

УДК 531.1:621.313.13

С.Е. КАРПОВИЧ, д-р техн. наук

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

В.Е. ЛУЦЕНКО, канд. техн. наук

НИУ «Московский энергетический институт», Россия

В.В. КУЗНЕЦОВ; М.М. ФОРУТАН

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА НА ШЕСТИКООРДИНАТНОМ ЛИНЕЙНОМ ШАГОВОМ ПРИВОДЕ

Предложена математическая модель параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном шаговом приводе, на основании которой проведена алгоритмизация обратной задачи кинематики. Разработана программа имитационного моделирования в среде MATLAB с интерактивной визуализацией результатов, которая является средой разработки рассматриваемого параллельного манипулятора по кинематическим параметрам и характеристикам.

Ключевые слова: параллельный манипулятор, сегментированные алгоритмы, имитационное моделирование, рабочая область

Введение. Для прецизионного сборочного и оптико-механического спецтехнологического оборудования производства изделий электронной техники характерны технологические операции, связанные с перемещением и необходимой ориентацией объектов обработки и инструмента в трехмерном пространстве. Реализация таких перемещений с высокими показателями точности и быстродействия наиболее эффективно может выполняться пространственными манипуляторами, построенными на сочетании возможностей гибридных многокоординатных приводов прямого действия и соответствующих механизмов параллельной кинематики аппаратно-программно реконфигурируемых в зависимости от требуемого числа степеней свободы. В отличие от традиционных схем построения систем приводов, когда каждая управляемая координата представляет собой отдельный механо-аппаратный модуль, в предложенных нами и используемых при построении пространственных манипуляторов гибридных приводах [1] реализована конструктивная интеграция необходимого количества независимых управляемых координат в одном многокоординатном приводе с общим аппаратным и программным интерфейсом. Сочетание такого гибридного привода с многокоординатными реконфигурируемыми механизмами параллельной кинематики позволяет разрабатывать параллельные манипуляторы с переменной структурой и программно управляемой мобильностью.

Параллельный манипулятор на шестикоординатном линейном шаговом приводе. В настоящей работе рассматривается алгоритмизация обратной задачи кинематики параллельного манипулятора на треугольном гибридном приводе с шестью базовыми степенями свободы, который может быть аппаратно-программно реконфигурирован в любую другую структуру с меньшим числом степеней свободы. Структурно-кинематическая схема предложенного в работе манипулятора представлена на рисунке 1. Он состоит из трех магнитных направляющих 1, 2, 3 линейного шестикоординатного привода, по которым перемещаются шесть подвижных управля-

емых модулей 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые, в свою очередь, кинематически связаны шестью сферическими шарнирами $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ с исполнительным механизмом параллельной кинематики, состоящим из исполнительной платформы ABC и промежуточных стержневых звеньев $AD_1, AD_2, BD_5, BD_6, CD_3, CD_4$, которые двойными сферическими шарнирами A, B, C кинематически связаны с самой платформой ABC . Реализация сложного пространственного перемещения платформы с числом степеней свободы до шести включительно достигается за счет сочетания необходимых линейных перемещений подвижных управляемых модулей.

В связи с такими особенностями рассматриваемого манипулятора наиболее важной при разработке его системы управления является алгоритмизация обратной задачи кинематики, заключающаяся в нахождении обобщенных линейных координат управляемых модулей на треугольной направляющей в зависимости от задаваемого положения и ориентации платформы.

Математическая модель манипулятора и алгоритмизация обратной задачи кинематики. К решению обратной задачи кинематики существует несколько подходов. Наиболее часто используют методы алгоритмизации на основе матричной алгебры и итерационных численных методов [2], реже геометрические и геометроаналитические методы [3], а также различные их сочетания. Известные аналитические методы, как правило, требуют численного решения систем нелинейных уравнений высоких размерностей трансцендентной структуры, что сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Геометрические и геометроаналитические методы не дают общего аналитического решения, необходимого при разработке алгоритмов регулирования, подлежащих реализации в программном обеспечении системы управления манипулятором. В связи с этим существует необходимость в разработке адекватного аналитического метода алгоритмизации обратной задачи кинематики рассматриваемого манипулятора, который бы в явном виде посредством сегментированных алгоритмов позволял строить всю вычислительную проце-

дуру. Нами были учтены и использованы результаты и наработки в этом направлении, полученные для других механизмов параллельной кинематики на гибридных приводах прямого действия, полученные в научно-исследовательской лаборатории «Мехатроника и микро-системы» НИЧ БГУИР [4].

При разработке математической модели решения обратной задачи кинематики учитывалась особенность функционирования рассматриваемого манипулятора, заключающаяся в сохранении исходной конфигурационной сборки во всем диапазоне линейных перемещений, реализуемых подвижными модулями привода. Это условие позволяет использовать алгоритмические средства аналитической геометрии и векторной алгебры, дающие однозначные решения поставленной задачи путем нахождения функций положения всех подвижных звеньев в явном виде. Так в нашем случае в процессе алгоритмизации необходимо было найти аналитические выражения, связывающие задаваемое положение подвижной платформы ABC (рисунок 1) и соответствующие расчетные обобщенные координаты $s_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ подвижных сегментов привода (рисунок 2).

При выводе расчетных зависимостей будем использовать следующий выбор систем координат: $S_0(x_0, y_0, z_0)$ — неподвижная система координат, жестко связанная с направляющими привода; $S_1(x_1, y_1, z_1)$ — подвижная система координат, жестко связанная с подвижной исполнительской платформой ABC манипулятора (см. рисунок 1).

Обратная задача кинематики для исследуемого параллельного манипулятора рассмотрена в следующей постановке. Пусть заданы положения и ориентация рабочей платформы, звена ABC , положением и ориентацией системы координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$ в неподвижной системе координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$ матрицей четвертого порядка вида:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi & x_{01} \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & y_{01} \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

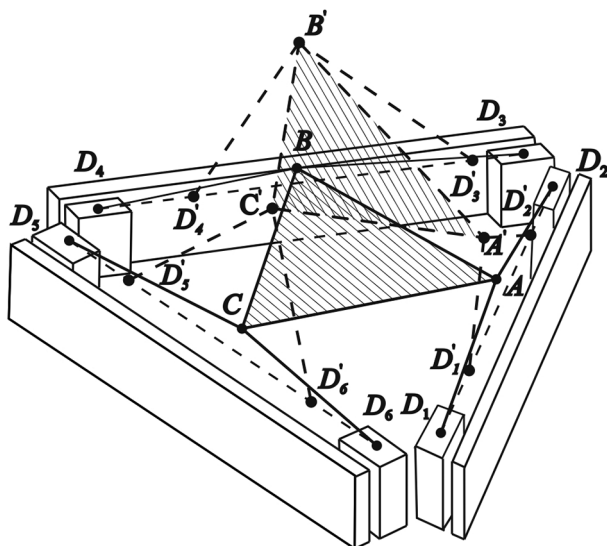


Рисунок 1 — Структурно-кинематическая схема манипулятора

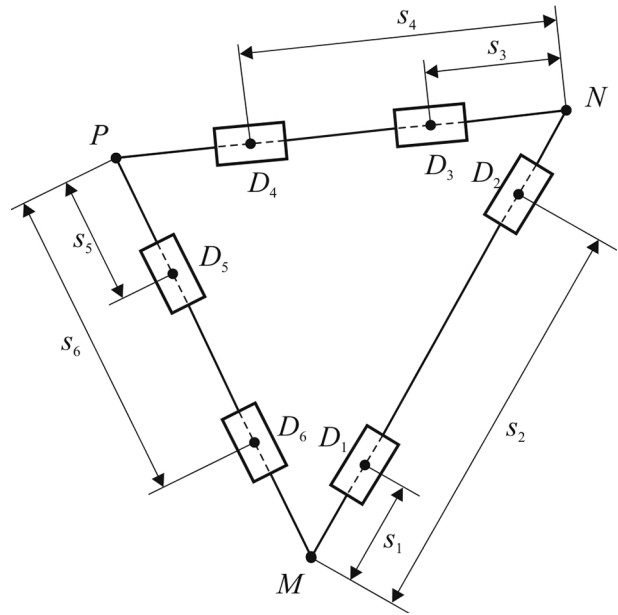


Рисунок 2 — Расчетная схема шестикоординатного привода

где x_{01}, y_{01}, z_{01} — соответствующие координаты положения начала O_1 системы S_1 в системе S_0 ; φ, θ, ψ — углы Эйлера, однозначно определяющие угловую ориентацию системы координат S_1 в системе координат S_0 . Необходимо определить функции положения линейных подвижных модулей гибридного шестикоординатного привода в зависимости от задаваемой матрицы M_{01} . Матрица M_{01} , как математическое средство описания пространственной траектории, является параметрической, у которой каждый значимый элемент задается параметрическими функциями времени, которые позволяют в конечном итоге сформировать функции и алгоритмы управления для каждого из шести подвижных управляемых сегментов привода. При заданной матрице M_{01} могут быть найдены позиционные функции координат характерных точек A, B и C подвижной треугольной платформы параллельного манипулятора, задаваемой равнобедренным треугольником ABC со стороной, равной a . Система координат $S_1(x_1, y_1, z_1)$, связанная с подвижной треугольной платформой, показана на рисунке 3. Оси x_1 и y_1 выбраны в плоскости треугольника ABC . Начало системы координат точка O_1 находится на пересечении меридиан. Ось z_1 перпендикулярна плоскости треугольника ABC .

Нахождение координат точек A, B и C будем выполнять по следующим матричным выражениям:

$$R = M_{01}R_1^A; \quad R^B = M_{01}R_1^B; \quad R^C = M_{01}R_1^C, \quad (2)$$

где

$$R_1^A = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R_1^C = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) окончательно получим координаты точек A, B и C в системе координат S_0 .

Для точки A получим:

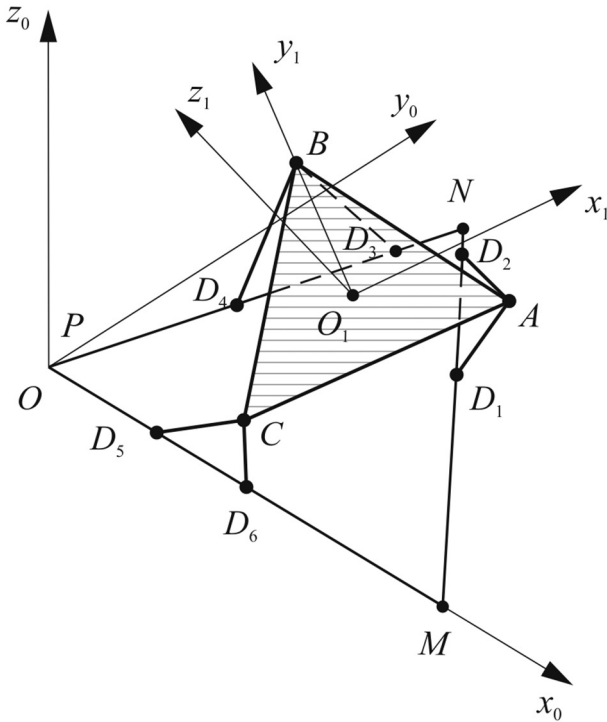


Рисунок 3 — Пространственная конфигурация манипулятора

$$\begin{aligned}
 x_A &= \frac{a}{2} \cos \phi \cos \theta + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} a (\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \theta \sin \psi) + x_{O_1}; \\
 y_A &= \frac{a}{2} \sin \phi \cos \theta - \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{3}} a (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + y_{O_1}; \\
 z_A &= -\frac{a}{2} \sin \theta - \frac{1}{2\sqrt{3}} a \cos \theta \sin \psi + z_{O_1}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для точки *B* получим:

$$\begin{aligned}
 x_B &= -\frac{1}{\sqrt{3}} a (\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \theta \sin \psi) + x_{O_1}; \\
 y_B &= \frac{1}{\sqrt{3}} a (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + y_{O_1}; \\
 z_B &= \frac{1}{\sqrt{3}} a \cos \theta \sin \psi + z_{O_1}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Для точки *C* получим:

$$\begin{aligned}
 x_C &= -\frac{a}{2} \cos \phi \cos \theta + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} a (\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \theta \sin \psi) + x_{O_1}; \\
 y_C &= -\frac{a}{2} \sin \phi \cos \theta - \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{3}} a (\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + y_{O_1}; \\
 z_C &= \frac{a}{2} \sin \theta - \frac{1}{2\sqrt{3}} a \cos \theta \sin \psi + z_{O_1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

С учетом найденных по выражениям (4)–(6) координат точек *A*, *B* и *C* получим аналитические представления условий связей, вытекающие из кинематического замыкания подвижных сегментов шестикоординатного привода через подвижные параллельные кинематиче-

ские цепи и перемещаемую в трехмерном пространстве платформу *ABC*. Вывод условия замыкания будем основывать на траекторной совместности положения пар подвижных точек *D*₁ и *D*₂, *D*₃ и *D*₄, *D*₅ и *D*₆, на соответствующих направляющих *MN*, *NP* и *PN*. С учетом этого получаем необходимые расчетные зависимости для нахождения координат всех искоемых точек.

Для пары точек *D*₁ и *D*₂ система совместности имеет вид:

$$\begin{cases} (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = l^2 \\ \frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}; z = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для пары точек *D*₃ и *D*₄ система совместности имеет вид:

$$\begin{cases} (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2 = l^2 \\ \frac{x - x_N}{x_P - x_N} = \frac{y - y_N}{y_P - y_N}; z = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для пары точек *D*₅ и *D*₆ система совместности имеет вид:

$$\begin{cases} (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = l^2 \\ \frac{x - x_P}{x_M - x_P} = \frac{y - y_P}{y_M - y_P}; z = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Анализ полученных систем уравнений (7)–(9) показывает, что все они имеют одинаковую вычислительную структуру, но отличаются только циклической перестановкой соответствующих координат точек *M*, *N*, *P*. Выполнив подстановочные преобразования, каждую из систем (7)–(9) легко свести к квадратному уравнению вида:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0, \tag{10}$$

где *M*, *N*, *P* — коэффициенты уравнения (10), вычисляемые через координаты точек соответствующей направляющей и связанных с ней точек подвижной платформы *ABC*; *x* — переменная координата подвижной точки *D*_{*i*} (*i* = 1, 2, ..., 6). Для каждой параллельной кинематической цепи коэффициенты *M*, *N*, *P* имеют свои отличные значения. Решая квадратное уравнение (10) окончательно получим искоемые координаты шести подвижных точек *D*_{*i*} (*i* = 1, 2, ..., 6) на трех линейных направляющих *MN*, *NP*, *PM* в зависимости от положения платформы.

Алгоритм вычисления координат подвижных точек *D*_{*i*} (*i* = 1, 2, ..., 6) рассмотрим на примере неподвижной направляющей *MN*, по которой перемещаются сегменты привода, характеризуемые точками *D*₁ и *D*₂.

Из уравнения (10) получим:

$$\begin{aligned}
 x_{D_1} &= \frac{-N_1 + \sqrt{N_1^2 - M_1 P_1}}{M_1}, \quad y_{D_1} = k_1 x_{D_1} + b_1; \\
 x_{D_2} &= \frac{-N_1 - \sqrt{N_1^2 - M_1 P_1}}{M_1}, \quad y_{D_2} = k_1 x_{D_2} + b_1;
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_1 &= k_1^2 + 1; \quad N_1 = c_1 k_1 - x_A; \\
 P_1 &= x_A^2 + c_1^2 + z_A^2 - l^2; \\
 k_1 &= \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}; \quad b_1 = y_M - k_1 x_M; \quad c_1 = b_1 - y_A.
 \end{aligned}$$

Для нахождения координат пар точек D_3, D_4 , и D_5, D_6 перемещающихся соответственно по направляющим NP и PM , структура расчетных зависимостей аналогична (11), необходимо только в этих выражениях заменить координаты точек в соответствии с условием конкретного замыкания.

Так для направляющей NP с подвижными точками D_3 и D_4 получим:

$$\begin{aligned} x_{D_3} &= \frac{-N_2 + \sqrt{N_2^2 - M_2 P_2}}{M_2}, & y_{D_3} &= k_2 x_{D_3} + b_2; \\ x_{D_4} &= \frac{-N_2 - \sqrt{N_2^2 - M_2 P_2}}{M_2}, & y_{D_4} &= k_2 x_{D_4} + b_2; \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M_2 &= k_2^2 + 1; & N_2 &= c_2 k_2 - x_B; \\ P_2 &= x_B^2 + c_2^2 + z_B^2 - l^2; \\ k_2 &= \frac{y_P - y_N}{x_P - x_N}, & b_2 &= y_N - k_2 x_N, & c_2 &= b_2 - y_B. \end{aligned}$$

Аналогично получим для направляющей PM с подвижными точками D_5 и D_6 :

$$\begin{aligned} x_{D_5} &= \frac{-N_3 + \sqrt{N_3^2 - M_3 P_3}}{M_3}, & y_{D_5} &= k_3 x_{D_5} + b_3; \\ x_{D_6} &= \frac{-N_3 - \sqrt{N_3^2 - M_3 P_3}}{M_3}, & y_{D_6} &= k_3 x_{D_6} + b_3; \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} M_3 &= k_3^2 + 1; & N_3 &= c_3 k_3 - x_C; \\ P_3 &= x_C^2 + c_3^2 + z_C^2 - l^2; \\ k_3 &= \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P}; & b_3 &= y_P - k_3 x_P; & c_3 &= b_3 - y_C. \end{aligned}$$

Таким образом, нами получен полный сегментированный алгоритм решения обратной задачи кинематики, который в аналитическом виде позволяет получить функцию положения характерных точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ всех подвижных сегментов гибридного шестикоординатного треугольного привода по заданной программе перемещения выходного звена рабочей платформы ABC . Этот алгоритм может быть использован как базовый при разработке регуляторов системы управления рассматриваемым параллельным манипулятором.

Имитационное моделирование. На основании представленной выше математической модели была выполнена алгоритмизация вычислительных процедур решения обратной задачи кинематики манипулятора на шестикоординатном линейном приводе. Было разработано программное обеспечение в среде MATLAB для компьютерного имитационного моделирования, позволяющее проводить интерактивные исследования кинематических характеристик, моделировать кинематические параметры и возможности по каждой из шести координат рабочей платформы, устанавливать границы рабочей области в виде трехмерного эскиза с возможностью оптимизации базовых конструктивных параметров по кинематическим критериям. Для удобства пользователей также инструментами GUI MATLAB [5] был разработан пользовательский интерфейс, показанный на рисунке 4.

Интерфейс содержит панели: 1 — задаваемых конструктивных параметров, 2 — задаваемых линейных

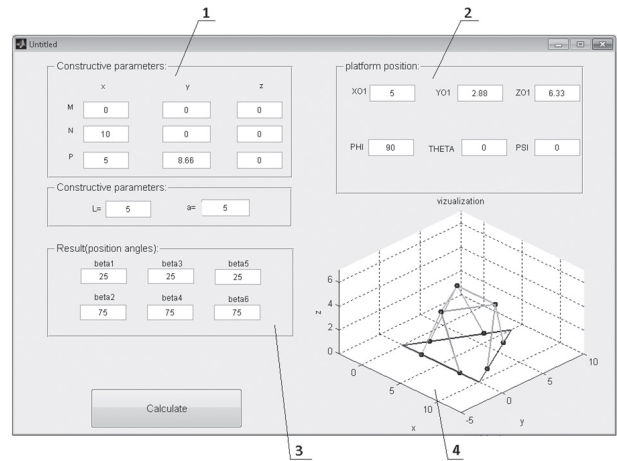


Рисунок 4 — Интерфейс обратной задачи кинематики

$x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ и угловых φ, θ, ψ координат положения и ориентации платформы; 3 — расчетных координат точек $D_i (i = 1, 2, \dots, 6)$, характеризующих положения каждого из шести подвижных сегментов привода и соответствующих команд. В графическом интерфейсе предусмотрено окно динамической визуализации манипулятора, реализующего задаваемое программируемое движение.

Наиболее полно возможности разработанной программы могут быть проиллюстрированы на решении задачи имитационного моделирования рабочей области манипулятора при выбранных конструктивных параметрах треугольной направляющей и механизма параллельной кинематики с шестью внешними сферическими шарнирами, полностью определяющий базовый конструктив параллельного манипулятора. Для имитационного моделирования рабочей области была выбрана конфигурация треугольной направляющей в виде равностороннего треугольника MNP со стороной $L = 28$. Треугольная подвижная платформа ABC была выбрана в виде равностороннего треугольника ABC , вписанного в треугольник MNP . При этом, очевидно, сторона треугольника ABC будет равна $a = L / 2 = 14$. Параллельные кинематические цепи рассматриваемого манипулятора (см. рисунок 1) содержат шесть подвижных шатунов, линейные размеры которых определяются расстояниями l_i между соответствующими сферическими шарнирами. В конкретном случае имитационного моделирования была использована конфигурация, когда все расстояния $l_i = l = 14$. Рабочая область формировалась в координатах z, θ, ψ . Алгоритм ее формирования основан на нахождении граничной сетки трехмерной области, соответствующей предельным значениям углов θ

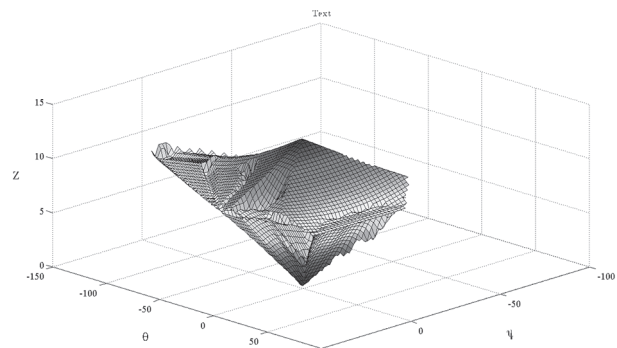


Рисунок 5 — Рабочая область параллельного манипулятора

и ψ при выбранном значении координаты $z = z_{01}$. При этом координата z менялась равномерно с шагом Δz от z_{\min} до z_{\max} , где $z_{\min} = 0$ — координата z предельного положения, а $z_{\max} = 14$ — координата z предельного верхнего положения. Координаты x_{01} и y_{01} фиксировались, в рассмотренном примере $x_{01} = y_{01} = 0$. Одновременно угол разворота платформы φ был принят равным нулю.

В результате имитационного моделирования по разработанной программе и принятым конструктивным параметрам и ограничениям была получена рабочая область, представленная на рисунке 5. Из результатов моделирования следует, что максимальный угол θ равен $35,2^\circ$, а максимальный угол ψ равен $49,5^\circ$. Они достигаются при $z = 9,9$. Аналогично могут быть получены графические и численные представления трехмерных рабочих областей для других сочетаний параметров, учет которых необходим при разработке конструктивной схемы параллельного манипулятора на шестикоординатном шаговом приводе с учетом его конкретного применения.

Заключение. Параллельный манипулятор на шестикоординатном линейном шаговом приводе представляет собой механизм параллельной кинематики с шестью степенями свободы, позволяющий реализовывать сложное пространственное перемещение рабочей платформы. Проведенная алгоритмизация обратной задачи кинематики позволила получить сегментированные алгоритмы в виде аналитических позиционных функций, характеризующих положение каждого из шести подвижных сегментов привода, в зависимости от реализуемого программируемого перемещения. Разработанные математическая модель и алгоритмы позволили создать

программное обеспечение в среде MATLAB для компьютерного имитационного моделирования кинематических параметров и характеристик рассматриваемого параллельного манипулятора с интерактивной визуализацией результатов. Тем самым создана среда разработки параллельного манипулятора на шестикоординатном линейном приводе по кинематическим критериям. Рассмотренный параллельный манипулятор относится к реконфигурируемым механизмам параллельной кинематики, отличается от известных предложенным и используемым шестикоординатным линейным приводом, который содержит по два независимо управляемых линейных модуля на каждой из трех направляющих треугольного статора. Реализация требуемых пространственных траекторий платформы обеспечивается одновременными согласованными перемещениями всех шести подвижных управляемых модулей привода.

Список литературы

1. Системы многокоординатных перемещений и исполнительные механизмы для прецизионного технологического оборудования. / С.Е. Карпович [и др.]. — Минск: Беспринт, 2013. — 208 с.
2. Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. / Р. Пол. — М.: Наука, 1986. — 103 с.
3. Карпович, С.Е. Системы перемещений на основе привода прямого действия / С.Е. Карпович, В.В. Жарский, И.В. Дайняк. — Минск: БГУИР, 2008. — 239 с.
4. Карпович, С.Е. Моделирование механизмов параллельной кинематики в среде MatLab / С.Е. Карпович [и др.]. — Минск: Беспринт, 2013. — 152 с.
5. MATLAB. The Language of Technical Computing. — The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.

Karpovich S.E., Lutsenko V. E., Voitau A.Y., Kuzniatsou V.V., Forutan M.M.

Algorithmization of inverse problem of the kinematics of the parallel manipulator on the six coordinates linear stepping drive

The mathematical model of the parallel manipulator on the six coordinates linear stepping drive is proposed and on its basis algorithmization of inverse problem of the kinematics is performed. Program of simulation is developed in MATLAB with interactive results and MATLAB is a development environment of parallel manipulator by the kinematic parameters and characteristics.

Поступил в редакцию 03.11.2016.