Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник

Часть 2

Линейная алгебра

(с решениями и комментариями)

Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного
пособия для студентов технических специальностей
учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования

Минск 2004

УДК 512.6 (075.8)
ББК 22.14 я 73
К 26

Рецензенты:

кафедра высшей математики №1 Белорусского национального технического университета;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета А.П. Рябушко

Карпук А.А.

К 26 Сборник задач по высшей математике: В 10 ч. Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями)/ А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник.- Мн.: БГУИР, 2004.-153 с.:ил.

ISBN 985-444-623-9 (ч. 2)

В части 2 сборника приводятся задачи по линейной алгебре – разделу курса высшей математики, изучаемому в высших технических учебных заведениях в первом семестре.

УДК 512.6 (075.8)
ББК 22.14 я 73

ISBN 985-444-623-9 (ч. 2)

ISBN 985-444-448-1

Содержание

Введение

Данная книга является второй частью «Сборника задач по высшей математике» в десяти частях, задуманного коллективом сотрудников кафедры высшей математики БГУИР. В ней в концентрированной форме собраны наиболее характерные задачи линейной алгебры - раздела высшей математики, традиционно трудного для восприятия студентами. В начале каждого параграфа решаются авторами задачи, поясняющие теорию, которая предваряет эти задачи. Начало решения отмечено знаком Δ, конец решения – знаком ▲. Приводятся в книге и трудные задачи, которые отмечены знаком *. Все задачи, приведенные в книге, снабжены ответами. Как и в первой части, векторы обозначаются $\overline{x}$, $\overline{y}$, … , $\overline{x}^1$, $\overline{y}^1$ и т.д.

1.Матрицы и определители

1.1. Матрицы

Понятие матрицы. Линейные операции над матрицами. Транспонирование матриц. Умножение матрицы на вектор. Произведение матриц. Схема Фалька. Многочлены от матриц. След матрицы

Прямоугольная таблица размером $m \times n$ вида

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right], \ i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}, \qquad (1.1)$$

называется **матрицей** или $m \times n$ – матрицей. Здесь i обозначает номер строки матрицы, j – номер ее столбца. Числа a_{ij} называются **элементами матрицы.** Матрица размера $1 \times n$ вида

$$\bar{u}^i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \equiv (a_{i1}, a_{i2} \dots, a_{in})$$

называется **вектор-строкой** или *n*-**вектор-строкой**, где n – число координат вектора.

МАТРИЦА РАЗМЕРА $M \times 1$ ВИДА

$$\bar{v}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

называется **вектор-столбцом** или ***m*** **- вектор-столбцом**.

С помощью вектор - столбцов $m \times n$ матрица А часто записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} \bar{v}^1 & \bar{v}^2 & \dots & \bar{v}^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix},$$

где $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n$ – вектор - столбцы матрицы А.

При $m=n$ матрица (1.1) называется **квадратной** порядка n.

Квадратная матрица

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \Lambda_n \end{bmatrix} = diag(\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n)$$

называется **диагональной**. Её частным случаем является **единичная матрица**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Если a_{ij}=0, то матрица $[a_{ij}]=[0]$ называется **нулевой** и обозначается О.

Квадратные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

называются **верхней** и **нижней треугольной матрицей** соответственно.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2r} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rn} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{bmatrix},$$

в которой числа a_{11}, a_{12}, …, a_{rr} отличны от нуля, называется **трапециевидной**.

В квадратной матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}, образуют **главную диагональ**, а элементы a_{n1}, a_{n-12}, …, a_{1n} – **побочную диагональ**.

Если в матрице (1.2) $a_{ij}=a_{ji}$, то она называется **симметрической**.

Две $m \times n$ - матрицы $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ называются **равными**, если $a_{ij} = b_{ij}$. Равенство матриц обозначается A=B.

Суммой двух матриц $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ одинакового размера называется матрица $C=[c_{ij}]$, такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Сумма этих матриц обозначается C=A+B.

Операция сложения матриц обладает свойствами:

1) A+B=B+A (коммутативность).

2) (A+B)+C=A+(B+C) (ассоциативность).

3) Для любых двух матриц A и B одинакового размера всегда существует матрица X этого же размера, такая, что A+X=B. Матрица X обозначается X=B-A и называется **разностью матриц** B и A.

Уравнение (**матричное**) A+X=O имеет решение X=O-A, которое называется матрицей, **противоположной** A, и обозначается (-A).

Произведением матрицы $A=[a_{ij}]$ **на число** $\alpha \in R$ называется матрица $\alpha A=[\alpha a_{ij}]$, т.е **каждый** элемент матрицы A умножается на число α.

Умножение матриц A и B на действительные числа α и β обладает свойствами:

1) $1 \times A=A$, $(-1) \times A=-A$, $0 \times A=O$ (в последнем равенстве слева 0 – число, а справа O – нулевая матрица).

2) (αβ)A=α(βA) (ассоциативность).

3) (α+β)A=αA+βA (дистрибутивность относительно чисел).

4) α(A+B)=αA+αB (дистрибутивность относительно матриц).

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются **линейными**.

Транспонированием матрицы A называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. Матрица, транспонированная к матрице A, обозначается A^T. Таким образом, по определению

$$A^T = \left[a_{ij}\right]^T = [a_{ij}]. \qquad (1.3)$$

Справедливы очевидные равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает свойствами:

$$1)\ (\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A}.$$

$$2)\ (\mathrm{A}^T)^T = \mathrm{A}. \qquad (1.4)$$

$$3)\ (\mathrm{A} + \mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T.$$

Для симметрической матрицы $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$. Матрица А, для которой $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}= -\mathrm{A}$, называется **кососимметрической** или **антисимметрической**.

Произведение $m \times n$**-матрицы** А на n**-вектор-столбец** $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ определяется равенством

$$\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m_1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m_2} \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = x\bar{v}^1 + x_2\bar{v}^2 + \ldots + x_n\bar{v}^n, \qquad (1.5)$$

т.е. **произведение матрицы** А **на вектор** $\bar{x}$ **равно линейной комбинации вектор-столбцов** $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T = \bar{v}^j$ **матрицы** А **с коэффициентами комбинации, равными соответствующим координатам вектора** $\bar{x}$.

Произведение матрицы А на вектор $\bar{x}$ определено, если число столбцов матрицы А равно числу координат вектора $\bar{x}$.

С помощью символа суммирования $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + ... + a_n$ равенство (1.5) кратко записывается в виде

$$\bar{y} = \mathrm{A}\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{v}^j . \qquad (1.6)$$

Умножение матрицы на вектор обладает свойствами:

1) $\mathrm{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\mathrm{A}\bar{x}, \quad \forall\alpha \in R, \quad \forall\bar{x}$.

2) $\mathrm{A}(\bar{x}^1 + \bar{x}^2) = \mathrm{A}\bar{x}^1 + \mathrm{A}\bar{x}^2, \quad \forall\bar{x}^1, \bar{x}^2$. 3)

Для $\bar{x} = \bar{o} : \mathrm{A}\bar{x} = \bar{o}; \; E\bar{x} = \bar{0}$.

Матрицы A и B называются **согласованными**, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением согласованных матриц A и B

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}_{nk} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nk} \end{bmatrix}$$

называется $m \times k$-матрица

$$C = \mathrm{AB} = \left[\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \right] = [\mathrm{c}_{ij}],$$

т.е. элемент c_{ij} произведения C=AB равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, $i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,k}$, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}. \qquad (1.7)$$

В произведении C=AB число строк матрицы C равно числу строк матрицы A, а число столбцов матрицы C равно числу столбцов матрицы B. Схематически этот факт записывается в виде $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$.

Если имеют смысл произведения AB и BA, то в общем случае AB≠BA. Если же AB=BA, то матрицы A и B называются **коммутирующими** (перестановочными). Они всегда квадратные одного порядка. При этом говорят, что в произведении AB B умножается на A слева, или A умножается на B справа.

Если A – квадратная матрица (1.2), то её *n*-й степенью называется произведение $\underbrace{AA...A}_{n} = A^n$. При *n*=0 полагают A^0=E.

Произведение матриц обладает свойствами (матрицы согласованы):

1) (A+B)C=AC+BC (дистрибутивность).
2) (AB)C=A(BC) (ассоциативность).
3) $(AB)^T=B^TA^T$.
4) AE=EA=A (A и E – квадратные *n*-матрицы).

Для перемножения матриц вручную удобно пользоваться **схемой Фалька**. Суть её в следующем. Расположим матрицы $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times k}$ и произведение $AB = C_{m\times k}$ так, чтобы элемент c_{ij} матрицы произведения C лежал на пересечении *i*-й строки A и *j*-го столбца B (рис.1). Для удобства элементы матриц на рис.1 изображаются точками. Схема Фалька позволяет осуществить контроль правильности вычислений двумя способами: проверкой столбцовых и строчных сумм (об этом ниже, см. пример 1.4).

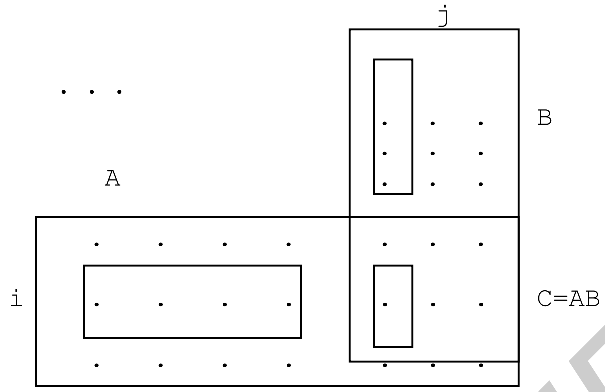

Рис. 1

Пусть A – квадратная матрица порядка k, а $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен степени n. **Многочленом** $P_n(A)$ n-й **степени от матрицы** A называется матрица

$$P_n(\mathrm{A}) = a_0\mathrm{A}^n + a_1\mathrm{A}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{A} + a_n E. \tag{1.8}$$

Для квадратной матрицы A из (1.2) **следом** SpA (от нем. Spur – след) или trA (от англ. Track – след) называется сумма элементов её главной диагонали, т.е

$$Sp\mathrm{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

След матрицы обладает свойствами:

1) $Sp(A+B) = SpA + SpB$.

2) $Sp(\alpha A) = \alpha SpA, \quad \alpha \in R$.

3) $Sp(\mathrm{AB}) = Sp(\mathrm{BA})$.

4) $Sp\mathrm{A} = Sp\mathrm{A}^T$.

1.1. Найти $2\mathrm{A} - 3\mathrm{B} + E$ для матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δ По определению сложения матриц и умножения матрицы на число имеем: $2A - 3B + E = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0\\ 15 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 21 & 3\end{bmatrix}. \qquad \blacktriangle$$

1.2. Найти $A\bar{x}$ и $\bar{x}^{T}A$ для

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \bar{x}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Δ По формуле (1.5) находим

$$A\bar{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}\cdot(-1)+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$$

или

$$A\bar{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 1+3\cdot 2\\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 2\\ 0\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 4\end{pmatrix}.$$

Далее

$$\bar{x}^{T}A=(-1,1,2)\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=\big((-1)\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 0,(-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 2,$$

$$(-1)\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot 1)=(1,2,1). \quad \blacktriangle$$

1.3. Найти произведение матриц

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 4\end{bmatrix}\quad \text{и}\quad B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Δ Матрицы A и B, очевидно, согласованы. В результате умножения 3×3-матрицы A на 3×2-матрицу B получим следующую 3×2- матрицу C:

$$
\text{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3+(-2)\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot 5+(-2)\cdot(-2)+1\cdot 4 \\ 2\cdot 3+0\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 5+0\cdot 2+(-2)\cdot 4 \\ 1\cdot 3+(-3)\cdot 1+4\cdot 2 & 1\cdot 5+(-3)\cdot(-2)+4\cdot 4 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 9 & 23 \\ 2 & 2 \\ 8 & 27 \end{bmatrix}. \qquad \blacktriangle
$$

1.4. Для матриц

$$
\text{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \text{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}
$$

найти произведение C=AB с помощью схемы Фалька.

Δ Имеем следующую схему (рис. 2):

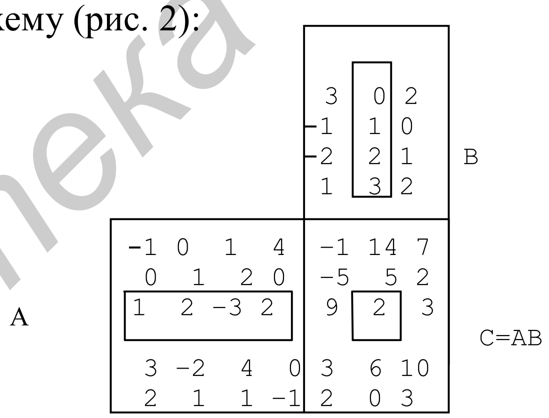

Рис. 2

На рис.2 рамкой выделено вычисление элемента c_{32}:

$$
c_{32} = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 3 = 2\,.
$$

Как отмечено выше, с помощью схемы Фалька можно осуществлять контроль вычислений двумя способами.

Способ 1 (проверка столбцовых сумм). Элементы матрицы А складываются по столбцам, и вектор столбцовых сумм $\bar{s}_A^{\,T}$ записывается под матрицей А.

Затем рассчитываются произведения $\bar{s}_A{}^T$ с каждым вектор-столбцом матрицы B. Полученные произведения записываются под соответствующими столбцами матрицы C.

Таким образом, под матрицей C образуется вектор-строка $\bar{s}_A{}^T$. С другой стороны, элементы каждого столбца матрицы C складываются и таким образом получается вектор-столбец $\bar{s}_C{}^T$. В случае правильности вычислений между векторами $\bar{s}_C{}^T$ и $\bar{s}^T$ должно иметь место соотношение $\bar{s}_C{}^T = \bar{s}^T$.

В нашем примере получаем следующую схему (рис.3):

					3	0	2	
					-1	1	0	
					-2	2	1	B
					1	3	2	
	-1	0	1	4	-1	14	7	
	0	1	2	0	-5	5	2	
A	1	2	-3	2	9	2	3	C=AB
	3	-2	4	0	3	6	10	
	2	1	1	-1	2	0	3	
$\bar{s}^T_A$	5	2	5	5	8	27	25	$\bar{s}^T = \bar{s}^T_A B$

Рис. 3

Способ 2 (проверка строчных сумм). По аналогии с проверкой столбцовых сумм она описывается следующим алгоритмом:

1)складываются элементы каждой строки матрицы B. Таким образом получаем вектор-столбец $\bar{Z}_B$;

2)вычисляются скалярные произведения $\bar{Z}_B$ и каждой вектор-строки матрицы A. Таким образом получаем вектор-столбец $A\bar{Z}_B$;

3)складываются элементы каждой строки матрицы C. Таким образом получаем вектор-столбец $\bar{Z}_C$.

В случае правильности вычислений должно выполняться равенство $A\bar{Z}_B = \bar{Z}_C$.

Имеем следующую схему (рис. 4):

					3	0	2	5	
					-1	1	0	0	
				B	-2	2	1	1	$\overline{Z}_B$
					1	3	2	6	
	-1	0	1	4	-1	14	7	20	
	0	1	2	0	-5	5	2	2	
A	1	2	-3	2	9	2	3	14	$\overline{Z}_C=A\overline{Z}_B$
	3	-2	4	0	3	6	10	19	
	2	1	1	-1	2	0	3	5	

C=AB

Рис. 4

Если сведём оба способа проверки вместе, то для умножения двух матриц получается следующая схема (рис. 5):

	. . . B	$\overline{Z}_B$
. . . . A	C=AB	$\overline{Z}_C=A\overline{Z}_B$
$\overline{S}^T{}_A$	$\overline{S}^T{}_C=\overline{S}_A B$	

Рис. 5 ▲

1.5. Для многочлена $P(x)=2x^2-3x+4$ и матрицы $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ найти P(A).

$$\Delta\ P(A)=2A^2-3A+4E=2\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}^2-3\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=2\begin{bmatrix}34 & 21\\ 21 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-15 & -9\\ -9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}57 & 33\\ 33 & 24\end{bmatrix}.\quad \blacktriangle$$

1.6. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}5 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 6 & -4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -2 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Для матрицы $D=(8A-B^T)\,C^T$ найти след $S_P(D^T)$.

Δ Имеем:

$$8A - B^T = \begin{bmatrix} 40 & -56 & 0 \\ -24 & 8 & 0 \\ 16 & 48 & -32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & -59 & -3 \\ -24 & 10 & 0 \\ 11 & 47 & -34 \end{bmatrix}.$$

Далее находим произведение

$$D = (8A - B^T)C^T = \begin{bmatrix} 36 & -59 & -3 \\ -24 & 10 & 0 \\ 11 & 47 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -109 & -63 & -121 \\ 20 & 48 & 20 \\ 196 & 80 & 60 \end{bmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{bmatrix} -109 & 20 & 196 \\ -63 & 48 & 80 \\ -121 & 20 & 60 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $S_P(D^T) = -109+48+60 = -1 = S_P D^T$. ▲

1.7. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Δ

Пусть матрица $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ коммутирует с матрицей A. Тогда

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 = 7x_1 + 5y_1, \\ 7y_1 - 3y_2 = -3x_1 - 2y_1, \\ 5x_1 - 2x_2 = 7x_2 + 5y_2, \\ 5y_1 - 2y_2 = -3x_2 - 2y_2. \end{cases}$$

В этой системе совпадают первое и последнее уравнения. Поэтому она равносильна системе

$$\begin{cases} 3x_2 = -5y_1, \\ x_1 + 3y_1 - y_2 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 - 5y_2 = 0. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Если из первого уравнения этой системы подставить $x_2 = -\frac{5}{3} y_1$ в третье уравнение системы, то получится второе уравнение. Значит, система (1.9) равносильна системе

$$\begin{cases} 3x_2 = -5y_1, \\ x_1 + 3y_1 - y_2 = 0. \end{cases}$$

откуда $y_1 = -(3/5)x_2$, $y_2 = x_1 - (9/5)x_2$. Положив $x_1 = u$, $x_2 = -5v$, запишем решение системы (1.9)в виде $x_1 = u$, $x_2 = -5v$, $y_1 = 3v$, $y_2 = u + 9v$, где u, v – произвольные действительные числа. Подставляя x_1, x_2, y_1, y_2 в искомую матрицу X, получаем общий вид матриц, коммутирующих с A:

$$X = \begin{bmatrix} u & 3v \\ -5v & u+9v \end{bmatrix}.$$ ▲

1.8. Для матриц

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

найти: а) A+B; б) 3A+2B+E; в) AB; г) BA; д) A^2.

1.9. Вычислить: а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$; б) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$.

1.10. Для матриц

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$ вычислить

$\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C}$.

1.11. Для матриц

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ найти: а) AC+BC; б) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$; в) $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}$.

1.12. Найти произведения матриц:

а) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & b & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a & c\\ 1 & b & b\\ 1 & c & a\end{bmatrix}$.

1.13. Найти произведения матриц и проверить правильность вычислений с помощью схемы Фалька. Найти следы произведений:

а) $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 5 & -3 & -2 & 1\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$;

б) $C=\begin{bmatrix}5 & 2 & -2 & 3\\ 6 & 4 & -3 & 5\\ 9 & 2 & -3 & 4\\ 7 & 6 & -4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\ -1 & -5 & 2 & 11\\ 16 & 24 & 8 & -8\\ 8 & 16 & 0 & -16\end{bmatrix}$;

в) $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ -5 & -3 & -4 & 4\\ 5 & 1 & 4 & -3\\ -16 & -11 & -15 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -2 & 3 & 4\\ 11 & 0 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 3 & 0\\ 22 & 2 & 9 & 8\end{bmatrix}$.

1.14. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 34 & -107\\ 52 & 26 & -68\\ 101 & 50 & -140\end{bmatrix}\begin{bmatrix}27 & -18 & 10\\ -46 & 31 & -17\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

1.15. Вычислить:

а) $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}^3$; б) $\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}^5$; в) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^n$; г) $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}^n$

1.16*. Доказать, что равенство AB–BA=E невозможно.

1.17*. Доказать, что любую квадратную матрицу A можно представить единственным образом в виде A=B+C, где B – симметрическая, а C – кососимметрическая матрицы.

1.18. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей :

а) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

1.19*. Найти все матрицы второго порядка,

а) квадраты которых равны нулевой матрице;

б) квадраты которых равны единичной матрице.

1.20. Найти P(A), если:

а) $P(x) = x^2 - 5x + 3$; $A = \begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 3\end{bmatrix}$;

б) $P(x) = x^2 - x - 1$; $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$;

в) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$; $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 3 & -1\\2 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

1.21. Известно, что:

а) $A_{5\times 9}B_{m\times n} = C_{5\times 1}$;

б) $A_{5\times m}B_{7\times n} = C_{5\times 6}$.

Найти m и n.

1.2. Определители

Перестановки, инверсии, транспозиции. Понятие определителя n-го порядка. Свойства определителей. Теоремы Лапласа и аннулирования. Определитель произведения матриц

Всевозможные расположения чисел 1,2,…,n называются **перестановкой**. Перестановка из этих чисел обозначается $j=\{j_1,j_2,...,j_n\}$, где $j_1,j_2,...,j_n$ - числа $1,2,\ldots,n$, взятые в определенном порядке.

Для n чисел 1,2,… существует $n!$ различных перестановок. Если в перестановке $\{j_1,j_2,\ldots,j_n\}$ большее число стоит левее меньшего, то это называется **инверсией** (беспорядком). Перестановка, имеющая четное число инверсий, называется **четной**, в противном случае она называется **нечетной**. Операция, меняющая местами два числа в перестановке, называется **транспозицией**. Транспозиция меняет четность перестановки на противоположную.

Определителем n-го порядка квадратной матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется число, обозначаемое |A| или detA, равное алгебраической сумме всевозможных произведений n элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A. Знак каждого слагаемого определяется числом инверсий в перестановках, составленных из первых и вторых индексов сомножителей a_{ij}: если сумма числа инверсий четная, то слагаемое берется со знаком «+», если она нечетная, то слагаемое берется со знаком «–».

Итак,

$$\det A \equiv |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \\ j_1, j_2, \dots j_n}} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (1.10)$$

где s – число инверсий в перестановке из первых индексов $i_1, i_2, \dots, i_n$; t – число инверсий в перестановке из вторых индексов $j_1 j_2, \dots j_n$, а суммирование распространяется на всевозможные перестановки $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ и $\{j_1 j_2, \dots j_n\}$ из чисел 1,2,…,n.

В произведении $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ можно упорядочить первые индексы, представив их в виде 1,2,…,n. Тогда определитель (1.10) записывается проще:

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}, \quad (1.11)$$

где t – число инверсий в перестановке $\{j_1 j_2, \dots j_n\}$, а суммирование распространяется на всевозможные перестановки $\{j_1 j_2, \dots j_n\}$. Число $(-1)^t a_{1j}\ a_{2j}\ \dots a_{nj}$ называется **элементом определителя**. Определитель n-го порядка (1.10) или (1.11) имеет n! слагаемых.

Определитель n-го порядка обладает свойствами:

1. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T, т.е.

$$|A| = |A^T|.$$

2. Если одна из строк матрицы A нулевая, то |A|=0.

3. Общий множитель какой-либо строки определителя можно вынести за знак определителя.

4. Если в определителе поменять местами две строки, то он изменит знак на противоположный.

5. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

6. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.

7. Если к элементам строки определителя прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится.

8. Если каждый элемент i-й строки определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, у одного из которых i-я строка составлена из первых слагаемых, у другого - из вторых слагаемых, а в остальных строках те же элементы, что и у исходного определителя.

9. Если некоторая строка определителя является линейной комбинацией других строк, то такой определитель равен нулю.

10. **Формула Лапласа**. Определитель равен сумме всех произведений элементов любой строки определителя на их соответствующие алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i_1} A_{i_1} + a_{i_2} A_{i_2} + \ldots + a_{in} A_{in}, \quad \overline{1,n} \ . \tag{1.12}$$

11. **Теорема аннулирования**. Сумма всех произведений элементов какой-либо строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения другой его строки равна нулю.

12. **Определитель произведения матриц**. Определитель произведения двух матриц А и В одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц:

$$|AB|=|A||B|. \tag{1.13}$$

Аналогичные свойства 1-11 имеют место и для столбцов определителя.

1.22. Являются ли произведения 1)$a_{12}a_{44}a_{33}a_{21}$ и 2)$a_{11}a_{31}a_{23}a_{44}$ слагаемыми определителя четвертого порядка? Если да, то с каким знаком слагаемое входит в определитель?

Δ 1. Расположим сомножители произведения в порядке возрастания первых индексов: $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$. Так как вторые индексы – номера столбцов разные, то элементы заданного произведения взяты по одному из каждой строки и каждого столбца определителя. Следовательно, данное произведение является одним из слагаемых определителя. Для определения его знака выпишем перестановку из вторых индексов: 2,1,3,4. В ней только одна инверсия: число 2 стоит перед 1. Поэтому t=1 и, значит, знак слагаемого $(-1)^t = = -1$ - минус.

2. Для второго произведения имеем $a_{11}a_{31}a_{23}a_{44}=a_{11}a_{23}a_{31}a_{44}$. Видно, что два элемента a_{11} и a_{31} взяты из одного столбца. Поэтому данное произведение не является слагаемым определителя. ▲

1.23. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{32} и a_{13} определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Δ Имеем $a_{32}= -1$. Вычеркивая третью строку и второй столбец, получаем

$$\mathrm{M}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-3=5, \quad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2}\mathrm{M}_{32} = -5.$$

Вычеркивая теперь первую строку и третий столбец, аналогично предыдущему получаем:

$$\mathrm{M}_{13} = 4\times 4 = 16 \Rightarrow \mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3}\mathrm{M}_{13} = 16.$$

1.24. Вычислить определитель: а) верхней; б) нижней треугольной матриц.

$$\text{а)}\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \text{б)}\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Δ а) Разлагая определитель по первому столбцу, последовательно получаем:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\times a_{22} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

б) Согласно свойству 1^0 определителя, имеем:

$$|B|=|B^T|=a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Таким образом, определитель треугольной матрицы, верхней или нижней, равен произведению диагональных элементов этой матрицы. ▲

1.25 . Определитель диагональной матрицы

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

равен $|\alpha| = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.

1.26. Вычислить определитель, приведя его к верхнему треугольному виду:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & -7 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Δ Общий множитель 2 из первой строки вынесем за знак определителя, затем из первого столбца вынесем 2 за знак определителя, а из второго столбца вынесем 3. Тогда

$$|A| = 2\cdot 2\cdot 3\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 5 & 1\\ 3 & 3 & -7 & 15\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 5 & 1\\ 3 & 3 & -7 & 15\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{vmatrix}.$$

Первую строку сложим со второй, первую строку умножим на (–3) и сложим с третьей, из четвертой строки вычтем первую. Получим:

$$|A| = 12\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -13 & 15\\ 0 & 1 & -2 & 3\end{vmatrix}.$$

К четвертой строке прибавим вторую:

$$|A| = 12\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -13 & 15\\ 0 & 0 & 5 & 4\end{vmatrix}.$$

Третью строку умножим на 5/13 и сложим с четвертой:

$$|A| = 12\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -13 & 15\\ 0 & 0 & 0 & \frac{127}{13}\end{vmatrix} = 12\cdot(-1)\cdot(-13)\cdot\frac{127}{13} = 1524.$$ ▲

1.27*. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix}p & c & 0 & 0 & ... & 0\\ c & p & c & 0 & ... & 0\\ 0 & c & p & c & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & p\end{vmatrix}.$$

Δ Разложим определитель D_n по элементам первого столбца, получим:

$$D_n = pD_{n-1} - c\begin{vmatrix}c & 0 & 0 & ... & 0\\ c & p & c & ... & 0\\ 0 & c & p & ... & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & p\end{vmatrix}.$$

Определитель во втором слагаемом разложим по элементам первой строки. В результате получим рекуррентную формулу:

$$D_n = pD_{n-1} - c^2 D_{n-2}.$$

Из нее получим формулу для вычисления определителя D_n, сведя её к формуле геометрической прогрессии. Для этого представим число p в виде двух слагаемых a и b, пока неизвестных. Тогда рекуррентную формулу можно переписать в одном из следующих видов:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - (c^2/b)\, D_{n-2}) \quad \text{или} \quad D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - (c^2/a) \times D_{n-2}).$$

Обе этих формулы описывают геометрическую прогрессию, если $c^2/b=a$ или $c^2/a=b$, т.е. $ab=c^2$. Таким образом, для определения чисел a и b имеем два условия: $ab=c^2$, $a+b=p$. Согласно теореме Виета, a и b – корни квадратного уравнения $x^2-px+c^2=0$. Итак, числа a и b найдены. Значит можно воспользоваться формулой для n-го члена геометрической прогрессии, т.е.

$$D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - aD_1) \text{ и } D_n - bD_{n-1} = a^{n-2}(D_2 - bD_1).$$

Отсюда, если $a \neq b$, то $D_n = xa^n + yb^n$, где $x = (D_2 - bD_1)/(a(a-b))$,

$y = (D_2 - aD_1)/(b(b-a))$, $D_1 = p$, $D_2 = p^2 - c^2$. ▲

1.28.* Вычислить **определитель Вандермонда** :

$$|W| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Δ Предпоследнюю строку умножим на x_1 и вычтем из последней, затем третью снизу строку умножим на x_1 и вычтем из второй снизу и так далее, вторую строку умножим на x_1 и вычтем из третьей, наконец, первую строку умножим на x_1 и вычтем из второй. В результате получим :

$$|W| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \ldots\ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \ldots\ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \ldots\ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца и вынесем общие множители столбцов за знак определителя :

$$|W| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots\ldots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \ldots\ldots & x_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots\ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Повторим процедуру, умножив строки на x_2, получим:

$$|W| = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2) =$$

$$= (x_4 - x_2)\ldots(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_3^2 & x_4^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_3^{n-2} & x_4^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$= \ldots = \mathop{\Pi}\limits_{i=1}^{n-1} (x_i - x_j), \quad i > j \geq 1$, где П – знак произведения. ▲

1.29. Определить четность перестановки

а) 1, 3, 5, 4, 2, 6, 8, 7; б) 2, 3, 4, 1, 5, 7, 6.

1.30. Являются ли произведения а) $a_{21}a_{12}a_{33}a_{54}a_{45}$ и б) $a_{51}a_{42}a_{34}a_{44}a_{13}$ слагаемыми определителя пятого порядка? Если да, то с каким знаком это слагаемое входит в определитель?

1.31* Вычислить определитель, приведя его к треугольному виду:

а) $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

1.32.* Вычислить определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

1.33. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & x & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

1.34. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

1.35. Решить уравнение:

а) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

1.36. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

1.37. Вычислить определитель, разложив его по элементам четвертой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3. Обратная матрица

Понятие обратной матрицы. Построение обратной матрицы методом присоединенной матрицы и методом Гаусса. Свойства обратных матриц

Квадратная матрица A, для которой $|A|\neq 0$, называется **невырожденной**. Матрица A^{-1} называется **обратной** для A, если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Матрица A^{-1} имеет обратную тогда и только тогда, когда она **невырожденная**.

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель $|A|$. Если $|A|=0$, то A^{-1} не существует.

2. Для матрицы $A=[a_{ij}]$ строим матрицу

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

3. Транспонируем матрицу $[A_{ij}]$, получаем **присоединенную матрицу**

$$B=\left[A_{ij}\right]^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Тогда $A^{-1}=(1/|A|)B$. (1.15)

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1. Перемена местами двух строк матрицы.

2. Умножение строки матрицы на ненулевое число.

3. Прибавление к элементам строки (столбца) матрицы линейной комбинации соответствующих элементов других строк (других столбцов).

Другим эффективным методом построения обратной матрицы является **метод Гаусса**. Суть его в следующем. Для невырожденной матрицы A составляется расширенная матрица

$$\left[A|E\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Элементарными преобразованиями 1–3 матрица [A|E] сводится к виду

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right]=\left[E|C\right].$$

Тогда $A^{-1}=C$.

Обратная матрица обладает свойствами:

1) $(A^{-1})^{-1}=A$.

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3) $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$.

4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

5) $|A^{-1}|=1/|A|=|A|^{-1}$.

1.38. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δ 1. Находим, что $|A| = -24$, т.е. A – невырожденная.

2. Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 5\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-5;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-30;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-6;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=12.$$

3. Присоединенная матрица

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & 3 & -6\\ -5 & -5 & 2\\ -30 & -6 & 12\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & -5 & -30\\ 3 & -5 & -6\\ -6 & 2 & 12\end{bmatrix}.$$

4. По формуле 1.15 обратная матрица

$$\mathrm{A}^{-1}=(-1/24)\begin{bmatrix}3 & -5 & -30\\ 3 & -5 & -6\\ 6 & 2 & 12\end{bmatrix}.$$

5. Для проверки находим произведение

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=(-1/24)\begin{bmatrix}3 & -5 & -30\\ 3 & -5 & -6\\ 6 & 2 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

т.е. матрица A^{-1} построена верно. ▲

Следует отметить, что вычисление присоединенной матрицы B очень трудоёмко, особенно для матриц высокого порядка. Поэтому на практике используют другой эффективный способ нахождения обратной матрицы – **метод Гаусса**, суть которого изложена выше.

1.39. Методом Гаусса найти обратную матрицу для

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Δ Запишем расширенную матрицу [A|E] и элементарными преобразованиями 1-3 сведем ее к виду [E|C]. Имеем:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-2\mathrm{II}^{*)}\\ \\ +\mathrm{II}\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&4&3&1&-2&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-4\mathrm{III}\\ +\mathrm{III}\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&-1&1&-6&-4\\1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-\mathrm{I}\\ +\mathrm{I}\\ +\mathrm{I}\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&-1&6&4\\1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right].\ \text{Итак, } \mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}.$$

Для проверки правильности преобразований находим произведение $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}$:

$$\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\ \blacktriangle$$

1.40. Методом Гаусса найти обратную матрицу для

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&4\end{bmatrix}.$$

$*)$ $-2\mathrm{II}$ означает, что от элементов первой строки вычитаются удвоенные элементы второй строки.

Δ Как в предыдущем случае, запишем расширенную матрицу [A|*E*] и с помощью элементарных преобразований 1-3 сведем ее к виду [*E*|C]:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\2&3&4&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ -\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}-\mathrm{II}\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-\mathrm{II}-\mathrm{III}/2\\ \\ :2\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5/2&-1/2&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&-1/2&1/2\end{array}\right].$$

$$\text{Итак, } \mathrm{A}^{-1}=\begin{bmatrix}5/2&-1/2&-1/2\\-1&1&0\\-1/2&-1/2&1/2\end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что произведение $A^{-1}A$ действительно есть единичная матрица. ▲

1.41. Методом Гаусса найти обратные для матриц

а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1.42. Методом присоединенной матрицы найти обратные для матриц

а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.43. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

1.44. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A:

а) переставить k-ю и l-ю строки;

б) k-ю строку умножить на число x, отличное от нуля;

в) к k-й строке прибавить l-ю, умноженную на число x?

1.45* Пусть $A^2+A+E=O$. Доказать, что матрица A невырожденная, и указать простейший способ вычисления A^{-1}.

1.46* Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ найти A^{-1}.

1.47. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$.

1.45* Пусть $A^2+A+E=O$. Доказать, что матрица A невырожденная, и указать простейший способ вычисления A^{-1}.

1.46* Для матрицы $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 1 & \ldots & 1\\ .. & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$ найти A^{-1}.

1.47. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}$.

2. Линейные пространства

2.1. Конечномерные линейные пространства

Определение линейного пространства. Понятие подпространства и линейной оболочки. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность линейного пространства. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Условие равенства нулю определителя

Множество U элементов (векторов) произвольной природы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\ldots$ называется **линейным** или **векторным пространством**, если в этом множестве определены операция сложения $\oplus$ векторов и операция $\otimes$ умножения вектора на действительное число α, удовлетворяющие следующим аксиомам, называемым **аксиомами линейного пространства**:

1^0. $\bar{x}\oplus\bar{y}=\bar{y}\oplus\bar{x}$, $\forall\, \bar{x},\ \bar{y}\in U$ (коммутативность сложения).

2^0. $(\bar{x}\oplus\bar{y})\oplus\bar{z}=\bar{x}\ (\bar{y}\oplus\bar{z})$, $\forall\, \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in U$ (ассоциативность сложения).

3^0. Существует единственный вектор $\bar{o}\in U$, называемый нулевым, такой, что $\bar{x}\oplus\bar{o}=\bar{o}\oplus\bar{x}=\bar{x}$, $\forall\, \bar{x}\in U$.

4^0. Для любого $\bar{x}\in U$ существует единственный вектор $(-\bar{x})$, называемый **противоположным** для $\bar{x}$, такой, что $\bar{x}\oplus(-\bar{x})=\bar{o}$.

5^0. $\alpha\otimes(\beta\otimes\bar{x})=(\alpha\beta)\otimes\bar{x}$, $\forall\, \bar{x}\in U$, $\forall\, \alpha,\beta\in R$.

6^0. $1\otimes\bar{x}=\bar{x}$, $\forall\, \bar{x}\in U$.

7^o. $(\alpha+\beta)\otimes\bar{x}=(\alpha\otimes\bar{x})\oplus(\beta\otimes\bar{x}), \forall\bar{x}\in U, \forall\alpha,\beta\in R$.

8^o. $\alpha\otimes(\bar{x}\oplus\bar{y})=(\alpha\otimes\bar{x})\oplus(\alpha\otimes\bar{y}), \forall\bar{x},\bar{y}\in U, \forall\alpha\in R$.

Подпространством линейного пространства U называется всякое подмножество $U_1 \subset U$, удовлетворяющее условиям:

1°. Если $\bar{x}, \bar{y} \in U_1$, то и $\bar{x} \oplus \bar{y} \in U_1$.

2°. Если $\bar{x} \in U_1$, то и $\alpha \otimes \bar{x} \in U_1, \forall \alpha \in R$.

Подпространство, в свою очередь, является линейным пространством.

Пусть $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots \bar{x}^n$ – векторы линейного пространства U. Вектор

$$\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}^1 + \alpha_2 \bar{x}^2 + \ldots + \alpha_n \bar{x}^n \qquad (2.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$, называется **линейной комбинацией** векторов $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Линейной оболочкой векторов (или **порожденной векторами**) $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ называется совокупность линейных комбинаций (2.1) этих векторов. Линейная оболочка обозначается L $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$.

Линейная оболочка является подпространством пространства U.

Векторы $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ линейного пространства U называются <u>линейно зависимыми</u>, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие что выполнено равенство

$$\alpha_1 \bar{x}^1 + \alpha_2 \bar{x}^2 + \ldots + \alpha_n \bar{x}^n = \bar{0}. \qquad (2.2)$$

Если же равенство (2.2) выполняется лишь в единственном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то векторы $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ называются **линейно независимыми**.

Справедливы следующие утверждения.

1°. Векторы $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных векторов.

2°. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

3°. Если в системе из n векторов $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n$ имеется k линейно зависимых векторов, $k < n$, то вся система линейно зависима.

4°. Любая часть линейно независимых векторов системы линейно независима.

Линейное пространство U называется ***n*-мерным**, если в нем существует n линейно независимых векторов, а всякие $n + 1$ векторов линейно зависимы. При этом n называется **размерностью пространства** U и обозначается n=dimU. **Базисом** n-мерного пространства U называется любая упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов этого пространства. Базис n-мерного пространства U обозначается $\{\overline{u}\} = \{\overline{u}^1, \overline{u}^2, \ldots, \overline{u}^n\}, где\ \overline{\mathrm{u}}^i$ - **базисные векторы**, $i = \overline{1,n}$.

Справедливы утверждения:

1°. Во всяком n-мерном пространстве любые m векторов, $m > n$, линейно зависимы. Другими словами, в n-мерном пространстве всякая система векторов, в которой их число больше, чем размерность пространства, всегда линейно зависима.

2°. Любой вектор $\overline{x}$ в n-мерном пространстве U единственным образом разлагается по базису $\{\overline{u}\} = \left\{\overline{u}^1, \overline{u}^2, \ldots, \overline{u}^n\right\}$ этого пространства в виде

$$\overline{x} = x_1\overline{u}^1 + x_2\overline{u}^2 + \ldots + x_n\overline{u}^n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{u}^i . \qquad (2.3)$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **координатами вектора** $\overline{x}$ **в базисе** $\{\overline{u}\}$. Если $\overline{x}$ представлен разложением (2.3), то этот факт часто записывается в виде $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$.

Линейные операции над векторами из U приводят к тем же операциям над координатами этого вектора, т.е. если в базисе $\{\overline{u}\}$ векторы $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $\forall \alpha, \beta \in R : \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = (\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \ldots , \alpha x_n + \beta y_n)$.

Базисом в R^3 является любая тройка некомпланарных векторов; в R^2 – любая пара неколлинеарных векторов; в R^1 – любой ненулевой вектор.

Рангом $m \times n$ **матрицы** A называется максимальное число линейно независимых строк или столбцов этой матрицы, рассматриваемых как вектор–строки из R^n и вектор-столбцы из R^m соответственно.

Ранг матрицы A обозначается rang A или r (A).

Ранг трапециевидной матрицы равен числу ненулевых элементов, стоящих на диагонали этой матрицы.

Элементарными преобразованиями 1 – 3 матрицу всегда можно свести к треугольной (частный случай трапециевидной матрицы) или к трапециевидной форме. Нулевая строка (или столбец) не влияет на величину ранга. Поэтому нулевые строки (столбцы) можно из матрицы удалить, не изменяя ее ранга.

Если в $m \times n$ матрице A вычеркнуть k строк и k столбцов, $k \le \min\{m, n\}$, то из элементов, стоящих на пересечении этих вычеркиваемых k строк и столбцов, можно образовать определитель k-го порядка, называемый **минором порядка** k матрицы A.

Другое определение ранга матрицы: ранг матрицы A равен максимальному порядку минора матрицы, отличного от нуля. Этот минор называется **базисным**, а вычеркиваемые строки и столбцы матрицы, порождающие базисный минор, называются **базисными**.

Справедлива

Теорема о базисном миноре. ***Для того чтобы ранг матрицы был равен r, необходимо и достаточно, чтобы существовал отличный от нуля минор порядка r, а всякий минор (r + 1)-го порядка был равен нулю.***

Справедливо следующее утверждение (**условие равенства нулю определителя**).

Пусть A – n × n – матрица. Тогда

$(|A| \neq 0) \Longleftrightarrow (\mathrm{rang}\, A = n);$

$(|A| = 0) \Longleftrightarrow (\mathrm{rang}\, A < n). \qquad (2.4)$

Если rang A = rang B, то этот факт записывается в виде A ~ B.

2.1. Множество действительных чисел R с обычным их сложением и умножением образует линейное пространство. В этом пространстве векторы – числа. Нулевым вектором является число 0. Справедливость аксиом 1° - 8° не вызывает сомнения. Противоположным для $x \in$ R является ($-x$).

2.2. Множество свободных геометрических векторов физического пространства образует линейное пространство R^3. Роль нулевого вектора играет вектор $\overline{0}$. Противоположным для $\overline{a}$ является вектор $-\overline{a}$.

2.3. Множество R^n, векторами которого являются упорядоченные наборы n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, также образуют линейное пространство. Если $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ на $\alpha \in$ R в этом множестве введем следующим образом: $\overline{x} \oplus \overline{y} = = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$; $\alpha \otimes \overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Нетрудно убедиться, что относительно введенных операций R^n образует линейное пространство. Справедливость аксиом 1° - 8° очевидна, нулевым вектором является $\overline{0} = \underbrace{(0,0,\dots,0)}_{n}$, противоположным для $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является вектор
$-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

2.4. Множество $\{P_n(x)\}$ многочленов степени не выше n с обычными определениями сложения и умножения на число образует линейное пространство, в котором роль нулевого элемента играет многочлен, тождественно равный нулю. Справедливость аксиом 1° - 8° очевидна.

2.5. Образует ли линейное пространство множество действительных чисел R, если

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = xy, \ \alpha \otimes \overline{x} = \alpha x? \qquad (2.5)$$

Δ1°. $\overline{x} \oplus \overline{y} = xy = yx = \overline{y} \oplus \overline{x}$ - аксиома 1° справедлива.

2°. $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = (xy)z = xyz = x(yz) = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$ – аксиома 2° справедлива.

3°. Роль нуль-вектора $\overline{0}$ играет число 1, так $\overline{x} \oplus \overline{0} = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in R$, т.е. аксиома 3° выполняется.

4°. Поскольку в этом множестве нуль-вектором является число 1, то равенство $\overline{0} = \overline{x} \oplus (-\overline{x}) = 1$ возможно, когда $-\overline{x} = 1/x$, ибо тогда $\overline{x} \oplus (-\overline{x}) =$
$= x \cdot 1/x = 1 = \overline{0}$, т.е. противоположным для $\overline{x}$ является число $1/x$. Но для числа 0 противоположное число отсутствует. Поэтому аксиома 4° не имеет места.

Таким образом, множество действительных чисел R с введенными по формулам (2.5) операциями $\oplus$ и $\otimes$ не является линейным пространством. ▲

2.6. Пусть U – множество сходящихся числовых последовательность $\overline{x} =$ $=(x_n)$, $\overline{y} = (y_n)$, $\overline{x} \oplus \overline{y} = (x_n + y_n)$, $\alpha \otimes \overline{x} = (\alpha x_n)$ и пусть U_0 и U_1 – множества последовательностей, сходящихся к 0 и 1 соответственно. Являются ли U_0 и U_1 подпространствами пространства U?

Δ Пусть $\overline{x} = (x_n)$, $\overline{y} = (y_n)$ – векторы из U_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0 \Rightarrow \overline{x} \oplus \overline{y} \in U_0;\ \lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \otimes \overline{x} \in U_0.$$

Значит, U_0 – подпространство линейного пространства U.

Пусть теперь $\overline{x} = (x_n)$, $\overline{y} = (y_n)$ – векторы из U_n, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 2$, т.е. $\overline{x} \oplus \overline{y} \notin U_1$. Следовательно, U_1 не является подпространством линейного пространства U. ▲

2.7. Определить линейную оболочку, порожденную векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из R^3.

Δ $\forall \alpha, \beta \in R$ линейная комбинация $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ представляет собой вектор, компланарный плоскости, образованной векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда линейная оболочка $L(\overline{a}, \overline{b})$ есть множество векторов, компланарных этой плоскости. ▲

2.8. Доказать, что вектор $\overline{a} = (2, -1, 6, 4) \in R^4$, принадлежит линейной оболочке, порожденной векторами $\overline{x}^1 = (1, 5, -2, 1)$ и $\overline{x}^2 = (11, 11, 18, 19)$.

Δ Если $\bar{a} \in L(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, то существуют числа α и β такие, что имеет место система:

$$\bar{a} = \alpha \bar{x}^1 + \beta \bar{x}^2 <=> \begin{cases} 2 = \alpha + 11\beta, \\ -1 = 5\alpha + 11\beta, \\ 6 = -2\alpha + 18\beta, \\ 4 = \alpha + 19\beta. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим числа α = – 3/4, β = 1/4, которые также удовлетворяют третьему и четвертому уравнениям системы. Значит, $\bar{a}$ = – (3/4) $\bar{x}^1$ + (1/4) $\bar{x}^2$, т.е., действительно, $\bar{a} \in L(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$. ▲

2.9. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

$\bar{x}^1 = e^t$, $\bar{x}^2 = \operatorname{sh} t$, $\bar{x}^3 = \operatorname{ch} t$, $t \in R$.

Δ Составляем равенство (2.2):

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 \operatorname{sh} t + \alpha_3 \operatorname{ch} t = 0. \qquad (2.6)$$

Так как соотношение (2.6) должно выполняться $\forall t \in R$, то, положив в нем, например, t = 0, получим $\alpha_1 + \alpha_3 = 0 => \alpha_3 = -\alpha_1$. Продифференцируем далее равенство (2.6) по t : $\alpha_1 e^t + \alpha_2 \operatorname{ch} t + \alpha_3 \operatorname{sh} t = 0$, $\forall t \in R$. Отсюда при t = 0 имеем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 => \alpha_2 = -\alpha_1$.

Таким образом, равенство (2.6) приобретает вид

$$\alpha_1 (e^t - \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) = 0. \qquad (2.7)$$

Так как должно иметь место равенство $e^t - \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \equiv 0$, $\forall t \in R$, то соотношение (2.7) должно выполняться $\forall \alpha \neq 0$. Значит, положив в (2.6) $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, где $\alpha_1 \neq 0$, получим, что оно выполняется при $\alpha_1 \neq 0$, т.е. система векторов (функций) e^t, sh t, ch t линейно зависима на R и имеет место равенство $e^t = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t$. ▲

2.10. Исследовать на линейную зависимость векторы $\bar{a}$ = (2, 1, 0), $\bar{b}$ = (–5, 0, 3), $\bar{c}$ = (3, 4, 3).

Δ Составляем соотношение

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{c} = \bar{0}. \qquad (2.8)$$

Равенство (2.8) в скалярной (координатной) записи равносильно системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &2\alpha - 5\beta + 3\gamma = 0,\\ &\alpha + 4\gamma = 0,\\ &3\beta + 3\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

относительно α, β, γ. Из второго и третьего уравнений системы (2.9) получаем $\alpha = -4\gamma$, $\beta = -\gamma$, а из первого уравнения этой системы находим $-8\gamma + 5\gamma + 3\gamma = 0$, $\forall\gamma \in \mathrm{R}$. Таким образом, равенство (2.8) справедливо при $\alpha = -4\gamma$, $\beta = -\gamma$, причем γ можно выбрать естественно отличным от нуля, т.е. имеет место равенство $-4\gamma\,\bar{a} - \gamma\,\bar{b} + \gamma\,\bar{c} = \bar{0}$, $\forall\gamma \neq 0$, или $\bar{c} = 4\bar{a} + \bar{b}$, т.е. $\bar{c}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с коэффициентами 4 и 1. Значит, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – линейно зависимые векторы. ▲

2.11. Доказать, что векторы $\bar{x}^1 = 1$, $\bar{x}^2 = 1 + \mathrm{t}$, $\bar{x}^3 = 1 + \mathrm{t}^2$, $\bar{x}^4 = 1 + \mathrm{t}^3$, $\bar{x}^5 = 1 + \mathrm{t}^4$, $\bar{x}^6 = 1 + \mathrm{t}^5$ образуют базис в линейном пространстве многочленов степени не выше 5. Найти его размерность и координаты вектора (функции) $P_5(\mathrm{t}) = a_0 + a_1\mathrm{t} + a_2\mathrm{t}^2 + a_3\mathrm{t}^3 + a_4\mathrm{t}^4 + a_5\mathrm{t}^5$ в этом базисе.

Δ Покажем, что векторы $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^6$ линейно независимы. Для этого составляем равенство (2.2):

$$\alpha_1\bar{x}^1 + \alpha_2\bar{x}^2 + \alpha_3\bar{x}^3 + \alpha_4\bar{x}^4 + \alpha_5\bar{x}^5 + \alpha_6\bar{x}^6 = \bar{0} \qquad (2.10)$$

или $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_2\mathrm{t} + \alpha_3\mathrm{t}^2 + \alpha_4\mathrm{t}^3 + \alpha_5\mathrm{t}^4 + \alpha_6\mathrm{t}^5 = 0$, которое должно иметь место $\forall t \in R$. Это возможно лишь тогда, когда его коэффициенты нулевые, т.е.

$$\left.\begin{array}{llllllr} \alpha_1 + & \alpha_2 + & \alpha_3 + & \alpha_4 + & \alpha_5 + & \alpha_6 & = 0,\\ & \alpha_2 & & & & & = 0,\\ & & \alpha_3 & & & & = 0,\\ & & & \alpha_4 & & & = 0,\\ & & & & \alpha_5 & & = 0,\\ & & & & & \alpha_6 & = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0,\\ \alpha_2 = 0,\\ \alpha_3 = 0,\\ \alpha_4 = 0,\\ \alpha_5 = 0,\\ \alpha_6 = 0. \end{cases}$$

Итак, равенство (2.10) имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_6 = 0$, т.е. векторы $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^6$ линейно независимы, и так как их число равно 6, тогда они образуют базис. Любая комбинация этих векторов представляет собой многочлен степени $n \le 5$. Найдем координаты вектора $P_5(t)$ в этом базисе. Для этого составим равенство

$a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 = \beta_1 \cdot 1 + \beta_2(1 + t) + \beta_3(1 + t^2) + \beta_4(1 + t^3) + \beta_5(1 + t^4) + \beta_6(1 + t^5)$,

откуда ясно, что

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_0 = & \beta_1 + & \beta_2 + & \beta_3 + & \beta_4 + & \beta_5 + & \beta_6, \\ a_1 = & & \beta_2, & & & & \\ a_2 = & & & \beta_3, & & & \\ a_3 = & & & & \beta_4, & & \\ a_4 = & & & & & \beta_5, & \\ a_5 = & & & & & & \beta_6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5, \\ \beta_2 = a_1, \\ \beta_3 = a_2, \\ \beta_4 = a_3, \\ \beta_5 = a_4, \\ \beta_6 = a_5. \end{array}\right. \qquad (2.11)$$

Итак, числа (2.11) являются координатами вектора $P_5(t)$ в базисе $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^6$. ▲

2.12.* Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства $U_1 \subset R^3$, если U_1 определяется множеством решений уравнения

$$x - 2y + 3z = 0. \qquad (2.12)$$

Δ Уравнение 2.12 определяет плоскость P в R^3, проходящую через начало координат (рис. 2.1). Базисом же на плоскости служат любые два неколлинеарных вектора, т.е. $\dim U_1 = 2$.

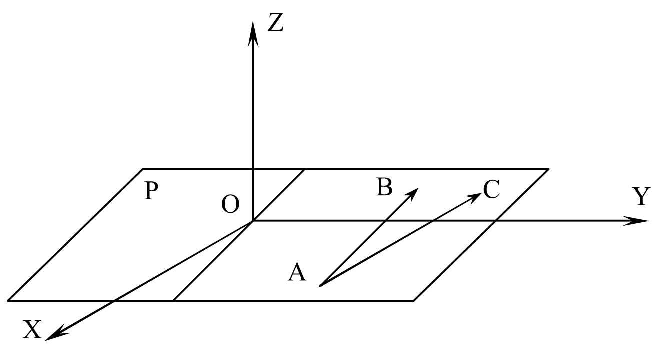

Рис. 2.1

Для отыскания базисных векторов найдем три точки A, B, C, лежащие в этой плоскости и не принадлежащие одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и будут искомыми базисными векторами.

Находим координаты точек A, B, C. Для этого в уравнении (2.12) последовательно положим:

1) $x = 0$; 2) $y = 0$; 3) $z = 0$.

Получим:

1) $x = 0 \Rightarrow y = (3/2)\,z$; 2) $y = 0 \Rightarrow x = -3z$; 3) $z = 0 \Rightarrow x = 2y$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3z/2 \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этих равенствах z и y – произвольные константы, отличные от нуля, т.е. в качестве точек A, B, C можно взять A = (0, 3, 2), B = (–3, 0, 1), C=(2,1,0).Следовательно, базисные векторы $\overrightarrow{AB} = (-3,-3,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,-2,-2)$, причем видно, что $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.

По этой схеме можно получить и другие три точки A', B', C' плоскости, не совпадающие с найденными точками A, B, C. Векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$ тоже определяют базис на этой плоскости. ▲

2.13. Вычислить ранг матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Δ а) Элементарными преобразованиями матрицу преобразуем следующим образом:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&0&2&0\\3&2&5&1\\1&0&1&-2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\-2\mathrm{I}\\-3\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-4&-4&-2\\0&-4&-4&-2\\0&-2&-2&-3\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\cdot(-1/2)\\-\mathrm{II}\\-(1/2)\mathrm{II}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&2&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}.$$

Получили верхнюю треугольную матрицу с тремя ненулевыми элементами на главной диагонали. Значит, rang A = 3.

б) Имеем

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\3&2&1&1&-3&-2\\0&1&2&2&6&23\\5&4&3&3&-1&12\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\-3\mathrm{I}\\\\-5\mathrm{I}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-1&-2&-2&-6&-23\\0&1&2&2&6&23\\0&-1&-2&-2&-6&-23\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\+\mathrm{II}\\-\mathrm{II}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-1&-2&-2&-6&-23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&-1&-2&-2&-6&-23\end{bmatrix}.$$

Получили трапециевидную матрицу с двумя ненулевыми строками. Значит, rang B = 2. В качестве базисного минора можно взять любой отличный от нуля минор второго порядка. ▲

2.14. Определить ранг системы векторов $\bar{x}^1 = (3, 0, 1, 4)$, $\bar{x}^2 = (2, -1, 4, 5)$, $\bar{x}^3 = (6, -1, 2, 17)$, $\bar{x}^4 = (1, -1, 2, 7)$ из R^4. Зависимы они или независимы?

Δ Будем рассматривать данные векторы как векторы-строки матрицы A (порядок следования строк не имеет значения) и найдем ее ранг:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&7\\3&0&1&4\\6&-1&2&17\\2&-1&4&5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\-3\mathrm{I}\\-6\mathrm{I}\\-2\mathrm{I}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&7\\0&3&-5&-17\\0&5&-10&-25\\0&1&0&-9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&7\\0&1&0&-9\\0&5&-10&-25\\0&3&-5&-17\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\-5\mathrm{I}\\-3\mathrm{I}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&7\\0&1&0&-9\\0&0&-10&20\\0&0&-5&10\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\(-1/2)\mathrm{III}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&7\\0&1&0&-9\\0&0&-10&20\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Получили трапециевидную матрицу с тремя отличными от нуля элементами на диагонали. Значит, r (A) = 3. Так как 3 меньше числа векторов, то эти векторы линейно зависимы. ▲

2.15.* Определить ранг r(λ) матрицы $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$ в зависимости от λ.

Δ Заметим, что при λ = 0 матрица A имеет вид $A(0)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, ранг которой (это несложно получить) равен r(0) = 3, так как |A(0)| = 2 ≠ 0.

Пусть λ ≠ 0. Тогда $\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}-\lambda\mathrm{III} & -\mathrm{III} & \end{array}\\ \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}\end{array}\sim$ |к элементам первого и второго столбцов прибавляются элементы третьего столбца, умноженные соответственно на –λ и –1.

$$\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1-\lambda & \lambda-1 & 1\\ 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda\end{bmatrix}\sim|\lambda\neq 1|\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1+\lambda & 1 & \lambda\end{bmatrix}+\mathrm{I},\ +\mathrm{III}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2+\lambda & 0 & 2+\lambda\\ 1+\lambda & 1 & \lambda\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2+\lambda},\lambda\neq-2,$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & & -\mathrm{I}\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1+\lambda & 1 & \lambda\end{bmatrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}-(1+\lambda)\mathrm{II} & & \end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1+\lambda & 1 & -1\end{bmatrix}\end{array}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Итак, при λ ≠1 и λ ≠ –2 матрица A(λ) имеет ранг r(λ) = 3. При λ = 1 и λ=–2 матрица имеет, очевидно, ранг, равный 1 и 2 соответственно. (Проверьте это!)

Таким образом, окончательно $r(\lambda)=\begin{cases}3, \lambda \neq 1, \lambda \neq -2;\\ 2, \lambda = -2;\\ 1, \lambda = 1.\end{cases}$ ▲

2.16. Образует ли линейное пространство множество всех непрерывных функций $\overline{a}$ = f(x), $\overline{b}$ = g (x) , таких что f(x_0) = 0, g(x_0) = 0, где x_0 – некоторая фиксированная точка, если f(x) $\oplus$ g(x) = f(x) + g(x), α $\otimes$ f(x) = α f(x)?

2.17. Является ли линейным пространством множество положительных чисел, если $\overline{x} \oplus \overline{y} = xy, \alpha \otimes \overline{x} = x^{\alpha}$?

2.18. Может ли линейное пространство состоять: а) из одного вектора;
б) из двух векторов?

2.19. Из линейного пространства исключен вектор $\overline{x}$. Является ли полученное таким образом множество линейным пространством?

2.20. Доказать, что множество ($m \times n$)–матриц образует линейное пространство относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число, найти размерность и базис этого пространства $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{m \times n}$.

2.21. Выяснить, образует ли данное множество функций на [a, b] линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

1) множество функций, непрерывных на [a, b];

2) множество функций, дифференцируемых на [a, b];

3) множество функций, интегрируемых на [a, b] по Риману;

4) множество функций, ограниченных на [a, b];

5) множество функций, неотрицательных на [a, b];

6) множество функций, таких что f(a) = 0;

7) множество функций, таких что f(a) = 1;

8) множество функций, таких что $\lim\limits_{x \to a+0} \mathrm{f}(x) = \infty$;

9) множество функций, монотонно возрастающих на [a, b].

2.22. Доказать, что $\forall n \in N$ данное множество функций образует линейное пространство:

1) множество четных многочленов степени не выше n;

2) множество нечетных многочленов степени не выше n;

3) множество тригонометрических многочленов порядка не выше n, т.е. множество функций вида $f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$;

4) множество четных тригонометрических многочленов порядка не выше n;

5) множество нечетных тригонометрических многочленов порядка не выше n;

6) множество функций вида $f(x) = e^{\alpha x}(a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + \quad + a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, $\alpha \in R$.

2.23. Является ли множество четных чисел подпространством пространства R?

2.24. Является ли подпространством пространства непрерывных функций множество всех четных (нечетных) функций, определенных на $[-a, a]$?

2.25. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве:

1) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

2) множество векторов, первая координата которых равна 0;

3) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

4) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

5) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;

6) множество векторов из R^3, перпендикулярных данной прямой;

7) множество векторов из R^2, по модулю не превосходящих 1;

8) множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой, $0 \le \alpha \le 90^o$.

2.26. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n:

1) множество матриц с нулевой первой строкой;

2) множество диагональных матриц;

3) множество верхних треугольных матриц;

4) множество симметрических матриц;

5) множество кососимметричных матриц;

6) множество вырожденных матриц.

2.27. Образует ли множество X линейное пространство с естественными операциями сложения и умножения на число? Образует ли множество Y $\subset$X подпространство в X?

1) X – множество всех матриц вида $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ z & 0 & u \\ -y & -t & s \end{bmatrix}$, $x, y, z, u, v, t, s \in$ R;

Y – матрицы вида $\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & u \\ -y & -u & s \end{bmatrix}$.

2) X – множество всех многочленов от x, степень которых не превосходит 5, Y– многочлены степени 3.

3) X – множество матриц вида $\begin{bmatrix} x & y & z \\ -y & x & u \\ -z & -u & x \end{bmatrix}$, Y – те же матрицы с определителем, равным 1.

4) X – множество всех многочленов от x и у вида $\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2$; Y – многочлены вида βxy, $\alpha, \beta \in$ R.

5) X – множество всех векторов из R^3, выходящих из начала координат и заканчивающихся на плоскости $z = 5x - y$; Y – векторы, заканчивающиеся на прямой $z = 5x - y$, $z = x + y$.

6) X – множество всех векторов из R^3, выходящих из начала координат и заканчивающихся на плоскости $z = 3x - 4y$; Y – векторы из X, длина которых равна 1.

2.28. Описать линейные оболочки систем векторов пространства R^5:

а) $\bar{x}^1 = (1, 0, 0, 0, 0)$; $\bar{x}^2 = (0, 0, 1, 0, 0)$; $\bar{x}^3 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

б) $\bar{x}^1 = (1, 0, 0, 0, 1)$; $\bar{x}^2 = (0, 1, 0, 1, 0)$; $\bar{x}^3 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

в) $\overline{x}^1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1)$; $\overline{x}^2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1)$; $\overline{x}^3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1)$; $\overline{x}^4 = (0, 0, 0, 1, -1)$.

2.29. Найти линейные оболочки следующих систем многочленов:

а) $1, x, x^2$; б) $1 + x^2, x + x^2, 1 + x + x^2$;

в) $1 - x^2, x - x^2, 2 - x - x^2$; г) $1 - x^2, x - x^2$.

2.30. Исследовать на линейную зависимость векторы:

а) $\overline{a} = (1, 1{,}2)$; $\overline{b} = (0, 1, 1)$, $\overline{c} = (1, 1, 1)$;

б) $\overline{x}^1 = \sin^2 t$; $\overline{x}^2 = 5\cos^2 t$, $\overline{x}^3 = 1$;

в) $2x^4 - 3,\ x^4 - 4x^3 - x + 1,\ 2x^3 + x^2,\ 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 7$;

г) $x^4 + 1,\ x^3 + 2,\ x^2 + 3,\ x + 4,\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2.31. В R^3 $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ – базис. Найти линейную комбинацию векторов $\overline{m} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{n} = 2\overline{a} + 3\overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{l} = 5\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$, если они линейно зависимы, или установить их линейную независимость.

Сделать то же самое для векторов $\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$, $\overline{q} = \overline{a} - \overline{c}$, $\overline{r} = 3\overline{b} + \overline{c}$.

2.32.* В линейном пространстве матриц второго порядка с обычными определениями сложения и умножения на числа даны матрицы

$$\overline{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{e}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{e}^4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{X} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Показать, что матрицы $\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3, \overline{e}^4$ образуют базис, и найти в нем координаты матрицы X.

2.33. Доказать, что матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка можно принять за базисные. Найти координаты матриц

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, г) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

в этом базисе.

2.34. Доказать, что в R^4 векторы $\bar{x}$=(5, –1, 0, 1), $\bar{y}$ = (3, 2, –1, 0), $\bar{z}$ = (1, 1, 1, 1), $\bar{u}$ = (0, 0, 0, 2) образуют базис, и найти разложение вектора $\bar{v}$ = (16, 3, 2, 7) в этом базисе.

2.35. Вычислить ранг матриц

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 10 & 2 & 7 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 23 & -18 & 2 \end{bmatrix};\qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & -1 & 9 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};\qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.36. Определить ранг следующих систем векторов:

а) $\bar{x}^1$=(2, 1, 11, 2), $\bar{x}^2$=(1, 0, 4, -1), $\bar{x}^3$=(11, 4, 56, 5), $\bar{x}^4$=(2, -1, 5, 6);

б) $\bar{x}^1$=(1, 1, 0, 0, 0), $\bar{x}^2$ = (0, 1, 1, 0, 1), $\bar{x}^3$=(0, 0, 0, 1, 1), $\bar{x}^4$=(0, 0, 0, 0, 1);

в) $\bar{x}^1$=(2, 0, 2, 0), $\bar{x}^2$=(0, 1, 1, 1), $\bar{x}^3$=(2, 0, 0, 0), $\bar{x}^4$= (0, 1, 2, 1); $\bar{x}^5$ = (2, 0, 1, 0);

г) $\bar{x}^1$= (3, 2, -1, 2, 0, 1), $\bar{x}^2$= (4, 1, 0, -3, 0, 2), $\bar{x}^3$= (2, -1, -2, 1, 1, -3), $\bar{x}^4$ = (3, 1, 3, -9, -1, 6); $\bar{x}^5$= (3, -1, -5, 7, 2, -7).

2.37. * Чему равен ранг r(λ) матрицы при различных значениях λ?

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.38. Найти значения λ, при которых матрица

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

2.2. Евклидовы пространства

Определение евклидова пространства. Норма вектора. Неравенство треугольника. Неравенство Коши–Буняковского. Расстояние между векторами. Угол между векторами. Ортогональный и ортонормированный базис евклидова пространства. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Линейное пространство U называется **евклидовым**, если каждой паре векторов $\overline{x}, \overline{y} \in U$ поставлено в соответствие действительное число $(\overline{x}, \overline{y})$, называемое **скалярным произведением** этих векторов и удовлетворяющее свойствам:

1°. $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$; $(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, если $\overline{x} = \overline{0}$.

2°. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U$.

3°. $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \alpha\overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y}), \forall \overline{x}, \overline{y} \in U \ \forall \alpha \in R$.

4°. $(\overline{x}+\overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$, $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in U$.

Из 3° - 4° следует, что в евклидовом пространстве

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \overline{x}^i, \overline{y}) = (\alpha_1 \overline{x}^1 + \alpha_2 \overline{x}^2 + \ldots + \alpha_n \overline{x}^n, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overline{x}^i, \overline{y}). \qquad (2.13)$$

Величина $\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$ называется **нормой вектора** $\overline{x} \in U$. Она удовлетворяет свойствам

1°. $\|\overline{x}\| \geq 0$, $\|\overline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

2°. $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\overline{x}\|$, $\forall \overline{x} \in U$, $\forall \alpha \in R$.

3°. $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in U$.

Свойство 3° называется **неравенством треугольника** или **неравенством Минковского**.

В евклидовом пространстве **справедливо неравенство Коши–Буняковского**

$$|(\overline{x}, \overline{y})| \leq \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}\|. \qquad (2.14)$$

Расстояние $\rho(\overline{x}, \overline{y})$ между векторами $\overline{x}, \overline{y} \in U$ определяется формулой

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x}-\bar{y}, \bar{x}-\bar{y})}.$$

Оно обладает свойствами:

1º. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ при $\bar{x} = \bar{y}$.

2º. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$.

3º. $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in U$ (неравенство треугольника).

Углом между ненулевыми векторами $\bar{x}, \bar{y} \in U$ называется угол φ, удовлетворяющий равенству

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}. \tag{2.15}$$

Два вектора $\bar{x}, \bar{y}$ евклидова пространства U называются **ортогональными**, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Справедлива

<u>**Теорема 2.1**</u>. ***Система попарно ортогональных векторов евклидова пространства U, не содержащая нулевой вектор, линейно независима.***

Если число попарно ортогональных ненулевых векторов $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$, …, $\bar{u}^n$ равно размерности *n* пространства *U*, то эти векторы можно взять в качестве базисных векторов пространства. Такой базис $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\}$ называется **ортогональным**. Если, кроме того, норма каждого вектора $\bar{u}^i$, $i = \overline{1,n}$, ортогонального базиса равна единице, то базис **называется ортонормированным (ОНБ)**.

Другими словами, базис $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\}$, называется ортонормированным, если

$$(\bar{u}^i, \bar{u}^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j, \end{cases}$$

где δ_{ij} – **символ Кронекера**.

Имеет место

__Теорема 2.2__. ***Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.***

Теорема утверждает о наличии в евклидовом пространстве ортонормированного базиса. Но это не означает, что такой базис единствен. В каждом *n*-мерном евклидовом пространстве существует бесчисленное множество ортонормированных базисов.

В евклидовом пространстве R^n одним из ортонормированных базисов является **канонический базис** $\{\bar e\} = \{\bar e^1, \bar e^2, \ldots, \bar e^n\}$, где $\bar e^1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\bar e^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, … , $\bar e^n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. В частности, в евклидовом пространстве R^3 ортонормированный базис состоит из трех векторов

$\bar e^1 = \bar i = (1, 0, 0)$, $\bar e^2 = \bar j = (0, 1, 0)$, $\bar e^3 = \bar k = (0, 0, 1)$.

Всякую систему *n* линейно независимых векторов евклидова пространства U можно ортонормировать с помощью ***метода ортогонализации*** **Грама-Шмидта**, суть которого в следующем.

Пусть $\bar x^1, \bar x^2, \ldots, \bar x^n$ – линейно независимые векторы евклидова пространства U. Тогда ортонормированная система векторов $\bar u^1, \bar u^2, \ldots, \bar u^n$ получается по схеме:

$$\bar v^1 = \bar x^1 \longrightarrow \bar u^1 = \bar v^1 / \left\|\bar v^1\right\|.$$

$$\bar v^2 = \bar x^2 - (\bar x^2, \bar u^1)\bar u^1 \longrightarrow \bar u^2 = \bar v^2 / \left\|\bar v^2\right\|.$$

$$\bar v^3 = \bar x^3 - (\bar x^3, \bar u^1)\bar u^1 - (\bar x^3, \bar u^2)\bar u^2 \longrightarrow \bar u^3 = \bar v^3 / \left\|\bar v^3\right\|.$$

. . . .

$$\bar v^n = \bar x^n - (\bar x^n, \bar u^1)\bar u^1 - (\bar x^n, \bar u^2)\bar u^2 - \ldots(\bar x^n, \bar u^{n-1})\bar u^{n-1} \to \bar u^n = \bar v^n / \left\|\bar v^n\right\|.$$

Если $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\}$ – ортонормированный базис евклидова пространства U и $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{u}^i$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{u}^i$ - два вектора из U, то их скалярное произведение

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \qquad (2.16)$$

Отсюда условием ортогональности векторов $\bar{x}$, $\bar{y} \in U$ в ортонормированном базисе $\{\bar{u}\}$ является равенство

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0 <=> \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0. \qquad (2.17)$$

Координаты вектора $\bar{x}$ в ортонормированном базисе $\{\bar{u}\}$ вычисляются по формуле $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{u}^1)\, \bar{u}^1 + (\bar{x}, \bar{u}^2)\, \bar{u}^2 + \ldots + (\bar{x}, \bar{u}^n)\, \bar{u}^n = \sum_{i=1}^{n} (x_i \bar{u}^i) \bar{u}^i$, т.е.

$$x_1 = (\bar{x}, \bar{u}^1),\ x_2 = (\bar{x}, \bar{u}^2),\ \ldots,\ x_n = (\bar{x}, \bar{u}^n). \qquad (2.18)$$

Если же $\{\bar{v}\} = \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n\}$ – ортогональный базис евклидова пространства U, то скалярное произведение векторов $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{v}^i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{v}^i$ из U определяется равенством $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \|\bar{v}^i\|^2$.

2.39. Образует ли евклидово пространство множество P_2 всех многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, если скалярное произведение в нем ввести по формуле

(f, g) = f(–1) · g(–1) + f(0) ·g(0) + f(1) ·g(1)?

Δ Нулевой многочлен, есть многочлен степени не выше 2. Множество P_1 содержит многочлен степени не выше 2, умноженный на любое $\alpha \in R$, есть тоже многочлен степени не выше 2.

Сумма двух многочленов степени не выше 2 есть, очевидно, многочлен степени не выше двух.

Таким образом, P_2 есть линейное пространство.

Чтобы убедиться в том, что P_2 является евклидовым пространством, нужно проверить выполнимость четырех аксиом скалярного произведения.

1) (f, g) = (g, f). Имеем:

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) = g(-1) \cdot f(-1) + g(0) \cdot f(0) =$$
$$= g(1) \cdot f(1) = (g, f).$$

2) (f + φ, g) = (f, g) + (φ, g). По определению

$$(f + \varphi, g) = (f(-1) + \varphi(-1))\, g(-1) + (f(0) + \varphi(0))\, g(0) + (f(1) + \varphi(1))\, g(1) =$$
$$= f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1) + \varphi(-1)\, g(-1) + \varphi(0)\, g(0) + \varphi(1)\, g(1) =$$
$$= (f, g) + (\varphi, g).$$

3) Проверим, что (α f, g) = α(f, g), где $\alpha \in R$. Имеем:

$$(\alpha f, g) = \alpha f(-1)\, g(-1) + \alpha f(0)\, g(0) + \alpha f(1)\, g(1) =$$
$$= \alpha\, (f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)) = \alpha\, (f, g).$$

4) Очевидно, что

$$(f, f) = (f(-1))^2 + (f(0))^2 + (f(1))^2 \geq 0.$$

Покажем, что (f, f) = 0 => f(x) ≡ 0. В самом деле, пусть (f, f) = 0, т.е.

$$(f(-1))^2 + (f(0))^2 + (f(1)) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$f(-1) = 0,\ f(0) = 0,\ f(1) = 0.$$

Так как степень многочлена f(x) не превосходит 2, то число корней этого многочлена не может быть больше 2. Следовательно, f(x) ≡ 0, т.е. f(x) – нулевой элемент пространства P_2.

Таким образом, P_2 с введенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

Норма вектора $f(x) \in P_2$ определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{(f(-1))^2 + (f(0))^2 + (f(1))^2}\ .$$

Угол между векторами f (x) и g(x) вычисляется по формуле

$$\cos(\widehat{f,g}) = \frac{(f,g)}{\|f\|\cdot\|g\|} =$$

$$= \frac{f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)}{\sqrt{(f(-1))^2 + (f(0))^2 + (f(1))^2}\cdot\sqrt{(g(-1))^2 + (g(0))^2 + (g(1))^2}}\ .$$

Неравенство Коши–Буняковского имеет вид

$|(f, g)| = |f(-1)\, g(-1) + f(0)\, g(0) + f(1)\, g(1)| \le \|f\| \cdot \|g\| =$

$= \sqrt{(f(-1))^2 + (f(0))^2 + (f(1))^2}\cdot\sqrt{(g(-1))^2 + (g(0))^2 + (g(1))^2}$. ▲

2.40. Можно ли в линейном пространстве M_2 матриц второго порядка ввести скалярное произведение по формуле

$(A, B) = a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 - d_1d_2$,

где $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$?

Δ Нельзя, так как для ненулевой матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\|A\|^2 = (A, A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1 - 1 = 0$. ▲

2.41.* Дана система векторов

$$\overline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overline{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Пусть $L = L(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3, \overline{x}^4)$ – линейная оболочка этих векторов.

Требуется:

а) найти размерность и базис L;

б) в линейной оболочке L по методу ортогонализации Грама–Шмидта построить ортогональный базис;

в) достроить ортогональный базис линейной оболочки L до ортогонального базиса евклидова пространства E_5;

г) указать в линейной оболочке L ортонормированный базис и достроить его до ортонормированного базиса евклидова пространства E_5.

Δ а) Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

столбцами которой служат векторы $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$, $\overline{x}^3$, $\overline{x}^4$. Нетрудно заметить, что $\overline{x}^4 = \overline{x}^1 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^3$. Поэтому последний столбец, как линейная комбинация первых трех, может быть удален. Поскольку выделенный минор третьего порядка отличен от нуля, то первые три вектора $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$, $\overline{x}^3$ – линейно независимы и, следовательно, образуют базис линейной оболочки L. Размерность L равна 3.

б) В соответствии с методом ортогонализации Грама–Шмидта полагаем:

$$\overline{y}^1 = (1, 0, 1, -1, 2)^{\mathrm{T}},$$

$$\overline{y}^2 = \overline{x}^2 - \frac{(\overline{x}^2, \overline{y}^1)}{(\overline{y}^1, \overline{y}^1)}\overline{y}^1 = (1, 0, 1, -1, -2) + (1/7)(1, 0, 1, -1, 2) = (4/7)(2, 0, 2, -2, -3),$$

$$\overline{y}^3 = \overline{x}^3 - \frac{(\overline{x}^3, \overline{y}^1)}{(\overline{y}^1, \overline{y}^1)}\overline{y}^1 - \frac{(\overline{x}^3, \overline{y}^2)}{(\overline{y}^2, \overline{y}^2)}\overline{y}^2 = (1, 0, 3, 0, 0) - (4/7)(1, 0, 1, -1, 2) -$$

$$- (2/3 \cdot 4/7)\,(2, 0, 2, -2, -3) = (1/3)\,(-1, 0, 5, 4, 0).$$

Таким образом, ортогональным базисом в L являются векторы $\overline{y}^1$, $\overline{y}^2$, $\overline{y}^3$.

Однако заметим, что в любом евклидовом пространстве существует бесконечно много ортогональных базисов. В частности, отбросив множители 4/7 и 1/3, получим базис

$$\overline{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{z}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overline{z}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения двух других векторов $\bar{x}^4$ и $\bar{x}^5$ базиса евклидова пространства E_5 предположим, что вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ортогонален $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$, $\bar{z}^3$, т.е.

$$(\bar{x}, \bar{z}^1) = x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0,$$
$$(\bar{x}, \bar{z}^2) = 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0,$$
$$(\bar{x}, \bar{z}^3) = -x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0.$$

Так как ранг матрицы системы $r = 3$, а переменных 5, то размерность пространства решений $k = 5 - 3 = 2$, т.е. ФСР (фундаментальная система решений) состоит из двух векторов. Решив полученную систему, можно получить ФСР, состоящую из двух векторов

$$\bar{x}^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы ортогональны всем векторам линейной оболочки L, так как они ортогональны базисным векторам. Но они не ортогональны между собой, поскольку $(\bar{x}^4, \bar{x}^5) = 1 \neq 0$. Применим к ним процесс ортогонализации:

$$\bar{y}^4 = \bar{x}^4,$$

$$\bar{y}^5 = \bar{x}^5 - \frac{(\bar{x}^5, \bar{y}^4)}{(\bar{y}^4, \bar{y}^4)}\bar{y}^4 = (0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} - (1/15)(3, 1, -1, 2, 0)^{\mathrm{T}} =$$

$$=(1/15)(-3, 14, 1, -2)^{\mathrm{T}}.$$

Итак, ортогональный базис евклидова пространства E_5 состоит из векторов

$$\bar{z}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{z}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{z}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{z}^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{z}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Первые три вектора $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$, $\bar{z}^3$ составляют базис линейной оболочки L, а все пять векторов $\bar{z}^1$, $\bar{z}^2$, $\bar{z}^3$, $\bar{z}^4$, $\bar{z}^5$ являются базисными векторами евклидова пространства E_5.

в) Проведя ортонормировку, получим ортонормированный базис линейной оболочки L (первые три вектора) и евклидова пространства E_5:

$$\bar{e}^1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \bar{e}^2 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}, \bar{e}^3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\4\\0\end{pmatrix}, \bar{e}^4 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \bar{e}^5 = \frac{1}{\sqrt{270}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

▲

2.42. Можно ли в линейном пространстве R_2 ввести скалярное произведение векторов $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ по формуле:

а) $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2$;

б) $(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$;

в) $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$?

г) В случае «в» вычислить скалярное произведение элементов $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\bar{y} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ и угол между ними.

2.43. Для системы векторов $\bar{x}^1 = (1, 1, 1)$, $\bar{x}^2 = (1, 2, 3)$, $\bar{x}^3 = (1, 3, 2)$ построить ортонормированную систему.

2.44. При каком λ векторы $\bar{x} = 2\bar{u}^1 - \bar{u}^2 + \bar{u}^3 - \lambda\bar{u}^4$ и $\bar{y} = \bar{u}^1 + 2\bar{u}^2 - 5\bar{u}^3 + \bar{u}^4$, заданные в ортонормированном базисе $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$, $\bar{u}^3$, $\bar{u}^4$, ортогональны?

2.45. Применить процесс ортогонализации к следующим системам элементов евклидова пространства:

а) $\bar{x}^1 = (1, -2, 2)$, $\bar{x}^2 = (-1, 0, 1)$, $\bar{x}^3 = (5, -3, -7)$;

б) $\bar{x}^1 = (1, 1, 3, 1)$, $\bar{x}^2 = (3, 3, -1, -1)$, $\bar{x}^3 = (-2, 0, 6, 8)$.

2.46. Задана система элементов евклидова пространства:

а) $\bar{x}^1 = (1, -2, 1, 3)$, $\bar{x}^2 = (2, 1, -3, 1)$;

б) $\bar{x}^1 = (1, -1, 1, -3)$, $\bar{x}^2 = (-4, 1, 5, 0)$.

Требуется:

а) проверить, что эта система ортогональна;

б) найти элемент, ортогональный элементам системы;

в) дополнить систему до ортогонального базиса в евклидовом пространстве E_4.

2.47. Дана система векторов

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \bar{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

евклидова пространства E_5. Требуется:

а) найти размерность и базис линейной оболочки L, натянутой на эти векторы;

б) в линейной оболочке L построить ортогональный базис;

в) достроить ортогональный базис линейной оболочки L до ортогонального базиса евклидова пространства E_5;

г) указать в линейной оболочке L ортонормированный базис и достроить его до ортонормированного базиса евклидова пространства E_5.

2.48. Написать неравенство треугольника для матриц

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

принадлежащих евклидову пространству квадратных матриц второго порядка, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2.$$

г) указать в линейной оболочке L ортонормированный базис и достроить его до ортонормированного базиса евклидова пространства E_5.

3. Системы линейных уравнений (СЛУ)

Общие понятия СЛУ. Теорема Кронекера–Капелли. Матричный способ решения СЛУ. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Однородные СЛУ. Неоднородные СЛУ

Линейной системой m алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n называется система

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left[\mathrm{A} \,|\, \bar{b}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

называются **основной** и **расширенной матрицами** системы (3.1) соответственно.

Векторы-столбцы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

называются **вектором–решением** и **вектором правых частей** соответственно. В векторно–матричной записи система (3.1) записывается в виде

$$\mathrm{A}\bar{x} = \bar{b}. \qquad (3.2)$$

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**. Если система не имеет решения, то она называется **несовместной**. Необходимым и достаточным условием совместности СЛУ является

Критерий Кронекера–Капелли. ***Для того чтобы линейная система (3.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу ее основной матрицы. Если же эти ранги не равны, то система несовместна.***

В частном случае системы n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (3.3)$$

с **невырожденной** основной матрицей ($|A| \neq 0$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

и вектором правых частей $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ ее решение можно найти **матричным способом** по формуле

$$\bar{x} = A^{-1}\,\bar{b}, \quad (3.4)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец решений; A^{-1} – обратная для А матрица. Формула (3.4) вытекает непосредственно из равенства (3.2).

Решение системы (3.3) можно найти по **формулам Крамера**:

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|},\ x_2 = \frac{D_2}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{|A|}, \quad (3.5)$$

где D_i – определитель, получаемый из определителя $|A| = \det A$ заменой его i-го столбца столбцом правых частей (столбцом свободных членов), $i = \overline{1, n}$.

Удобным алгоритмом решения линейных систем $A\bar{x} = \bar{b}$ **является метод исключения неизвестных**, или **метод Гаусса**. По этому методу расширенную матрицу $[\mathrm{A}|\bar{b}]$ системы элементарными преобразованиями над ее строками приводят либо к верхней треугольной матрице

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{mn} & d_n \end{array}\right], \tag{3.6}$$

либо к трапециевидной матрице

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & c_{2r+1} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{rr} & c_{rr+1} & \ldots & c_{rn} & d_r \end{array}\right]. \tag{3.7}$$

Элементарные преобразования строк расширенной матрицы $[\mathrm{A}|\bar{b}]$ системы отвечают тем же преобразованиям уравнений системы $\mathrm{A}\bar{x} = \bar{b}$. Поэтому матрице (3.6) соответствует равносильная исходной система

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & c_{22}x_2 + & \ldots + c_{2n}x_n & = d_2, \\ & \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ & & c_{nn}x_n & = d_n, \end{array}\right\}$$

из которой, если $c_{nn} \neq 0$, $c_{n-1\ n-1} \neq 0$, …, $c_{22} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$, начиная с последнего уравнения, последовательно найдем x_n, x_{n-1}, …, x_2, x_1. Если в некоторой i-й строке матрицы (3.6) все $c_{ij} = 0$, а $d_i \neq 0$, то это свидетельствует о том, что система $\mathrm{A}\bar{x} = \bar{b}$ несовместна, ибо в данном случае $\operatorname{rang}[\mathrm{A}|\bar{b}] \neq \operatorname{rang} \mathrm{A}$.

Для матрицы (3.7) система, равносильная исходной $\mathrm{A}\bar{x} = \bar{b}$, имеет вид

$$\left.\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1r}x_r + & a_{1r+1}x_{r+1} + & \ldots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ & c_{22}x_2 + \ldots + & c_{2r}x_r + & c_{2r+1}x_{r+1} + & \ldots + c_{2n}x_n & = d_2, \\ & \ldots \quad \ldots & & \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ & & c_{rr}x_r + & c_{rr+1}x_{r+1} + & \ldots + c_{rn}x_n & = d_r. \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

Так как в этом случае число неизвестных n системы больше числа ее уравнений, то, считая $c_{rr} \neq 0$, переносят все слагаемые в уравнения с неизвестными

x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n в правую часть (они называются **свободными неизвестными**) и получают систему

$$\left.\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1r}x_r = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - & \ldots - & a_{1n}x_n, \\ & c_{22}x_2 + & \ldots + & c_{2r}x_r = & d_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - & \ldots - & c_{2n}x_n, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & c_{rr}x_r = & d_r - c_{rr+1}x_{r+1} - & \ldots - & c_{rn}x_n. \end{array}\right\}$$

Придав свободным переменным x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n произвольные значения, всякий раз из системы (3.8) получим значения x_r, x_{r-1}, …, x_2, x_1.

Метод Гаусса не только дает возможность решить систему, но и одновременно отвечает на вопрос о ее совместности.

Рассмотрим однородную СЛУ

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n & = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n & = 0, \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

или в векторно-матричной записи А $\bar{x}$ = $\bar{0}$, где $\bar{0}$=(0, 0, …, 0). Система (3.9) всегда совместна, так как она имеет нулевое (**тривиальное**) решение. Справедлива

<u>Теорема 3.1</u>. Для того чтобы однородная система (3.9) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы rang* А *< n, где n – число неизвестных в системе (число столбцов матрицы* А*).

<u>Следствие</u>. Для того, чтобы однородная система с квадратной n x n матрицей* А *имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы

|A| = 0 <=> rang A < *n*.

Имеет место

***<u>Теорема 3.2</u>. Множество решений однородной системы* А$\bar{x}$ = $\bar{0}$ *образует подпространство линейного пространства R^n размерностью n – r, где r = rang* А.**

Теорема 3.2 устанавливает, что во множестве решений однородной системы существует $n - r$ линейно независимых (базисных) решений $\overset{-}{x}^{1}$, $\overset{-}{x}^{2}$, …, $\overset{-}{x}^{n-r}$. Это множество, как известно, называется **фундаментальной системой решений** (ФСР). Всякое решение $\overset{-}{x}^{0}$ однородной СЛУ является линейной комбинацией базисных решений $\overset{-}{x}^{1}$, $\overset{-}{x}^{2}$, …, $\overset{-}{x}^{n-r}$, т.е.

$$\overset{-}{x}^{0} = c_1\overset{-}{x}^{1} + c_2\overset{-}{x}^{2} + \ldots + c_{n-r}\overset{-}{x}^{n-r}, \qquad (3.10)$$

где c_1, c_2 ,…, c_{n-r} – произвольные постоянные.

Решение $\overset{-}{x}^{0}$, определяемое формулой (3.10), называется **общим решением однородной СЛУ**.

Для **неоднородной СЛУ** $A\bar{x} = \bar{b}$ справедливо утверждение: *общее решение* $\bar{x}$ *неоднородной СЛУ* $A\bar{x} = \bar{b}$ *состоит из суммы некоторого его частного решения* $\bar{x}^*$ *и общего решения* $\overset{-}{x}^{0}$ *соответствующей однородной СЛУ* $A\bar{x} = \bar{0}$*, т.е.*

$$\bar{x} = \bar{x}^* + \overset{-}{x}^{0} = \bar{x}^* + c_1\overset{-}{x}^{1} + \ldots + c_{n-r}\overset{-}{x}^{n-r}, \qquad (3.11)$$

где $\{\overset{-}{x}^{1}, \overset{-}{x}^{2}, \ldots, \overset{-}{x}^{n-r}\}$ – ФСР однородной СЛУ.

3.1. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Δ Заменим данную систему уравнений векторно-матричным уравнением $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы А

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -20.$$

Так как определитель Δ матрицы А отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}, и значит система имеет единственное решение. Находим обратную матрицу (см. п. 1.3):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Умножив обе части равенства (1) на A^{-1} слева, получим:

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановкой чисел $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ в исходную систему легко убедиться, что система решена правильно. ▲

3.2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Δ Устанавливаем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 60,$$

поэтому система имеет единственное решение. Вычисляем определители

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & 3 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 120,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 60,\ D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 180.$$

Отсюда по формулам Крамера (3.5) получаем

$$x_1 = \frac{D_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3}{\Delta} = 3.$$

Таким образом, система имеет единственное решение x_1=2, x_2=1, x_3=3. ▲

3.3. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Δ Выписываем расширенную матрицу системы:

$$[\,\mathrm{A}|\bar{b}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & \frac{19}{2} \end{array}\right].$$

Отсюда, преобразованная исходная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -4x_2 + 5x_3 = 9, \\ \frac{19}{2} x_3 = \frac{19}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_1 = 2. \end{cases} \quad ▲$$

3.4. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 11x_2 + 7x_3 = -1, \\ 4x_1 + 16x_2 + 12x_3 = 2. \end{cases}$$

Δ Производя над расширенной матрицей элементарные преобразования, получаем

$$[\,\mathrm{A}|\bar{b}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 7 & -1 \\ 4 & 16 & 12 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Преобразованная исходная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 = -4, \\ 0 \cdot x_3 = -2. \end{cases}$$

Но последнее уравнение противоречиво. Следовательно, система несовместна. ▲

3.5. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

и в случае совместности решить ее методом Гаусса.

Δ Составляем расширенную матрицу системы и находим ее ранг элементарными преобразованиями:

$$[\mathrm{A}|\bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \cdot(-4)+\mathrm{I} \\ \cdot(-2)+\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & -3 & 15 \\ 0 & -4 & 7 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ :3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & -15 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ +2\mathrm{II} \\ \cdot 2+\mathrm{II} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ -3\mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r\,[\mathrm{A}|\bar{b}] = r(\mathrm{A}) = 3.$$

Таким образом, согласно критерию Кронекера-Капелли, система совместна. По последней матрице выписываем равносильную исходной систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = -1. \end{cases}$$ ▲

3.6. Найти общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0. \end{cases}$$

Δ Находим ранг основной матрицы системы

$$\mathrm{A} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 14 & -13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -4\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 18 & -15 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -3\mathrm{II} + \mathrm{III} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 9$, то $r\,(\mathrm{A}) = 3 = r$.

Отсюда размерность пространства решений данной однородной системы $n - r = 4 - 3 = 1$, т.е. существует базис (ФСР) этого пространства, состоящий из одного вектора, через который выражается любое решение системы. Так как в последней матрице базисный минор расположен в левом верхнем углу (он образован коэффициентами при x_1, x_2, x_3 преобразованной системы), то, перенося слагаемые с x_4 в правую часть системы (x_4 – свободное неизвестное), получаем:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -x_4, \\ 3x_2 + 9x_3 = 5x_4, \\ 2x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{9}x_4, \\ x_2 = 5x_4, \\ x_3 = -\dfrac{10}{9}x_4. \end{cases}$$

Таким образом, вектор–решение

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ 5 \\ -\frac{10}{9} \\ 1 \end{pmatrix} x_4 .$$

Положив здесь $x_4 = 9c$, $c \in R$, получим общее решение системы в виде

$\bar{x} = c\,\bar{x}^1$, $\bar{x}^1 = (16, 45, -10, 9)^T$. ▲

3.7. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

и в случае совместности найти ее общее решение.

Δ Находим ранг расширенной матрицы

$$[A|\bar{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -3\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r\,[A|\bar{b}] = r\,(A) = r = 2,\ n - r = 1.$$

Перенося слагаемые с x_3 в правую часть (базисный минор образован коэффициентами при x_1, x_2), по последней матрице записываем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - 5x_3, \\ -x_2 = 1 + 14x_3. \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3 + 9x_3,\ x_2 = -1 - 14x_3.$$

Итак, общее решение неоднородной системы

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 9x_3 \\ -1 - 14x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix} x_3,\ x_3 \in R.$$

Отсюда следует, что вектор $\bar{x}^1 = (9,\ -14,\ 1)^T$ является решением однородной системы $A\bar{x} = \bar{0}$, а вектор $\bar{x}^* = (3, -1, 0)^T$ есть частное решение исходной системы $A\bar{x} = \bar{b}$. Обозначив произвольную константу x_3 через с, получим общее решение системы в виде $\bar{x} = \bar{x}^* + c\bar{x}^1$. ▲

3.8. Решить системы уравнений матричным способом и по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

3.9. Решить системы уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

3.10. При каком условии на параметр λ система уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

3.11. Методом Гаусса решить системы уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

3.12. Найти общее решение систем:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_3 - 14x_4 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 11. \end{cases}$

3.13. Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их методом Гаусса.

а) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 0; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{array}\right\}$

3.14. Найти общее решение систем

а) $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{array}\right\}$

в) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0.$

4. Линейные операторы и их матрицы

4.1. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах

Понятие линейного оператора (ЛО). Матрица ЛО в заданных базисах. Действия над ЛО. Обратный оператор

Пусть U и V – два линейных пространства размерности n и m соответственно.

Отображение **A**: U → V называется **линейным оператором** (ЛО), если

$$\mathbf{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha\,\mathbf{A}\bar{x} + \beta\,\mathbf{A}\bar{y},\ \forall\bar{x},\bar{y} \in U, \forall\alpha,\beta \in R. \qquad (4.1)$$

Вектор $\bar{y} = \mathbf{A}\bar{x} \in$ V называется **образом** вектора $\bar{x} \in$ U при отображении **A**.

Областью или **множеством значений** ЛО **A** называется множество

$$\mathrm{im}\,\mathbf{A} = \{\bar{y} \in V \mid \bar{y} = \mathbf{A}\bar{x},\ \bar{x} \in \mathrm{U}\}. \qquad (4.2)$$

Размерность dim im **A** называется **рангом оператора A**, т.е. rang **A** = dim im **A**. **Ядром ЛО A** называется множество

$$\ker\mathbf{A} = \{\bar{x} \in \mathrm{U} \mid \mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}\}. \qquad (4.3)$$

Размерность ядра оператора называется **дефектом оператора** и обозначается def **A** = dim ker **A.**

Если dim U = n, то dim im **A** + dim ker **A** = n <=> rang **A** + def **A** = n.

Пусть U – линейное пространство с базисом $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\}$, а V– линейное пространство с базисом $\{\bar{v}\} = \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^m\}$. Если **A**: U →V ЛО, то он полностью определяется $m \times n$ **– матрицей оператора A** в заданном базисе вида

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\bar{u}^1 & A\bar{u}^2 & \ldots & A\bar{u}^n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \end{bmatrix}. \qquad (4.4)$$

Столбцами матрицы **A** служат координаты векторов $\mathbf{A}\bar{u}^1$, $\mathbf{A}\bar{u}^2$, …, $\mathbf{A}\bar{u}^n$ в базисе $\{\bar{v}\}$ пространства V. Строки этой матрицы образуют коэффициенты разложения

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{4.5}$$

координат вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\bar{x} \in$ V по координатам вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

На множестве линейных операторов, действующих из U в V, сумма **A** + **B ЛО A** и **B** определяется равенством

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\bar{x} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{x},\ \forall\,\bar{x} \in \mathrm{U}, \tag{4.6}$$

а **произведением ЛО A** на число $\alpha \in$ R называется оператор

$$(\alpha\,\mathbf{A})\,\bar{x} = \alpha\,(\mathbf{A}\bar{x}),\ \forall x \in \mathrm{U}. \tag{4.7}$$

Операторы (4.6), (4.7) также линейны.

Пусть U, V, W – три линейных пространства размерности k, n, m соответственно. **Произведением** или **композицией двух линейных операторов A**: V → W и **B**: U→ V называется оператор **C** = **AB**: U → W, такой что

$$\mathbf{C}\bar{x} = (\mathbf{AB})\,\bar{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\bar{x}),\ \forall x \in U. \tag{4.8}$$

Действиям над линейными операторами отвечают соответствующие действия над их матрицами.

Справедливы следующие свойства ЛО:

1°. **A** +**B** = **B** + **A.**

2°. (**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**).

3°. **A** + **O** = **A**, где **O** – нулевой оператор.

4°**. A** + (–**A**) = **O.**

5°. α (β **A**) = (α β) **A.**

6°. (α + β)**A** = α**A** + β**A**, α(**A** + **B**) = α**A** + α**B.**

7°. α (**AB**) = (α**A**)**B.**

8°. (**A** + **B**) **C**= **AC** + **BC**.

9°. **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**.

10°. (**AB**)**C** = **A** (**BC**).

Линейный оператор **A**: U → V называется **невырожденным**, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т.е. $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$, в противном случае оператор называется **вырожденным**. Для вырожденного оператора равенство $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$ возможно и при некотором $\bar{x} \neq \bar{0}$. Если **A** – невырожденный оператор, то $\forall \bar{y} \in V, \exists x \in U$ такой, что $\bar{y} = \mathbf{A}\bar{x}$.

Оператор, определяющий вектор $\bar{x}$ для данного $\bar{y}$ из соотношения $\bar{y} = \mathbf{A}\bar{x}$, называется **обратным** оператору **A** и обозначается $\mathbf{A}^{-1}$, т.е. $\bar{x} = \mathbf{A}^{-1}\bar{y}$.

Справедливы равенства

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}, \qquad (4.9)$$

где **E** – тождественный оператор, для которого $\mathbf{E}\bar{x} = \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in$ U.

Обратному оператору $\mathbf{A}^{-1}$ отвечает матрица A^{-1}, обратная к матрице A, **ЛО A**, а тождественному оператору **E** – единичная матрица E. Поэтому операторному равенству (4.9) отвечает матричная запись $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Область значений im **A** оператора **A** совпадает с линейной оболочкой столбцов A этого оператора, т.е. im **A** = L ($\mathbf{A}\bar{u}^1$, $\mathbf{A}\bar{u}^2$, …, $\mathbf{A}\bar{u}^n$). Ядро оператора **A** совпадает с множеством векторов $\bar{x} \in$ U, для которых $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$, т.е. ker **A** = $\{\bar{x} \in U \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$.

4.1. Линейны ли следующие преобразования? Если да, то построить их матрицы.

а) $\mathbf{A}\bar{x} = (x_1 - 3x_2, 2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 - x_3)$.

б) $\mathbf{B}\bar{x} = (2x_1 + x_2 + 3, x_1 - x_2, 4)$.

а) Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$.

Тогда $\mathbf{A}\bar{y} = (y_1 - 3y_2, 2y_1 + y_2 - y_3, 3y_1 - y_3)$. Для любых α, β ∈ R имеем:

$\mathbf{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$=[($\alpha x_1 + \beta y_1$) – 3($\alpha x_2 + \beta y_2$), 2($\alpha x_1 + \beta y_2$) + ($\alpha x_2 + \beta y_2$)–($\alpha x_3 + \beta x_3$),

$3(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_3 + \beta y_3)] = \alpha\,(x_1 - 3x_2,\ 2x_1 + x_2 - x_3,\ 3x_1 - x_3) + \beta(y_1 - 3y_2,\ 2y_1 + y_2 - y_3) = \alpha\,\mathbf{A}\,\bar{x} + \beta\,\mathbf{A}\,\bar{y}$, т.е. оператор **A** линеен. В соответствии с (4.5) его матрица $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

б) Имеем: $\mathbf{B}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = [2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + 3,\ (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + + \beta y_2),\ 4] = [\alpha\,(2x_1 + x_2 + 3),\ \alpha\,(x_1 - x_2),\ 4] + [\beta\,(2y_1 + y_2) + \beta\,(y_1 - y_2)]$.

С другой стороны, так как
$\alpha\,\mathbf{B}\,\bar{x} + \beta\,\mathbf{B}\,\bar{y} = \alpha\,(2x_1 + x_2 + x_3),\ x_1 - x_2,\ 4) + \beta\,(2y_1 + y_2 + y_3,\ y_1 - y_2,\ 4) =$
$= [\alpha\,(2x_1 + x_2 + x_3),\ \alpha\,(x_1 - x_2),\ 4\alpha] + [\beta\,(2y_1 + y_2 + y_3),\ \beta\,(y_1 - y_2),\ 4\beta] \neq$
$\neq \mathbf{B}\,(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$, то, следовательно, оператор **B** не является линейным. ▲

4.2. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$: $R^3 \to R^3$, такого что

$$\mathbf{A}\bar{x} = [\bar{a},\ \bar{x}],\ \forall\,\bar{x} \in R^3, \tag{4.10}$$

где $\bar{a}$ - фиксированный вектор из R^3.

Δ Линейность оператора (4.10) вытекает из линейности векторного произведения.

Пусть $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, где $\{\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}\}$ – базис пространства R^3. Тогда по формуле (4.10) $\mathbf{A}\bar{i} = [\bar{a}, \bar{i}] = (0,\ a_3,\ -a_2)$, $\mathbf{A}\bar{j} = (-a_3,\ 0,\ a_1)$, $\mathbf{A}\bar{k} = [\bar{a}, \bar{k}] = (a_2,\ -a_1,\ 0)$. В этом случае по формуле (4.4) матрицей данного ЛО является

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}I} & \overline{\mathbf{A}J} & \overline{\mathbf{A}K} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$ ▲

4.3. Найти матрицу оператора проектирования векторов пространства R^3 на прямую L: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{-2}$.

Δ Направляющим вектором прямой L является $\bar{a} = (2, -1, -2)$. Для построения матрицы A оператора проектирования на прямую L найдем ортогональные проекции векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ на прямую (на вектор $\bar{a}$). Согласно формуле ортогональной проекции вектора $\bar{b}$ на $\bar{a}$, имеющей вид

$\bar{b}_a = \dfrac{(\bar{b},\bar{a})}{|\bar{a}|^2}\bar{a}$, последовательно получаем:

$$\bar{i}_a = \frac{(\bar{i},\bar{a})}{|\bar{a}|^2}\bar{a} = \frac{2}{9}(2,-1,-2) = (\frac{4}{9},-\frac{2}{9},-\frac{4}{9}),$$

$$\bar{j}_a = \frac{(\bar{j},\bar{a})}{|\bar{a}|^2}\bar{a} = -\frac{1}{9}(2,-1,-2) = (-\frac{2}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{9}),$$

$$\bar{k}_a = \frac{(\bar{k},\bar{a})}{|\bar{a}|^2}\bar{a} = -\frac{2}{9}(2,-1,2) = (-\frac{4}{9},\frac{2}{9},-\frac{4}{9}).$$

Тогда матрица

$$A = \begin{bmatrix} \bar{i}_a & \bar{j}_a & \bar{k}_a \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

4.4. Найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

Δ Согласно рис. 4.1, $\mathbf{A}\,\bar{i} = |\mathbf{A}\bar{i}|\cos\dfrac{\pi}{6}\,\bar{i} + |\mathbf{A}\bar{i}|\sin\dfrac{\pi}{6}\,\bar{k} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\bar{i} + {}+\sin\dfrac{\pi}{6}\,\bar{k}) = 3/4\,\bar{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\bar{k} = (3/4,\,0,\,\dfrac{\sqrt{3}}{4})$, $(|\mathbf{A}\bar{i}| = |\bar{i}|\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

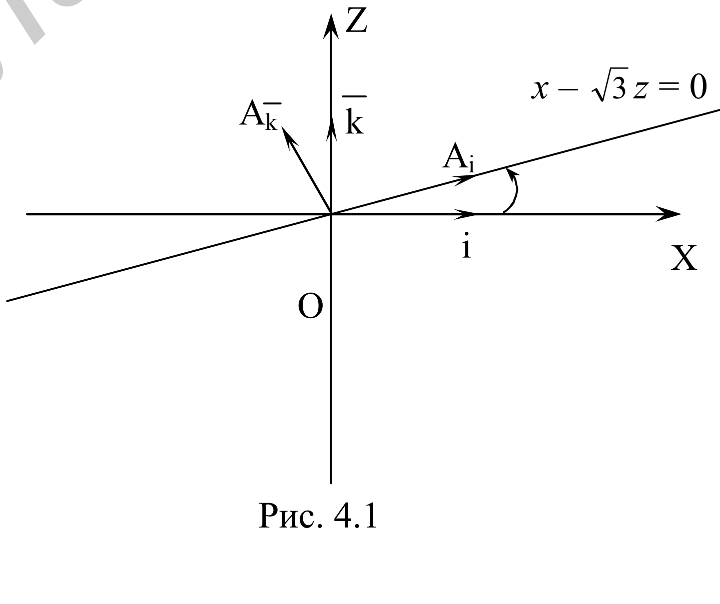

Рис. 4.1

Аналогично:

$$\mathbf{A}\bar{k} = |\mathbf{A}\bar{k}| \cos \frac{\pi}{6}\cdot \bar{i} + |\mathbf{A}\bar{k}| \sin \frac{\pi}{6} \cdot\bar{k} = 1/2\ (\cos \frac{\pi}{6}\cdot\bar{i} + \sin \frac{\pi}{6}\,\bar{k}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{i} +$$

$+(1/4)\ \bar{k} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, 0, 1/4)$, так как $|\mathbf{A}\bar{k}| = |\bar{k}| \cos \frac{\pi}{3} = 1/2$.

Итак, матрица A оператора есть

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Множество ker**A** образуют векторы, перпендикулярные данной плоскости $x - \sqrt{3}z = 0$ с нормальным вектором $\overline{N} = (1, 0, -\sqrt{3})$, так как именно они проектируются на эту плоскость в виде нулевых векторов.

Областью значений im **A** является сама плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$, так как все векторы из R^3 проектируются в векторы, лежащие в данной плоскости. ▲

4.5. Найдите ker **A** и im **A** для **A**: $R^3 \to R^3$ с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δ По определению ker **A** = $\{(x_1, x_2, x_3)^T = \bar{x} \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$. Отсюда

$$A\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1, \\ x_2 = -x_1, \end{cases}$$

т.е. $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_1 \in R.$

Следовательно, ker **A** есть множество векторов, коллинеарных вектору $(1, -1, 1)^T$.

Далее, по определению, im **A** = $\{ \bar{y} \in R^3 \mid \bar{y} = A\bar{x},\ \forall \bar{x} \in R^3\}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + & x_2 & \\ & x_2 + & x_3 \\ & 0 & \end{pmatrix} = \mathrm{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{x}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вектор $\bar{y} \in \operatorname{im} \mathbf{A}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{u}^1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{u}^2 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{u}^3 = (0, 1, 0)$ с коэффициентами x_1, x_2, x_3. Но, очевидно, $\bar{u}^2 = \bar{u}^1 + \bar{u}^3$, поэтому любой вектор $\bar{y} \in \operatorname{im} \mathbf{A}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\bar{u}^1$ и $\bar{u}^3$, т.е. $\operatorname{im} \mathbf{A}$ совпадает с множеством векторов, компланарных плоскости, порожденных векторами $\bar{u}^1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $\bar{u}^3 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. ▲

4.6. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^3$, $\mathbf{A}\bar{x} = (x_1+x_3, -x_2, x_2 - 3x_3)$, $\mathbf{B}\bar{x} = (-x_3, 2x_1, x_2)$. Найти $(3\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^2)\,\bar{x}$.

Δ Для ЛО **A** и **B** их матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ и } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда матрицей ЛО $3\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^2$ является

$$3\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^2 = 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 18 \end{bmatrix}.$$

Тогда $(3\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^2)\bar{x} = (3\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^2)\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + & 2x_2 - & 10x_3 \\ 6x_1 + & 2x_2 & \\ & -5x_2 + & 18x_3 \end{bmatrix}. \ ▲$$

4.7. Найти отображение, выражающее $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$ через $\bar{x}' = (x_1', x_2', x_3')$, если отображение $\bar{x}' = \mathrm{A}\bar{x}$ задано в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2,\\ x_2' &= 2x_1 + x_2,\\ x_3' &= x_1 - 5x_2 + x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Δ Матрицей оператора **A** данного преобразования является

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $|\mathrm{A}| = 1 \neq 0$, то оператор **A** невырожден. Следовательно, существует обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$ с матрицей

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -11 & 16 & 1 \end{bmatrix},$$

такой что $\bar{x} = \mathbf{A}^{-1}\bar{x}' \Leftrightarrow \bar{x} = \mathrm{A}^{-1}\bar{x}'$, т.е.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -11 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' - & x_2' & \\ -2x_1' + & 3x_2' & \\ -11x_1' + & 16x_2' + & x_3' \end{pmatrix}.$$

Итак, искомое преобразование есть

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' - x_2',\\ x_2 &= -2x_1' + 3x_2',\\ x_3 &= -11x_1' + 16x_2' + x_3'. \end{aligned}\right\} \blacktriangle$$

4.8. Является ли линейным оператор **A**, действующий на произвольный вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}$ по правилу ($\bar{a}$ – фиксированный вектор R^3):

1) $\mathbf{A}\bar{x} = (\bar{a}, \bar{x})\bar{a}$;

2) $\mathbf{A}\bar{x} = (\bar{x}, \bar{a})\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2}$;

3) $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{x} - (\bar{x}, \bar{n})\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2}$;

4) $\mathbf{A}\,\bar{x} = \bar{x} - \dfrac{(\bar{x},\bar{n})}{(\bar{a},\bar{n})}\bar{a}$ $((\bar{a}, \bar{n}) \neq 0)$, $\bar{n} \in \mathrm{R}^3$ – фиксированный вектор;

5) $\mathbf{A}\,\bar{x} = 2\,(\bar{a}, \bar{x})\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2} - \bar{x}$.

4.9. Является ли линейным оператор **A**, если:

1) **A** – ортогональная проекция $\bar{x}$ на плоскость $x + y + z = 0$;

2) **A** – поворот векторов плоскости R^2 на угол φ вокруг начала координат;

3) $\mathbf{A}\bar{x} = (x_1 - 2x_2 + x_3, -x_3, x_2 - x_1)$; $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$;

4) $\mathbf{A}\bar{x} = (x_3 - x_1^2, x_3 - x_2)$;

5) $\mathbf{A}\bar{x} = (x_1 - 2x_2 + x_3, 1 - x_3, x_2 - x_1)$.

4.10. Является ли линейным оператор **A**, действующий на пространстве 2 x 2 – матриц на произвольную 2 x 2 – матрицу $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ по правилу:

1) $\mathbf{A}\mathrm{X} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}$, где $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $\mathbf{A}\mathrm{X} = \mathrm{AXA}^{-1}$, где $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix}$;

4) $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} + x_{11} \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix}$;

5) $\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathrm{X} + \mathrm{A}$, где $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$?

4.11. Является ли линейным оператор **A**, действующий на линейной оболочке $\mathrm{L} = \mathrm{L}(1, x, x^2)$ функций $1, x, x^2$ по правилу

1) дифференцирования $\mathbf{A}(ax^2 + bx + \mathrm{c}) = 2ax + b$;

2) $\mathbf{A}\,(a + bx + \mathrm{c}x^2) = a + b(x - 5) + \mathrm{c}(x - 5)^2$?

4.12. Для ЛО **A**: а) выписать его матрицу; б) определить его ядро ker **A,** определить множество значений im **A**, если **A** действует на произвольный вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$ по закону:

1) $\mathbf{A}\overline{x} = (2x_1 + x_2 - 4x_3,\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$;

2) $\mathbf{A}\overline{x} = (x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 - 6x_3,\ x_1 + 2x_2 - 7x_3)$;

3) $\mathbf{A}\overline{x} = (x_1 - 3x_2 + 4x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3)$;

4) $\mathbf{A}\overline{x} = (3x_1 + 10x_2 + 9x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ 5x_1 - 2x_2 - x_3)$;

5) $\mathbf{A}\overline{x} = (x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 9x_1 - 2x_2 - 2x_3)$.

4.13. Доказать линейность, найти матрицу в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, область значений im **A** и ядро ker **A** оператора **A**, если:

1) **A** – проектирование на плоскость $z + \sqrt{3}x = 0$;

2) **A** – поворот относительно оси z в положительном направлении на угол $\pi/4$;

3) **A** – проектирование на плоскость $x + z = 4$;

4) **A** – зеркальное отражение относительно плоскости xz;

5) **A** – зеркальное отражение относительно плоскости $y - z = 0$.

4.14. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{A}\overline{x} = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_2)$, $\mathbf{B}\overline{x} = (x_2, 2x_3, x_1)$. Найти матрицу указанного оператора. Является ли он вырожденным?

1) $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{B}$; 2) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}^2$; 3) $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$; 4) $(\mathbf{B}^2 + \mathbf{A})$; 5)$\mathbf{B}(2\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

4.15. Найти отображение, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3, если

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= 3x_1 + 5x_2, \\ x_3' &= x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}\right\} \text{ и } \left\{\begin{aligned} x_1'' &= 2x_1' + x_3', \\ x_2'' &= x_1' - x_2' + 3x_3', \\ x_3'' &= -5x_1' + x_2' + x_3'. \end{aligned}\right.$$

4.16. Даны два преобразования:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 - y_2, \\ z_2 &= y_2 - y_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - x_2, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_1 + 2x_2. \end{aligned}\right.$$

Найти преобразование, выражающее вектор $\overline{z} = (z_1, z_2) \in \mathrm{R}^2$ через $\overline{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^2$, если $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^3$.

4.17. Оператор **A** в некотором базисе в R^3 задан матрицей A. Существует ли обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$?

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.2. Переход к новому базису

Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости при параллельном переносе и повороте. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартовая система координат (ПДСК). Если ее начало перенести в точку 0' = (a, b) и принять 0' за начало новой системы ПДСК X'Y'с осями X' ∥ X и Y' ∥ Y (рис.4.2), то "старые" координаты x, y точки M связаны с "новыми" ее координатами x', y' соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned}\right.$$

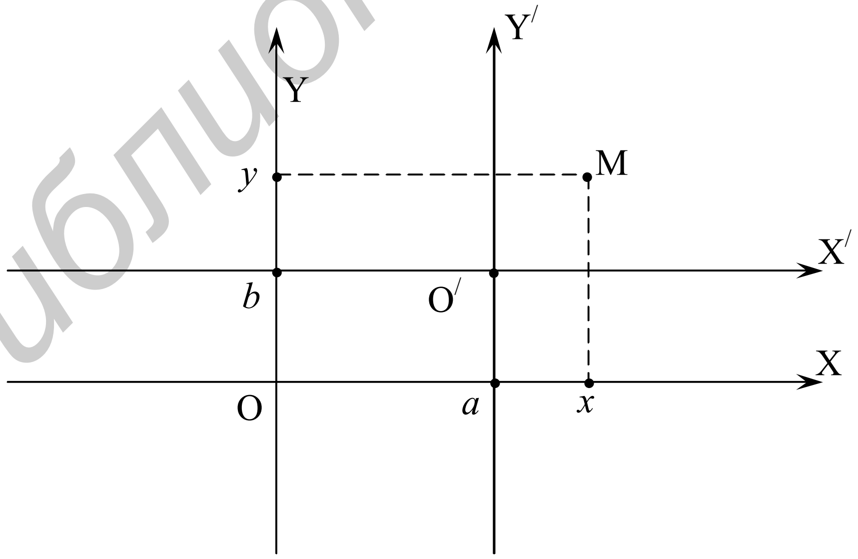

Рис. 4.2

Эти формулы называются **формулами преобразования переноса** . Системы XУ и X'Y' будем называть соответственно **старой** и **новой**.

Если старую ПДСК XУ повернуть вокруг начала 0 против часовой стрелки на угол φ и принять ПДСК X'Y' за новую систему (рис. 4.3), то связь между старыми координатами x, y точки М и ее новыми координатами x', y' осуществляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

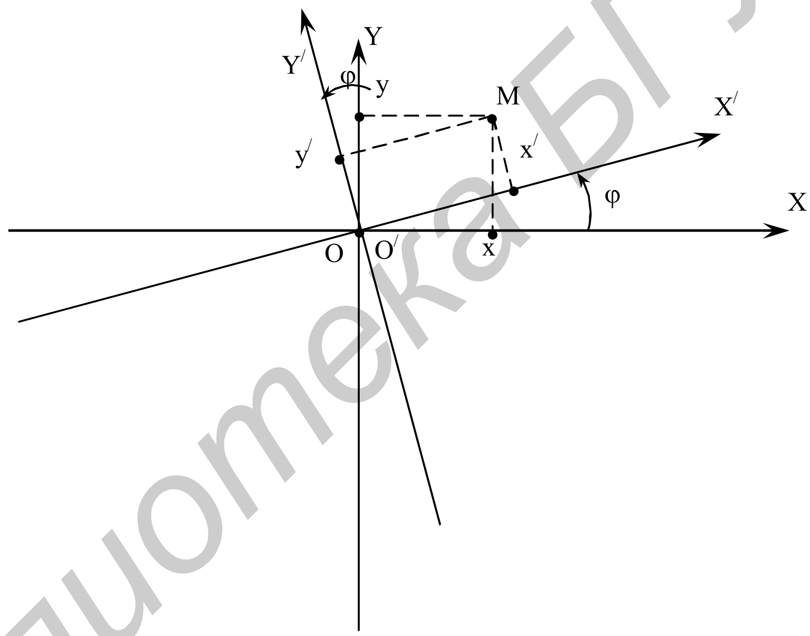

Рис. 4.3

Формулы (4.11) называются **формулами преобразования поворота**. Формулы преобразований поворота и переноса используются для упрощения уравнений кривых второго порядка (см. задачу 4.19).

Пусть в пространстве R^n заданы два базиса: $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\}$ – старый базис и $\{\bar{v}\} = \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n\}$ – новый базис. Если

$$
\left.\begin{aligned}
\bar v^{1} &= t_{11}\bar u^{1} + t_{21}\bar u^{2} + \ldots + t_{n1}\bar u^{n},\\
\bar v^{2} &= t_{12}\bar u^{1} + t_{22}\bar u^{2} + \ldots + t_{n2}\bar u^{n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar v^{n} &= t_{1n}\bar u^{1} + t_{2n}\bar u^{2} + \ldots + t_{nn}\bar u^{n}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.12)
$$

формулы перехода от старого базиса к новому, то матрица

$$
\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \bar v^{1} & \bar v^{2} & \ldots & \bar v^{n} \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \qquad (4.13)
$$

называется **матрицей перехода** от старого базиса $\{\bar u\}$ к новому базису $\{\bar v\}$. **Столбцами матрицы перехода служат коэффициенты разложения векторов нового базиса по векторам старого базиса**.

Матрица перехода Т всегда невырождена, т.е. $|\mathrm{T}| \neq 0$, а значит, существует обратная матрица T^{-1} перехода от нового базиса к старому.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора $\bar x$ в старом базисе $\{\bar u\}$, а $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ – координаты этого же вектора в новом базисе $\{\bar v\}$, то

$$
\bar x = \mathrm{T}\bar x' \text{ или } \bar x' = \mathrm{T}^{-1}\,\bar x, \qquad (4.14)
$$

где $\bar x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\bar x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')^{\mathrm{T}}$.

Формулы (4.14) называются **формулами преобразования координат**. В координатной записи равенство $\bar x = \mathrm{T}\bar x'$ имеет вид

$$
\left.\begin{aligned}
\bar x_1 &= t_{11}\bar x_1' + t_{12}\bar x_2' + \ldots + t_{1n}\bar x_n',\\
\bar x_2 &= t_{21}\bar x_1' + t_{22}\bar x_2' + \ldots + t_{2n}\bar x_n',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar x_n &= t_{n1}\bar x_1' + t_{n2}\bar x_2' + \ldots + t_{nn}\bar x_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.15)
$$

Из (4.15) следует, что **строки матрицы перехода** (4.13) **образуют коэффициенты разложений старых координат вектора по новым координатам этого вектора**.

Если А – матрица линейного оператора **А** в старом базисе $\{\bar u\}$, то в новом базисе $\{\bar v\}$ этот оператор имеет матрицу

$$B = T^{-1}\,AT, \tag{4.16}$$

где T – матрица перехода от $\{\bar{u}\}$ к $\{\bar{v}\}$. Матрицы A и B одного и того же оператора **A**, связанные формулой (4.16), называются **подобными**. Для подобных матриц A и B справедливо равенство det A = det B.

4.18. Подобрать ПДСК таким образом, чтобы уравнение кривой $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ приняло в ней наиболее простой вид. Определить вид этой кривой.

Δ В уравнении кривой выделим полные квадраты:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$

Перейдем к новым переменным по формулам $x' = x - 1$, $y' = y + 2$, получим уравнение $x'^2 + y'^2 = 9$ окружности радиусом 3 в новой ПДСК с началом ее в точке 0' = (1, – 2) по отношению к старой системе координат XУ. ▲

4.19.* Упростить уравнение кривой

$$5x^2 + 4xy + 8x^2 - 32x - 56y + 80 = 0. \tag{4.17}$$

Сделать чертеж.

Δ Найдем такой угол φ, повернув на который старую ПДСК XУ, получим новую ПДСК X'Y', в которой в уравнении кривой будет отсутствовать член с произведением $x'y'$. Для этого в уравнение (4.17) подставим формулы (4.11), получим после несложных преобразований равенство

$$(5\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\sin^2\varphi)x'^2 + (4\cos^2\varphi + 6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi)x'y'$$
$$+ (5\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\cos^2\varphi)\,y'^2 - (32\cos\varphi + 56\sin\varphi)x' +$$
$$+(32\sin\varphi - 56\cos\varphi)y' + 80 = 0.$$

Требуя в этом соотношении равенства нулю коэффициента при $x'y'$, получаем

$$4\cos^2\varphi + 6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\,tg^2\varphi - 3\,tg\,\varphi - 2 = 0 \Rightarrow tg\,\varphi_1 = 2 \text{ или } tg\,\varphi_2 = -1/2.$$

Углу $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,2$ отвечает поворот системы координат против часовой стрелки, а углу $\varphi_2 = \mathrm{arctg}(-1/2)$ – по часовой стрелке.

Пусть $\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,2$. Находим

$$\sin\varphi_1 = \frac{tg\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

и подставляем эти значения в (4.17):

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x' + 64/5 - 64/5) + 4(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 1/5 - 1/5) + 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x' - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 - 576/5 - 4/5 = 80 + 4(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 0 \Rightarrow$$

$$9(x' - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 + 4(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 36 \text{ или}$$

$$\frac{\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} + \frac{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} = 1. \qquad (4.18)$$

Перенесем начало 0' ПДСК X'Y' в точку ($\frac{8}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}$), т.е. осуществим замену $X'' = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}$, $Y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда уравнение (4.18) примет вид $X''^2/4 + Y''^2/9 = 1$ – эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$ в системе X"O"Y" (рис. 4.4). ▲

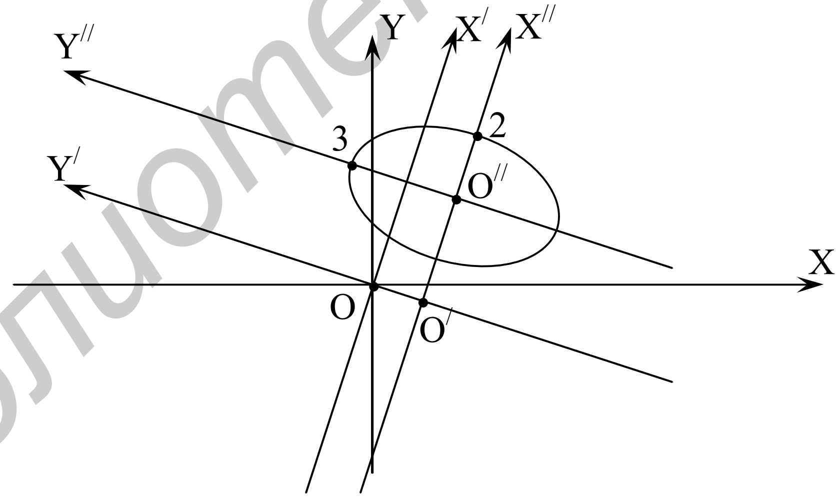

Рис. 4.4

4.20. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$ к базису $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$, $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$.

Δ Найдем разложение каждого из векторов, $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$, $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$ по базису $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$:

$$\bar{e}^3 = 0\bar{e}^1 + 0\bar{e}^2 + 1\bar{e}^3 + 0\bar{e}^4,$$

$$\bar{e}^4 = 0\bar{e}^1 + 0\bar{e}^2 + 0\bar{e}^3 + 1\bar{e}^4,$$

$$\bar{e}^1 = 1\bar{e}^1 + 0\bar{e}^2 + 0\bar{e}^3 + 0\bar{e}^4,$$

$$\bar{e}^2 = 0\bar{e}^1 + 1\bar{e}^2 + 0\bar{e}^3 + 0\bar{e}^4.$$

Тогда искомая матрица имеет вид

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ее столбцы образованы координатами векторов $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$, $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$ в базисе $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, $\bar{e}^4$. ▲

4.21. Дана матрица

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ к базису $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$. Найти координаты $\bar{e}_2'$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и координаты $\bar{e}_1$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$.

∆ Так как числа 0, 1, 0 являются координатами вектора $\bar{e}_2'$ в базисе $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_3'$, то числа α_1, α_2, α_3 – координаты $\bar{e}_2'$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, определяются из следующего равенства:

$$\bar{e}_2' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

т.е. в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ вектор $\bar{e}_2' = (0, -1, 4)^{\mathrm{T}}$.

Так как числа 1, 0, 0 являются координатами вектора $\bar{e}_1$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то его координаты α_1', α_2', α_3' в базисе $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$ определяются из равенства

$$\bar{e}_2{}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

т.е. в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ вектор $\bar{e}_2{}' = (0, -1, 4)^{\mathrm{T}}$.

Так как числа 1, 0, 0 являются координатами вектора $\bar{e}_1$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то его координаты α_1', α_2', α_3' в базисе $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$ определяются из равенства

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 0 \\ 13 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

т.е. в базисе $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$ вектор $\bar{e}_1{}' = (1, 2, \frac{13}{6})^{\mathrm{T}}$. ▲

4.22. В базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, линейный оператор задан матрицей $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в новом базисе $\bar{e}_1{}'$, $\bar{e}_2{}'$, $\bar{e}_3{}'$, если

$$\bar{e}_1{}' = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_2{}' = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_3{}' = -5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Δ Определяем матрицу перехода T:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $\Delta = -1$. Значит, существует обратная матрица T^{-1}, которая имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 1 \\ -7 & -12 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 1 \\ -7 & -12 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 9 & -16 \\ -36 & 18 & -24 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

4.23. Какая из данных матриц может быть матрицей перехода от одного базиса к другому:

а) $T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; б) $T_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$?

4.24. В пространстве $P_3(x)$ многочленов степени не выше трех найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису $1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3$.

4.25. Вектор $\vec{x} = (-1, 2, 7)$ задан координатами в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти его координаты в базисе $\bar{e}_1{}', \bar{e}_2{}', \bar{e}_3{}'$, если

$$\bar{e}_1{}' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_2{}' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_3{}' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3.$$

4.26. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ к базису $\bar{b}_1, \bar{b}_2$, если разложение этих векторов в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ имеет вид

$$\bar{a}_1 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2, \quad \bar{a}_2 = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2;$$

$$\bar{b}_1 = -4\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2, \; \bar{b}_2 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2.$$

4.27. В R^3 заданы два базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{e}_1{}', \bar{e}_2{}', \bar{e}_3{}'$, причем

$\bar{e}_1 = 8\bar{u}_1 - 6\bar{u}_2 + \bar{u}_3,$ $\qquad$ $\bar{e}_1{}' = \bar{u}_1 - 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3,$

$\bar{e}_2 = -16\,\bar{u}_1 + 7\bar{u}_2 - 13\bar{u}_3,$ $\qquad$ $\bar{e}_2{}' = 3\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3,$

$\bar{e}_3 = 9\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 + 7\bar{u}_3,$ $\qquad$ $\bar{e}_3{}' = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3,$

где $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$– заданный базис.

Найти матрицу оператора A в базисе $\bar{e}_1{}', \bar{e}_2{}', \bar{e}_3{}'$, если его матрица в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ имеет вид $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}.$

4.28. Найти матрицу линейного оператора A поворота относительно оси X в R^3 в положительном направлении на угол φ.

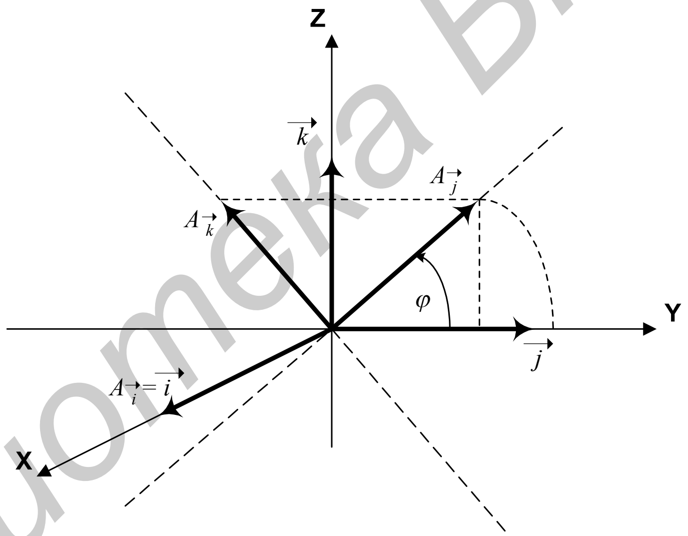

Рис.4.5

Δ Легко видеть, что любой вектор из R^3 под действием данного оператора снова переходит в вектор из R^3. Для построения матрицы (размера 3 x 3) достаточно найти разложение векторов $\mathbf{A}\,\bar{i}$, $\mathbf{A}\bar{j}$, $\mathbf{A}\bar{k}$ по базисным векторам $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. При таком повороте векторы, параллельные оси X, не изменяются. Следовательно, $\mathbf{A}\bar{i} = \bar{i} = (1, 0, 0)$.

Из рисунка видно, что $\mathbf{A}\bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + |\mathbf{A}\bar{j}| \cos\varphi \cdot \bar{j} + |\mathbf{A}\bar{j}| \cdot \sin\varphi \cdot \bar{k} = 0 \cdot \bar{i} + + \cos\varphi \cdot \bar{j} + \sin\varphi \cdot \bar{k}$.

Таким образом, матрица оператора A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

4.29. Упростите уравнения плоских фигур второй степени и сделайте рисунки этих фигур:

1) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 20 = 0$;

2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;

4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 152 = 0$.

4.3. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Сопряженные операторы. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы

Пусть U – евклидово пространство. Линейный оператор **A*** называется <u>сопряженным</u> линейному оператору **A**, если

$$(\mathbf{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \mathbf{A}^*\bar{y}), \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U. \qquad (4.19)$$

Справедлива

<u>**Теорема**</u> **4.1.** ***Каждый линейный оператор A имеет единственный сопряженный оператор A*. В ортонормированном базисе (ОНБ) матрица A* сопряженного оператора A* является транспонированной матрицей A^T этого оператора, т.е. $A^* = A^T$.***

Сопряженные операторы обладают следующими свойствами:

1º. **E*** = **E**; 2º. (**A** + **A**)* = **A*** + **B***; 3º. (**A***)* = **A**;

4º. (α**A**)* = α**A***; 5º. $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$; 6º. (**AB**)* = **B*****A***.

Для операторных равенств 1º - 6º имеют место соответствующие матричные их записи.

Линейный оператор A называется **самосопряженным**, если **A*** = **A**, т.е. если

$$(\mathbf{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \mathbf{A}\bar{y}), \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U. \qquad (4.20)$$

Имеет место

<u>Теорема</u> 4.2. ***В ОНБ матрица А самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной: $A = A^T$, т.е. матрица самосопряженного оператора в ОНБ является симметрической.***

Линейный оператор А: U → U называется **ортогональным**, если

$$(\mathbf{A}\overline{x}, \mathbf{A}\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}),\ \forall \overline{x}, \overline{y} \in U. \tag{4.21}$$

Матрица А ортогонального оператора **А** называется <u>ортогональной</u>. Признаком ортогональности матрицы А является попарная ортогональность вектор-столбцов матрицы и вектор-строк этой матрицы, причем норма каждого вектора-столбца (вектор-строки) равна единице.

Если **А** – ортогональный оператор, то сопряженный ему оператор А* удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}. \tag{4.22}$$

Это равенство в ОНБ в матричной записи имеет вид

$$A^{T} = A^{-1}. \tag{4.23}$$

Ортогональный оператор обладает следующими свойствами:

1°. Тождественный оператор **А** является ортогональным.

2°. Произведение ортогональных операторов является ортогональным оператором.

3°. Оператор, обратный ортогональному, является ортогональным оператором. Другими словами, если ортогональный оператор **А** переводит ОНБ $\{\overline{u}^{1}, \overline{u}^{2}, \ldots, \overline{u}^{n}\}$ в ОНБ $\{\mathbf{A}\overline{u}^{1}, \mathbf{A}\overline{u}^{2}, \ldots, \mathbf{A}\overline{u}^{n}\}$, то оператор $\mathbf{A}^{-1}$ восстанавливает исходный ОНБ.

4°. Если **А** – ортогональный оператор, то произведение α**А** будет ортогональным тогда и только тогда, если α = ±1.

4.30. Найти оператор, сопряженный оператору **А**, имеющему вид

$\mathbf{A}\overline{x} = (\overline{x}, \overline{a})\ \overline{a}$, $\overline{x} \in R^3$, $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z) \in R^3$ – фиксированный вектор. Найти матрицу оператора **А** и его сопряженного оператора **А***.

Δ По определению сопряженного оператора имеем

$$(\mathbf{A}\bar{x},\ \bar{y}) = ((\bar{x},\bar{a})\bar{a},\ \bar{y}) = (\bar{x},\bar{a})\cdot(\bar{a},\ \bar{y}) = (\bar{x},\ \mathbf{A}^*\ \bar{y}),\ \text{т.е.}$$

$$\mathbf{A}^*\,y = \bar{a}\ \cdot(\bar{a},\ \bar{y}) \Rightarrow \mathbf{A}^* y = (\bar{y},\bar{a})\bar{a}.$$

Отсюда следует, что **A** = **A***, т.е. данный оператор самосопряженный. Найдем его матрицу. Имеем:

$$\mathbf{A}\bar{i} = (\bar{i},\bar{a})\bar{a} = a_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x^2 \\ a_x a_y \\ a_x a_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\bar{j} = (\bar{j},\bar{a})\bar{a} = a_y \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y a_x \\ a_y a_y \\ a_y a_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\bar{k} = (\bar{k},\bar{a})\bar{a} = a_z \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_z a_x \\ a_z a_y \\ a_z a_z \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица оператора имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_y a_x & a_z a_x \\ a_x a_y & a^2{}_y & a_z a_y \\ a_x a_z & a_y a_z & a^2{}_z \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A – симметричная, то оператор **A** действительно самосопряженный. ▲

4.31. В пространстве многочленов P_2 степени не выше двух задано скалярное произведение равенством

$$(f,\ g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

где $f = f(t) = a + a_1 t + a_2 t^2$, $g = g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$, ортонормированный базис $\{\bar{v}\}$ $= \{1,\ t,\ t^2\}$.

Найти матрицы оператора **A** дифференцирования и сопряженного оператора **A*** дифференцирования в базисе

$$\bar{u}^1 = 1,\ \bar{u}^2 = t,\ \bar{u}^3 = 3/2\ t^2 - 1/2.$$

Δ Заметим, что базис $\{\bar{u}\} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$ не является ортонормированным, так как согласно формуле скалярного произведения,

$(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = -1/2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3/2 = -1/2 \neq 0.$

В силу этого, если построить матрицу A оператора дифференцирования в базисе $\{\bar{u}\}$, то матрица сопряженного оператора **A*** не будет равна A^T.

Найдем матрицу **A** оператора дифференцирования в базисе $\{\bar{u}\}$. Для ее векторов-столбцов имеем:

$$\mathbf{A}\bar{u}^1 = (\bar{u}^1)' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\bar{u}^2 = (\bar{u}^2)' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\bar{u}^3 = (\bar{u}^3)' \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица оператора дифференцирования

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для составления матрицы сопряженного оператора **A*** перейдем к ортонормированному базису $\{\bar{v}\} = \{1, t, t^2\}$. В этом базисе

$$\mathbf{A}\bar{u}^1 = (1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\bar{u}^2 = (t)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\bar{u}^3 = (3/2\, t^2 - 1/2)' = 3t = 0 \cdot 1 + 3 \cdot t + 0 \cdot t^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Тогда матрица сопряженного оператора **A*** равна

$$A^* = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу T перехода от базиса $\{\bar{v}\}$ к базису $\{\bar{u}\}$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Тогда искомая матрица B сопряженного оператора **A*** имеет вид

$$B = T^{-1}A^TT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

4.32. Найти матрицу оператора **A**, сопряженный оператор и его матрицу, если

а) $\mathbf{A}\bar{x} = [\bar{a}, \bar{x}], \bar{a}$ - фиксирован, $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

б) $\mathbf{A}\bar{x} = [[\bar{a}, \bar{b}], \bar{x}]$, где $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ – фиксированные векторы;

в) оператор подобия: $\mathbf{A}\bar{x} = \alpha\bar{x}$, где α – число;

г) оператор поворота пространства R^3 вокруг оси Z;

д) оператор проектирования на плоскость $x - z = 0$;

е) оператор проектирования на прямую $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{-2}$.

4.33.* Матрица **A** линейного оператора в ортонормированном базисе $\{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4\}$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного линейного оператора в базисе

а) $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, б) $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1+\bar{e}_2, \bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3, \bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4\}$.

4.34. * Дать геометрическую интерпретацию симметрического ортогонального оператора, действующего в евклидовом пространстве E_2 и имеющего в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

4.35. Пусть **A** – зеркальное отражение векторов пространства R^3 относительно плоскости XУ. Найти ядро сопряженного оператора.

4.36. Найти ядро и область значений сопряженного оператора **A***, если матрица исходного оператора **A** имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного линейного оператора в базисе

а) $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, б) $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1+\bar{e}_2, \bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3, \bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4\}$.

4.34. * Дать геометрическую интерпретацию симметрического ортогонального оператора, действующего в евклидовом пространстве E_2 и имеющего в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

4.35. Пусть **A** – зеркальное отражение векторов пространства R^3 относительно плоскости XУ. Найти ядро сопряженного оператора.

4.36. Найти ядро и область значений сопряженного оператора **A***, если матрица исходного оператора **A** имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов

5.1. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов и их матриц

Понятия собственных векторов и собственных значений матриц и их свойства. Характеристическое уравнение матрицы. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов (симметрических матриц)

Пусть **A**: $R^n \to R^n$ – линейный оператор. Ненулевой вектор $\overline{x} \in R^n$ называется **собственным вектором** (СВ) оператора **A** (матрицы A), если оператор **A** (матрица A) переводит вектор $\overline{x} \neq \overline{0}$ в коллинеарный ему вектор $\lambda\overline{x}$:

$$\mathbf{A}\overline{x} = \lambda\overline{x}. \qquad (5.1)$$

Число λ при этом называется **собственным значением** (СЗ) оператора **A** (матрицы A).

Множество СЗ матрицы A образует ее **спектр.**

СВ и СЗ матрицы A обладают следующими свойствами:

1°. Если $\overline{x}$ - СВ матрицы A с СЗ λ, то и вектор $k\overline{x}$, $k \neq 0$, тоже СВ матрицы A с тем же СЗ λ.

Число k всегда можно выбрать таким, что $\|k\overline{x}\| = 1$, т.е. $k = 1/\|\overline{x}\|$.

СВ $\overline{x}$, для которого $\|\overline{x}\| = 1$, называется **нормированным**.

2°. Если матрица A невырождена, то все ее СЗ отличны от нуля.

3°. Если $\overline{x}$ - СВ невырожденной матрицы A с СЗ λ, то $\overline{x}$ - СВ матрицы A^{-1} с СЗ $\lambda^{-1} = 1/\lambda$.

4°. Если $\overline{x}$ - СВ матрицы A с СЗ λ, то $\overline{x}$ - СВ матрицы A^{k}, $k > 1$ с СЗ λ^{k}.

Отсюда, как следствие, вытекает следующий факт: если $P_к(x) = a_0x^к + a_1x^{к-1} + \ldots + a_к$ – многочлен и $\bar{x}$ - СВ матрицы А, то $\bar{x}$ - СВ матрицы $P_к(A)$ с СЗ $P_к(\lambda)$, где $P_к(A)$ – многочлен от матрицы $P_к(A)$.

5°. СВ матрицы А, отвечающие попарно различным СЗ, линейно независимы.

Следствие. В пространстве R^n матрица А не может иметь более n СВ с различными СЗ.

6°. Если $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ – СВ матрицы А с одним и тем же СЗ λ, то и линейная комбинация $\lambda_1\bar{x}^1 + \lambda_2\bar{x}^2 + \ldots + \lambda_n\bar{x}^n$ тоже является СВ матрицы А с СЗ λ.

7°. Собственные значения подобных матриц совпадают.

8°. СЗ λ ортогональной матрицы удовлетворяют условию $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Для отыскания СЗ матрицы А нужно составить **характеристическое уравнение** (ХУ) **матрицы**. Если А – $n \times n$ – матрица, то ее ХУ имеет вид (Е – единичная $n \times n$ – матрица):

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.2)$$

Координаты СВ $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, отвечающего СЗ λ, находятся из системы

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (5.3)$$

Многочлен от λ n-й степени в левой части равенства (5.2) называется **характеристическим многочленом** и обозначается $P(\lambda)$.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – СЗ матрицы А, то $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = S_P A$, где $S_P A$ – след матрицы А.

Справедливо еще одно свойство СВ и СЗ матрицы А.

9°. Если λ – СЗ матрицы А кратности k и ранг матрицы $A - \lambda E$ равен $r = n - k$, то СЗ λ отвечает $k = n - r$ линейно независимых собственных векторов.

Для симметрической матрицы А ($A^T = A$) справедливы:

<u>Теорема 5.1</u>. *Собственные векторы симметрических матриц, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

<u>Теорема 5.2 (*о полноте собственных векторов*)</u>. *У каждой симметрической матрицы А в n-мерном евклидовом пространстве существует n попарно ортогональных собственных векторов. Соответствующие им собственные значения являются действительными числами.*

Если матрица А – симметрическая и имеет кратные СЗ, то задача отыскания "недостающих" СВ упрощается тем, что эти векторы попарно ортогональны. Поэтому такие "недостающие" СВ, отвечающие кратному СЗ λ, можно найти исходя из ортогональности СВ.

5.1. Найти СЗ и СВ матрицы:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Δ а) Составляем ХУ (5.2) матрицы А:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 & 3 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 1 & 3 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ – СЗ матрицы А.

1. При $\lambda = 1$ система (5.3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Таким образом, СЗ λ_1 соответствует СВ

$$\bar{x}^{1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь x_3 – произвольное действительное число. Положив его, в частности, равным единице, получим СВ $\bar{x}^{1} = (-1, 1, 1)^{\text{T}}$.

2. Аналогично при $\lambda = 2$ имеем систему

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11x_2, \\ x_3 = -14x_2. \end{cases}$$

Таким образом, получаем:

$$\bar{x}^{2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_2 \\ x_2 \\ -14x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

При $x_2 = 1$ получим СВ $\bar{x}^{2} = (11, 1, -14)^{\text{T}}$.

3. При $\lambda = 3$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = x_1, \end{cases}$$

т.е. вектор

$$\bar{x}^{3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным. При $x_1 = 1$ он имеет вид $\bar{x}^{3} = (1, 1, 1)^{\text{T}}$.

Итак, матрица А имеет СЗ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, а соответствующие им нормированные СВ имеют вид

$$\bar{x}^{1} = \left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)^{T}, \ \bar{\text{x}}^{2} = \left(11/\sqrt{318}, 1/\sqrt{318}, -14/\sqrt{318}\right)^{T},$$

$$\bar{x}^{3} = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)^{T}.$$

б) ХУ матрицы А

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) + 1 - 3\lambda = -(\lambda-1)^3 = 0$$

имеет трехкратный корень $\lambda = 1$. Составив систему (5.3), будем иметь:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы, очевидно, равен 2. Значит, она имеет $n-r = 3-2 = 1$ линейно независимое решение

$x_2 = x_3$, $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow \overline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x_3, x_3, x_3)^T = x_3\,(1, 1, 1)$, $x_3 \in R$, $x_3 \neq 0$.

Положив $x_3 = 1$, получим, что матрица А имеет единственный СВ $\overline{x} = (1, 1, 1)^T$, соответствующий трехкратному СЗ $\lambda = 1$.

в) ХУ $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 3$. При этом λ система (5.3) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Она удовлетворяется при любых $x_1, x_2 \in R$. Значит, любой вектор $(x_1, x_2)^T$, где x_1 и x_2 не равны одновременно нулю, является СВ матрицы А. В частности, в качестве линейно-независимых СВ можно взять векторы $\overline{x}^1 = (1, 0)$, $\overline{x}^2 = (0, 1)$.

▲

5.2. Найти СЗ и СВ симметрической матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Δ Имеем $|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Для $\lambda_1 = 2$ найдем СВ $\overline{x}^1 = (0, 1, 1, 0)^T$. Для $\lambda_2 = -1$ – СВ $\overline{x}^2 = (0, -1, 1, 0)^T$. СВ $\overline{x}^3$ и $\overline{x}^4$, отвечающие СЗ $\lambda_3 =$

$\lambda_4 = -1$, найдем из условий ортогональности $\bar{x}^{3} \perp \bar{x}^{1}$, $\bar{x}^{3} \perp \bar{x}^{2}$, $\bar{x}^{4} \perp \bar{x}^{1}$, $\bar{x}^{4} \perp \bar{x}^{2}$.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$. Тогда из условий $\bar{x} \perp \bar{x}^{1}$, $\bar{x} \perp \bar{x}^{2}$ получим систему

$$\left.\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{x}^{1}) &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (\bar{x}, \bar{x}^{2}) &= -x_2 + x_3 = 0, \end{aligned}\right\}$$

общее решение которой

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда при $x_4 = 0$, $x_2 = 1$ получаем СВ $\bar{x}^{3} = (-2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, а при $x_2=0$, $x_4= = 1$ – СВ $\bar{x}^{4} = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Нетрудно видеть, что $\bar{x}^{3} \perp \bar{x}^{4}$.

Итак, для матрицы А СВ $\bar{x}^{1} = (1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}^{2} = (0, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}^{3} =(-2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}^{4} = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ попарно ортогональны. ▲

5.3. Найти СЗ и СВ матриц

а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -1 & -7 & -16 \\ 4 & 15 & 27 \\ -2 & 7 & -11 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

5.4. Показать, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

имеют одинаковые СЗ, но не являются подобными.

5.5.* Пусть λ_A – СЗ матрицы А, а $\bar{x}$ – СВ матрицы В = А + α Е, где Е – $n \times n$– единичная матрица, $\alpha \in R$. Чему равно при этом СЗ λ_B матрицы В?

5.6.* Найти СЗ и СВ оператора дифференцирования **D**, как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств действительных функций, $n \in \mathrm{N}$:

а) пространство всех многочленов степени не выше n;

б) пространство всех тригонометрических многочленов $\mathrm{f(t)} = a_0 + a_1\cos \mathrm{t} + + b_1 \sin \mathrm{t} + \ldots + a_n \cos n\mathrm{t} + b_n \sin n\mathrm{t}$;

в) линейная оболочка системы функций $\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n \mathrm{t}}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – попарно различные числа;

г) пространство всех функций вида $\mathrm{e}^{\lambda_0 \mathrm{t}}\mathrm{P(t)}$, где $\mathrm{P(t)}$ – любой многочлен степени не выше n, $\lambda_0 \neq 0$ – фиксированное число.

5.7.* Найти СЗ и СВ оператора дифференцирования в пространстве функций, бесконечно дифференцируемых на R.

5.2. Диагонализация матриц

Приведение матрицы к диагональному виду. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора

Для линейного оператора **A**: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ справедлива

Теорема 5.3. ***Для того чтобы матрица А линейного оператора А в некотором базисе имела диагональный вид, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из собственных векторов матрицы А. При этом в указанном базисе матрица***

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad (5.4)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы А.

Вид матрицы (5.4) называется **каноническим**.

Если Т – матрица, столбцами которой являются СВ $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ матрицы А, то приведение А к диагональному виду (диагонализация матрицы А) осуществляется по формуле

$$\Lambda = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}. \qquad (5.5)$$

Имеет место

<u>Теорема 5.4</u>. ***Если λ_i – СЗ $n \times n$ – матрицы А кратности k_i, $i = \overline{1,m}$, $k_1 + + k_2 + \ldots + k_m = n$, и rang $(A - \lambda_i E) = n - k_i = r_i$, то матрица А приводится к диагональному виду.***

<u>Следствие</u>. ***Если все СЗ матрицы различны, то она диагонализируется. Симметрические матрицы всегда диагонализируются.***

Алгоритм приведения матрицы А к диагональному виду:

1. Решая ХУ $|A - \lambda E| = 0$, находим собственные значения λ_i матрицы А.

2. Находим $\mathrm{rang}(A - \lambda_i E)$ и проверяем выполнимость теоремы 5.4.

3. Если условия этой теоремы выполнены, записываем диагональный вид матрицы, расположив по ее главной диагонали ее собственные значения, причем каждое СЗ повторяется столько раз, какова его кратность.

Если же требуется найти базис, в котором матрица А имеет диагональный вид и матрицу перехода Т, то поступаем следующим образом:

1. Находим СВ матрицы А.

2. Составляем матрицу Т, столбцами которой служат СВ матрицы А.

3. Находим A^{-1}.

4. По формуле $\Lambda = T^{-1}AT$ получаем искомую матрицу.

В ОНБ самосопряженный оператор **А** имеет симметрическую матрицу А. У каждой симметрической матрицы имеется *n* попарно ортогональных СВ. В базисе из этих векторов матрица диагонализируется. Если все эти ортогональные СВ нормировать, то получим ОНБ, матрица перехода к которому ортогональная, т.е. $T^{-1} = T^{T}$. Поэтому формула 5.5 диагонализации симметрической матрицы принимает вид

$$\Lambda = T^{T}AT. \qquad (5.6)$$

Здесь Т – матрица, столбцами которой служат ортонормированные СВ матрицы А.

Алгоритм диагонализации симметрических матриц следующий:

1. Находим СЗ и ортогональные СВ матрицы А. Нормируем СВ.

2. Составляем матрицу перехода T, столбцами которой служат ортонормированные СВ матрицы A.

3. По формуле $\Lambda = T^T AT$ получаем искомую диагональную матрицу.

5.8. Выяснить, приводится ли к диагональному виду матрица, и в случае приводимости записать ее диагональный вид:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$.

Δ а) Находим СЗ матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ -1 & (2-\lambda) & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 0.$$

Для двукратного ($k = 2$) СЗ $\lambda = 2$ находим $r = \text{rang}\,(A - 2E) =$

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\text{-II}} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

Так как $2 = r \neq n - k = 3 - 2 = 1$, то данная матрица не приводится к диагональному виду.

б) Следуя алгоритму, получаем:

1. $$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 12 & -4 \\ 1 & (-3-\lambda) & 1 \\ -1 & 12 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$

Согласно следствию из теоремы 5.4, матрица A приводится к диагональному виду.

1. Для каждого λ_i, $i = 1, 2, 3$, решаем системы

$$\left.\begin{aligned} (3-\lambda_i)x_1 + 12x_2 - 4x_3 &= 0, \\ x_1 - (3+\lambda_i)x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + 12x_2 + (6-\lambda_i)x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{x}^1 = (-2, 1, 2)^T,\ \bar{x}^2 = (-8, 3, 7)^T,\ \bar{x}^3 = (-3, 1, 3)^T$ – СВ матрицы A.

2. $\mathrm{T} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $|\mathrm{T}| = 1$. 3. $\mathrm{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $\Lambda = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. ▲

5.9. Найти ортогональную матрицу, приводящую матрицу

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

к диагональному виду.

Δ В соответствии с алгоритмом диагонализации симметрических матриц имеем:

1. $|\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & 2 \\ -1 & (3-\lambda) & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_{2,3} = 4. \end{cases}$

2. Для $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 4$ находим соответствующие $\bar{x}^1 = (1, 1, -2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}^2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Поскольку $\bar{x}^3 \perp \bar{x}^1$ и $\bar{x}^3 \perp \bar{x}^2$, то в качестве $\bar{x}^3$ можно взять $\bar{x}^3 = [\bar{x}^1, \bar{x}^2] = (1, -5, -2)^{\mathrm{T}}$. Отсюда получаем нормированные СВ

$$\bar{v}^1 = \frac{\bar{x}^1}{\|\bar{x}^1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^2 = \frac{\bar{x}^2}{\|\bar{x}^2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \bar{v}^3 = \frac{\bar{x}^3}{\|\bar{x}^3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

3 – 4. Составляем матрицу перехода T (искомую ортогональную матрицу и матрицу T^{T}):

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{T}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

5. Диагональная матрица

$$\Lambda = T^{T}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

5.10. Выяснить, диагонализируется ли матрица, и в случае положительного ответа записать ее канонический вид:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ б) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ в) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}; \text{ г) } \begin{bmatrix} 10 & -3 & -9 \\ 18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{bmatrix}.$$

5.11. Найти ортогональные матрицы, приводящие данные симметрические матрицы к диагональному виду:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 3 \end{bmatrix}.$$

5.12. Данные симметрические матрицы привести к диагональному виду:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \text{ б) } \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \text{ в) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \text{ г) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.13.* Найти матрицу ортогонального проектирования векторов пространства R^3 на 1) прямую $x = z = 0$; 2) прямую $x = y = z$; 3) плоскость $x + y + + z = 0$; 4) плоскость, натянутую на векторы (порожденную векторами) $\overline{a} = =(-1, 1, -1)$ и $\overline{b} = (1, -3, 2)$. Найти СЗ и собственные подпространства (т.е. множества, порожденные собственными векторами матрицы) этих матриц и диагонализировать их.

5.3. Квадратичные формы

Квадратичная форма и ее матрица. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности. Закон инерции. Применение квадратичных форм к исследованию кривых второго порядка

Квадратичной формой (КФ) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \qquad (5.7)$$

где $a_{ij} \in \mathrm{R}$ – коэффициенты КФ, причем $a_{ij} = a_{ji}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$.

Матрица

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.8)$$

называется **матрицей КФ**. Она симметрическая, так как $a_{ij} = a_{ji}$. КФ полностью определяется своей матрицей, и наоборот, любая КФ однозначно определяет симметрическую матрицу. С помощью матрицы А КФ записывается в векторно-матричном виде

$$Q(\bar{x}) = Q(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}) = (\mathrm{A}\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}^T \mathrm{A}\bar{x}. \qquad (5.9)$$

Говорят, что КФ (5.7) имеет **канонический вид**, если все $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, т.е. канонический вид КФ следующий:

$$Q(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 . \qquad (5.10)$$

Канонической КФ (5.9) соответствует диагональная матрица

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}). \qquad (5.11)$$

Нахождение канонического вида КФ называется **приведением КФ к каноническому виду**.

Если $Q(\bar{x}) = (A\bar{x},\ \bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$ КФ с $n \times n$ – матрицей А, заданная в ОНБ $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n\} = \{\bar{u}\}$, а $\{\bar{v}\} = \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n\}$ – новый ОНБ в R^n и Т – матрица перехода от $\{\bar{u}\}$ к $\{\bar{v}\}$, то в базисе $\{\bar{v}\}$ принимает вид

$$Q(\bar{x}') = (\bar{x}',\ T^T A T\ \bar{x}'),$$

т.е. матрицей КФ в ОНБ $\{\bar{v}\}$ является матрица $T^T AT$.

Справедлива

<u>**Теорема 5.5.**</u> ***КФ в ОНБ, состоящем из СВ матрицы А, имеет канонический вид***

$$Q(\bar{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_{1n}'^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2, \qquad (5.12)$$

где λ_i ***– СВ матрицы А,*** $i = \overline{1,n}$, $\bar{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$.

Алгоритм приведения КФ к каноническому виду тот же, что и алгоритм диагонализации симметрических матриц.

Для КФ справедлива

<u>**Теорема 5.6 (закон инерции КФ)**</u>. ***Если КФ приводится к сумме квадратов (к каноническому виду) в двух разных базисах, то число положительных квадратов, так же как и число отрицательных квадратов, в обоих случаях одно и то же.***

Другим методом приведения КФ к каноническому виду **является метод Лагранжа**, состоящий в последовательном выделении в КФ полных квадратов. Суть его поясняют примеры 5.17 и 5.18.

Важным в теории КФ является понятие **знакоопределенности.** КФ $Q(\bar{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **положительно-определенной**, если для любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеем $Q(\bar{x}) > 0$, и **отрицательно-определенной**, если $Q(\bar{x}) < 0$. Матрица А, соответствующая положительно-(отрицательно-) определенной КФ, называется **положительно- (отрицательно-) определенной матрицей**. Положительно- и отрицательно-определенные КФ называются знакоопределенными.

КФ Q($\bar{x}$) называется **неотрицательно- (неположительно-) определенной**, если Q($\bar{x}$) ≥ 0 (Q($\bar{x}$) ≤ 0), $\forall \bar{x} \in R^n$.

Справедлива

Теорема 5.7. ***Для того чтобы КФ Q($\bar{x}$) = $\bar{x}^T A \bar{x}$ была положительно- (отрицательно-) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все СЗ λ_1, λ_2, …, λ_n матрицы А были положительными (отрицательными).***

Следствие. ***Если КФ знакоопределенна, то ее матрица невырождена.***

Главными минорами матрицы (5.8) КФ называются определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |A|,$$

т.е. миноры, стоящие в левом углу матрицы А.

Справедлив

Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности КФ или матрицы. ***Для того чтобы КФ была положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительными. Для того чтобы КФ была отрицательно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры нечетного порядка были отрицательными, а четного порядка – положительными.***

Итак,

$$Q(\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0;$$

$$Q(\bar{x}) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ (-1)^n\Delta_n > 0. \qquad (5.13)$$

КФ применяются для упрощения кривых второго порядка в R^2 и поверхностей второго порядка в R^3.

В ПДСК общий вид кривой второго порядка следующий:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (5.14)$$

Каждое уравнение (5.14) определяет в R^2 либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу (без учета вырожденных случаев). Уравнение (5.14) преобразуется к каноническому виду только в специально выбранной системе координат.

Алгоритм приведения кривой (5.14) к каноническому виду следующий:

1. Выписываем матрицу КФ $Q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ a_{12} = a_{21}.$$

2. Находим СЗ λ_1 и λ_2 и нормированные СВ $\bar{v}^1 = (\alpha_1, \beta_1)^T$ $\bar{v}^2 = (\alpha_2, \beta_2)^T$ этой матрицы ($\lambda_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$).

3. Составляем матрицу

$$T = \begin{bmatrix} \bar{v}^1 & \bar{v}^2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

4. Вводим новую систему координат X'Y' по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y'. \end{cases} \tag{5.15}$$

Преобразование (5.15) осуществляет поворот осей координат X и Y на некоторый угол или является зеркальным отражением.

5. Переменные x и y из (5.15) подставляем в уравнение (5.14), после чего в нем исчезнет член с произведением xy.

6. В полученном таким образом новом уравнении выделяем полные квадраты $(x' + a)^2$ и $(y' + b)^2$ и вводим новую систему координат $\bar{X}\bar{Y}$ по формулам $\bar{x} = x' + a$, $\bar{y} = y' + b$, чем фактически осуществляется перенос системы координат в новое начало $\bar{0} = (-a, -b)$. При этом уравнение кривой в системе $\bar{X}\bar{Y}$ примет канонический вид $\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + a_{33} = 0$.

7. Строим все системы координат XY, X'Y', $\bar{X}\bar{Y}$ и в последней системе – искомую кривую.

Поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в ПДСК XYZ имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + \\ + a_{44} = 0. \tag{5.16}$$

Каждое уравнение (5.16) определяет в R^3 одну из поверхностей – эллипсоид, параболоид, гиперболоид, цилиндр, конус (без учета вырожденных случаев).

Алгоритм приведения уравнения (5.16) к каноническому виду тот же, что и для кривых второго порядка. Единственным отличием является тот факт, что ортогональная матрица T п.3 алгоритма теперь имеет три столбца:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix};\ \bar{v}^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix},\ \bar{v}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix},\ \bar{v}^3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$ - нормированные СВ матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}$$ КФ $Q(x, y, z) = a_{11}x^2 + {}$ $+ a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ уравнения (5.16). При этом формулы (5.15) переходят в формулы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{T}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{cases}$$

5.14. Для квадратичной формы

а) $2x^2 - 4xy + 3y^2$;

б) $3x^2 - 4xy + 6xz + 10\,yz$

выписать матрицу A, найти ранг квадратичной формы (матрицы).

Δ а) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Так как $|\mathrm{A}| = 6 - 4 = 2 \neq 0$, то ранг квадратичной формы равен 2.

б) Имеем $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Так как $|\mathrm{A}| \neq 0$, то ранг A = 3. ▲

5.15. По данной матрице

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

написать соответствующую ей квадратичную форму. Является ли квадратичная форма положительно-определенной?

Δ а) Имеем

$Q(x, y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2$;

$a_{11} = 2 > 0$, $|A| = 2 \cdot 3 - 1 = 5 > 0$. Матрица A положительно определена, форма тоже.

б) Квадратичная форма с данной матрицей имеет вид

$Q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2xz - 3y^2 + 3z^2$;

$a_{11} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 < 0$ – форма не является знакоопределенной. ▲

5.16. Записать в матричном виде квадратичную форму

$Q(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8xy + 2xz$.

Δ Матрица A данной квадратичной формы равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, согласно (5.9),

$$Q(x, y, z) = (x, y, z) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. ▲$$

5.17. Привести квадратичную форму

а) $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$;

б) $Q(x, y, z) = x^2 - 8xy - 16xz + 7y^2 - 8yz + z^2$

к каноническому виду с помощью ортогональной матрицы и найти эту матрицу. Является ли квадратичная форма положительно-определенной?

Δ а) Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 - 2\lambda - 1{,}25 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2{,}5$, $\lambda_2 = -0{,}5$.

Полагая $\lambda = 2{,}5$, для определения соответствующего собственного вектора получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -1{,}5\,x + 1{,}5y = 0, \\ 1{,}5\,x - 1{,}5\,y = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим $x = y = c$, т.е. $\bar{x}^1 = \bar{i} + \bar{j} = (1,\ 1)$.

Аналогично для $\lambda = -0{,}5$ получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5x + 1{,}5\,y = 0, \\ 1{,}5x + 1{,}5\,y = 0, \end{aligned}\right\}$$

или $x = c$, $y = -c$, $c \in R$ и второй собственный вектор $\bar{x}^2 = \bar{i} - \bar{j} = (1, -1)$

Нормируя эти векторы, получаем:

$$\bar{a}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{a}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Координаты этих векторов определяют ортогональную матрицу

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ и } T^{-1} = T^{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

которая приводит квадратичную форму к каноническому виду. В базисе $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$ имеем матрицу квадратичной формы:

$$A' = T^{-1}\,AT = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2{,}5}{\sqrt{2}} & \frac{2{,}5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{0{,}5}{\sqrt{2}} & \frac{0{,}5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в новых координатах квадратичная форма принимает канонический вид

$$Q\,(x', y') = 2{,}5\,(x')^2 - 0{,}5(y')^2,$$

при этом старые координаты x, y выражаются через новые x', y' по формулам

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y', \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Так как второе собственное значение у данной квадратичной формы отрицательно, $\lambda_2 = -0{,}5$, то квадратичная форма не является положительно-определенной.

б) Матрица А данной квадратичной формы равна

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

При $\lambda_1 = -9$ координаты x, y, z собственного вектора $\overset{-1}{x}$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 10x - 4y - 8z &= 0, \\ -4x + 16y - 4z &= 0, \\ -8x - 4y + 10\,z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} 5x - 2y - 4z &= 0, \\ x - 4y + z &= 0, \\ 4x + 2y - 5z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы равен двум, и она эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y - 4z = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x - 4y + z = 0.$$

Отсюда находим $x = -18c$, $y = -9c$, $z = -18c$, т.е.

$$\overline{x}^1 = (-18c,\ -9c,\ -18c)^{\mathrm{T}} = -9c(2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}, \quad c \in \mathrm{R}.$$

Значит, можно положить $\overline{x}^1 = (2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}$. Пронормировав, получим $\overline{a}^1 = (2/3,\ 1/3,\ 2/3)^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$ имеем систему $\begin{cases} -8x - 4y - 8z = 0, \\ -4x - 2y - 4z = 0, \\ -8x - 4y - 8z = 0. \end{cases}$

Ранг матрицы этой системы равен единице. Значит, имеется два свободных неизвестных. Имеем уравнение $2x + y + 2z = 0$, находим $y = -2x - 2z$, x и z – произвольные постоянные из R.

Таким образом, имеем решение

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix}.$$

При $x = 1$ и $z = 0$ получим вектор $\overline{x}^2 = (1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Чтобы найти $\overline{x}^3$, используем условие ортогональности $\overline{x}^2$ и $\overline{x}^3 = (x, y, z,)^{\mathrm{T}} = (x, -2y - 2z, 0)^{\mathrm{T}}$:

$$x + 4x + 4z = 0 \Rightarrow x = -4z/5.$$

Положив, например, $z = -5$, получим вектор $\overline{x}^3 = (4,\ 2,\ -5)^{\mathrm{T}}$. Пронормировав векторы $\overline{x}^2$ и $\overline{x}^3$, получим $\overline{a}^3 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overline{a}^3 = (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, матрица перехода

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \overline{a}^1 & \overline{a}^2 & \overline{a}^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Канонический вид формы: $Q\,(x', y', z') = -9\,(x')^2 + 9(y')^2 + 9(z')^2$.

Квадратичная форма не является положительно определенной, так как $\lambda_1 = -9 < 0$. ▲

5.18. Методом выделения полных квадратов (методом Лагранжа) привести к каноническому виду квадратичную форму:

а) $Q(x, y) = x^2 - y^2 - 4xy$;

б) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

Δ а) Имеем, группируя члены, содержащие x и y:

$Q(x, y) = x^2 - y^2 - 4xy = (x^2 - 4xy) - (y^2) =$

$= (x - 2y)^2 - 4y^2 - (y^2) = (x - 2y)^2 - (5y^2)$.

Положив $x' = x - 2y$, $y' = y$, получим канонический вид квадратичной формы: $Q(x', y') = (x')^2 - 5(y')^2$.

б) Выделим слагаемые, содержащие x_1, и представим квадратичную форму в виде

$Q = (x_1^2 - x(3x_2 - 4x_3) + (1/4)(3x_2 - 4x_3)^2) - (1/4)(3x_2 - 4x_3)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$

$= (x_1 - (3/2)x_2 + 2x_3)^2 - (9/4)x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2 = (x_1 - (3/2)x_2 + 2x_3)^2 -$

$- (9/4)(x_2^2 - (32/9)x_2x_3 + (256/81)x_3^2) + (64/9)x_3^2 - 3x_3^2 =$

$= (x_1 - (3/2)x_2 + 2x_3)^2 - (9/4)(x_2 - (16/9)x_3)^2 + (37/9)x_3^2$.

Переход к новым переменным по формулам

$$y_1 = x_1 - (3/2)x_2 + 2x_3,\ y_2 = x_2 - (16/9)\,x_3,\ y_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду:

$$Q\,(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - (9/4)y_2^2 + (37/9)y_3^2. \qquad \blacktriangle$$

5.19. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму $Q\,(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 5x_2x_3$.

Δ Поскольку отсутствует коэффициент при квадрате переменной, то сначала применим преобразование

$$x_1 = (1/2)(y_1 - y_2), \quad x_2 = (1/2)(y_1 + y_2), \quad x_3 = y_3.$$

В результате получим квадратичную форму

$Q\,(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - (5/2)y_1y_3 - y_2^2 - (5/2)\,y_2y_3 =$

$= y_1^2 - 2 \cdot (5/4)\,y_1y_3 + (25/16)\,y_3^2 - (y_2^2 + 2 \cdot (5/4)y_3y_2 + (25/16)y_3^2) =$

$= (y_1 - (5/4)y_3)^2 - (y_2 + (5/4)y_3)^2$.

Сделав замену $z_1 = y_1 - (5/4)y_3$, $z_2 = y_2 + (5/4)y_3$, $z_3 = y_3$, получим каноническую форму квадратичной формы

$$Q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + 0 \cdot z_3^2.$$

Итак, линейное преобразование

$$z_1 = x_1 + x_2 - (5/4)x_3,\ z_2 = -x_1 + x_2 + (5/4)x_3,\ z_3 = x_3$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду. ▲

5.20. С помощью теории квадратичных форм исследовать кривую второго порядка и построить ее:

$$x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0.$$

Δ Для матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Им отвечают собственные векторы

$$\bar{u}^1 = (-1, 1)^T,\ \bar{u}^2 = (1, 1)^T.$$

Нормируя собственные векторы, получаем

$$\bar{a}^1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{a}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода T к новому базису имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Теперь вводим замену переменных

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y', \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Подставим эти x и y в исходное уравнение кривой:

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')^2 + 4(-\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y')(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') +$$

$$+\frac{4}{\sqrt{2}}y' - \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{2}{\sqrt{2}}y' - 5 = 0.$$

Отсюда находим $-(x')^2 + 3(y')^2 + \sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y' - 5 = 0$ или

$$3(y' + \frac{2}{\sqrt{2}})^2 - (x' - \frac{2}{\sqrt{2}})^2 = 6.$$

Введя замену $\bar{y} = y' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\bar{x} = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим уравнение гиперболы

$3(\bar{y})^2 - (\bar{x})^2 = 6 \Rightarrow \frac{(\bar{y})^2}{2} - \frac{(\bar{x})^2}{6} = 1$ – в системе координат $\overline{X}\overline{Y}$ (рис. 5.1).

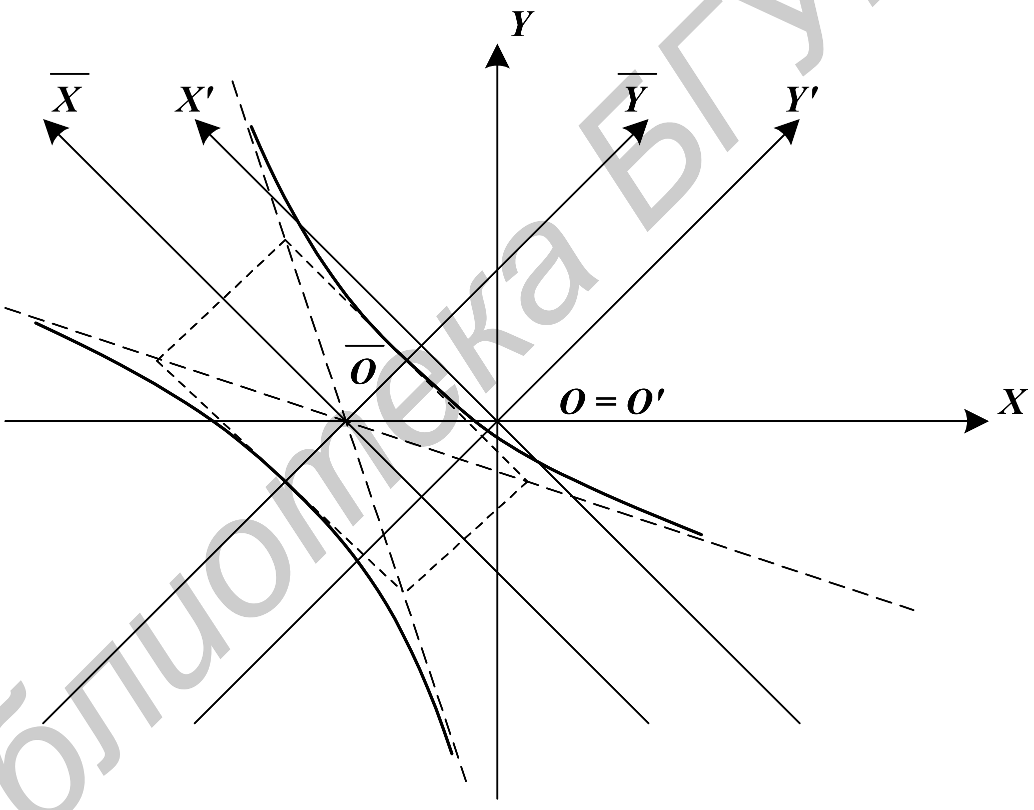

Рис. 5.1

5.21. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Δ Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda+2) = 0.$$

Таким образом, СЗ матрицы $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -2$.

Соответствующие собственные векторы равны

$$\bar{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нормированные векторы образуют матрицу T:

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z', \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y', \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{cases}$$

Сделав замену в уравнении, получим:

$3(x')^2 + 6(y')^2 - 2(z')^2 + 2x' + 8y' + (8/3)z' + (10/9) = 0 \Leftrightarrow 3(x' + 1/3)^2 = 6(y' + \quad +$
$2/3)^2 - 2(z' - 2/3)^2 = 1$.

Введем замену $\bar{x} = x' + 1/3,\ \bar{y} = y' + 2/3,\ \bar{z} = z' - 2/3$.

В системе координат $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ уравнение поверхности приводится к каноническому виду $3(\bar{x})^2 + 6(\bar{y})^2 - 2(\bar{z})^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\bar{x}^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{\bar{y}^2}{\frac{1}{6}} - \dfrac{\bar{z}^2}{\frac{1}{2}} = 1$ - однополостный гиперболоид. ▲

5.22. Написать матрицу квадратичной формы:

а) $2x^2 - 3y^2 + 6xy$;

б) $x^2 + 2xy - 6yz + z^2 + 4xz$;

в) $-3x^2 + 4xy - 8xz + y^2 - 3z^2$.

5.23. По матрице написать квадратичную форму:

а) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

5.24. Является ли положительно или отрицательно определенной квадратичная форма:

а) $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $-x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$?

5.25. Привести квадратичную форму

а) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$;

б) $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$

ортогональным преобразованием к каноническому виду.

5.26. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;

б)* $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 219x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;

в) $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

5.27. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}\,x + 20 = 0$$

и построить фигуру, определяемую этим уравнением.

Ответы

1

1.8.

а) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 14 & 2 & 11 \\ 15 & 2 & 8 \\ 14 & 7 & 4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 27 & 1 & 4 \\ 21 & 9 & 7 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 14 & 2 & 18 \\ 14 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 13 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 15 \\ 23 & 0 & 19 \end{bmatrix}$.

1.9. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при $n = 2k$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ при n = 2k – 1; б) $\lambda^{n-1}\begin{bmatrix} \lambda & n \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

1.10.

$$\begin{bmatrix} 2\alpha+5\beta+2\gamma & \alpha+7\beta-4\gamma & -\beta+3\gamma \\ -\alpha+5\gamma & 3\alpha+3\beta+\gamma & 2\alpha+\gamma \\ 4\alpha+\beta+3\gamma & -\beta-4\gamma & 3\alpha+\beta+5\gamma \end{bmatrix}.$$

1.11.

а) $\begin{bmatrix} 28 & 22 & 22 \\ 21 & 24 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -4 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 16 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 15 & 5 & -4 \\ 18 & 5 & -9 \\ 11 & 8 & -5 \end{bmatrix}$.

1.12.

а) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}$

1.13.

а) $C = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$; S$p$C = 52;

б) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, SpC = 0; в) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, SpC = 10.

1.14. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}$.

1.15. а) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -21 & 22 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

1.18. а) $\begin{bmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{bmatrix} = (x-y)\,E + yA$;

б) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = (x-y)\,E + yA$;

в) $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ (3t-3x-u) & (t-3y-v) & t \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} x & y & t \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$.

1.19. а) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $bc = -a^2$; б) $\pm E$ и $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a^2 = 1 - bc$.

1.20. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.21. а) $m = 9$, $n = 1$; б) $m = 7$, $n = 6$.

1.29. а) Нечетная; б) четная.

1.30. а) Да, плюс; б) нет.

1.31. а) $(-1)^{n-1}5^n$; б) $x^2 y^2$.

1.32. $3^{n+1} - 2^{n+1}$.

1.33. $10x^4 - 5x^3$.

1.34. а) 28; б)12; в) –302.

1.35. а) –10,2; б) 2,3.

1.36. (–6, –4).

1.37. –5.

1.41. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $(1/18)\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$; в) $(1/2)\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.42. а) $(1/2)\begin{bmatrix} -12 & 5 & -4 \\ -8 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $(1/15)\begin{bmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 21 & -6 & -9 & -39 \\ -1 & -28 & 35 & 27 \\ 23 & -16 & -13 & -27 \\ -13 & 32 & -7 & 21 \end{bmatrix}$.

1.43. а) $X = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}$; б) $X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1.44. а) Поменяются местами *k*-й и *l*-й столбцы;

б) k-й столбец умножится на число 1/*x*;

в) из k-го столбца вычтется *l*-й, умноженный на *x*.

1.45. $A^{-1} = -(A + E)$.

1.46. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. **1.47.** а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $1/3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

2

2.16. Да. **2.17**. Да**. 2.18.** а) Да; б) нет. **2.19.** Нет.

2.21. 1 – 4) Да; 5) нет; 6) да; 7 – 9) нет.

2.23. Нет. **2.24.** Да (да).

2.25. 1 – 3) Да; 4) нет; 5 – 6) да; 7) нет; 8) при α = 0º и при α = 90º множество является линейным подпространством, при 0 < α < 90º не является.

2.26. 1 – 5) Да; 6) нет.

2.27. 1) Да; да; 2) да; нет; 3) да; нет; 4) да; да; 5) да; да; 6) да; нет.

2.28. а) Все векторы вида $(\alpha, 0, \beta, 0, \gamma)$; б) все векторы вида $(\alpha, \beta, \gamma, \beta, \gamma)$; в) все векторы вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, удовлетворяющие условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$.

2.29. а) Все многочлены степени ≤ 2 и нулевой многочлен; б) то же, что и в “а”; в) все многочлены степени ≤ 2, у которых сумма коэффициентов равна нулю, и нулевой многочлен; г) то же, что и в “в”.

2.30. а) Независима; б) зависима; в) зависима; г) независима.

2.31. $\overline{m} + \overline{n} - \overline{l}$; $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ линейно независимы.

2.32. $\overline{x} = \frac{11}{2}\overline{e}^1 - \frac{7}{4}\overline{e}^2 - \frac{3}{2}\overline{e}^3 + \frac{5}{4}\overline{e}^4$.

2.33. а) $(-3, 7, 5/3, -2)$; б) $(1/2, -1, 1/3, 1)$; в) $(-11/2, 10, -7/3, -6)$; г) $((a/2) - c + d/2, 2c - d, b/3 - (2/3)c + d/3, d - c)$.

2.34. $\overline{v} = 2\overline{x} + \overline{y} + 3\overline{z} + \overline{u}$.

2.35. $r(A) = 2$; $r(B) = 3$; $r(C) = 3$; $r(D) = 4$.

2.36. а) 2; б) 4; в) 3; г) 3.

2.37. $r(3) = 2$; $r(\lambda) = 3$, $\lambda \ne 3$.

2.38. $r(0) = 2$; $r(\lambda) = 3$, $\lambda \ne 0$.

2.42. а) Нет, б) да; в) да; г) $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, $|\overline{x}| = \sqrt{2}$, $|\overline{y}| = 1$, $\alpha = 90^\circ$.

2.43. ОНБ имеет вид: $\overline{u}^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overline{u}^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overline{u}^3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

2.44. $\lambda = -5$.

2.45. а) $\overline{y}^1 = (1, -2, 2)$, $\overline{y}^2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$, $\overline{y}^3 = (6, -3, -6)$; б) $\overline{y}^1 = (1, 1, 1, 1)$, $\overline{y}^2 = (2, 2, -2, -2)$, $\overline{y}^3 = (-1, 1, -1, 1)$.

2.46. Ответы неоднозначны. Например: а) $\overline{x}^3 = (1, 1, 1, 0)$, $\overline{x}^4 = (-1, 1, 0, 1)$; б) $\overline{x}^3 = (2, 3, 1, 0)$, $\overline{x}^4 = (1, -1, 1, 1)$.

2.47. Ортогональный базис евклидова пространства составляют векторы: $\overline{y}^1 = (1, 1, -1, 2, 3)^{\text{т}}$, $\overline{y}^2 = (1/8)(1, 1, 15, 2, 3)^{\text{т}}$, $\overline{y}^3 = (1/5)\,(6, 1, 0, 7, -7)$, $\overline{y}^4 = (-1, -1, 0, 1, 0)$, $\overline{y}^5 = (-3, 4, 0, 1, -1)$.

2.48. $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (c_1 + c_2)^2 + (d_1 + d_2)^2} \le$
$\le \sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2} + \sqrt{a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 + d_2{}^2}$.

3

3.8. а) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

3.9. а) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

3.10. $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1/(\lambda + 2)$.

3.11. а) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$; б) система несовместна.

3.12. а) Система имеет только нулевое решение; б) $\overline{x} = C_1\overline{x}^1 + C_2\overline{x}^2$, $\overline{x}^1 = (-11, 6, 1, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^2 = (-17, 11, 0, 1)^{\text{т}}$, $C_1, C_2 \in R$; в) $\overline{x} = x^* + C\overline{x}^1$, $\overline{x}^1 = \,=(10, -1, 16, 5)^{\text{т}}$, $\overline{x}^* = (10, 0, 15, 4)^{\text{т}}$, $C \in R$; г) $\overline{x} = \overline{x}^* + C_1\overline{x}^1 + C_2\overline{x}^2$, $\overline{x}^* =$
$= (13, -5, 0, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^1 = (17, -7, 1, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^2 = (-11, 5, 0, 1)^{\text{т}}$, $C_1, C_2 \in R$.

3.13. а) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$; б) система несовместна.

3.14. а) $\overline{x} = C_1\overline{x}^1 + C_2\overline{x}^2 + C_3\overline{x}^3$, $\overline{x}^1 = (1, 3, 2, 0, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^2 = (3, -1, 0, 2, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^3 = (-3, -1, 0, 0, 2)^{\text{т}}$; б) $\overline{x} = \overline{x}^* + C_1\overline{x}^1 + C_2\overline{x}^2$, $\overline{x}^* = (0, 3/10, -1/2, 1/10, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^1 = (1, -1, 0, 0, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^2 = (0, 1, 20, 7, -5)^{\text{т}}$; в) $\overline{x} = C_1\overline{x}^1 + C_2\overline{x}^2$, $\overline{x}^1 = (2, 1, 0)^{\text{т}}$, $\overline{x}^2 = (3, 0, -1)^{\text{т}}$.

4

4.8. 1 – 5) Да. **4.9.** 1 – 3) Да; 4) нет; 5) да.

4.10. 1 – 3) Да; 4) нет; 5) нет. **4.11.** 1 – 2) Да.

4.12. 1. а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$; б) ker **A** = C(-29/7, 2/7, 1), C $\in$ R; в) im **A** – линейная оболочка L($\bar{a}$ = (2, 34), $\bar{b}$ = (1, 5, –5)).

2. а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$; б) ker **A** = C(–5, 6, 1), C $\in$ R; в) im **A** – линейная оболочка L($\bar{a}$ = (1, 0, 1), $\bar{b}$ = (1, 1, 2)).

3. а) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) ker **A** = C(–1, 1, 1), C $\in$ R; в) im **A** – линейная оболочка L($\bar{a}$ = (1, 3, 2), $\bar{b}$ = (–3, –2, 1)).

4. а) $\begin{bmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; б) ker **A** = C(-1/7, -6/7, 1), C $\in$ R; в) im **A** – линейная оболочка L($\bar{a}$ = (3, 1, 5), $\bar{b}$ = (10, 1, –2)).

5. а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 9 & -2 & -2 \end{bmatrix}$; б) ker **A** = C(0, –1, 1), C $\in$ R; в) im **A** – линейная оболочка L($\bar{a}$ = (1, 2, 9), $\bar{b}$ = (1, –1, –2)).

4.13. 1) $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$; im **A** $\{\bar{x} = \lambda\bar{i} - \sqrt{3}\lambda\bar{k} + y\bar{j}\}$, $\lambda \in$ R; ker **A** = = $\{\bar{x} + \lambda(\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{k})\}$.

2) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, im **A** = R^3, ker **A** = $\vec{0}$.

3) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, im **A** $\{\bar{x} = \lambda\bar{i} + y\bar{j} - \lambda\bar{k}\}$; ker **A** = $\{\bar{x} = \lambda(\bar{i} + \bar{k})$.

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, im **A** = R^3, ker **A** = $\overline{0}$.

5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, im **A** = R^3, ker **A** = $\overline{0}$.

4.14. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, да; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, нет; 3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, нет;

4) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, да; 5) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, да.

4.15. $\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **4.16.** $\begin{cases} z_1 = 2x_1 - 2x_2, \\ z_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$

4.17. 1) $A^{-1} = 1/12 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 12 & -19 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; 2) не существует.

4.23. а) Нет; б) да.

4.24. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **4.25.** $\overline{x}$ = (17/3, –4/3, –16/3).

4.26. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **4.27.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

4.29. 1) В последней системе координат гипербола $-9X''^2 + Y''^2 = 1$; 2) эллипс $X''^2/16 + Y''^2/9 = 1$; 3) парабола $X''^2 = \sqrt{2}/2\, Y''$; 4) $4X''^2 + Y''^2 = 0$ – точка.

4.32. а) $A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$, **A*** = –A; б) **A*** = –**A**;

в) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = A^T$;   г) $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$;   е) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

4.33. а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 1 & -8 & 6 & 4 \\ 0 & -7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

4.34. Поворот по часовой стрелке вокруг начала координат.

4.35. ker **A** = $\{\overline{0}\}$.   **4.36.** ker **A** = $\{(0, 0, x_3\}$, где x_3 – произвольное число.

5

5.3. а) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\overline{x}^1 = (1, 1, 0)^T$, $\overline{x}^2 = (-1, 1, 0)^T$, $\overline{x}^3 = (-1, 0, 1)^T$;

б) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\overline{x}^1 = (0, 0, 1)$, $\overline{x}^{2,3} = (x_1, x_2, 0)^T$, где x_1 и x_2 – любые числа, не равные нулю одновременно;

в) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, СВ $\overline{x} = c\,(3, 1, 1)^T$, $c \neq 0$;

г) $\lambda_1 = 2$, $\overline{x}^1 = (1, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 7$, $\overline{x}^2 = (9, 5, 5)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\overline{x}^3 = (9, -16, 20)^T$;

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\overline{x}^1 = C(1, 0, -1)$, $C \neq 0$; $\overline{x}^{2,3} = (c, d, c)$, c, d – произвольные, кроме c = d = 0;

е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$, $\overline{x}^1 = (1, -2, 1)^T$; $\overline{x}^3 = (2, -1, 2)^T$, $\overline{x}^2 = [\overline{x}^1, \overline{x}^3] = (-3, 0, 5)^T$.

5.5. $\lambda_B = \lambda_A + \alpha$.

5.6. а – б) $\lambda = 0$, СВ – константы; в) СЗ $\lambda_к$ отвечает собственная функция (вектор) $e^{\lambda_k t}, k = \overline{1, n}$; г) $\lambda = \lambda_0$, собственная функция $e^{\lambda_k t}$.

5.7. СЗ – всевозможные $\lambda \in R$, собственные функции – $c\, e^{\lambda_k t}$, $c \neq 0$.

5.10. а) $\overline{x}^1 = (1, 0, 0)^T$, $\overline{x}^2 = (0, 1, 0)^T$, $\overline{x}^3 = (1, 0, 1)^T$, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, 1, 2)$;

б) нет;

в) $\overline{x}^{1} = (1, 1,)^{\mathrm{T}}$, $\overline{x}^{2} = (1, -4)^{\mathrm{T}}$, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(0, 5)$;

г) $\overline{x}^{1} = (1, 3, 0)^{\mathrm{T}}$, $\overline{x}^{2} = (0, –3, 1)^{\mathrm{T}}$, $\overline{x}^{3} = (1, –2, 2)$, $\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, 1, –2)$.

5.11. а) $\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{(2/3)} \\ 0 & -\sqrt{(2/3)} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

5.12. а) $\Lambda = \mathrm{diag}\,(3, –6, 0)$; б) $\Lambda = \mathrm{diag}\,(3, 6, 9)$; в) $\Lambda = \mathrm{diag}\,(5, –1, –1)$; г) $\Lambda = \mathrm{diag}\,(5, –1, –7)$.

5.13. 1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\lambda = 1$, прямая $x = z = 0$; $\lambda = 0$, плоскость $y = 0$;

$\Lambda = \mathrm{diag}\,(0, 1, 0)$ в данном базисе:

2) $1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 1$, прямая $x = y = z$; $\lambda = 0$, плоскость $x + y + z = 0$;

$\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, 0, 0)$ в базисе $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $(1, –1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(1, 0, –1)^{\mathrm{T}}$;

3) $1/3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\lambda = 1$, плоскость $x + y + z = 0$; $\lambda = 0$, прямая $x = y = z$; $\Lambda = \mathrm{diag}\,(1, 1, 0)$ в базисе $(1, –1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(1, 0, –1)^{\mathrm{T}}$, $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$;

4) $1/6 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; $\lambda = 1$, плоскость $– x + y + 2z = 0$; $\lambda = 0$, прямая $– 2x = = 2y = z$; $\mathrm{diag}\,(1, 1, 0)$ в базисе $(1, –1, 1)^{\mathrm{T}}$, $(1, –3, 2)^{\mathrm{T}}$, $(–1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

5.22. а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

5.23. а) $– 2x^2 + 6xy + y^2$;

б) $x^2 + 4xy – 2xz + 6yz – 2z^2$;

в) $8xy – 2xz + 2y^2 + 6yz – 3z^2$.

5.24. а) Положительно определена; б) неотрицательно определена; в) знакоопределена; г) отрицательно определена.

5.25. а) $20y_1^2 + 5y_2^2$, $T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$;

б) $-5y_1^2 + 4y_2^2 + 10y_3^2$, $T = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30} \end{bmatrix}$.

5.26. а) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; б) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$; в) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

5.27. $\dfrac{(x'+1)^2}{1} + \dfrac{(y'-2)^2}{4} = 1$.

Литература

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебн. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 496 с.

2. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебн.–Мн.: Выш.шк., 1982.– 272с.

3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учеб. – Мн.: Выш. шк., 1992. – 384 с.

4. Сборник задач по линейной алгебре: Учеб. пособие / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б. Хейман. – Мн.: Выш.шк., 1980. – 192 с.

Св.план 2003, поз. 46

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич,
Жевняк Ростислав Михайлович
Цегельник Владимир Владимирович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
для студентов радиотехнических специальностей БГУИР
В 10-ти частях
Часть 2
Линейная алгебра
(с решениями и комментариями)

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик
Компьютерная верстка И.Э. Антонович

Подписано в печать — Формат 60x84 1/16.
Бумага — Печать. — Гарнитура “Таймс”.
Усл.печ.л. — Уч.-изд.л. 6,0. — Тираж 500 экз. — Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП №156 от 30.12.2002.
Лицензия ЛВ №509 от 03.08.2001.
220013, Минск, П. Бровки 6.