УДК 681.3.06+519.24 (047.1) В.И.Кириллов

Определение параметров составного закона надежности (сумма нормального и однопараметрического) по результатам форсированных испытаний.

Рассмотрена задача оптимальной аппроксимации экспериментальных результатов надежностных испытаний техники в виде взвешенной суммы нормального и одного из трех однопараметрических вероятностных законов. В сочетании с укороченными испытаниями техники в типовом режиме эксплуатации это позволяет дать долгосрочный прогноз её безотказной работы.

1. Общие сведения

Как известно (см., например, [1,4,8-10]), для любого произвольного закона вероятности безотказной работы $P(t)$, у которого известна аналитическая зависимость $f(t) = -dP(t)/dt$ – функция плотности вероятности безотказной работы, справедливы расчетные выражения, позволяющие определить основные показатели этого закона, в частности, k-й начальный момент M_k и k-й центральный момент D_k:

а) $M_k = \int_0^\infty t^k \cdot f(t)\,dt;\ k = 1,2,3,\ldots;$

б) $D_k = \int_0^\infty (t - M_1)^k \cdot f(t)\,dt; M_1 = M_k$ при $k = 1;$

в) при этом $P(t) = \int_t^\infty f(t)\,dt = 1 - \int_0^t f(t)\,dt;$ (1,а-в)

Между собой эти моменты (показатели) связаны известными соотношениями [8-10], например:

а) $M_2 = D_2 + M_1^2$; б) $M_3 = D_3 + 3D_2M_1 + M_1^3$;

в) $M_4 = D_4 + D_3M_1 + 6D_2M_1^2 + M_1^4$. (2,а-в)

Зачастую вместо (2, а-в) используют производные от них выражения:

а) $D_2 = M_2 - M_1^2$; б) $D_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$;

в) $D_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4$. (3,а-в)

В выражениях (1)-(3) показатель M_1 имеет физический смысл среднего времени безотказной работы большой партии однотипных изделий и обозначается как $T_0 = M_1$, а показатель D_2 имеет смысл среднего квадрата отклонения реального времени безотказной работы каждого изделия в этой партии относительно среднего времени работы T_0. Этот показатель часто обозначается как $D_2 = \sigma_2^2$, где σ_2 – среднеквадратичное отклонение времени безотказной работы в партии изделий относительно T_0.

В тех случаях, когда закон вероятности безотказной работы используемой (или проектируемой, разработанной) технической системы (изделия) достаточно точно описывается суммой двух известных теоретических законов $P_1(t)$ и $P_2(t)$ в виде $P_c(t) = c_1P_1(t) + c_2P_2(t)$, где c_1 и c_2 – коэффициенты весомости соответствующего закона, то тогда характеристики и моменты суммарного (составного) закона, используя (1)-(3), могут быть выражены через характеристики и моменты известных законов в следующем виде [6,7]:

а) $P_c(t) = cP_1(t) + (1-c)P_2(t)$; $0 \le c \le 1{,}0$;

б) $f_c(t) = -dP_c(t)/dt = cf_1(t) + (1-c)f_2(t)$; $f_1(t) = -dP_1(t)/dt$;
$f_2(t) = -dP_2(t)/dt$;

в) $M_{kc} = cM_{k1} + (1-c)M_{k2}$; $k = 1,2,3,\dots$;

г) $D_{2c} = M_{2c} - M_{1c}^2 = cM_{2.1} + (1-c)M_{2.2} - (cM_{1.1} + M_{1.2}(1-c))^2 =$
$= c^2 D_{2.1} + (1-c)^2 D_{2.2} + c(1-c)(M_{2.1} + M_{2.2} - 2M_{1.1}M_{1.2})$;

д) $D_{3c} = M_{3c} - 3M_{2c}M_{1c} + 2M_{1c}^3 = cM_{3.1} + (1-c)M_{3.2} + 2\cdot(cM_{1.1} + (1-$
$-c)M_{1.2})^3 - 3\cdot(cM_{2.1} + (1-c)M_{2.2})\cdot[cM_{1.1} + (1-c)M_{1.2}]$; (4,а-е)

е) $D_{4c} = M_{4c} - 4M_{3c}\cdot M_{1c} + 6M_{2c}\cdot M_{1c}^2 - 3M_{1c}^4 = (cM_{4.1} + (1-c)M_{4.2}) -$
$-4(cM_{3.1} + (1-c)M_{3.2})\cdot(cM_{1.1} + (1-c)M_{1.2}) + 6(cM_{2.1} + (1-c)M_{2.2})\cdot$
$\cdot(cM_{1.1} + (1-c)M_{1.2})^2 - 3[cM_{1.1} + (1-c)M_{1.2}]^4$.

Здесь M_{kc} и D_{kc}, $k = 1,2,\dots 4$, соответственно, k-й начальный и k-й центральный моменты составного закона; M_{k1} и M_{k2}, D_{k1} и D_{k2}, $k = 1,2,\dots$ – соответственно, k-й начальный и k-й центральный моменты первого и второго известных законов, образующих составной закон.

Для большинства сложных технических изделий, которые состоят из многочисленных разнородных элементов (компонентов), проблема определения аналитической зависимости вероятности безотказной работы изделия $P(t)$ в зависимости от вероятности безотказной работы каждого элемента $P_Э(t)$, $i = 1,2,\dots N_Э$, где $N_Э$ – число основных элементов, влияющих на работу изделия, представляет собой очень сложную задачу, решаемую, как правило, весьма приближенно.

В самом грубом приближении, когда отказы отдельных элементов считаются независимыми друг от друга событиями, а интенсивность отказов каждого i-го элемента $\lambda_{Эi} = f_i(t)/P_i(t)$ – есть величина постоянная (не меняющаяся во времени), т.е. $\lambda_{Эi} = const = \lambda_i$, то тогда [6,7]:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{N_Э} P_{Эi}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{N_Э}\int_0^t \lambda_{Эi}(t)\,dt\right) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{N_Э}\lambda_i\cdot t\right] = \exp(-\lambda_S t), \qquad (5)$$

где $\lambda_S = \sum_{i=1}^{N_Э}\lambda_i$ – интенсивность (опасность) отказа всего изделия (системы).

Используя (5), нетрудно определить функцию изделия $f(t) = -dP(t)/dt =$ $= \lambda_S \exp(-\lambda_S t)$, затем из (1)-(3) и моменты функции $P(t)$. В частности, среднее время безотказной работы изделия будет равно: $T_0 = M_1 = 1/\lambda_S$.

При сравнении расчетных показателей, полученных с использованием (5), и показателей, которые были получены непосредственно по результатам опытных испытаний этих же изделий, было обнаружено, что в большинстве случаев расчетные показатели существенно (иногда в несколько раз) отличались от экспериментальных. Очевидно, использование (применение) расчетных функций и показателей (5) на практике в этом случае могло бы серьезно отразиться на репутации производителей этих изделий.

В тех случаях, когда аналитические функции вероятности безотказной работы $P(t)$ и её плотности $f(t) = -dP(t)/dt$ неизвестны, для определения показателей закона проводят опытные испытания достаточно большой партии однотипных изделий. В зависимости от условий проведения опытных испытаний различают **форсированные** (или ускоренные) испытания и **нормальные** (или эксплуатационные).

В режиме форсированных испытаний сознательно создают **более тяжелые** условия работы используемых изделий (например, за счет повышенной температуры, повышенных или пониженных питающих напряжений, значительной вибрации, тряски, ударов и т.п.), при которых **существенно сокращается** время безотказной работы каждого изделия и, соответственно, **общее время испытания всей партии** изделий.

При правильно выбранных режимах проведения форсированных испытаний экспериментальные зависимости вероятности безотказной работы $P_{\Phi}(t)$, плотности вероятности $f_{\Phi}(t)$ и интенсивности отказов $\lambda_{\Phi}(t)$ сохраняют все отличительные особенности, которые присущи аналогичным функциям $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$, измеренным в режиме нормальных (типовых эксплуатационных) испытаний. Отличие состоит только в масштабах времени: в режиме форсированных испытаний время как бы “сжимается”, соответственно изменяются и показатели закона в этом режиме. Но характер закона безотказной работы, его специфические особенности при этом сохраняются такими же, как и в режиме нормальных испытаний.

Форсированные испытания проводят с достаточно представительной партией изделий, состоящей из N_0 первоначально исправных изделий, поставленных в режим форсированной (ускоренной, “тяжелой”) эксплуатации. Каждому изделию присваивают свой номер j, $j \in [1, N_0]$ и фиксируют время его работы до отказа t_j. При этом $t_j \leq t_{max}$, где t_{max} – максимальное время работы до отказа последнего из партии изделия. Обработку результатов форсированных испытаний ведут в следующем порядке [4,8]:

а) делят весь рассматриваемый интервал испытаний $0 \div t_{max}$ на K одинаковых поддиапазонов длительностью $\Delta t = t_{max}/K$, где $K \geq (1 + 3{,}2 \lg N_0)$, при этом рекомендуется выбирать $K \geq 10$;

б) результаты испытаний сводят в двухстрочную таблицу вида $i - n_i$, где в верхней строке i – номер поддиапазона, $i = 1,2, \dots K$, а в нижней строке – число изделий n_i, вышедших из строя в i-ом поддиапазоне, то есть в интервале времени $[t_{i-1} \leq t \leq t_i]$, где $t_i = i \cdot \Delta t$.

По данным этой таблицы определяют выборочные значения основных характеристик безотказной работы [4]:

а) $P_{\Phi}(t = i\Delta t) = P_{\Phi.i} = 1 - (n_1 + n_2 + \dots + n_i)/N_0 = N_i/N_0$;

б) $P_{\Phi}(t = (i - 0{,}5)\Delta t) = (P_{\Phi.i-1} + P_{\Phi.i})/2 = (N_{i-1} + N_i)/2N_0$;

в) $f_{\Phi}((i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t) = f_{\Phi.i} = (P_{\Phi.i-1} - P_{\Phi.i})/\Delta t = n_i/N_0\Delta t$;

г) $\lambda_{\Phi}(t = (i - 0{,}5)\Delta t) = f_{\Phi.i}/P_{\Phi}(t = (i - 0{,}5)\Delta t) \cong 2f_{\Phi.i}/(P_{\Phi.i-1} + P_{\Phi.i}) \cong$
$\cong 2n_i/\Delta t(N_i + N_{i-1})$, (6,а-г)

где N_i – число изделий, остающихся исправными к моменту $t = t_i$.

В качестве числовых оценок (показателей) выборочных функций (6,а-г) используют так называемые выборочные начальные m_e и центральные d_e моменты ($e = 1,2,3,4, \dots$) [4,8]:

а) $m_1 = \sum_{i=1}^{k} t_i f_{\Phi.i}\Delta t = (\Delta t/N_0)\sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)\, n_i$;

б) $m_2 = \sum_{i=1}^{k} t_i^2 f_{\Phi.i}\Delta t = (\Delta t^2/N_0)\sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^2\, n_i$; (7,а-д)

в) $m_3 = \sum_{i=1}^{k} t_i^3 f_{\Phi.i}\Delta t = (\Delta t^3/N_0)\sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^3\, n_i$;

г) $m_4 = \sum_{i=1}^{k} t_i^4 f_{\Phi.i}\Delta t = (\Delta t^4/N_0)\sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5)^4\, n_i$;

д) $d_2 = \sum_{i=1}^{k}(t_i - m_1)^2 f_{\Phi.i}\Delta t = (\Delta t^2/N_0)\sum_{i=1}^{k}(i - 0{,}5 - m_1/\Delta t)^2 \cdot n_i = m_2 - m_1^2$;

е) $d_3 = \sum_{i=1}^{k} (t_i - m_1)^3 f_{Ф.i} \Delta t = \frac{\Delta t^3}{N_0} \sum_{i=1}^{k} \left(i - 0{,}5 - \frac{m_1}{\Delta t}\right)^3 \cdot n_i =$
$= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3;$

ж) $d_4 = \sum_{i=1}^{k} (t_i - m_1)^4 f_{Ф.i} \Delta t = \Delta t^4 / N_0 \sum_{i=1}^{k} (i - 0{,}5 - m_1/\Delta t)^4 \cdot n_i =$ (7,в-ж)
$= m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4;$

Формулы для расчета выборочных моментов, приведенные в (7,а-ж), представляют собой варианты приближенных интегральных выражений (1,а,б). Первый выборочный момент m_1 называется также выборочным средним, а второй m_2 – выборочным средним квадратом. Показатели m_3 и m_4 являются соответственно выборочным третьим и четвертым начальным моментом экспериментального закона вероятности безотказной работы (6,а,б), а показатели $d_2 \div d_4$ – соответственно вторым, третьим и четвертым выборочным центральным моментом. Показатель d_2 называют также выборочным средним квадратом отклонения времени безотказной работы используемой партии изделий относительно его выборочного среднего m_1.

Характеристики (6,а-г) и показатели (7,а-ж), отражающие результаты опытных испытаний, являются опорной базой, на основе которой проводится нахождение такого оптимального теоретического закона $P_Т(t)$ и его параметров, которые в наибольшей степени обеспечивают совпадение с выборочными экспериментальными функциями (6) и показателями (7).

В качестве критерия близости используют средний квадрат отклонений между значениями выбранной экспериментальной функции (6) $\varphi_Ф(t)$ и соответствующей теоретической функции $\varphi_Т(t)$. Функции $\varphi_Ф(t)$ и $\varphi_Т(t)$ должны быть одноименными и отражать или функцию вероятности безотказной работы $P(t)$ или плотность вероятности (частоту отказов) $f(t)$ или, наконец, интенсивность отказов $\lambda(t)$ реального (экспериментального) и теоретического вероятностного закона. Такой критерий $\Delta_{\varphi.1}$ рассчитывается по формуле (8,а). Более “чутким” критерием различия между экспериментальной и теоретической функциями является средний относительный квадрат отклонений $\Delta_{\varphi.2}$, определяемый по формуле (8,б), или взвешенный средний квадрат отклонений $\Delta_{\varphi.3}$, определяемый из (8,в).

а) $\Delta_{\varphi.1} = \sum_{i=1}^{k} (\varphi_Ф(t_i) - \varphi_Т(t_i))^2 / K;$

б) $\Delta_{\varphi.2} = \sum_{i=1}^{k} (1 - \varphi_Т(t_i)/\varphi_Ф(t_i))^2 / K;$

в) $\Delta_{\varphi.3} = (1/K) \sum_{i=1}^{k} (\varphi_Ф(t_i) - \varphi_Т(t_i))^2 / \varphi_Ф(t_i).$ (8,а-в)

2. Обобщенная процедура решения задач

К сожалению, в настоящее время не существует таких аналитических методов решения, которые позволяли бы в ходе минимизации выражений (8,а-в) сразу найти и оптимальный теоретический закон распределения $\varphi_Т(t)$ и его оптимальные параметры (точечные оценки). Поэтому на практике приходится применять метод, который называют “синтез через анализ” [4].

Он включает в себя несколько последовательно выполняемых процедур-этапов. На первом этапе, ориентируясь на вид выбранной экспериментальной функции $\varphi_Ф(t_i)$, $i \in [1, K]$, выбирают несколько типов (вариантов) теоретических законов $\varphi_{\text{Т}}$, которые подобны $\varphi_{\Phi}(t)$. На втором этапе для каждого из выбранных теоретических законов (например, s-го – $\varphi_{\text{Т}.S}(t)$) подбирают его параметры (рассчитывают) таким образом, чтобы минимизировать критерий (8) (отметим, что эту процедуру можно выполнить несколькими способами и каждый из них следует проверить). На третьем этапе выбирают тот из рассмотренных теоретических законов, который по сравнению с другими обеспечивает минимальное значение критерия (8) и, соответственно, является квазиоптимальным.

Более детально подобные процедуры анализа рассматривались в [2,3], где в качестве возможных теоретических законов исследовались три однопараметрических закона (экспоненциальный, Эрланга и Рэлея), затем в [2,5], где анализ проводился для пяти двухпараметрических вероятностных законов (нормальный, усеченный нормальный, логнормальный, Вейбулла и гамма-закон), и, наконец, в [6,7], где в качестве теоретического закона рассматривался составной закон, представляемый суммой двух разных однопараметрических законов (шесть возможных вариантов).

В развитие указанных работ рассмотрим решение задачи, в которой возможный теоретический закон вероятности безотказной работы $P_{\text{Т}}(t)$, аппроксимирующий экспериментальный закон $P_{\Phi}(t)$, ищется в виде составного закона (4,а), где первое слагаемое – $P_1(t)$ описывает нормальный закон с неизвестными двумя параметрами, а второе слагаемое – $P_2(t)$ – однопараметрический закон (экспоненциальный или Эрланга или Рэлея) с одним неизвестным параметром. Неизвестным в (4,а) является также коэффициент весомости каждого из рассматриваемых законов, входящих в составной.

3. Математические модели решения задачи

А. Для **нормального** закона его временные зависимости и показатели определяются двумя неизвестными пока параметрами $T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$ в виде [8-10]:

а) $f_1(t) = (\sigma_{\text{Н}}\sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp(-(t - T_{\text{Н}})^2/2\sigma_{\text{Н}}^2)$;
б) $P_1(t) = 0{,}5 - \Phi_0[(t - T_{\text{Н}})/\sigma_{\text{Н}}]$; в) $\Phi_0(z) = (1/\sqrt{2\pi})\int_0^z \exp(-x^2/2)\,dx$;
г) $\lambda_1(t) = f_1(t)/P_1(t)$; д) $M_{1.1} = T_0 = T_{\text{Н}}$; е) $D_{2.1} = \sigma_{2.1}^2 = \sigma_{\text{Н}}^2$;
ж) $M_{2.1} = M_{1.1}^2 + \sigma_{2.1}^2 = T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2$; з) $D_{3.1} = 0$; и) $D_{4.1} = 3D_{2.1}^2 = 3\sigma_{\text{Н}}^4$; (9,а-л)
к) $M_{3.1} = M_{1.1}(M_{1.1}^2 + 3D_{2.1}) = T_{\text{Н}}(T_{\text{Н}}^2 + 3\sigma_{\text{Н}}^2)$;
л) $M_{4.1} = M_{1.1}^4 + 6M_{1.1}^2 D_{2.1} + 3\sigma_{2.1}^2 = T_{\text{Н}}^4 + 6T_{\text{Н}}^2\sigma_{\text{Н}}^2 + 3\sigma_{\text{Н}}^4$.

Отметим, что в (9,в) функция $\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, причем для типовых режимов, когда $\frac{T_{\text{Н}}}{\sigma_{\text{Н}}} \geq 3{,}0$, всегда имеем $P_1(t = 0) \cong 1{,}0$; $f_1(t = 0) \cong 0$.

Б. На первом шаге решения задачи примем, что вторым слагаемым составного закона $P_C(t)$ является однопараметрический **экспоненциальный** закон $P_2(t)$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:

а) $P_2(t) = \exp(-at)$; б) $f_2(t) = -dP_2(t)/dt = a \cdot \exp(-at)$;
в) $M_{1.2} = 1/a$; г) $D_{2.2} = 1/a^2$; д) $M_{2.2} = 2/a^2$; е) $M_{3.2} = 6/a^3$; (10,а-з)
ж) $M_{4.2} = 24/a^4$; з) $f_2(t = 0) = a$.

В (10) a – неизвестный и оптимизируемый параметр закона $P_2(t)$.

Учитывая совместно выражения (4), (9) и (10) и полагая известными результаты экспериментальных исследований (6) и (7), получим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными: $c, a, T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$.

а) $f_{\Phi}(t=0) = f_{\Phi.0} \cong (1-c)a$; б) $m_1 = cT_{\text{Н}} + (1-c)/a$;

в) $m_2 = c(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + 2(1-c)/a^2$;

г) $m_3 = cT_{\text{Н}}(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + 6(1-c)/a^3$. (11,а-г)

В уравнениях (11,а-г) левые члены $f_{\Phi.0}$, m_1, m_2 и m_3 известны по результатам эксперимента. Выражая из (11,а): $c = 1 - f_{\Phi.0}/a$; из (11,б): $cT_{\text{Н}} = m_1 - (1-c)/a$; из (11,в): $c(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) = m_2 - 2(1-c)/a^2$, и подставляя их в (11,г), можно получить одно уравнение с одним неизвестным $z = 1/a$, которое имеет вид:

$$m_3 f_{\Phi.0} z - m_2 f_{\Phi.0} z^2 - 2m_1 f_{\Phi.0} z^3 + 6 f_{\Phi.0} z^4 - 4 {f_{\Phi.0}}^2 z^5 = (m_3 - m_2 m_1). \quad (12)$$

Уравнение (12) решается численно, найденный параметр $z=z_0=1/a_0$, имеющий размерность времени, как правило, соизмерим с полным временем проведения опытных надежностных испытаний. Затем, используя (11,а), находят коэффициент весомости $c = c_0 = 1 - f_{\Phi.0} z_0$; используя (11,б), находят $T_{\text{Н}} = T_{\text{Н}.0} = (m_1 - (1-c_0) z_0)/c_0$; используя (11,в), находят $\sigma_{\text{Н}}^2 = \sigma_{\text{Н}.0}^2 = \left(m_2 - (1-c_0)2z_0^2 - c_0 T_{\text{Н}.0}^2\right)/c_0$.

Определив параметры рассчитанного теоретического закона $\varphi_T(t)$, используя (9), (10) и (4), затем находят значения закона $\varphi_T(t_i)$ для тех же временных интервалов $t = t_i$, которые использовались в ходе эксперимента. Далее по формулам (8,а-в) определяют значения критериев близости.

Если их значения покажутся неудовлетворительными, следует перейти к другому варианту аппроксимации эксперимента.

В. На втором этапе аппроксимации в качестве второго слагаемого составного закона $P_C(t)$ в (4) выбирают однопараметрический **закон Эрланга** $P_2(t)$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:

а) $P_2(t) = (1+at)\exp(-at)$; б) $f_2(t) = a^2 t \cdot \exp(-at)$;

в) $M_{1.2} = 2/a$; г) $D_{2.2} = 2/a^2$; д) $M_{2.2} = 6/a^2$; е) $M_{3.2} = 24/a^3$;

ж) $M_{4.2} = 120/a^4$; з) $D_{3.2} = 4/a^3$; и) $D_{4.2} = 24/a^4$. (13,а-и)

Здесь a – оптимизируемый параметр закона Эрланга $P_2(t)$.

Учитывая совместно выражения (4), (9) и (13) и полагая известными результаты экспериментальных испытаний (6) и (7), получим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными: $c, a, T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$:

а) $m_1 = M_{1C} = cT_{\text{Н}} + (1-c)2/a$; б) $m_2 = M_{2C} = c(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + (1 -$
$-c)6/a^2$; в) $m_3 = M_{3C} = cT_{\text{Н}}(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2) + (1-c)24/a^3$;

г) $m_4 = M_{4C} = c(T_{\text{Н}}^4 + 6T_{\text{Н}}^2\sigma_{\text{Н}}^2 + 3\sigma_{\text{Н}}^4) + (1-c)120/a^4$;

д) $d_2 = D_{2C} = c^2\sigma_{\text{Н}}^2 + (1-c)^2 2/a^2 + c(1-c)\left(T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2 + 6/a^2 -\right.$
$\left.-4T_{\text{Н}}/a\right) = c\sigma_{\text{Н}}^2 + 2(1-c)/a^2 + (1-c)c(T_{\text{Н}} - 2/a)^2$. (14,а-д)

Для дальнейшей работы удобно использовать уравнения (14,а,б,в,д). Если обозначить переменные: $c = x$; $T_{\text{Н}} = y$; $\sigma_{\text{Н}} = z$; $(1/a) = \gamma$, то после подстановки в (14) и ряда преобразований получим:

используя (14,а), $\gamma = 1/a = (m_1 - xy)/2(1 - x)$; (15,а)

используя совместно (14,б,в) с учетом (15,а),

$$m_3 = m_2 y + 3\ \ m_1 - xy\ \ ^2(2m_1 - xy - y)/2(1 - x)^2; \quad (15,б)$$

используя совместно (14,б,д),

$$(m_2 - d_2) = xy^2 + \ \ m_1 - xy\ \ ^2/(1 - x) + x(m_1 - y); \quad (15,в)$$

Система двух нелинейных уравнений (15,б,в) решается численно при известных значениях m_1, m_2, m_3 и d_3 из (7) путем последовательного задания $x = x_i = 0{,}1 \cdot i$; $i = 1,2, \dots 10$, и затем для каждого значения x_i определения $y_i' = \varphi_1(x_i)$ из (15,б) и $y_i'' = \varphi_2(x_i)$ из (15,в). Пересечение графиков функций y_i' и y_i'' дает решение: $x = x_0$; $y = y_0$. Далее из (15,а) определяют $\gamma = \gamma_0 = (m_1 - -x_0 y_0)/2(1 - x_0) = 1/a_0$, а из уравнения (14,д)

$$\sigma_{\text{Н}}^2 = \sigma_{\text{Н}0}^2 = z_0^2 = \ \ 1/x_0\ \ [d_2 - 2\ \ 1 - x_0\ \ \gamma_0^2 - x_0\ \ 1 - x_0\ \ \ j_0 - 2\gamma_0\ \ ^2]; \quad (15,г)$$

Подставляя найденные параметры составного закона в (9,а,б), (13,а,б), а затем в (4,а,б), далее рассчитывают значения составного закона для тех же временных интервалов $t = t_i$, которое использовалось в ходе эксперимента и при расчете функций и показателей по (6), (7). Затем по формулам (8,а-в) определяют критерии близости. При необходимости, в частности, когда значения критериев признаются неудовлетворительными, необходимо проверить другой возможный вариант аппроксимации эксперимента.

Г. В этом случае в качестве второго слагаемого составного закона $P_c(t)$ в (4) выбирают однопараметрический **закон Рэлея** $P_2(t)$, который определяется следующими характеристиками и показателями [3]:

а) $P_2\ \ t\ \ = \exp(-at^2)$; б) $f_2\ \ t\ \ = -dP_2\ \ t\ \ /dt = 2at \exp\ \ -at^2\ \ $;

в) $M_{1.2} = \ \ \overline{\pi/4a}$; г) $M_{2.2} = 1/a$; д) $M_{3.2} \cong 1{,}33/a^{1{,}5}$; е) $M_{4.2} = 2/a^2$;

ж) $D_{2.2} = M_{2.2} - M_{1.2}^2 = (4 - \pi)/4a \cong 0{,}214/a$;

з) $D_{3.2} \cong 0{,}063/a^{1{,}5}$; и) $D_{4.2} \cong 0{,}15/a^2$. (16,а-и)

В (16) a – параметр закона Рэлея $P_2(t)$.

Учитывая совместно выражения (4), (9) и (16), а также полагая известными результаты эксперимента (6) и (7), получим следующую систему уравнений для определения 4-х неизвестных: двух параметров нормального закона ($T_{\text{Н}}$ и $\sigma_{\text{Н}}$), одного параметра закона Рэлея (a) и коэффициента весомости закона (c) [2-4]:

а) $m_1 = M_{1C} = cT_{\text{Н}} + \ \ 1 - c\ \ \ \overline{\pi/4a}$;

б) $m_2 = M_{2C} = c\ \ T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2\ \ + (1 - c)/a$;

в) $m_3 = M_{3C} = cT_{\text{Н}}\ \ T_{\text{Н}}^2 + \sigma_{\text{Н}}^2\ \ + \ \ 1 - c\ \ 1{,}33/a^{1{,}5}$;

г) $m_4 = M_{4C} = c\ \ T_{\text{Н}}^4 + 6T_{\text{Н}}^2\sigma_{\text{Н}}^2 + 3\sigma_{\text{Н}}^4\ \ + (1 - c)2/a^2$; (17,а-д)

д) $d_2 = D_{2C} = c\sigma_{\text{Н}}^2 + \ \ 1 - c\ \ 0{,}214/a + c\ \ 1 - c\ \ [T_{\text{Н}} - (\pi/4a)^{0{,}5}]^2$.

Для последующего анализа удобно использовать уравнения (17,а,б,в,д), в которых неизвестные (искомые) параметры записаны в виде: $c = x$; $T_{\text{Н}} = y$; $\sigma_{\text{Н}} = z$; $\ \ \overline{1/a} = \rho$. Тогда, используя (17,а), получим:

$$\rho = \sqrt{1/a} = (m_1 - xy) \cdot 2/\sqrt{\pi}(1 - x). \qquad (18,а)$$

Решая совместно (17,б) и (17,в) с учетом (18,а), получим:

$$(m_3 - m_2 y) = 4(m_1 - xy)^2[8m_1 - (8 - 3\sqrt{\pi})xy - 3\sqrt{\pi}y]/3\pi\sqrt{\pi}(1 - x)^2; \qquad (18,б)$$

решая совместно (17,б) и (17,д), получим:

$$(m_3 - d_2) = xy^2 + x(m_1 - y) + (m_1 - xy)^2/(1 - x). \qquad (18,в)$$

Система двух нелинейных уравнений (18,б,в) с двумя неизвестными x и y решается численно в такой же последовательности, как и система (15): для каждого значения $x = x_i = 0{,}1 \cdot i$, где $i = 1,2, \dots 10$, из уравнения (18,б) находится решение $y = y_{1i}$, а из уравнения (18,в): $y = y_{2i}$.

Пересечение графиков функций $y_{1i} = \varphi(x_i)$ и $y_{2i} = \varphi(x_i)$ дает решение: $x = x_0$, $y = y_0$. Затем на основании (18,а) определяют параметр ρ:

$$\rho = \rho_0 = \sqrt{1/a_0} = 2(m_1 - x_0 y_0)/\sqrt{\pi}(1 - x_0); \; a_0 = \rho_0^{-2};$$

а на основании (17,д) – параметр $\sigma_{\text{Н}}$:

$$\sigma_{\text{Н}}^2 = \sigma_{\text{Н.0}}^2 = z_0^2 = (1/x_0)\{d_2 - 0{,}214(1 - x_0)\rho_0^2 - x_0(1 - x_0)(y_0 - \rho_0\sqrt{\pi}/2)^2\}.$$

Далее найденные параметры составного закона $P_C(t)$ подставляются в (9,а,б), (16,а,б) и (4,а,б), после чего рассчитывают значения полученного составного закона для тех же временных интервалов $t = t_i$, которые использовались в ходе эксперимента и при расчете функций и показателей по формулам (6) и (7). Затем по формулам (8,а-в) определяют критерии близости.

Тот из рассмотренных трех вариантов аппроксимации экспериментального закона безотказной работы $P_ф(t)$ или $f_ф(t)$ составным вероятностным законом, который представляет собой сумму нормального закона и одного из трех однопараметрических вероятностных законов, и обеспечивает при этом минимальные значения критериев близости, считается квазиоптимальным вариантом аппроксимации.

Именно этот вариант аппроксимации результатов форсированных испытаний сравнивается с результатами других вариантов аппроксимации [2-5] и, в частности, с вариантами, когда составной закон состоит из двух однопараметрических законов [6,7]. Лучший из сравниваемых вариантов аппроксимации (или несколько близких, конкурирующих вариантов) затем используется при завершающем расчете показателей закона по (см. (2)(4)результатам укороченных (нормальных) испытаний.

Литература

1. Кириллов, В.И. Квалиметрия и системный анализ: учеб. пособие – 2-е издание – Минск: Новое знание: Москва: Инфра-М. – 2012. – 440с.

2. Кириллов, В.И. Оптимизация показателей надежности технической системы по результатам форсированных испытаний / Метрология и приборостроение, 2012. – №1. – С.9-15.

3. Кириллов, В.И. Прогнозирование эксплуатационных показателей безотказной работы технической системы по результатам испытаний / Метрология и приборостроение, 2012. – №3. – С.21-27.

4. Кириллов, В.И. Прогнозирование показателей надежности технических систем по результатам испытаний: учеб.-метод. пособие – Минск: БГУИР, 2012. – 54с.
5. Кириллов, В.И. Прогнозные оценки надежности технической системы по результатам испытаний /Метрология и приборостроение, 2013. – №3. – С.16-22.
6. Кириллов, В.И. Оптимальное описание надежностных испытаний техники суммой двух однопараметрических вероятностных законов / Метрология и приборостроение, 2014. – №3. – С.26-31.
7. Кириллов, В.И. Применение составного вероятностного закона для оптимального прогноза характеристик и показателей надежности технической системы по результатам форсированных и укороченных испытаний / Метрология и приборостроение, 2015. – №1. – С.29-33.
8. Половко, А.М. Основы теории надежности: учебник / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб: БХВ – Петербург, 2006. – 704с.
9. Скрипник, В.М. Основы теории надежности: монография / В.М. Скрипник, И.П. Кавриго. – Минск: Военная академия РБ, 2012. – 500с.
10. Дорохов, А.Н. Надежность сложных технических систем: учебник / А.Н. Дорохов [и др.]. – СПб: Изд-во “Лань”, 2011. – 352с.

The article describes the task of the optimal approximation of the experimental results of the technique's forced reliability tests in the form of the measured sum of the normal law and one of three single-parameter probabilistic law. That data, combined with the results obtained in parallel during the shortened tests of the same technique in the typical (normal) operation mode, allows to give a long-term forecast of it's failure-free operation.