характерной особенностью маятника является то, что он может совершать вращательные движения, когда физически одному и тому же отклонению соответствуют координаты $x = 2\pi n$, где $n = 0, +1, +2, \dots$. Благодаря этому фазовым пространством маятника является цилиндрическая поверхность. Удобнее, однако, использовать развертку цилиндра, т.е. перейти на плоскость.

Маятник имеет два положения равновесия: нижнее - устойчивое ($x = 0, +2\pi, +4\pi, \dots$), верхнее - неустойчивое ($x = +\pi, +3\pi, \dots$). При малых отклонениях от устойчивого равновесия, когда $x \approx \sin x$, уравнение (10) переходит в уравнение линейного осциллятора (5), поэтому точкам ($x = 2\pi n, y = 0$) на фазовой плоскости маятника будут соответствовать особые точки типа центр, фокус или узел в зависимости от затухания E (рис. 9 и 10).

Если перенести начало отсчета по x в верхнее положение неустойчивого равновесия, т.е. перейти к координате $x_\pi = x + (2n+1)\pi$, то уравнение (10) переходит в

$$d^2x_\pi/dt^2 + E dx_\pi/dt - C \sin x_\pi = 0. \quad (11)$$

При малых отклонениях $\sin x_\pi \approx x_\pi$, отсюда получаем уравнение линейного осциллятора с отталкивающей силой

$$d^2x_\pi/dt^2 + E dx_\pi/dt - C x_\pi = 0,$$

для которого, как было показано выше, особой точкой является седло. Таким образом, устойчивые и неустойчивые особые точки на оси x чередуются. Изоклины для маятника на основании (3) представляют семейство синусоид:

$$y = -\frac{C}{k+E} \sin x. \quad (12)$$

Проведенный анализ позволяет представить вид фазовых траекторий маятника.

Для маятника без затухания ($E = 0$) на фазовом портрете характерно наличие замкнутых и незамкнутых траекторий (см. рис. 9).

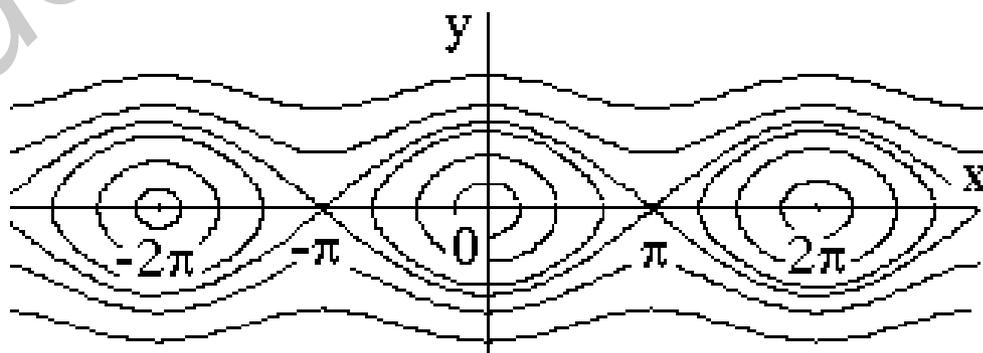


Рис. 9

Замкнутым траекториям вблизи точек $x = 2\pi n$ соответствуют незатухающие колебания возле нижнего положения равновесия. Незамкнутым, так называемым "убегающим" траекториям, соответствует вращение маятника. Замкнутые и незамкнутые траектории разделяют сепаратриссы - траектории, проходящие через седла. Движение по сепаратриссам физически нереализуемо в силу причин, о которых было сказано в конце предыдущего раздела.

Фазовый портрет маятника с затуханием ($E > 0$) имеет более сложный вид (см. рис. 10).

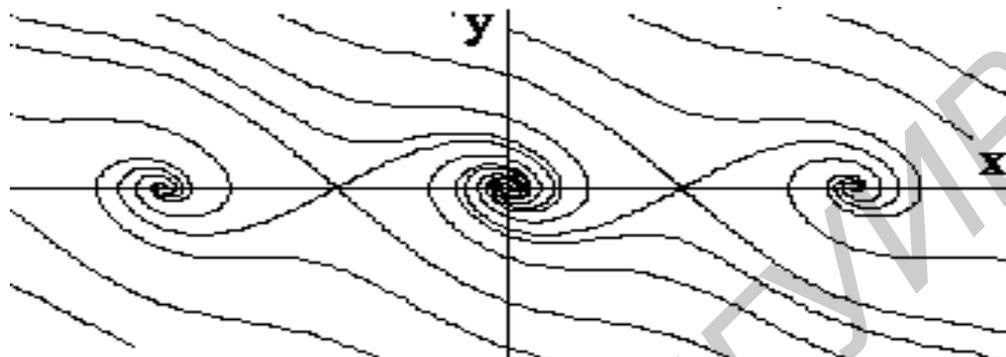


Рис. 10

Теперь (при $E > 0$) особые точки типа центр переходят в устойчивые фокусы или узлы, и все траектории становятся незамкнутыми. Любая из них, где бы она ни начиналась, заканчивается в одной из устойчивых особых точек. Однако перед тем, как "уйти" в нее, она может совершить несколько проходов над седлами, т.е. до того, как колебания затухнут, маятник может совершить несколько вращений.

Период колебаний маятника, как всякой нелинейной системы, зависит от амплитуды колебаний. При малой амплитуде эта зависимость несущественна. При амплитуде, стремящейся к π , период $T \rightarrow \infty$. Действительно, вы из собственного опыта знаете что, чем выше раскачиваются качели, тем на большее время происходит их зависание в верхней точке.

Попробуйте самостоятельно изобразить фазовый портрет маятника с отрицательным затуханием ($E < 0$). Выполняя экспериментальную часть работы, вы проверите, верно ли это сделали.

1.4. Автоколебательные системы

Автоколебательными называют нелинейные системы, способные совершать незатухающие периодические колебания за счет каких либо источников энергии. Примером являются транзисторные или ламповые генераторы электрических колебаний. Их поведение при определенных допущениях описывается обобщенным уравнением Ван-дер-Поля :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E (1 + A x^2 + B x^4) \frac{dx}{dt} + x = 0 ,$$

которое является частным случаем уравнения (1) при

$$F(x,y) = F(x) = E (1 + A x^2 + B x^4) \quad (14)$$

и

$$\Phi(x,y) = 1 .$$

Значения коэффициентов A , B и E определяются физическими свойствами системы, в частности, добротностью колебательного контура, крутизной характеристики усилительного элемента, положением рабочей точки, величиной обратной связи. Важную роль играет коэффициент E , называемый *параметром нелинейности*. От него зависят форма колебаний и скорость переходных процессов. При $E \ll 1$ форма колебаний близка к гармонической, а их установление происходит медленно. При $E \gg 1$ колебания резко негармонические, быстро устанавливающиеся.

Изоклины фазовых траекторий уравнения (14) согласно (3) описываются уравнением

$$y = -x / (k + F(x))$$

и имеют вид достаточно сложных кривых, проходящих через начало координат. Вы сможете убедиться в этом, выполняя лабораторную работу.

Для фазового портрета автоколебательных систем существенно наличие устойчивых, неустойчивых и полуустойчивых циклов. Характер движения системы зависит от присутствия этих циклов и их взаимного расположения. Последнее полностью определяется поведением функции $F(x)$, играющей роль коэффициента затухания системы.

В зависимости от знака $F(x)$ вся фазовая плоскость подразделяется на *декрементные* и *инкрементные* области (полосы). В декрементных областях, где $F(x) > 0$, движение сопровождается рассеянием энергии. В инкрементных областях, где $F(x) < 0$, движение сопровождается поступлением энергии. Автоколебания совершаются по устойчивым предельным циклам, и при автоколебаниях выполняется нулевой баланс энергий. Поэтому устойчивые циклы непременно должны располагаться частично в инкрементных, а частично в декрементных областях. Таким образом, необходимым, но недостаточным условием автоколебаний является наличие на фазовой плоскости декрементных и инкрементных областей. Переход от одной области к другой происходит там, где $F(x)$ меняет знак, т.е. при тех x , где

$$F(x) = 0 . \quad (15)$$

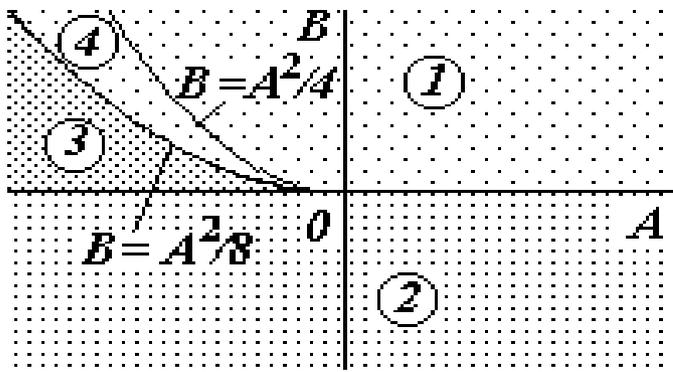


Рис. 11

Рассмотрим, как ведет себя $F(x)$ при различных сочетаниях коэффициентов A и B в уравнении (14). Анализ показывает, что AB -плоскость разделяется на четыре области линиями $B=0$, $A^2/4$ и $B=A^2/8$, как показано на рис. 11.

Область 1. Здесь $F(x)$ всюду сохраняет знак, уравнение (15) не имеет решений. Поведение $F(x)$ показано на рис.12.



Рис. 12

Вся фазовая плоскость либо декрементна (при $E > 0$), либо инкрементна (при $E < 0$). Фазовые траектории скручиваются или раскручиваются. Предельных циклов нет, автоколебания невозможны. Начало координат является устойчивой или неустойчивой особой точкой типа узел или фокус в зависимости от знака и величины E аналогично, как для линейного осциллятора.

Область 2. Здесь $(A \geq 0, B < 0)$ и $(A < 0, B \leq 0)$. Поведение $F(x)$ показано на рис. 13. *

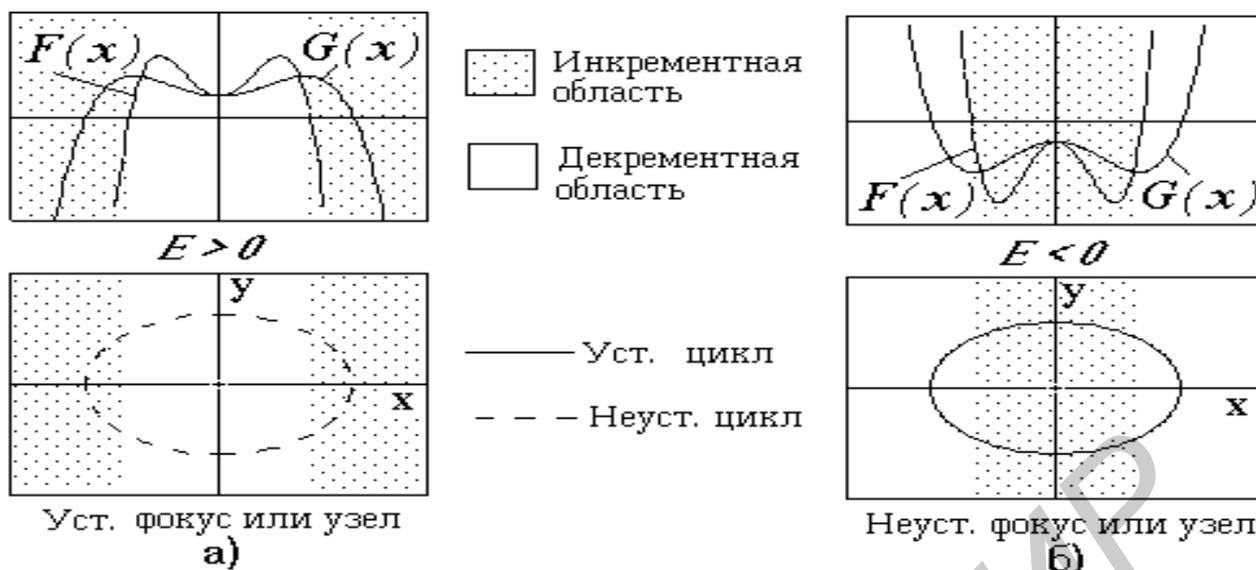


Рис.13

Уравнение (15) дает два действительных корня $x_{1,2}$, определяющих наличие одной декрементной или одной инкрементной области, и отсюда одного устойчивого или неустойчивого предельного цикла.

При $E < 0$ (рис. 13,б) имеем устойчивый цикл и неустойчивую особую точку. Все траектории выглядят как спирали, вливающиеся в предельный цикл (см. рис. 5,а). Это значит, что где бы ни находилась система в начальный момент, со временем она обязательно перейдет на устойчивый цикл, т.е. в режим стационарных автоколебаний (рис.14).

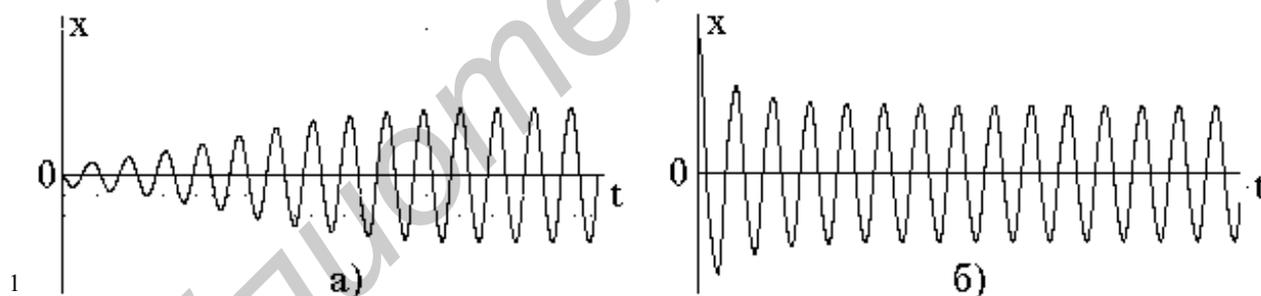


Рис. 14

Система с фазовым портретом такого типа называется автоколебательной системой с *мягким самовозбуждением*, или просто "*мягкой*" системой. Физически ей соответствует генератор, у которого рабочая точка расположена на линейном участке вольтамперной характеристики, и обратная связь больше критической.

* На рис. 13 и далее на рис. 16 и 17 фазовые траектории не показаны. Чтобы не загромождать изображение, показаны только циклы.

Как указывалось, величина E влияет на форму колебаний, форму предельного цикла и скорость установления процесса. При $E \gg 1$ колебания приобретают релаксационный характер (рис.15), и предельный цикл сильно отличается от окружности.

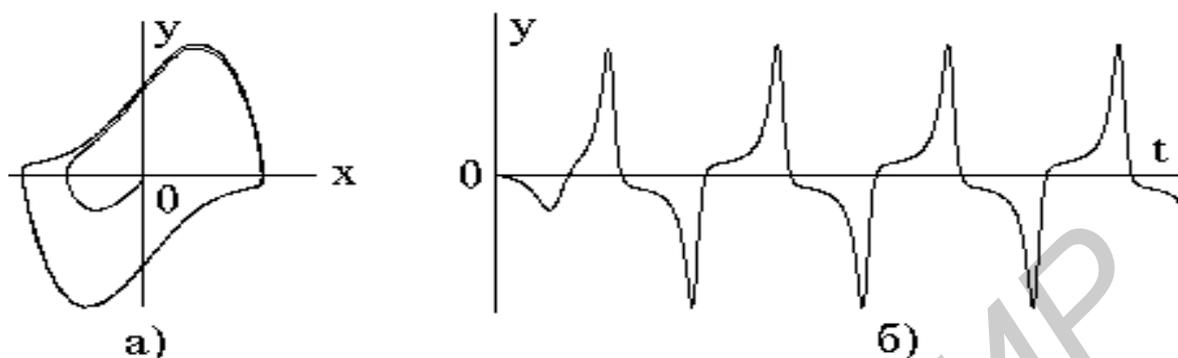


Рис. 15

При $E > 0$ имеем декрементную полосу, устойчивую особую точку и неустойчивый цикл (см. рис.13,а). Колебания здесь либо затухают до нуля, либо неограниченно нарастают. Автоколебания невозможны.

Для того чтобы определить радиусы R_{st} , R_{un} и R_{sm} устойчивых неустойчивых и полустойчивых предельных циклов, необходимо дополнительное исследование. Пользуясь методами нелинейной теории колебаний, можно показать, что при относительно небольших параметрах нелинейности ($E \ll 1$), когда колебания близки к гармоническим, радиусы предельных циклов определяются как корни уравнения

$$G(x) = E \left(1 + \frac{1}{4} A x^2 + \frac{1}{8} B x^4 \right) = 0, \quad (16)$$

т.е. являются точками пересечения кривой $G(x)$ с осью x . Для рассматриваемой области 2, где $B < 0$, они равны

$$R_{st,us} = \sqrt{-\frac{A}{B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 8 \frac{1}{B}}}. \quad (17)$$

Зависимости $G(x)$ показаны на рис. 12 и 13.

Область 3. Здесь $A < 0$ и $0 < B < A^2/8$. Кривые $F(x)$ и $G(x)$ имеют по четыре точки пересечения с осью x (рис.16). Благодаря этому на фазовой плоскости имеются по две декрементных и инкрементных полосы и по два цикла: устойчивый и неустойчивый.

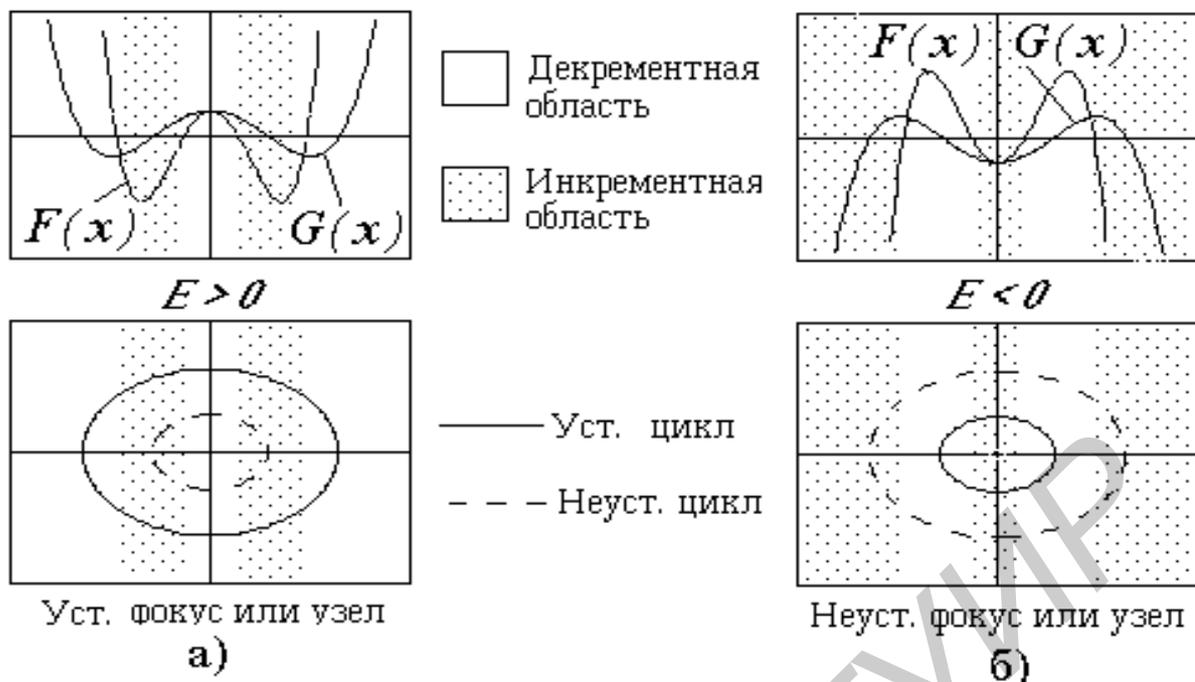


Рис. 16

Радиусы R_{st} и R_{un} устойчивых и неустойчивых циклов определяются как корни уравнения (16):

$$R_{st,un} = \sqrt{-\frac{A}{B} + \text{SGN}(E) \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 8 \frac{1}{B}}}, \quad (18)$$

где $\text{SGN}(E)$ - знаковая функция параметра нелинейности.

Пусть $E > 0$ (рис. 16,а). Тогда $R_{un} < R_{st}$, т.е. внутренний цикл неустойчивый, а наружный устойчивый. Особая точка - устойчивый фокус или узел. Траектории внутри неустойчивого цикла стремятся к особой точке (состоянию равновесия), колебания затухают (см. рис. 5,б). Между циклами траектории раскручиваются, вливаясь в устойчивый цикл. Вне устойчивого цикла траектории скручиваются, переходя на устойчивый цикл. Движение по устойчивому циклу - автоколебания. Таким образом, система является автоколебательной. Однако ее самовозбуждение, т.е. самопроизвольный выход из состояния равновесия на устойчивый цикл, невозможно. Для того чтобы перевести систему на устойчивый цикл, ее следует "вытолкнуть" за пределы неустойчивого цикла. Автоколебательные системы такого типа называются системами с жестким возбуждением, или просто "жесткими". Примерами жестких систем являются часы - ходики, транзисторный генератор при выборе рабочей точки у нижнего сгиба характеристики и др.

Если $E < 0$ (рис.16,б), то согласно (18) $R_{st} < R_{un}$, т.е. внутренний цикл устойчивый, а наружный - неустойчивый. Особая точка - неустойчивый фокус или узел. Траектории, если они начинаются внутри неустойчивого цикла, переходят на устойчивый цикл. Система способна совершать автоколебания с мягким характером самовозбуждения. Если же забросить систему за пределы

неустойчивого цикла, то она будет удаляться от него и на устойчивый цикл никогда не попадет.

Интересно проследить за динамикой изменения радиусов циклов при изменении коэффициентов A и B . На нижней границе области 3, где $B=0$, радиус внутреннего цикла равен нулю, т.е. остается только один внешний цикл. При приближении к верхней границе области 3, т.е. к линии $B = A^2/8$, радиус внутреннего цикла растет, циклы сближаются, и на границе области они сливаются в один полуустойчивый цикл с радиусом

$$R_{sm} = \sqrt{-A/B} = \sqrt{-8/A}$$

Эта ситуация показана на рис.17.

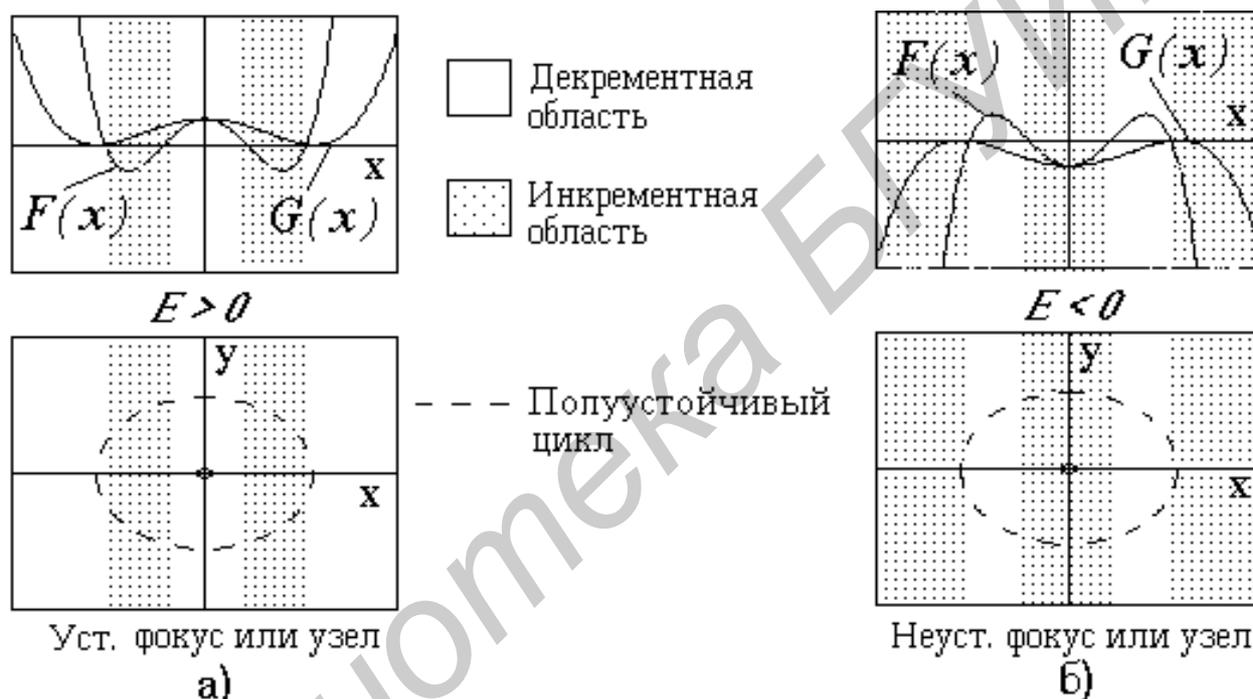


Рис. 17

Все фазовые траектории в зависимости от знака E скручиваются или раскручиваются, асимптотически приближаясь к полуустойчивому циклу и также асимптотически удаляясь от него (см. рис.5в,г). Устойчивое движение по этому циклу невозможно.

Область 4. ($A < 0, A^2/8 < B \leq A^2/4$). В этой области нет предельных циклов, хотя фазовая плоскость и подразделяется на заметно суженные декрементные и инкрементные полосы, подобно рис. 17. Особая точка - устойчивый или неустойчивый узел или фокус. Фазовые траектории такие же, как в области 1.

Выводы. Система, описываемая уравнением (14), ведет себя, как мягкая автоколебательная, если $E < 0$, и коэффициенты A и B располагаются в областях 2 и 3 AB -плоскости, как жесткая автоколебательная, если $E > 0$, и коэффициенты A и B находятся в области 3 AB -плоскости.

Все это вам предстоит исследовать в ходе выполнения лабораторной работы.

2. Программа “PP”

Программа предназначена для изучения движения систем, описываемых следующими линейными, нелинейными и параметрическими уравнениями второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E \frac{dx}{dt} + C x = 0$$
 - уравнение линейного осциллятора;

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E \frac{dx}{dt} + C \sin x = 0$$
 - нелинейное уравнение маятника;

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E (1 + A x^2 + B x^4) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$
 - уравнение Ван-дер-Поля для автоколебательных систем;

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (a + 2p \cos 2t) x = 0,$$
 - уравнение Матье для параметрических систем с гармонической накачкой;

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E \frac{dx}{dt} + \frac{x}{1 + m \operatorname{SGN}(\sin(t/a))} = 0$$
 - уравнение Хилла для параметрических систем с прямоугольной накачкой.

Имеется возможность задавать различные значения коэффициентов в уравнениях и устанавливать различные начальные условия.

Программа рассчитывает и строит изоклины, поле направлений, фазовые траектории, предельные циклы, графики $x(t)$, $y(t)$ и наглядно отображает процесс колебаний на модели маятника в горизонтальной плоскости.

Все установки проводятся либо численно по соответствующим запросам, либо графически путем указания курсором нужной точки в отображаемой информации на дисплее.

Структура программы показана на рис. 18.

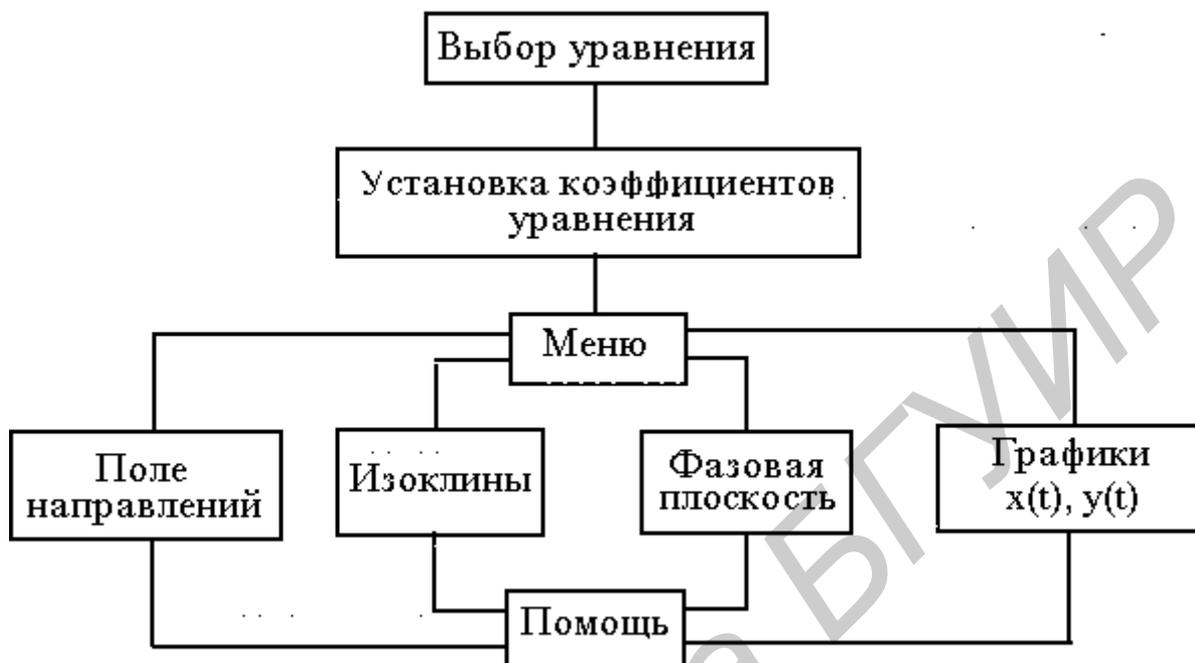


Рис. 18

Постоянное присутствие на экране строки Меню позволяет оперативно переходить из опции в опцию и менять режимы работы. Имеется достаточно подробный Help, позволяющий освоить работу с программой без посторонней помощи.

Расчеты в программе проводятся пошаговым методом Рунге-Кутты. Их точность и скорость зависят от числа N , определяющего шаг $2\pi / N$. Следует иметь в виду, что метод Рунге-Кутты может давать неверные результаты и даже сбой в работе, если число N мало для данной задачи. Так, если для гладкопротекающих процессов достаточно взять значение $N=32...64$, то для движений с крутыми участками фазовых траекторий следует устанавливать $N \geq 128$. Переустановку N можно оперативно производить, не прерывая счета. Например, если вы что вышли на пологую траекторию, то клавишей F2 можно уменьшить N , тогда как при подходе к крутым участкам траекторий клавишей F3 следует увеличить N . Вообще же, если нужны точные результаты, если вы не спешите или работаете на быстродействующей ЭВМ, то рекомендуем устанавливать N побольше. Это позволит вам спокойно и не спеша следить за всеми фазами движения системы, успевая при этом делиться впечатлениями с напарником.

3. Порядок выполнения работы

Включите ЭВМ и запустите программу PP . EXE.

Появится заставка и вопрос “Нужна ли помощь?”. Для первого раза ответьте положительно и внимательно прочитайте информацию о программе. После нажатия любой клавиши вы попадаете в опцию “New” -УРАВНЕНИЯ, где должны будете выбрать уравнение для исследования.

Все манипуляции можно осуществлять либо на клавиатуре, либо мышью, что удобнее и оперативнее.

3.1. Исследование линейного осциллятора

Выбрав уравнение (1), вы переходите в опцию “Coef”- КОЭФФИЦИЕНТЫ, где можно быстро проследить за соответствием вида фазового портрета и коэффициентов уравнения.

На экране дисплея два окна. В левом представлена описанная в разделе 1.1 EC -плоскость. Установленные значения E и C отображены положением курсора и показаны численно. Их можно менять, либо перемещая курсор мышью или клавишами, либо по запросу после нажатия клавиш $\langle E \rangle$ и $\langle C \rangle$. Правое окно - фазовая плоскость (x, y) . Нажмите $\text{Ctrl}+\text{Enter}$ и вы получите семейство фазовых траекторий, исходящих из 8-и симметрично расположенных начальных точек.

3.1.1. Перемещая курсор по EC -плоскости, следите за видом фазовых траекторий в каждой из выделенных областей и на их разделах. Для наиболее характерных случаев запишите значения E и C и сделайте зарисовки фазовых портретов. Среди них рекомендуем следующие сочетания:

Неустойчивый узел $E = - 2; - 4$ $C = 1$	Неустойчивый фокус $E = - 0.5$ $C = 1$	Центр $E = 0$ $C = 0.5; 1; 2$	Устойчивый фокус $E = 0.5$ $C = 1$	Устойчивый узел $E = 2; 4$ $C = 1$
Седло $C = - 1$ $E = 0; 1$				

Перейдем к более подробному исследованию всех видов особых точек.

3.1.2. *Центр*

Установите $E=0$ и $C>0$. Нажмите Enter. Вы вышли в *МЕНЮ*. Внимательно его просмотрите.

3.1.3. Нажмите <I>, и переходите в опцию “Iso” - *ИЗОКЛИНЫ*. Появится запрос о величине максимальной амплитуды колебаний Y_{\max} , которая не выйдет за пределы ваших графиков. Установите $Y_{\max} = 2$ или 3. Потом при необходимости в любой момент можно будет изменить это значение. На следующий вопрос о способе ввода данных ответьте “M” (ручной).

Постройте семейство изоклин для угловых коэффициентов $k = 0, +0.5, +1, +2, +5$.

3.1.4. Постройте фазовые траектории. Для этого на вопрос “Continue?” ответьте “N”.

Клавишей F1 переведите программу в ручной режим работы “HAND”. По своему усмотрению установите начальные условия (X_0, Y_0) и затем, последовательно нажимая Enter, наблюдайте за пошаговым построением фазовой траектории.

После этого можно перейти в режим “AUTO”, когда построение траектории производится автоматически шаг за шагом до тех пор, пока вы не остановите процесс нажатием какой-нибудь клавиши.

Если по-вашему нужно изменить шаг, равный $2\pi/N$, воспользуйтесь клавишами F2 и F3. Чем больше N, тем точнее счет и медленнее работа. Установите N разумно большим.

Измените начальные условия (X_0, Y_0) и построите семейство траекторий - концентрических окружностей или эллипсов.

3.1.5. Перейдите в опцию “Dir” - *ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ*, для чего нажмите <D>.

Появится плоскость (x, y) , покрытая сеткой отрезков векторов, касательных к фазовым траекториям, по которой легко составить представление о виде траекторий. Постройте их для различных (X_0, Y_0) .

Проведите исследования для значений $C = 0.5$ и $C = 2$. Зарисуйте результаты.

3.1.6. Чтобы наглядно представить связь движения изображающей точки на фазовой плоскости с реальным движением системы во времени, перейдем в опцию “Graf” - *ГРАФИКИ $x(t)$ и $y(t)$* . Нажмите <G>.

На экране появится поле трех плоскостей: (x, y) , $x(t)$ и $y(t)$, а также модель системы - горизонтальный маятник, которая позволяет наглядно следить за движением системы.

При изменениях X_0 и Y_0 вы видите, как меняются начальные угол отклонения и скорость толчка маятника.

Наблюдайте за движением системы в режиме “AUTO”. Сделайте N достаточно большим, чтобы можно было не спеша следить за всеми фазами движения. Переустановку N клавишами F2 и F3 можно делать в ходе движения. Чтобы освежить рисунок, если он сильно “замусорен”, повторно нажмите <G>. Проведите исследования для разных (X_0, Y_0) и C . Результаты зарисуйте. Вы освоились с работой в программе и теперь можете самостоятельно без подробных подсказок переходить из опции в опцию для изучения других видов особых точек и траекторий.

3.1.7. Устойчивый фокус

Войдите в опцию “Coef” или любую другую и установите $E=0.5$ и $C=1$ (можно и другие значения).

Затем перейдите в опцию “Iso” и выберите режим “A”. Автоматически будет построено 16 изоклин для углов наклона касательных от 0 до π с шагом $\pi / 16$.

Постройте семейство траекторий - сворачивающихся спиралей.

Перейдите в опцию “Dir”, посмотрите, как выглядит поле направлений. Наиболее информативной является опция “Graf”, задержитесь в ней. Меняйте начальные условия, следите за движением системы.

Зарисуйте наиболее характерные результаты.

3.1.8. Неустойчивый фокус

Установите $E = -0.5$ и $C = 1$ или другие значения по своему усмотрению. Прodelайте то же, что в п.3.1.7.

3.1.9. Устойчивый узел

Установите $E = E_{кр} = 2$ и $C = 1$ или другие значения, но так, чтобы $E=2\sqrt{C}$. Это будет соответствовать границе перехода от фокуса к узлу, т.е. от колебательного к аperiodическому характеру движения.

В ручном режиме построите семейство изоклин для различных значений угловых коэффициентов k . Среди них обязательно должна быть изоклина с $k = -\sqrt{C}$. Убедитесь, что для нее направление касательных совпадает с самой изоклиной.

Затем построите семейство фазовых траекторий для различных начальных точек (X_0, Y_0) и в том числе для

$$Y_0 = -\sqrt{C} X_0,$$

т.е. когда точка (X_0, Y_0) лежит на упомянутой изоклине. Убедитесь, что фазовая траектория и изоклина совпадают. В опции “Dir” посмотрите на поле

направлений, а в опции “Graf” подробно проанализируйте характер движения системы. Зарисуйте результаты.

Исследуйте случай $E > E_{кр}$. Будут две изоклины (они же - фазовые траектории) с угловыми коэффициентами, равными согласно (1.8)

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2}E \pm \frac{1}{2}\sqrt{E^2 - 4C}.$$

Задайте, например, $E=4$. Тогда $k_1 = -0.262$ и $k_2 = -3.732$. Проведите их.

Постройте семейство фазовых траекторий и обратите внимание, что они как бы вливаются в изоклину с $k = k_2$, по которой система быстро переходит в состояние равновесия.

Проанализируйте движение в опции “Graf”. Зарисуйте результаты.

3.1.10. Неустойчивый узел

Установите $E = E_{кр} = -2$ и $C = 1$ или другие значения, но так, чтобы $E = -2\sqrt{C}$, т.е. на границу перехода от неустойчивого фокуса к неустойчивому узлу.

Постройте изоклины и фазовые траектории. Убедитесь, что изоклина с коэффициентом $k = -\sqrt{C}$ совпадает с одной из них.

В опциях “Dir” и “Graf” посмотрите на поле направлений и изучите неустойчивый характер движения.

Установите $E = 2E_{кр} = -4$ и $C = 1$. Проведите те же исследования, что и в п.3.1.9 при $E > E_{кр}$. В данном случае угловые коэффициенты двух изоклин - траекторий будут $k_1 = 3.732$ и $k_2 = 0.268$.

3.1.11. Седло

Как указывалось в п.2.1, седло получается при $C < 0$.

Система с седлом неустойчива. Где бы ни находилась начальная точка (X_0, Y_0) , со временем система уходит от состояния равновесия.

При любом E имеются две изоклины - интегральные прямые с угловыми коэффициентами k , определяемыми формулой (8).

Установите $C = -1$, $E = 0$, тогда $k_{1,2} = +1$. Постройте эти изоклины и семейство фазовых траекторий.

Установите $Y_0 = -X_0$, т.е. поставьте начальную точку на изоклину и постройте фазовую траекторию. Теоретически по этой изоклине - траектории через бесконечное время можно прийти в состояние неустойчивого равновесия. Попробуйте это осуществить. Объясните причину неудачи.

В опции "Dir" посмотрите на поле направлений.

Перейдите в опцию "Graf" и внимательно проследите за движением системы. Зарисуйте характерные случаи.

3.2. Исследование маятника

3.2.1. Если вы не выходили из программы, то установите $Y_{\max} = 6$ и перейдите в опцию "New". Если же запустили программу вновь, то сразу окажетесь в этой опции.

3.2.2. Выбрав уравнение (2), переходим в уже знакомую опцию "Coef".

Особые точки у маятника те же, что и у линейного осциллятора, т.к. при малых колебаниях вблизи положений равновесия уравнение маятника переходит в уравнение осциллятора.

Сначала исследуем *маятник без затухания*.

Установите $E = 0$, $C = 1$ и, нажав Enter, переходите в МЕНЮ.

3.2.3. Из МЕНЮ идете в опцию "Iso".

Установите $Y_{\max} = 6$ и автоматический режим ввода углового коэффициента k . Будет построено семейство синусоид, амплитуды которых согласно (12) зависят от C и k :

$$y = -C/k \sin x .$$

Особые точки маятника располагаются на оси x . При $x = 0, +2\pi, +4\pi, \dots$ находятся центры, а при $x = +\pi, +3\pi, \dots$ - седла.

3.2.4. Перейдите в опцию "Dir", где структура фазового портрета просматривается сразу, даже без построения фазовых траекторий.

Постройте траектории. Начальные условия подберите так, чтобы получились как замкнутые, так и незамкнутые (убегающие) траектории.

Через седла проходят траектории - сепаратриссы. Попробуйте их построить. Однако это вряд ли получится, т.к. движение по сепаратриссам неустойчиво (см. п.2.2).

Обратите внимание, что при малых амплитудах замкнутые траектории вокруг центров похожи на окружности, и поэтому форма колебаний близка к гармонической, а при больших амплитудах колебания становятся негармоническими. В этом одно из проявлений нелинейных свойств маятника.

Зарисуйте построенный фазовый портрет.

3.2.5. Пронаблюдайте за движением маятника на графиках $x(t), y(t)$, для чего перейдите в опцию “Graf”.

Работайте в режиме “AUTO”, но с малой скоростью счета, чтобы не спеша следить за характером движений и формой колебаний. Для этого клавишами F2 и F3 выберете оптимальное значение N.

Убедитесь, что убегающим траекториям соответствует вращение маятника, что форма колебаний с большой амплитудой негармоническая и что лишь при малых амплитудах колебания близки к гармоническим.

Зарисуйте характерные случаи.

3.2.6. Маятник с затуханием

Установите $E = 0.2$, $C = 1$ и проведите все необходимые исследования в любой последовательности.

Когда вы построите фазовые траектории, то увидите, что среди них нет замкнутых. Где бы траектория ни начиналась, она заканчивается в одном из устойчивых фокусов, т.е. колебания затухают, периодических движений нет.

Установите $E > 2$, тогда *фокусы* переходят в *устойчивые узлы* и колебания быстро аperiodически затухают. Убедитесь в этом.

3.2.7. Маятник с отрицательным затуханием

Проведите исследования для $E = -0.15$ и $C = 1$. Сравните фазовые траектории с теми, которые нужно было построить в домашнем задании.

3.3. Исследование автоколебательных систем

В разделе 1.3 было показано, что системы, описываемые обобщенным уравнением Ван-дер-Поля, при определенных значениях коэффициентов A и B могут совершать автоколебания.

3.3.1. Войдите в опцию “New” и выберите уравнение (3).

3.3.2. В опции “Coef” установим $A = -1$ и $B = 0$, т.е. исследуем классический вариант уравнения Ван-дер Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

описывающего *мягкий режим* работы.

Сначала рассмотрим случаи, когда *параметр нелинейности E небольшой*.

Установим $E = -0.1$. Система при этом будет иметь один *устойчивый предельный цикл*. Его радиус R_{st} находим из уравнения $G(x) = 0$, которое при $B=0$ имеет вид

$$G(x) = E \left(1 + \frac{1}{4} A x^2 \right) = 0 .$$

В случае $A = -1$ решение дает $Rst = 2$.

3.3.3. Переходите в *МЕНЮ*, а оттуда в опцию “Dir”.

Установите $Y_{max}=6$, $N=64$, режим “AUTO” и точку (X_0, Y_0) вблизи начала координат, которое теперь является *неустойчивым фокусом*. Следите, как раскручивается траектория, постепенно переходя на устойчивый цикл. Убедитесь, что радиус цикла $Rst = 2$. Для этого установите по запросу $Y_0 = 0$ и $X_0 = 2$. Вы увидите, что курсор оказался на цикле.

Теперь выведите точку (X_0, Y_0) куда-нибудь за пределы цикла и проследите, как затухают колебания, приближаясь к циклу. Измените (X_0, Y_0) и повторите построение траекторий.

3.3.4. Перейдите в опцию “Iso” и в ручном режиме постройте изоклины для $k = 0, +0.5, +1, +3$. Сравните их с теми, которые построены в домашнем задании.

Если хотите, то можете здесь же построить и фазовые траектории.

3.3.5. Если вам не нравится присутствие на фазовом портрете вспомогательных линий, то перейдите в опцию “Ph.p”- *ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ*. Там на чистом поле повторите построения.

3.3.6. Для наблюдения за процессом установления колебаний и их формой перейдите в опцию “Graf”.

Точку (X_0, Y_0) установите внутри цикла вблизи от начала координат и пустите систему на счет. При подходе к концу поля графиков $x(t)$ и $y(t)$ *остановите* счет и зарисуйте картинки. Если хотите изменить масштаб оси времени, то нажмите клавишу “T” и сделайте новую установку.

Выведите точку (X_0, Y_0) за пределы цикла и повторите исследование. Обратите внимание, что в установившемся режиме при малом параметре нелинейности E форма колебаний близка к гармонической.

3.3.7. Исследование колебаний при *большой нелинейности*.

Установите $E = -3$ и перейдите в опцию “Dir”.

Вы увидите, что на большей части плоскости направление движения почти вертикально, т.е. оно происходит с большим перепадом скорости, и поэтому в данном случае необходимо *увеличить* точность расчетов, уменьшив шаг $2\pi / N$. Установите $N = 256$.

Поместите начальную точку (Y_0, Y_0) возле начала координат, которое теперь *неустойчивый узел*, и запускайте счет. Очень быстро система выходит на предельный цикл, сильно отличающийся от окружности.

Проделайте то же при положениях начальной точки вне цикла.

Заметьте, что предельный цикл пересекается с осью x при $x = 2$, т.е. там же, где это было и при малых E .

3.3.8. Перейдите в опцию “Graf” и проведите исследования предыдущего пункта.

Обратите внимание на форму колебаний, на скорость их установления и на то, что движение по циклу состоит из двух фаз: медленной и быстрой (“ползучее” движение и “скачки”). Зарисуйте результаты.

3.3.9. Предупреждение ! Построение изоклин при больших E связано с определенными программными сложностями, поэтому во избежание сбоев не заходите в опцию “Iso”.

3.3.10. Исследуйте жесткую автоколебательную систему.

Для этого войдите в опцию “Coef” и задайте $E = 0.1$, $A = -2$, $B = 0.3$.

Система будет иметь два цикла: *неустойчивый* и *устойчивый* с радиусами $R_{un} = 1.565$ и $R_{st} = 3.298$. Проверьте, правильно ли вы их рассчитали в домашнем задании. Запишите эти значения и переходите в МЕНЮ, а оттуда в опцию Iso”.

В ручном режиме постройте изоклины для $k = 0, +0.5, +1, +2$.

Фазовые траектории можно строить здесь же, можно в опции “Dir”, но в данном случае лучше в опции “Ph. p”.

3.3.11. Войдите в опцию “Ph. p”.

Задайте начальные условия вблизи неустойчивого цикла так, чтобы $X_0 < R_{un}$, например, $X_0 = 1.5$, $Y_0 = 0$. Постройте фазовую траекторию. Она будет спиралью, сворачивающейся в особую точку - *устойчивый фокус*.

Теперь выйдите за пределы неустойчивого цикла, сделав $X_0 = 1.6$, и наблюдайте за траекторией. Получается раскручивающаяся спираль, асимптотически переходящая на устойчивый цикл. Убедитесь, что его радиус $R_{st} \approx 3.3$.

Выведите точку (X_0, Y_0) за пределы устойчивого цикла и вы увидите, что колебания, затухая, переходят на устойчивый цикл. Зарисуйте получившийся фазовый портрет.

3.3.12. Перейдите в опцию “Graf”.

Проведите те же исследования, что и в предыдущем пункте. Результаты зарисуйте.

3.3.13. Исследуйте систему с *полуустойчивым* предельным циклом.

Войдите в опцию ” Coef” и установите $E = 0.2$.

Полуустойчивым циклам соответствует граница между 3 и 4 областями АВ- плоскости (рис. 11) , на которой $B = A^2/4$. Установите данное соотношение между A и B (например , $A = -2$ и $B = 0.5$, или какие-либо другие значения). Если соотношение установлено верно , то в нижнем справа окне появляются изображение цикла и величина его радиуса

$$R = R_{sm} = \sqrt{-A/B} = \sqrt{-8/A}$$

Запишите значение R .

3.3.14. Перейдите в опцию “Dir” или “Ph.pl” .

Установите $Y_{max} = 2R$, $N = 64$ и режим “AUTO”.

Постройте фазовые траектории, когда начальная точка расположена вне цикла, например, $X_0 = 1.5R$, $Y_0 = 0$. Траектории будут асимптотически приближаться к циклу, поэтому остановите счет, когда их радиус практически уже не уменьшается. Убедитесь, что он равен R , для чего задайте $X_0 = R$, $Y_0 = 0$ и посмотрите, где окажется курсор.

Теперь постройте траектории внутри цикла. Задайте $X_0 < R$, например, $X_0 = 0.99R$, $Y_0 = 0$ и запустите счет. Траектории скручиваются к началу координат - устойчивому фокусу.

Таким образом, вы имеете дело с полуустойчивым циклом при затухающих колебаниях.

Зарисуйте вид фазового портрета.

3.3.15. Установите $E = -0.2$.

Радиус полуустойчивого цикла от E не зависит, однако характер колебаний изменяется. При $E < 0$ система становится неустойчивой, траектории раскручиваются. Убедитесь в этом. Поместите начальную точку вблизи начала координат и пустите счет. Вы увидите, что траектории асимптотически будут приближаться к циклу. Остановите счет и переведите начальную точку за пределы цикла (например, $X_0 = 1.01R$ и $Y_0 = 0$). Вне цикла траектории также раскручиваются, система удаляется от полуустойчивого цикла. Зарисуйте фазовый портрет.

3.3.16. Для просмотра зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ перейдите в опцию “Graf” и проведите те же исследования, что в п.п. 3.3.14 и 3.3.15 .

* *
*

Дотошные могут развлечься с параметрическими колебаниями (уравнения (4) и (5) в опции “New”).

4. Домашнее задание

4.1. Изобразите качественный вид фазового портрета маятника с отрицательным затуханием.

4.2. Постройте изоклины для уравнения Ван-дер-Поля “мягкой” автоколебательной системы ($E = -0.1$, $A = -1$, $B = 0$) для угловых коэффициентов $k = 0, +0.5, +1, +3$.

4.3. Для “жесткой” автоколебательной системы с коэффициентами в уравнении Ван-дер-Поля, равными $E = 0.1$, $A = -2$, $B = 0.3$, рассчитайте радиусы устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

5. Контрольные вопросы

1. Что такое метод фазовой плоскости ?
2. Что такое фазовая плоскость, фазовая точка, фазовая траектория, фазовый портрет ?
3. Что такое изоклина и в чем заключается метод изоклин ?
4. Какие точки на фазовой плоскости называются особыми ?
5. Какие особые точки называются устойчивыми и неустойчивыми ?
6. Назовите типы особых точек, нарисуйте соответствующие им фазовые траектории и временные зависимости процессов.
7. Какие физические системы имеют особые точки типа центр, фокус, узел, седло ?
8. Что такое предельные циклы и каким движениям они соответствуют ?
9. Какие области называются декрементными и инкрементными ?
10. Что такое мягкое и жесткое возбуждение ?
11. Нарисуйте фазовые портреты мягкой и жесткой автоколебательных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей. - М. : Связь, 1972.
2. Радиотехнические цепи и сигналы / Под ред. К.А. Самойло - М. : Радио и связь , 1982.

Библиотека БГУИР

Учебное издание

В.М. Дашенков

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ
ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ**

Методическое пособие

для лабораторных и практических занятий по дисциплинам
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ
для студентов специальностей
РАДИОТЕХНИКА и РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Редактор Н.В. Гриневич

Корректор Б.Н. Батурчик

Подписано в печать

Объем 1,8 усл. печ. л.

Формат 60x84 1/16.

1,6 уч.- изд. л. Тираж 150 экз.
Заказ

Белорусский государственный университет информатики и радио-
электроники Министерства образования и науки Республики Беларусь
Отпечатано на ротапинтере БГУИР 220027, Минск, П. Бровки, 6 .