ПЕРЕСТАНОВКА С МАКСИМАЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Ю. Н. Сотсков, Н. Г. Егорова

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Минск, Беларусь
e-mail: sotskov48@mail.ru, egorovanatalja@bk.ru

Исследуется задача минимизации суммарного времени обслуживания требований одним прибором. Предполагается, что для длительности обслуживания требования заданы только нижняя и верхняя границы возможных значений. Доказаны свойства многогранника оптимальности, на основе которых разработан метод ветвей и границ для построения перестановки требований с наибольшим объемом многогранника оптимальности.

Ключевые слова: одностадийное обслуживание требований; суммарное время обслуживания требований; интервальные длительности.

A PERMUTATION HAVING THE MAXIMAL OPTIMALITY BOX FOR PROCESSING JOBS WITH INTERVAL PROCESSING TIMES

Y. N. Sotskov, N. G. Egorova

United Institute of Informatics Problems
National Academy of Sciences of Belarus
Minsk, Belarus

A problem of minimizing a sum of the completion times of the jobs processed on a single machine is considered. It is assumed that for each job, only lower and upper bounds of the possible processing time are given before scheduling. Properties of an optimality box of the job permutation are studied that allow us to develop a branch-and-bound algorithm for constructing a job permutation with the maximal volume of the optimality box.

Keywords: single machine scheduling; total completion times; interval processing times.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассматривается неопределенная задача теории расписаний в следующей постановке. Задано множество требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$, $n \geq 2$, которые необходимо обслужить на заданном приборе. Все требования доступны для обслуживания

Библиотека БГУИР

в начальный момент времени $t = 0$ интервала планирования. Каждое требование $J_i \in J$ должно быть обслужено прибором без прерываний.

Фактическая длительность p_i обслуживания требования $J_i \in J$ может оказаться равной любому вещественному числу, заключенному между заданными нижней границей $p_i^L > 0$ и верхней границей p_i^U. Законы распределения вероятностей случайных длительностей p_i обслуживания требований на отрезке $[p_i^L, p_i^U]$ не заданы.

Если не выполняется равенство $p_i^L = p_i^U$ для требования $J_i \in J$, то фактическая длительность $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ обслуживания требования J_i остается неизвестной вплоть до момента C_i завершения обслуживания требования J_i.

Если же нижняя граница $p_i^L > 0$ и верхняя граница p_i^U длительностей обслуживания каждого требования J_i совпадают, $p_i^L = p_i^U$, то сформулированная выше неопределенная задача $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ превращается в детерминированную задачу $1 \| \sum C_i$, которая может быть решена за $O(n \log n)$ элементарных операций [1].

Пусть $T = \{p \mid p \in R_+^n,\ p_i^L \le p_i \le p_i^U,\ i \in \{1, \ldots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ обозначает множество всех неотрицательных действительных векторов размерности n, а $\times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ – декартово произведение отрезков $[p_i^L, p_i^U]$ всех возможных длительностей обслуживания требований. Фиксированный вектор $p \in T$ длительностей обслуживания требований будем называть сценарием.

Очевидно, что для неопределенной задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ в общем случае не существует перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n})$ обслуживания требований множества $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, которая оставалась бы оптимальной при всех возможных сценариях из заданного множества T.

МНОГОГРАННИК ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРЕСТАНОВКИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

В статье [2] были исследованы некоторые свойства многогранника оптимальности перестановки π_k, который содержится в области устойчивости этой перестановки и содержит многогранник устойчивости этой же перестановки, который был исследован в статье [3].

Дерминированную задачу $1 \| \sum C_i$ с фиксированным вектором $p \in T$ длительностей обслуживания требований будем обозначать $1 | p | \sum C_i$. Пусть N_k обозначает подмножество множества индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ всех требований $J_i \in J$.

Определение 1. Максимальный по включению параллелепипед $OB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k} [\hat{l}_{k_i}, \hat{u}_{k_i}] \subseteq T$ будем называть многогранником оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_n})$ обслуживания требований множества $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, если при любом сценарии $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1 | p | \sum C_i$, эта перестановка остается оптимальной и для за-

Библиотека БГУИР

дачи $1|p'|\sum C_i$ при любом сценарии $p' \in [\hat{l}_{k_g}, \hat{u}_{k_g}] \times \{\times_{k_j \in N \setminus k_g} [p_{k_j}, p_{k_j}]\}$ для всех значений $k_g \in N_k$. Если же не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$, то полагаем $OB(\pi_k, T) = \varnothing$.

Для построения многогранника оптимальности для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ предлагается алгоритм построения многогранника оптимальности соответствующей задачи $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum C_i$ с редуцированными интервалами длительностей обслуживания требований $[\hat{p}_i^L, \hat{p}_i^U] \subseteq [p_i^L, p_i^U]$, полученными по следующим формулам (рис. 1):

$$\frac{1}{\hat{p}_i^L} = \min_{1 \le j \le i} \left\{ \frac{1}{p_j^L} \right\},\ \frac{1}{\hat{p}_i^U} = \max_{i \le j \le n} \left\{ \frac{1}{p_j^U} \right\},$$

для всех i, где $1 \le i \le n$.

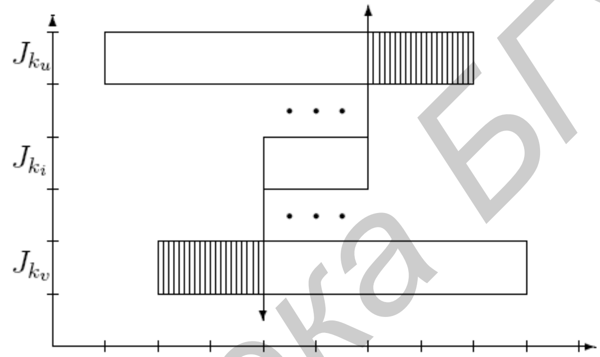

Рис. 1. Отсекаемые в редуцированной задаче интервалы возможных отношений $1/p_{k_i}$ для перестановки $(J_{k_v}, ..., J_{k_i}, ..., J_{k_u})$ заштрихованы

Задачу $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum C_i$ с редуцированными интервалами возможных длительностей обслуживания требований будем называть редуцированной задачей.

В статье [2] доказана приведенная ниже теорема 1 и разработан алгоритм сложности $O(n)$ построения многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для фиксированной перестановки обслуживания требований π_k.

Теорема 1. Многогранник оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ совпадает с многогранником оптимальности перестановки π_k обслуживания требований J для редуцированной задачи $1|\hat{p}_i^L \le p_i \le \hat{p}_i^U|\sum C_i$.

В качестве приближенного решения задачи $1|p_i^L \le p_i \le p_i^U|\sum C_i$ предлагается использовать перестановку с максимальным объемом многогранника оптимальности.

Библиотека БГУИР

ПЕРЕСТАНОВКА ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С МАКСИМАЛЬНЫМ ОБЪЕМОМ МНОГОГРАННИКА ОПТИМАЛЬНОСТИ

Разработанные алгоритмы построения перестановок обслуживания требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ с максимальным объемом многогранника оптимальности основаны на следующем понятии блока требований из множества J.

Определение 2. Блоком будем называть максимальное по включению подмножество $J' = \{J_{k_1}, J_{k_2}, ..., J_{k_m}\} \subseteq J$ множества требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$, для которых выполняется следующее условие:

$$B^U = \min_{J_i \in J'} \left\{ \frac{1}{p_i^L} \right\} \ge \max_{J_i \in J'} \left\{ \frac{1}{p_i^U} \right\} = B^L .$$

Для каждого блока однозначно определяется отрезок $[B^L, B^U]$, который будем называть ядром этого блока (рис. 2).

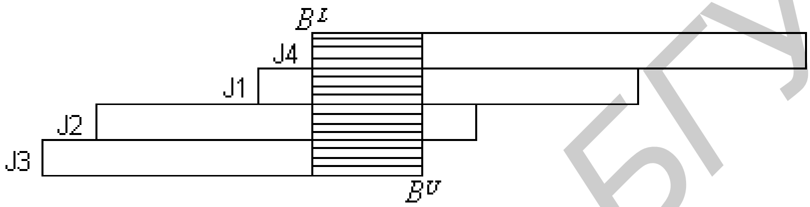

Рис. 2. Пример блока, ядро которого заштриховано

Доказана следующая лемма 1 и на основе ее конструктивного доказательства разработан алгоритм сложности $O(n^2)$ выделения всех блоков задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$.

Лемма 1. Для задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ множество всех блоков определяется однозначно за $O(n^2)$ элементарных операций.

Для поиска ядер всех блоков из множества J достаточно перебрать требования множества $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$, в порядке неубывания отношений $1/p_i^L$. Величина $1/p_i^L$ будет верхней границей B_w^U ядра блока B_w в том случае, когда величина $B'_w = \max\{1/p_i^U\}$, вычисленная для множества требований $J^* = \{J_k \mid 1/p_i^U \le B_w^U \le 1/p_i^L\}$, удовлетворяет неравенству $B'_w > B_{w-1}^U$. В этом же случае величина B'_w будет являться нижней границей блока $B'_w = B_w^L$.

После выделения блоков исходную задачу $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ можно разбить (декомпозировать) на подзадачи, соответствующие выделенным блокам. Доказаны приведенные ниже теоремы 2 и 3, которые были использованы для разработки алгоритма сложности $O(n^2)$ декомпозиции задачи $1 | p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ на подзадачи.

Теорема 2. В любой перестановке π_k обслуживания требований множества J с максимальным объемом многогранника оптимальности все блоки должны быть линейно упорядочены в порядке убывания левых (и правых) границ их ядер.

Библиотека БГУИР

Теорема 3 (о декомпозиции). Если существуют два смежных блока B_i и B_{i+1} без общих требований, то задачу можно декомпозировать на две подзадачи $J = G_1 \cup G_2$, где G_1 – множество требований блоков $B_1, B_2, ..., B_i$, G_2 – множество требований блоков $B_{i+1}, B_{i+2}, ..., B_b$ и $T = T_1 \cup T_2$. Частные решения $OB(\pi_k(1), T_1)$ и $OB(\pi_k(2), T_2)$ дают общее решение $OB(\pi_k, T) = OB(\pi_k(1), T_1) \times OB(\pi_k(2), T_2)$ для этих двух блоков.

При декомпозиции исходной задачи требования блоков B_i и B_{i+1}, удовлетворяющие условиям теоремы 3, будут содержаться в разных подзадачах. Представленная в теореме 3 декомпозиция исходной задачи $1| p_i^L \le p_i \le p_i^U | \sum C_i$ однозначно определяется множеством всех пар соседних блоков без смежных требований, каждая из которых определяет конец предыдущей подзадачи и начало следующей подзадачи.

Если подзадача содержит только один блок, то многогранник $OB(\pi_k, T)$ определяется первым (J_{k_1}), вторым (J_{k_2}), предпоследним ($J_{k_{r-1}}$) и последним (J_{k_r}) требованиями в этом блоке. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Перестановку с максимальным объемом многогранника оптимальности $OB(\pi_k, T)$ для требований, входящих в один и тот же блок B_i, можно построить за $O(n)$ элементарных операций.

При выполнении условия леммы 2 для требований блока B_i должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{1}{p_{k_1}^L} = \max_{J_i^*}\left\{\frac{1}{p_i^L}\right\},\ \frac{1}{p_{k_2}^L} = \min_{J_i^*}\left\{\frac{1}{p_i^L}\right\},\ \frac{1}{p_{k_{r-1}}^U} = \max_{J_i^*}\left\{\frac{1}{p_i^U}\right\},\ \frac{1}{p_{k_r}^U} = \min_{J_i^*}\left\{\frac{1}{p_i^U}\right\},$$

где J_i^* – множество требований соответствующей подзадачи.

Если подзадача содержит несколько блоков, то для требований, входящих в несколько блоков, при перемещении этих требований между этими блоками будут получаться разные редуцированные задачи. Следовательно, порождаемые многогранники оптимальности для таких подзадач тоже могут быть различными.

В этом случае предлагается для всех требований, принадлежащих нескольким блокам одновременно, перебирать все допустимые варианты принадлежности этих требований тем или иным блокам (т. е. произвести соответствующее ветвление в методе ветвей и границ). Для вычисления верхней оценки объема многогранника оптимальности обслуживания требований в разработанном методе ветвей и границ использовалось объединение отрезков $[B_z^U, B_{z+1}^L]$, $b \le z < b+m$, между ядрами блоков $B_b, B_{b+1}, ..., B_{b+m}$ для построенных подзадач и отрезков $[1/p_{k_2}^L, 1/p_{k_1}^L]$ и $[1/p_{k_r}^U, 1/p_{k_{r-1}}^U]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Smith W. E. Various optimizers for single-stage production // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1. P. 59–66.

2. Sotskov Yu. N., Lai T.-C. Minimizing total weighted flow under uncertainty using dominance and a stability box // Computers & Operations Research. 2012. Vol. 39. P. 1271–1289.

3. Сотсков Ю. Н., Егорова Н. Г. Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований // Автоматика и телемеханика. 2014. № 7. С. 136–154.

Библиотека БГУИР