

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет инфокоммуникаций

Кафедра защиты информации

В. И. Кириллов

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальностей 1-39 02 01 «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств», 1-39 03 01 «Электронные системы безопасности», направлений специальностей 1-45 01 01-03 «Инфокоммуникационные технологии (системы телекоммуникаций специального назначения)», 1-45 01 02-01 «Инфокоммуникационные системы (стандартизация, сертификация и контроль параметров)», 1-39 01 01-02 «Радиотехника (техника цифровой радиосвязи)», 1-39 01 01-03 «Радиотехника (специальные системы радиолокации и радионавигации)»

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения в качестве учебно-методического пособия для специальности 1-38 80 01 «Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы»

Минск БГУИР 2018

УДК 681.5-027.45(076)
ББК 32.965я73
К43

Рецензенты:

кафедра связи учреждения образования «Военная академия
Республики Беларусь» (протокол №3 от 12.10.2015);

заведующий кафедрой информационных технологий в управлении
Белорусского национального технического университета,
доктор технических наук, профессор В. Ф. Голиков

Кириллов, В. И.

К43

Прогнозирование показателей надежности технических систем :
учеб.-метод. пособие / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2018. – 164 с. : ил.
ISBN 978-985-543-317-1.

Приводятся теоретические основы и практические методы решения задачи прогнозирования показателей надежности технической системы по совместным результатам форсированных (ускоренных) испытаний и укороченных испытаний, проводимых в режиме нормальной эксплуатации. Для закрепления теоретического материала приводится описание трех компьютеризированных лабораторных работ.

Издание предназначено для студентов и магистрантов, изучающих вопросы прогнозирования технических систем различного назначения, в том числе специализирующихся в области метрологии, стандартизации, сертификации и управления качеством, а также может быть полезно специалистам, занимающимся проектированием сложных технических систем, включая системы двойного назначения.

УДК 681.5-027.45(076)
ББК 32.965я73

ISBN 978-985-543-317-1

© Кириллов В. И., 2018
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 Общие сведения о системе показателей качества технических систем	10
1.1 Основные определения	10
1.2 Стандартизированная система показателей качества промышленной продукции.....	12
1.3 Роль средств измерений в обеспечении качества производства и эксплуатации продукции	17
2 Основные характеристики и показатели надежности технических систем	21
2.1 Основные понятия и определения. Классификация отказов	21
2.2 Характеристики и показатели безотказности	24
2.3 Характеристики и показатели ремонтпригодности	29
2.4 Показатели долговечности	32
2.5 Показатели сохраняемости	35
2.6 Комплексные показатели надежности	37
3 Особенности прогнозирования показателей надежности на разных этапах жизненного цикла продукции	40
3.1 Этапы жизненного цикла продукции	40
3.2 Определение прогнозных показателей продукции на этапе технического задания на разработку	42
3.3 Прогноз показателей надежности на этапе проектирования	49
3.4 Необходимость экспериментальной оценки законов и показателей надежности	53
4 Характеристики и показатели основных теоретических законов надежности.....	55
4.1 Экспоненциальный закон	55
4.2 Закон Эрланга второго порядка	56
4.3 Закон Рэлея.....	57
4.4 Закон Вейбулла	58
4.5 Нормальный закон (закон Гаусса)	59
4.6 Усеченный нормальный закон	60
4.7 Логнормальный закон	61
4.8 Гамма-закон (гамма-распределение).....	62
5 Исследование функций надежности по результатам испытаний.....	64
6 Определение оптимальных параметров выбранного теоретического закона безотказной работы по результатам испытаний	69
6.1 Параметрическая оптимизация экспоненциального закона	69
6.2 Параметрическая оптимизация закона Эрланга.....	71
6.3 Параметрическая оптимизация закона Рэлея	73
6.4 Оптимизация параметров закона Вейбулла.....	75
6.5 Параметрическая оптимизация нормального закона.....	77
6.6 Параметрическая оптимизация усеченного нормального закона	81

6.7	Оптимизация параметров логнормального закона.....	82
6.8	Оптимизация параметров гамма-закона.....	86
6.9	Выбор и обоснование оптимального теоретического закона распределения	88
7	Определение показателей надежности по результатам укороченных испытаний в нормальном режиме.....	90
7.1	Экспоненциальный закон.....	91
7.2	Закон Эрланга второго порядка.....	92
7.3.	Показатели безотказной работы для закона Рэлея.....	93
7.4.	Показатели надежности для закона Вейбулла.....	94
7.5	Определение показателей для нормального закона.....	95
7.6	Показатели безотказности для усеченного нормального закона.....	96
7.7	Определение показателей логнормального закона.....	97
7.8	Показатели безотказности гамма-закона.....	98
7.9	Доверительные оценки рассчитанных параметров и показателей.....	99
8	Аппроксимация результатов форсированных испытаний составным вероятностным законом	103
8.1	Алгоритм решения задачи	103
8.2	Аппроксимация эксперимента суммой двух экспоненциальных законов	107
8.3	Аппроксимация эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Эрланга	108
8.4	Аппроксимация эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Рэлея.....	110
8.5	Аппроксимация эксперимента суммой двух законов Эрланга.....	111
8.6	Аппроксимация эксперимента суммой двух законов Рэлея	112
8.7	Аппроксимация эксперимента суммой законов Эрланга и Рэлея	113
9	Особенности процедуры аппроксимации по результатам укороченных нормальных испытаний	116
9.1	Постановка задачи	116
9.2	Аппроксимация укороченного эксперимента суммой двух экспоненциальных законов.....	117
9.3	Аппроксимация укороченных испытаний суммой экспоненциального закона и закона Эрланга	118
9.4	Аппроксимация укороченного эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Рэлея.....	120
9.5	Аппроксимация укороченных испытаний суммой двух законов Эрланга.....	122
9.6	Аппроксимация укороченного эксперимента суммой двух законов Рэлея	123
9.7	Аппроксимация укороченных испытаний суммой законов Эрланга и Рэлея.....	124

10 Компьютерное моделирование надежностных испытаний	126
10.1 Общие сведения	126
10.2 Оптимальное описание результатов испытаний одним однопараметрическим вероятностным законом	127
10.2.1 Выбор исходных данных	127
10.2.2 Имитационное моделирование надежностных испытаний	128
10.3 Оптимизация двухпараметрических вероятностных законов, аппроксимирующих результаты испытаний	133
10.3.1 Выбор исходных данных	133
10.3.2 Компьютерное моделирование результатов надежностного эксперимента	134
10.4 Оптимальная аппроксимация результатов испытаний суммой двух однопараметрических вероятностных законов	140
10.4.1 Выбор исходных данных	141
10.4.2 Основные процедуры компьютерного моделирования надежностного эксперимента составным вероятностным законом...	141
Заключение	149
Приложение А Контрольные вопросы по материалам учебно-методического пособия	150
Приложение Б Моделирование эксперимента однопараметрическим вероятностным законом	155
Приложение В Моделирование эксперимента двухпараметрическим вероятностным законом	156
Приложение Г Таблицы значений табулированных функций	158
Приложение Д Аппроксимация эксперимента составным вероятностным законом	160
Литература	162

ВВЕДЕНИЕ

В условиях, когда бурно развиваются рыночные отношения и обостряется конкуренция товаропроизводителей на мировых рынках, расширение производства высококачественной промышленной продукции и предоставляемых услуг оказывает существенное влияние на подъем экономики страны. Повышение качества отечественных товаров и услуг имеет первостепенное значение для выхода наших производителей на зарубежные рынки, интеграции страны в мировую экономическую систему и вступления во Всемирную торговую организацию.

Качество становится национальной идеей, консолидирующей усилия государства и производителей в решении проблем повышения авторитета страны в мировом сообществе и уровня жизни населения. Управление качеством в республике является составной частью единого комплекса государственного управления экономикой.

Повышение технического уровня и конкурентоспособности продукции, работ и услуг должно базироваться на использовании достижений науки, внедрении ресурсосберегающих, экологически чистых прогрессивных технологий и новых материалов. При этом необходимо обеспечить научно-технический уровень разрабатываемых изделий, машин и материалов не ниже достигнутого ведущими зарубежными фирмами при полном соответствии требованиям международных и государственных стандартов.

Качество продукции должно обеспечиваться на всех стадиях ее жизненного цикла, начиная от разработки до снятия ее с производства, в том числе на стадии проектных и конструкторских работ, при выборе поставщиков сырья, материалов и комплектующих изделий, на всех стадиях производства, а также при реализации продукции и ее техническом обслуживании в процессе эксплуатации у потребителя.

Такой подход предусматривает комплексное решение вопросов качества и включает все фазы разработки и совершенствования продукции, подготовку производства, изготовление, реализацию и послепродажное обслуживание на основе эффективной системы обратной связи и планирования качества, учитывающего конъюнктуру рынка.

Превышение предложения над спросом, острая борьба за покупателя привели к выработке объективных показателей, позволяющих оценить способность предприятия произвести продукцию с необходимыми характеристиками и обеспечить стабильное, устойчивое качество изготавливаемой продукции в течение всего времени действия контракта. Такими показателями в мировой практике являются **сертификаты продукции и систем качества**. Именно они подтверждают соответствие продукции требованиям по безопасности и основным потребительским свойствам, оцениваемое путем ее испытаний, а для системы качества – проверки на соответствие международным стандартам ИСО серии 9000 [41].

Персонал является главным ресурсом в системе качества, поскольку основными факторами, создающими условия для обеспечения и улучшения качества, в первую очередь являются не технические и даже не экономические, а социальные факторы.

Многообразие и сложность задач, возникающих в ходе управления качеством, а также его обеспечения, предъявляют повышенные требования к уровню специальных знаний в этой области. Соответствующий уровень знаний достигается прежде всего путем надлежащей подготовки персонала.

В Белорусском государственном университете информатики и радиоэлектроники (БГУИР) подготовка персонала в этом направлении осуществлялась первоначально в рамках специальности «Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей» (при подготовке инженеров-метрологов). В настоящее время подготовка ведется в рамках направления специальности «Инфокоммуникационные системы (стандартизация, сертификация и контроль параметров)». Учебный план этой специальности предусматривает изучение дисциплин, в которых рассматриваются различные аспекты обеспечения качества продукции.

Углубленное изучение этих вопросов продолжается в рамках учебной дисциплины «Современные направления приборостроения и метрологии», которая относится к числу дисциплин, составляющих фундамент подготовки магистрантов по специальности «Приборостроение, метрология и информационно-измерительные приборы и системы». Целью изучения дисциплины является освоение новой методологии моделирования и оптимизации в области измерения и управления качеством различных объектов (продукции, систем, процессов, технических проектов и т. п.).

Данное учебно-методическое пособие является развитием предыдущих работ автора [18–30] и позволяет студентам и магистрантам ознакомиться с основными видами квалитетической деятельности, встречающимися на практике (*квалитетрией* называют отрасль науки, которая изучает и реализует методы количественной оценки качества различных объектов и процессов [18]).

В дополнение к теоретическому материалу приводится краткое описание лабораторных работ, которые проводятся в игровой форме: студенты и магистранты решают учебные задачи, подобные реальным производственным задачам. Для ускорения различного рода вычислительных и оформительских процедур в лабораторных работах широко использованы средства компьютерной поддержки принятия решений. С их помощью, в частности, быстро рассчитываются по громоздким формулам оптимизируемые параметры и функции; легко и удобно сравниваются различные варианты решения задач, которые реализуются в виде таблиц и графиков; эффективно решаются задачи, допускающие выбор лучшего решения из нескольких вариантов (квазиоптимального по определенному критерию).

Подобного рода задачи, в частности, встречаются при нахождении и оптимизации таких специфических показателей качества любого вида изделий (в

первую очередь, технических систем), которые называются **показателями надежности**.

Эти показатели относятся к основным показателям качества и всегда указываются в техническом паспорте любого изделия. Например, такой показатель надежности, как гарантированное время безотказной работы изделия, во многих случаях является важнейшим при выборе изделий радиоэлектроники, космической техники и т. п.

Известные методы теоретического расчета показателей надежности в большинстве случаев являются недостаточно точными, поэтому приходится прибегать к опытным (экспериментальным) испытаниям технической системы на надежность.

Учитывая, что в нормальных условиях эксплуатации средний срок безотказной работы техники может быть в пределах от нескольких лет до нескольких десятков лет и более, необходимо использовать два вида опытных испытаний.

Первый называется **форсированным**, или **ускоренным**, когда изделия работают в тяжелых, нетиповых условиях и поэтому выходят из строя сравнительно быстро (в течение нескольких недель или месяцев). На основании обработки результатов ускоренных испытаний определяется примерный закон отказов изделий во времени.

Затем проводятся испытания таких же изделий в режиме *нормальной* (типовой) эксплуатации. Хотя срок испытаний в этом случае обычно продлевается от нескольких месяцев до года, однако за это время, как правило, отказы изделий сравнительно малочисленны, объем статистического материала мал, поэтому такие испытания называют **укороченными**. Тем не менее они позволяют дать достаточно точный прогноз параметров вероятностного закона надежности изделия в условиях реальной эксплуатации (при которой работа изделия может продолжаться несколько лет, а то и десятки лет), поскольку ранее, на стадии ускоренных испытаний, был решен вопрос о характере и типе закона надежности.

В лабораторных работах, которые завершают учебно-методическое пособие, проводится **компьютерное моделирование** подобных задач надежности. Для индивидуализации лабораторной работы каждому студенту предлагается свой набор исходных данных результатов ускоренных и укороченных испытаний техники на надежность.

Успешное выполнение лабораторных работ позволяет:

- изучить основные законы, характеризующие процесс безотказной работы технической системы, и методы их параметрической оптимизации по результатам опытных испытаний;

- по конкретным результатам опытных испытаний системы на надежность для форсированных режимов работы определить, используя компьютерную поддержку, тип вероятностного закона и его параметры, которые наилучшим образом соответствуют этим испытаниям;

– используя конкретные результаты укороченных испытаний этой же системы в реальных условиях эксплуатации, определить гарантированное и среднее время безотказной работы системы.

При подготовке учебно-методического пособия к изданию и в ходе постановки компьютеризированных лабораторных работ на этапе их отладки, совершенствования и модернизации большую помощь автору оказали студенты БГУИР, в частности, курсант военного факультета К. И. Бальцевич, студенты кафедры метрологии и стандартизации Е. В. Богданович, С. П. Иванцов, Е. И. Борбашова и студенты кафедры «Программное обеспечение информационных технологий» М. И. Дроб и А. В. Роля, которым автор выражает благодарность.

Автор благодарен также рецензентам учебно-методического пособия: преподавателям кафедры связи Военной академии Республики Беларусь, в частности, полковнику, канд. техн. наук, доценту Е. В. Машкину и профессору, канд. техн. наук В. М. Калинину, а также заведующему кафедрой информационных технологий в управлении Белорусского национального технического университета, д-ру техн. наук, профессору В. Ф. Голикову.

Библиотека БГУИР

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 Основные определения

Качество является неизменным свойством объекта любой природы, и в нем могут подчеркиваться технические, экономические и другие аспекты. Наиболее общее определение понятия качества дают философы, рассматривая его как философскую категорию, выражающую существенную определенность объекта, благодаря которой он является этим, а не иным [18]. Также приводится альтернативное определение: «Качество – это объективная и всеобщая характеристика объектов, обнаруживаемая в совокупности их свойств». При этом свойство – это особенность, некоторое проявление сущности (природы) объекта [14, 18, 41].

Для характеристики **качества продукции** используют более конкретные определения, например, качество как совокупность технических показателей и характеристик, а также экономических показателей, отражающих спрос, потребление и динамизм рынка и требования общества, носящие, как правило, юридический характер.

В международных рекомендациях по системам управления качеством приводится следующее определение: качество – это совокупность характеристик объекта, относящихся к его способности удовлетворять установленные или предполагаемые потребности [41].

В приведенных определениях отдельные термины имеют следующие толкования:

– **объект** – деятельность или процесс, продукция, организация или отдельное лицо, а также любая комбинация из них;

– **процесс** – это совокупность взаимосвязанных ресурсов и деятельности, которая преобразует входящие элементы в выходящие. При этом под **ресурсами** понимаются: персонал, средства обслуживания, оборудование, методология и технология;

– **продукт** – результат деятельности или процесса;

– **продукция** – оуществленный результат деятельности, предназначенный для удовлетворения определенной потребности.

Применительно к продукции используют также следующие варианты определения качества. Так, по ГОСТ 15467-79 [14] качество продукции – это совокупность свойств продукции, обуславливающих ее пригодность удовлетворять определенные потребности в соответствии с ее назначением.

Качество продукции по стандарту ИСО (международной организации по стандартизации) – это совокупность свойств (характеристик) продукции или услуги, которые придают им способность удовлетворять обусловленные или предполагаемые потребности.

Большой энциклопедический словарь определяет качество продукции как совокупность свойств и меру полезности продукции, определяющие ее способность удовлетворять личным и общественным потребностям.

При этом во всех вышеприведенных определениях под **свойством продукции** понимается объективная способность (особенность), которая проявляется при создании, эксплуатации или потреблении продукции [18].

Показатель качества – это количественная характеристика одного или нескольких свойств объекта, составляющих его качество применительно к определенным условиям создания, эксплуатации или потребления.

Потребности – неудовлетворенные требования потребителя (индивидуального потребителя, предприятия, общества в целом) к характеристикам (показателям) качества объекта, которые нужны для его нормальной жизнедеятельности.

Выигрыш в конкурентной борьбе производителей продукции достигается влиянием двух факторов:

- *ценового* – вытеснением конкурентов за счет снижения, сбивания цены;
- *неценового* – за ту же цену предлагается продукция с более высокими качественными показателями и комплексом услуг («товар с сопровождением»).

Конкурентоспособность является комплексной характеристикой продукции, которая показывает ее отличие от продукции конкурентов как по степени соответствия конкретной общественной потребности, так и по затратам на ее удовлетворение.

Учитывая предыдущие определения, можно обобщить: продукция является качественной при выполнении следующих условий [18, 41]:

- 1) отвечает четко определенным потребностям, области применения или назначения;
- 2) удовлетворяет требованиям потребителей и общества;
- 3) соответствует применяемым стандартам и техническим условиям;
- 4) учитывает условия и требования окружающей среды;
- 5) имеет конкурентоспособную цену;
- 6) является экономически выгодной (прибыльной);

Для обеспечения высокого качества продукции на всех этапах ее жизненного цикла должна быть создана **система качества** – совокупность организационной структуры, ответственности, процедур и ресурсов, направленных на внедрение административного управления качеством.

При этом **управление качеством** включает в себя методы и виды деятельности оперативного характера, используемые для выполнения требований к качеству.

Управление качеством продукции должно осуществляться при выполнении следующих условий [18]:

- 1) имеется (задается, обосновывается) система плановых значений параметров (показателей) объекта;

2) объект по разным причинам изменяет значения своих плановых параметров (вследствие физического износа, условий эксплуатации и др.);

3) имеются средства для обнаружения и измерения отклонений значений параметров от плановых;

4) имеются возможности влияния (воздействия) на объект с целью устранения возникающих отклонений.

При измерении отдельных свойств качества изделий (процессов, услуг и т. п.) используют как *физические методы измерений* (то есть строго формализованные по метрологическим нормам и правилам, с использованием технических средств измерений и т. п.), так и *нефизические методы измерений*. К последним относят методы, при использовании которых средством измерения является человек (эксперт), а процедура оценивания качества является субъективной. Однако и в этом случае удастся эффективно применить ряд формальных методов обработки экспертных показаний и существенно увеличить точность квалиметрической оценки качества [18].

Одним из направлений анализа сложных технических систем является **системотехника** – научная дисциплина (направление), которая изучает процессы проектирования, создания, испытания и эксплуатации сложных технических систем с ориентацией этих процессов на достижение конечной цели – максимального повышения эффективности системы.

При этом **задача оптимизации систем** рассматривается в большинстве случаев как многокритериальная, а ее результат – как один из наилучших среди возможных вариантов согласования ряда противоречивых требований (критериев) к принимаемому решению.

1.2 Стандартизированная система показателей качества промышленной продукции

В соответствии с ГОСТ 15467-79 [14] под **продукцией** понимается осязаемый результат народнохозяйственной деятельности, предназначенный для удовлетворения определенных потребностей.

В свою очередь, **изделием** называется единица промышленной продукции, количество которой исчисляется в экземплярах, штуках или комплексах.

Под **расходным изделием** понимается единица промышленной продукции в специальной упаковке, количество которой исчисляется при помощи непрерывных величин (килограммов, метров и др.).

Всю продукцию народного хозяйства принято классифицировать в соответствии со следующей схемой (рисунок 1.1).

На первом уровне (А) вся промышленная продукция по критерию «Особенности износа (расхода) продукции при эксплуатации» разделяется на два класса – А1 и А2.

Продукция первого класса А1 расходуется по назначению в процессе использования. При этом происходит, как правило, необратимый процесс перера-

ее основного назначения (производительность, мощность, точность измерения и т. д.) и полезный эффект от эксплуатации (потребления) продукции.

Показатели назначения рекомендуется делить на следующие виды (ветви дерева показателей качества) [18]:

- классификационные показатели;
- показатели состава и структуры;
- показатели технического совершенства.

Классификационные показатели в зависимости от специфики продукции позволяют отнести ее к некоторой классификационной группе и определяют область применения продукции и ее типоразмер (например, для станков – габариты обрабатываемых деталей; для транспорта – грузоподъемность, пассажироместимость; для измерительных приборов – вид измеряемой физической величины, диапазон измерений и т. д.)

Показатели состава и структуры характеризуют продукты по химическому составу, а изделия – по составу комплектующих частей (элементов) и структуре (например, для продуктов – процентное содержание компонентов; для сплавов – то же и дополнительно структура; для изделий машино- и приборостроения – коэффициент агрегатирования, коэффициент блочности и т. д.).

Показатели технического совершенства характеризуют свойства продукции, определяющие, насколько удачно выбраны технические решения. Они также зависят от специфики продукции (например, для пищевых продуктов – калорийность; для измерительных приборов – погрешность, время реакции; для машин – производительность, КПД).

Показатели состава, структуры и технического совершенства могут быть объединены в общую группу *конструктивных показателей*.

2 Показатели **безотказности** характеризуют свойства непрерывно сохранять работоспособность в течение определенного времени работы (наработки) или некоторого периода времени. Эти показатели относятся как к периодам использования изделий по назначению, так и к периодам их хранения и транспортирования.

3 Показатели **долговечности** характеризуют свойство изделий сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

4 Показатели **ремонтпригодности** характеризуют свойства изделий, заключающиеся в приспособленности к предупреждению отказов и повреждений, выявлению их причин и устранению последствий (в ходе ремонта или технического обслуживания).

На ремонтпригодность влияют, в частности, такие конструктивные особенности, как доступ к местам регулирования, наличие диагностических и контрольных устройств, удобства разборки и сборки изделия и др.

5 Показатели **сохраняемости** характеризуют свойства продукции непрерывно сохранять до использования (эксплуатации) заданные показатели каче-

ства в установленных пределах в течение некоторого промежутка времени при транспортировании и хранении.

Показатели 2–5 часто объединяют в общий показатель качества продукции – **надежность**, который отражает свойства продукции сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортировки.

Примечание – Детально основные показатели надежности рассматриваются в следующих разделах.

6 Показатели **экономного использования** сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов характеризуют свойства изделия, отражающие его техническое совершенство по уровню или по степени потребления им сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов при эксплуатации.

7 **Эргономические** показатели характеризуют систему «человек – продукция – среда использования» и учитывают требования, предъявляемые к продукции для повышения эффективности взаимодействия человека с данной продукцией (в определенной среде). Эргономические требования определяются [18]:

- антропометрическими характеристиками человека;
- характеристиками двигательной активности человека;
- возможностями и особенностями функционирования органов чувств человека;
- особенностями восприятия, памяти и мышления человека;
- необходимостью учета уровня профессиональной подготовки человека, взаимодействующего с продукцией.

8 **Эстетические** показатели характеризуют информационную выразительность, рациональность формы, целостность композиции и совершенство производственного исполнения продукции.

9 Показатели **технологичности** характеризуют эффективность конструкторско-технологических решений для обеспечения высокой производительности труда при изготовлении, эксплуатации и ремонте продукции.

10 Показатели **транспортабельности** характеризуют свойства, определяющие приспособленность продукции к транспортированию, т. е. к перемещению в пространстве, не сопровождающемуся использованием продукции.

11 Показатели **стандартизации** и **унификации** характеризуют степень использования в изделии стандартных составных частей и уровень их унификации. Унифицированные части – части изделия, выпускаемые по стандартам предприятия или используемые в нескольких различных изделиях данного предприятия.

12 **Патентно-правовые** показатели характеризуют степень обновления технических решений, которые использованы в продукции, их патентную защиту и возможность беспрепятственной реализации продукции в стране и за

рубежом. Такие показатели характеризуют продукцию в целом с точки зрения использования в ней новейших достижений науки и техники.

13 Показатели **безопасности** характеризуют степень безопасности обслуживающего персонала, окружающих, а также сопрягаемых объектов при функционировании продукции.

14 Показатели **влияния продукции на окружающую среду** характеризуют уровень вредных воздействий, возникающих при эксплуатации или потреблении продукции (например, засорение окружающей среды вредными выбросами и полями).

15 Показатели **устойчивости продукции к внешним воздействиям** характеризуют способность сохранять свойства, входящие в состав ее качества, при воздействии сопрягаемых объектов и окружающей среды.

Для различных групп продукции (см. рисунок 1.1) важность (весомость) одних и тех же показателей качества, приведенных выше, может существенно отличаться (таблица 1.1) [18].

Таблица 1.1 – Целесообразность применения показателей для различных групп промышленной продукции [18]

Показатели качества промышленной продукции	Группа продукции по рисунку 1.1				
	1	2	3	4	5
1 Назначения	+	+	+	+	+
2 Безотказности	–	–	–	+	+
3 Долговечности	–	–	–	+	+
4 Ремонтпригодности	–	–	–	–	+
5 Сохраняемости	+	+	+	+	+
6 Экономного использования сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов	–	(+)	(+)	(+)	+
7 Эргономические	–	–	+	+	+
8 Эстетические	(+)	(+)	+	+	+
9 Технологичности	+	+	+	+	+
10 Транспортабельности	(+)	(+)	+	+	+
11 Стандартизации и унификации	–	–	(+)	+	+
12 Патентно-правовые	–	+	+	+	+
13 Безопасности	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
14 Влияния на окружающую среду	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
15 Устойчивости к внешним воздействиям	(+)	(+)	+	+	+

Примечания

1 Знак «+» означает применимость, знак «-» – неприменимость, знак «(+)-» – ограниченную применимость соответствующих групп показателей качества продукции.

2 Каждой группе продукции соответствует определенная совокупность видов показателей, обуславливающих уровень ее качества, при этом она не совпадает с совокупностью, присущей любой другой группе продукции.

3 Самостоятельную группу показателей, не включенных в вышеприведенный перечень, составляют **экономические показатели**, которые требуют отдельного рассмотрения.

4 Для сложных технических систем, относящихся к группе продукции под номером 5 на рисунке 1.1, показатели надежности являются обязательными.

Более детально показатели продукции, указанные в таблице 1.1 под номерами 6–15, рассмотрены в [18].

1.3 Роль средств измерений в обеспечении качества производства и эксплуатации продукции

В современном мире без измерений невозможно представить достижения и прогресс в различных областях науки и техники, промышленности и сельском хозяйстве, здравоохранении и образовании, охране окружающей среды, международной торговле и т. д. В настоящее время существует потребность в измерении нескольких тысяч различных по своей природе физических величин и параметров.

Для выполнения измерений разработаны и производятся разнообразные средства измерений (СИ), которые отличаются назначением, диапазоном и точностью измерений и другими метрологическими характеристиками, а их общее число только в Республике Беларусь составляет около 100 млн средств измерений.

Ежедневно в мире производятся сотни миллиардов измерений, а десятки миллионов человек считают измерение своей профессией. При этом доля затрат на измерения составляет в среднем 10–15 % от всех затрат общественного труда и достигает 50–70 % в отраслях промышленности, производящих сложную технику, например, в электронике, приборостроении и др. [30].

С каждым годом возрастают требования к точности измерений, скорости получения измерительной информации, квалификации операторов, подготовке специалистов-метрологов. Развитие международной торговли, расширение кооперированных (совместных) производств, общие интересы стран по защите окружающей среды, здоровья и безопасности человека, проведение скоординированных научных исследований требуют, чтобы результаты измерений признавались достоверными независимо от места их выполнения.

Точными можно считать результаты измерений, выполненных в следующих условиях:

- в стране создана и успешно функционирует система обеспечения единства измерений;

- измерения выполняются на приборах, которые поверены (откалиброваны) с помощью национальных (государственных) эталонов;

- процедуры измерений стандартизированы на международном (региональном) уровне и т. д.

Для того чтобы результаты измерений отвечали предъявленным к ним требованиям, качеством измерений надо управлять. Эффективные решения этой задачи возможны только в рамках комплексной системы мероприятий, видов деятельности, свода регламентирующих нормативных документов и т. д., объединенных общим понятием **метрологическое обеспечение (МО)** [30].

Объективная количественная информация о состоянии параметров качества продукции, а также о состоянии производственного процесса на всех его стадиях служит основой для принятия управленческих решений, которые направлены на установление, обеспечение и поддержание необходимого уровня качества продукции. В современном производстве основным источником такой информации являются измерения.

Средства измерений в условиях непрерывно усложняющихся технологий современной научно-производственной деятельности выполняют ответственную роль. В случае применения СИ в производстве нарушение точности измерений может привести к необратимым потерям материалов, оборудования и денежных средств. Например, в науке недостоверность измерительной информации может привести к неверным выводам и непредсказуемым результатам, в охране труда – повлечь трагические последствия. В системе обеспечения единства и требуемой точности измерений нарушение правильности передачи единиц физических величин от эталонов к рабочим средствам измерений может нарушить правильность измерений в каждой из перечисленных областей и, следовательно, привести к любому из приведенных нежелательных последствий [30].

Важная роль в обеспечении единства измерений принадлежит **метрологическому обеспечению производства**, задачей которого является рациональная организация измерительного процесса, обеспечение достоверности его результатов. На предприятии МО относится к числу основных элементов обобщенной **системы управления качеством**.

Система предусматривает проведение мероприятий, которые направлены на повышение качества продукции за счет внедрения более прогрессивных и современных методов и средств измерений, обеспечения постоянной готовности средств измерений к выполнению измерений с необходимой точностью, а также осуществления координации и методического руководства работами, направленными на обеспечение единства и достоверности измерений.

Анализ задач метрологического обеспечения показывает, что они реализуются на всех стадиях жизненного цикла продукции.

На *стадии исследования и проектирования*, когда формируются требования к уровню качества продукции и обосновываются оптимальные варианты достижения высоких конечных результатов, важнейшая роль принадлежит следующим видам работ:

- а) экспертиза проектов нормативно-технической, конструкторской и технологической документации;
- б) установление рациональной номенклатуры измеряемых параметров и оптимальных норм точности измерений;
- в) создание и внедрение современных методик выполнения измерений, а также средств измерений, испытаний и контроля.

На *стадиях изготовления и эксплуатации (потребления)* продукции для решения задач постоянного улучшения качества выпускаемой продукции и обеспечения стабильности запланированного уровня ее качества важную роль играет внедрение стандартов организации, которые регламентируют:

- а) основные положения МО разработки, производства, испытаний и эксплуатации продукции;
- б) организацию поверки и метрологической аттестации применяемых средств измерений;
- в) контроль за производством, состоянием, применением и ремонтом средств измерений и соблюдением метрологических правил, требований и норм и др. [30].

Являясь функциональной подсистемой системы менеджмента качества предприятия, МО выполняет задачу организационной и технической координации метрологической деятельности, которую проводят в различных функциональных подсистемах предприятия на всех стадиях производства. Как вид деятельности метрологическое обеспечение производства имеет комплексный и многосторонний характер. Его реализация осуществляется специальной **метрологической службой** предприятия совместно с другими подразделениями (конструкторами, технологами и т. п.), а также вышестоящими метрологическими службами, которые координируют деятельность родственных предприятий в рамках отрасли (ведомства, министерства).

Примечание – Метрологические службы предприятий всегда принимают активное участие в процедурах определения основных показателей надежности производимой и (или) эксплуатируемой техники.

Постоянное увеличение объема измерений и повышение доли затрат на их осуществление в общем объеме производственных затрат является одной из основных тенденций развития современных предприятий. В ряде случаев, например, при производстве и эксплуатации радиоэлектронной и космической техники, в отрасли связи и некоторых других отраслях их доля составляет более половины всех затрат [18, 30].

В таких условиях метрологическое обеспечение является важнейшим элементом управления качеством, а его уровень оказывает не только косвенное

(повышение качества продукции), но и непосредственное влияние на эффективность производства.

Расширение масштабов автоматизации производственных процессов, возрастание требований к точности технологических и управленческих решений придают вопросам точности и достоверности измерений особую остроту и актуальность. При этом обеспечение единства и требуемой точности измерений является необходимым условием достоверности всей технологической информации и играет важную роль в решении проблемы управления качеством.

Низкая точность измерений приводит к нарушениям режимов технологического процесса и браку при контроле готовой продукции, что неизбежно вызывает потери на различных участках производства.

Современное мировое сообщество неуклонно стремится к созданию глобального международного рынка товаров и услуг. Свободное перемещение товаров возможно только в условиях доверия к их качеству со стороны потребителей, что подтверждается соответствующим **сертификатом**. В свою очередь, сертификат качества требует проведения определенного комплекса измерений и испытаний, проводимых по стандартизованным методикам и с оговоренными типами средств измерений.

Избежать повторных измерений и испытаний при перемещении товаров из одной страны в другую, добиться экономии ресурсов, материалов, времени, персонала, финансов и т. д. можно, следуя единому для всех стран принципу деятельности, который сформулирован как **«один стандарт, одно измерение, один сертификат»**. Центральной частью этого принципа является создание в каждой стране такой системы измерений, в рамках которой все измерения выполняются на гармонизированной (международно-согласованной) основе, с требуемой точностью, «прозрачностью», «прослеживаемостью» и использованием международно признанной системы единиц.

Роль и место измерений (и метрологии в целом) в создании высококачественной и конкурентоспособной продукции сформулированы следующим образом: «Нет качества без контроля, нет контроля без измерений, нет измерений без калибровки, нет калибровки без аккредитованной лаборатории, нет аккредитованной лаборатории без прослеживаемости, нет прослеживаемости без эталона, нет эталона без метрологии».

В этой формуле, ставшей крылатым выражением, отражены фактически все виды деятельности, составляющие сферу метрологического обеспечения [30].

2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1 Основные понятия и определения. Классификация отказов

Как упоминалось в разделе 1, важнейшей технической характеристикой качества продукции является надежность, связанная с длительной пригодностью к эксплуатации (потреблению). Как свойство изделий надежность оценивается вероятностными характеристиками, основанными на статистической обработке экспериментальных данных.

По мере технического прогресса наблюдается усложнение технических изделий. Основное противоречие в развитии современной техники заключается в том, что если не предпринимать необходимые меры по повышению надежности, то чем сложнее, быстрее и точнее работа техники, тем менее она надежна. Отсюда следует, что решение проблемы надежности является не только важной технической, но и серьезной экономической задачей.

Надежностью называют свойство изделия сохранять в установленных пределах времени значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях: а) применения (эксплуатации); б) технического обслуживания; в) ремонтов; г) хранения; д) транспортировки и др.

Эта способность должна сохраняться даже при наличии: а) внешних климатических и механических воздействий на само изделие; б) различных внутренних физико-химических процессов в его элементах.

Надежность – неотъемлемый показатель качества любого промышленного изделия и любой радиоэлектронной аппаратуры, в том числе, конечно, средств измерений, средств телекоммуникаций, компьютеров и других устройств.

Качество изделия определяется совокупностью многих свойств, таких как чувствительность, дальность действия, точность, а для средств электронно-вычислительной техники также и таких, как объем памяти, быстродействие и др. В число этих свойств также входит и надежность, однако этот показатель качества существенным образом отличается от остальных. Изделие может быть надежным в работе и при этом обладать низкими техническими характеристиками, однако если совершенное по техническим характеристикам изделие не обладает необходимой надежностью, то все остальные показатели качества теряют свое практическое значение, поскольку они не могут быть полностью использованы в работе.

Неисправное устройство не выполняет свои функции, что трудно установить в работе сложного устройства, которая определяется многими показателями. В связи с этим вводится понятие **работоспособности** – такого состояния технической системы, при котором она выполняет свои функции,

сохраняя все значения параметров в пределах, заданных техническими условиями на данное изделие.

Характеристики надежности основываются на учете событий, называемых отказами и характеризующих одно из двух возможных состояний элементов и изделий – работоспособное/неработоспособное. **Отказ** – это такое событие, после которого отдельный элемент или все устройство перестает выполнять свои функции либо нарушается работоспособность аппаратуры.

Примечание – В метрологии под отказом часто понимают такое состояние СИ, когда его отдельные показатели (например, погрешность измерения, предел измерения, точка начального отсчета и т. п.) выходят за установленные допустимые пределы, что приводит к неверным результатам измерений. Такие ситуации требуют самостоятельного конкретного рассмотрения.

Отсутствие отказов в процессе эксплуатации техники является признаком ее высокой надежности. Отказ трактуется как случайное событие и потому все количественные характеристики надежности основаны на учете времени до возникновения отказа.

Разнообразная природа возникновения отказов заставляет классифицировать их по ряду факторов.

К первому фактору относятся **причины возникновения** отказов, которые разделяются:

1) на *конструктивные ошибки и недостатки*: недостаточная прочность отдельных элементов или конструкции; неудачная компоновка узлов; недостаточная защищенность конструкции от попадания влаги, пыли; неудобство обслуживания и др.;

2) *производственные недостатки в изготовлении*: скрытые дефекты; некондиционные материалы; нарушения технологии изготовления и сборки и др.;

3) *неправильная эксплуатация и техническое обслуживание*: невыполнение эксплуатационных инструкций, несоблюдение правил технического обслуживания из-за низкой квалификации обслуживающего персонала; неисправности вспомогательных механизмов и т. д.;

4) *внешние факторы*: повышенная или низкая температура, повышенная влажность, повышенное или пониженное атмосферное давление, загрязненность воздуха и др.;

5) *некачественный ремонт*: несоответствие материала, технологии изготовления (методов, режимов, точности и качества обработки) и сборки первоначальным условиям изготовления, плохой контроль за проведением ремонта.

По **характеру возникновения** отказы классифицируют:

1) на *внезапные*, которые нельзя заранее предусмотреть;

2) *постепенные*, когда условия, приводящие к отказу, накапливаются постепенно (износ, перегрев, усталостные явления, старение, деформации);

3) *периодические*, повторяющиеся через некоторые промежутки времени, по мере накопления условий, приводящих к отказу; после восстановления

нормальных условий (температура, давление и др.) система как бы самовосстанавливается и продолжает функционировать.

По **характеру проявления** различают отказы 1) явные; 2) скрытые; 3) независимые; 4) зависимые. Независимым является отказ, не вызванный отказом других элементов системы. Соответственно, отказ какого-либо элемента системы, получившийся в результате отказа других ее элементов, является зависимым.

По **закономерности возникновения** различают отказы: 1) случайные; 2) явно закономерные.

В теории надежности (как и в рамках данного учебно-методического пособия) **отказ** обычно рассматривается как событие независимое и случайное.

Восстановление – процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) изделия с целью восстановления его работоспособности (устранения неисправности).

По **способности к восстановлению** изделия подразделяются на восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Работоспособность *восстанавливаемого* изделия в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемой ситуации. Соответственно, работоспособность *невосстанавливаемого* изделия восстановлению не подлежит.

Основным способом восстановления работоспособности является **ремонт**. В зависимости от того, предусмотрены ли операции ремонта, изделия подразделяются на *ремонтируемые* и *неремонтируемые* (соответственно восстанавливаемые и невосстанавливаемые).

Информационно-измерительные системы, средства измерений и их элементы (блоки, узлы и т. п.), системы телекоммуникаций и др. относят к классу **восстанавливаемых систем**, в которых после возникновения отказа за некоторое время восстановления T_B происходит поиск и замена (или ремонт) отказавшего элемента. Далее система вновь функционирует нормально.

После нескольких отказов и восстановлений система (элемент) подвергается среднему или капитальному ремонту. После нескольких ремонтов система снимается с эксплуатации по техническому состоянию как неподлежащая восстановлению и утилизируется.

В зависимости от **сложности устранения** различают отказы:

- 1) устранимые в порядке технического обслуживания;
- 2) устранимые при среднем или капитальном ремонте.

В зависимости от **места устранения** различают отказы:

- а) устранимые в эксплуатационных условиях;
- б) устранимые только в стационарных условиях ремонтной мастерской.

Ненадежная работа СИ является причиной потери точности измерений и наносит значительный ущерб народному хозяйству. Поэтому при разработке аппаратуры СИ:

- а) используют высоконадежные электрорадиоэлементы;

- б) предусматривают резервирование отдельных блоков или узлов;
- в) разрабатывают аппаратуру встроенного автоматического контроля для обнаружения внезапных отказов и предупреждения постепенных отказов;
- г) совершенствуют конструкции блоков для обеспечения быстрого восстановления и ремонта отказавших узлов и т. д.

Однако все эти меры ведут, как правило, к увеличению стоимости аппаратуры, а также сроков разработки, изготовления и ввода ее в эксплуатацию. Поэтому оптимальное построение СИ (как и всех других технических устройств) должно выполняться по критерию минимума экономических и временных затрат при условии, что реальная надежность работы СИ обеспечивается не ниже некоторого заданного значения. Этот вывод справедлив и для большинства других видов аппаратуры.

2.2 Характеристики и показатели безотказности

Характеристики надежности основаны на вероятностно-статистических испытаниях. На испытание ставится достаточно большое число изделий N_0 , и наблюдаются моменты, когда возникают отказы. Испытания должны продолжаться до тех пор, пока не откажут все N_0 изделий, но практически они завершаются раньше, как только выявляются статистические закономерности.

Основными количественными характеристиками безотказной работы технической системы являются *функции*: вероятность безотказной работы $P(t)$, частота отказов $f(t)$, опасность (интенсивность) отказов $\lambda(t)$, а также ряд показателей, связанных с вышеуказанными функциями, например, среднее время безотказной работы T_0 , гарантированное время безотказной работы T_r и др.

Вероятностью безотказной работы называют вероятность того, что при заданных условиях эксплуатации в течение определенного интервала времени не произойдет отказа, и рассчитывают ее из выражения

$$P(t) = P(t_0 \geq t) = N(t) / N_0, \quad (2.1)$$

где t_0 – время работы изделия с момента его включения до первого отказа (время наработки на отказ);

t – заданное время работы;

$N(t)$ – число работоспособных изделий в момент t ;

N_0 – исходное число испытываемых изделий (при $t = 0$).

Вероятность безотказной работы всегда является **убывающей функцией времени** и обладает свойствами:

– в начальный момент времени (при $t = 0$) $N(t = 0) = N_0$ и $P(t = 0) = 1,0$;

– при $t \rightarrow \infty$ функция $P(t)$ стремится к нулю, так как $N(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ (рисунок 2.1, а).

На практике иногда более удобной характеристикой является **вероятность отказа** $Q(t)$. Безотказная работа аппаратуры и появление отказа являются событиями несовместимыми и противоположными, поэтому сумма их вероятностей подчиняется условию: $P(t) + Q(t) = 1$. Следовательно,

$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (2.2)$$

Частотой отказов называется отношение числа образцов, отказавших за единицу времени, к числу изделий, первоначально поставленных на испытания:

$$f(t) = \frac{n(t)}{\Delta t \cdot N_0}. \quad (2.3)$$

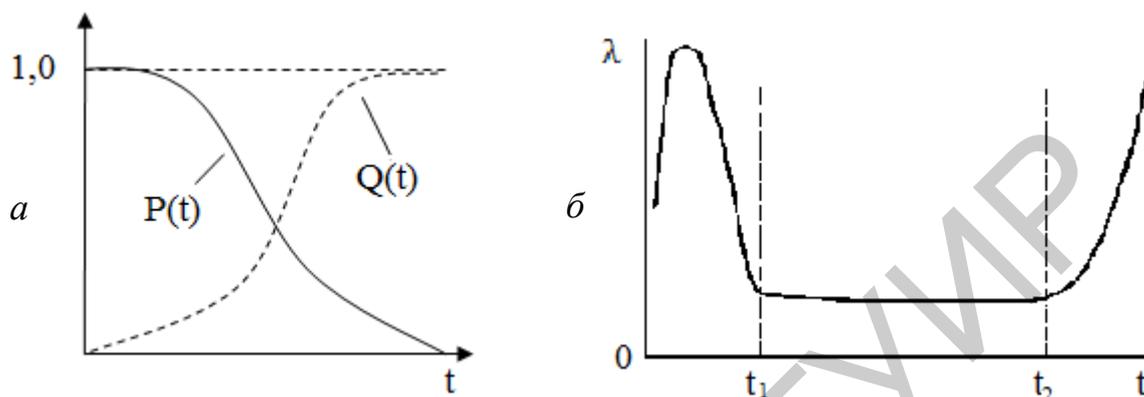


Рисунок 2.1 – Зависимость вероятности безотказной работы (a) и интенсивности отказов (b) от продолжительности работы оборудования

Число $n(t)$ получается как разность количества образцов, исправно работавших в начале интервала Δt и оставшихся работоспособными в конце этого интервала, т. е.

$$n(t) = N(t) - N(t + \Delta t). \quad (2.4a)$$

Количество работоспособных изделий в начале и конце интервала Δt можно выразить через вероятность того, что в соответствующие моменты времени не произойдет отказа:

$$N(t) = N_0 P(t); \quad N(t + \Delta t) = N_0 P(t + \Delta t). \quad (2.4b)$$

Подставляя эти значения в формулу (2.3), будем иметь

$$f(t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.4в)$$

Устремив Δt к нулю и перейдя к пределу, получим

$$f(t) = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = -\frac{dP(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{d(t)}. \quad (2.5)$$

Таким образом, **частота отказов** есть плотность вероятности распределения времени работы изделия до первого отказа.

Соответственно вероятность появления отказа за время t будет равна

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt, \quad (2.6a)$$

а вероятность безотказной работы определится в виде

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = \int_t^{\infty} f(t) dt. \quad (2.6б)$$

Функция $f(t)$ характеризует скорость изменения функции $P(t)$ (или $Q(t)$) во времени и в отличие от функции $P(t)$ может быть как убывающей, так и возрастающей или еще более сложной функцией времени.

Интенсивность отказов (ранее использовался синоним **опасность**) может быть выражена как отношение числа изделий, отказавших за единицу времени, к среднему числу исправно работавших изделий N_{cp} в тот же промежуток времени:

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{\Delta t \cdot N_{cp}}. \quad (2.7)$$

Подставим в это выражение значение $n(t)$ из (2.4). Тогда

$$\lambda(t) = \frac{N_0 [P(t) - P(t + \Delta t)]}{N_{cp} \Delta t}.$$

Так как N_{cp}/N_0 , при большом значении N_0 есть вероятность безотказной работы $P(t)$, тогда, устремив Δt к нулю и переходя к пределу, получим

$$\lambda(t) = -\frac{1}{P(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = -\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt} \quad (2.8a)$$

или с учетом (2.5)

$$\lambda(t) = f(t) / P(t). \quad (2.8b)$$

Учитывая приведенные выше соображения о возможности поведения функции $f(t)$, из (2.8б) следует, что и функция $\lambda(t)$ может по-разному изменяться во времени.

Интегрируя выражение (2.8а), окончательно будем иметь

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = -\ln P(t). \quad (2.9)$$

Отсюда следует **основная формула теории надежности** для вероятности безотказной работы:

$$P(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda(t) dt \right]. \quad (2.10)$$

Среднее время безотказной работы (или наработка до отказа) характеризует усредненное для большой группы изделий время работы до возникновения первого отказа и определяется как математическое ожидание непрерывной случайной величины – времени работы изделия до отказа:

$$T_0 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[-\frac{dP(t)}{dt} \right] dt. \quad (2.11)$$

Интегрируя по частям, получим

$$T_0 = -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt.$$

Учитывая, что $P(0)=1$, $P(\infty)=0$, получим

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)dt. \quad (2.12a)$$

На основании опытов (статистических испытаний) среднее время безотказной работы равно

$$T_{0cp} \cong \sum_{i=1}^{N_0} T_{0i} / N_0, \quad (2.12б)$$

где T_{0i} – время работы до отказа i -го изделия, $i \in [1, N_0]$;

N_0 – общее число изделий.

При большом числе изделий $N_0 \rightarrow \infty$, $T_{0cp} \rightarrow T_0$, как следует из (2.11).

Поскольку T_0 является средним значением случайной величины – времени работы до отказа, полезно знать, в каких пределах это значение времени может меняться на практике. Таким показателем может служить величина **среднего квадратического отклонения** времени безотказной работы σ_T от его среднего значения T_0 , которое рассчитывается из выражения

$$D_2 = \sigma_T^2 = \int_0^\infty (t - T_0)^2 f(t)dt = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - T_0^2. \quad (2.13)$$

Здесь учтено (2.11) и то, что $\int_t^\infty f(t)dt = P(t=0) = 1,0$ [см. (2.6б)].

Другим часто используемым на практике показателем является **гарантированное время безотказной работы** T_Γ (или гарантированная наработка), которое определяется как время, в течение которого не произойдет отказ с заданной гарантированной вероятностью P_Γ . Аналитически величина T_Γ определяется как результат решения уравнения

$$P_\Gamma = 1 - \int_0^{T_\Gamma} f(t)dt, \quad (2.14)$$

которое следует из (2.6).

Как показывает практика, типичная **зависимость интенсивности отказов** от времени $\lambda(t)$ имеет три характерных участка (см. рисунок 2.1, б).

На начальном участке ($0 - t_1$), называемом **периодом приработки**, наблюдается повышенная частота отказов, что объясняется быстрым выходом из строя всех элементов со скрытыми дефектами.

Затем начинается **период нормальной работы** ($t_1 - t_2$), когда интенсивность отказов остается более или менее постоянной.

За ним следует **период старения**, при котором количество отказов начинает быстро увеличиваться из-за старения и износа элементов.

Возможны и другие, более сложные зависимости интенсивности отказов $\lambda(t)$ и, соответственно, функций $P(t)$ и $f(t)$, которые будут рассмотрены ниже.

При сравнительной оценке различных теоретических законов (функций $P(t)$, $f(t)$ или $\lambda(t)$) на предмет близости их к тому или иному эмпирическому закону, который определяется непосредственно по результатам надежностных испытаний, достаточно продуктивным является сравнение этих законов по ряду определяющих показателей.

Такие показатели, как среднее время безотказной работы T_0 и среднеквадратическое отклонение этого времени σ_T , были определены в (2.12) и (2.13). Часто используются также следующие показатели:

а) k -й **начальный** момент M_k характеристики вероятности безотказной работы, определяемый из выражения

$$M_k = \int_0^{\infty} t^k \cdot f(t) dt, \quad (2.15a)$$

где k – целое число; очевидно, для $k = 1$ имеем $M_1 = T_0$ [см. (2.11)];

б) k -й **центральный** момент D_k этой характеристики

$$D_k = \int_0^{\infty} (t - M_1)^k f(t) dt, \quad (2.15b)$$

где k – целое число; очевидно, для $k = 2$ имеем $D_2 = \sigma_T^2$ [см. (2.13)].

Можно показать, что между начальными и центральными моментами вероятностного закона имеется следующая связь [35]:

$$M_k = \sum_{i=0}^k C_k^i D_{k-i} \cdot M_1^i, \quad (2.16a)$$

где C_k^i – число сочетаний из k по i , при этом $D_0 = 1$; $D_1 = 0$;

$$M_2 = D_2 + M_1^2; \quad (2.16b)$$

$$M_3 = D_3 + 3D_2M_1 + M_1^3; \quad (2.16b)$$

$$M_4 = D_4 + 4D_3M_1 + 6D_2M_1^2 + M_1^4. \quad (2.16g)$$

Другой вариант этой связи представлен выражениями:

$$D_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i M_{k-i} M_1^i; \quad M_0 = 1. \quad (2.17a)$$

$$D_2 = M_2 - M_1^2; \quad (2.17b)$$

$$D_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3; \quad (2.17b)$$

$$D_4 = M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2M_1^2 - 3M_1^4. \quad (2.17g)$$

Для подчеркивания характерных особенностей того или иного вероятностного закона также часто используют композиции из (2.16)–(2.17), в частности, **обобщенные показатели**:

$$- \text{коэффициент вариации: } V = \sqrt{D_2}/M_1 = \sigma_T/M_1; \quad (2.18a)$$

$$- \text{коэффициент асимметрии: } S_k = D_3/\sigma_T^3 = D_3/D_2^{1.5}; \quad (2.18b)$$

$$- \text{коэффициент эксцесса: } E_k = -3 + D_4/D_2^2. \quad (2.18b)$$

В заключение этого подраздела отметим, что наиболее «яркими» показателями технической системы являются гарантированное время T_Γ и среднее время T_0 безотказной работы. Именно эти показатели играют решающую роль в конкурентной борьбе продукции на мировом рынке, причем зачастую значения этих показателей составляют несколько лет (T_Γ) и десятки лет (T_0). В такой ситуации очень важно объективно и доказательно обосновать эти показатели, для чего приходится прибегать к специальным методам испытаний соответствующей техники. Эти вопросы изложены в последующих разделах.

2.3 Характеристики и показатели ремонтпригодности

Показатели ремонтпригодности характеризуют свойства объекта, заключающиеся в приспособленности его к предупреждению и обнаружению причин повреждения и их устранению путем проведения ремонтов и технического обслуживания.

Восстановлением, как уже говорилось выше, называют процесс перевода объекта из неработоспособного состояния в работоспособное. Восстановление включает в себя:

- 1) идентификацию отказа (определение его места и характера);
- 2) наладку или замену отказавшего элемента;
- 3) регулирование и контроль технического состояния отдельных элементов объекта;
- 4) заключительную операцию контроля работоспособности объекта в целом.

Основным способом восстановления работоспособности является **ремонт**, который состоит из комплекса операций по восстановлению исправности (или работоспособности) изделия в целом и его составных частей. В ремонт могут входить разборка, дефектовка (нахождение неисправного элемента), замена или восстановление отдельных деталей, блоков и сборочных единиц.

Содержание отдельных операций ремонта может совпадать с содержанием операций технического обслуживания.

Техническое обслуживание включает в себя комплекс операций по поддержанию работоспособности или исправности объекта как на этапе непосредственной эксплуатации, так и на стадии ожидания, хранения, транспортировки и т. п. Эти операции регламентированы в соответствующей конструкторской, проектной и/или эксплуатационной документации.

Наличие большого числа разнородных процедур, характеризующих **комплексное свойство ремонтпригодности**, делает целесообразным разделение его на три более простых составляющих [16, 33–34, 37]:

- *обслуживаемость*, т. е. приспособленность объекта к техническому обслуживанию;
- *контролепригодность*, т. е. приспособленность объекта к контролю его технического состояния;
- *приспособленность к диагностированию*, т. е. к предупреждению и обнаружению отказов (повреждений, неисправностей элементов и т. п.), а также причин, их вызывающих.

К основным характеристикам и показателям ремонтпригодности относят [16, 33–34, 37]:

- вероятность восстановления в заданное время;
- среднее время восстановления;
- интенсивность восстановления;
- средняя трудоемкость технического обслуживания;
- удельная трудоемкость технического обслуживания;

- средняя трудоемкость ремонтов;
- удельная трудоемкость ремонтов;
- показатели средней и относительной стоимости технического обслуживания и ремонтов и др.

Процесс восстановления (оживления) аппаратуры по аналогии с процессом наработки до отказа (см. подраздел 2.2) удобно описывать на вероятностно-статистическом языке. При этом время восстановления t_B как период времени от момента начала ремонта до его окончания можно считать случайной величиной, подчиняющейся вероятности восстановления $P_B(t)$:

$$P_B(t) = P(t_B \leq t).$$

При статистических испытаниях на ремонт ставится одновременно партия из N_0 отказавших изделий и каждое из них восстанавливается (ремонтируется) самостоятельно и параллельно. Очевидно,

$$P_B(t) = N_B(t)/N_0, \quad (2.19)$$

где $N_B(t)$ – число восстановленных изделий к моменту t .

Поскольку $N_B(t=0) = 0$ и $N_B(t=\infty) = N_0$, вероятность **восстановления** является **возрастающей** функцией времени. По физическому смыслу вероятность восстановления для моментов времени $t=0$ и $t=\infty$ соответственно равна $P_B(t=0) = 0$ и $P_B(t=\infty) = 1,0$.

Скорость восстановления ремонтируемых изделий характеризуется функцией «**частота восстановления**» $f_B(t)$, которая определяется из выражения

$$f_B(t) = \frac{N_B(t + \Delta t) - N_B(t)}{\Delta t \cdot N_0} = \frac{n_B(t)}{\Delta t \cdot N_0}, \quad (2.20)$$

где $n_B(t)$ – число восстановленных изделий в промежутке времени от t до $(t + \Delta t)$.

Учитывая, что $N_B(t) = N_0 P_B(t)$, $N_B(t + \Delta t) = N_0 P_B(t + \Delta t)$, при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$f_B(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_B(t + \Delta t) - P_B(t)}{\Delta t} = \frac{dP_B(t)}{dt}. \quad (2.21)$$

Таким образом, частота восстановления есть плотность распределения времени ремонта изделия до восстановления. Соответственно, из (2.21) следует:

$$P_B(t) = \int_0^t f_B(t) dt. \quad (2.22)$$

Интенсивность восстановления выражается как отношение числа изделий, восстановленных за единицу времени, к среднему числу еще не восстановленных к этому времени изделий:

$$\mu_B(t) = \frac{N_B(t + \Delta t) - N_B(t)}{\Delta t \cdot (N_0 - N_B(t))}.$$

Учитывая (2.20), (2.21), это выражение приведет к виду

$$\mu_B(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P_B(t + \Delta t) - P_B(t)}{\Delta t \cdot (1 - P_B(t))} \right] = \frac{dP_B(t)}{dt(1 - P_B(t))} = \frac{f_B(t)}{(1 - P_B(t))}. \quad (2.23)$$

Интегрируя (2.23), получим

$$\int_0^t \mu_B(t) dt = \int_0^t \frac{dP_B(t)}{1 - P_B(t)} = -\ln(1 - P_B(t)).$$

Отсюда следует основная формула для **вероятности восстановления**:

$$P_B(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \mu_B(\tau) d\tau\right\}. \quad (2.24)$$

Среднее время восстановления T_B определяется как математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния объекта после отказа. По аналогии с (2.11), (2.12) получим

$$T_B = \int_0^\infty (1 - P_B(t)) dt. \quad (2.25)$$

Статистически среднее время восстановления для партии однотипных изделий определяется из выражения

$$T_B \cong \sum_{i=1}^{N_0} T_{Bi} / N_0, \quad (2.26)$$

где T_{Bi} – время, затраченное на восстановление i -го объекта из рассматриваемой партии отказавших изделий;

N_0 – общее число восстанавливаемых объектов в партии.

Среднее время восстановления технических систем, как правило, складывается из трех составляющих:

- а) среднее время контроля T_K (в ходе которого выявляется факт отказа);
- б) среднее время поиска места отказа (неисправного элемента) T_{OT} ;
- в) среднее время устранения отказа (замена отказавшего элемента исправным) T_y .

Как показывает практика, наибольшей составляющей является среднее время поиска места отказа и самого неисправного элемента.

В отличие от показателей безотказной работы, оценивающих безотказную работу технических средств на протяжении нескольких, а то и десятков лет, показатели ремонтпригодности характеризуют временные интервалы восстановления техники в пределах не более нескольких дней, а зачастую и нескольких часов. В этих условиях становится оправданным приближенный расчет показателей **процесса восстановления**.

В частности принимается, что интенсивность восстановления данного типа изделия есть величина практически постоянная, то есть $\mu_B(t) \cong \mu_B = \text{const}$.

Тогда, как следует из (2.24), (2.25), получаем

$$P_B(t) = 1 - \exp(-\mu_B t); \quad (2.27a)$$

$$f_B(t) = \mu_B \exp(-\mu_B t); \quad (2.27б)$$

$$T_B = 1/\mu_B. \quad (2.27в)$$

В некоторых случаях используют такой показатель ремонтпригодности, как **гарантированное время восстановления** $T_{B,Г}$. Оно определяется как время, в течение которого восстановление будет осуществлено с гарантированной вероятностью $P_{B,Г}$.

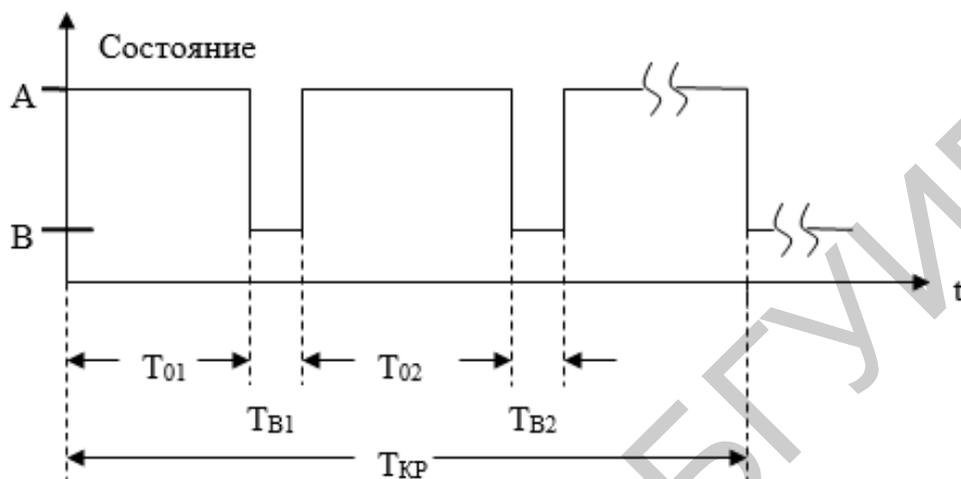
Если полагать, что «работают» формулы (2.27), и учесть, что гарантированную вероятность восстановления обычно задают в интервале $P_{B,Г} \in [0,9; 1,0]$, то получим

$$P_{B,\Gamma} = P_B(t = T_{B,\Gamma}) = 1 - \exp(-\mu_B T_{B,\Gamma}); \quad (2.28a)$$

$$T_{B,\Gamma} = (\mu_B)^{-1} \cdot \ln(1 - P_{B,\Gamma})^{-1} = -T_B \cdot \ln(1 - P_{B,\Gamma}). \quad (2.28b)$$

В частности, при $P_{B,\Gamma} = 0,9$ из (2.28) получим $T_{B,\Gamma} \cong 2,3 \cdot T_B$, а при $P_{B,\Gamma} = 0,95$, соответственно, $T_{B,\Gamma} \cong 3,0 \cdot T_B$.

В качестве примера на рисунке 2.2 показано изменение во времени состояния ремонтируемой аппаратуры.



A – рабочее состояние; B – нерабочее состояние (восстанавливаемое, ремонтируемое); T_{O1} – время наработки (безотказной работы) до 1-го отказа;

T_{O2} – время наработки до 2-го отказа (после 1-го ремонта);

T_{Bj} – время восстановления (ремонта) после j -го отказа ($j = 1, 2, \dots$);

T_{KP} – время до капитального ремонта

Рисунок 2.2 – Изменение состояния ремонтируемой аппаратуры

Очевидно, величины T_{Oj} и T_{Bj} меняются случайным образом от экземпляра к экземпляру, поэтому можно говорить о средних значениях, например, $T_{O,ср}$ – средняя наработка на отказ, $T_{B,ср}$ – среднее время восстановления.

2.4 Показатели долговечности

Показатели долговечности характеризуют свойство изделий сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов.

Под **предельным** понимают такое состояние изделия, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна либо при котором восстановление его после отказа невозможно или нецелесообразно.

Объект может перейти в предельное состояние, оставаясь работоспособным, если, например, его дальнейшее применение по назначению станет недопустимым по требованиям безопасности, экономичности, эффективности, а также вследствие морального старения.

Переход объекта в предельное состояние влечет за собой окончательное или временное прекращение его эксплуатации. В первом случае объект, как правило, снимается с эксплуатации, списывается с учета и утилизируется. Во втором случае после соответствующего ремонта объект может быть передан для применения по другому назначению [16].

Календарная продолжительность от начала эксплуатации изделия (или от возобновления после ремонта) до перехода в предельное состояние называется **сроком службы**.

Показателями долговечности являются [13, 45]:

- средний срок службы;
- медианный срок службы;
- гамма-процентный срок службы;
- срок службы до первого капитального ремонта;
- межремонтный срок службы;
- срок службы до списания;
- средний ресурс;
- медианный ресурс;
- ресурс до первого капитального ремонта и т. п.

Рассмотрим основные из перечисленных показателей.

Под **ресурсом** понимается суммарная наработка (суммарное время безотказной работы) до наступления предельного состояния, после которого эксплуатация изделия невозможна (или нецелесообразна). Соответственно понятие «ресурс» характеризует долговечность по наработке изделия.

Если использовать рисунок 2.2, то значение ресурса T_p определяется как $T_p = \sum_i^K T_{0i}$, где K – число интервалов T_{0i} безотказной работы (эксплуатации) изделия до наступления предельного состояния.

Поскольку для отдельных изделий, взятых из партий однотипных изделий числом N_0 , ресурс, как правило, оказывается различным, вводят понятие «средний ресурс изделия», который оценивается как математическое ожидание ресурса по формуле

$$T_{p,ср} = \sum_{j=1}^{N_0} T_{pj} / N_0, \quad (2.29)$$

где T_{pj} – ресурс j -го объекта;

N_0 – число изделий в партии, поставленной на испытания или эксплуатацию.

Другим показателем долговечности является гамма-процентный ресурс.

Гамма-процентный ресурс выражает наработку (суммарное время безотказной работы), в течение которой изделие с заданной вероятностью γ процентов не достигает предельного состояния. В большинстве случаев для различных изделий используют критерий 90%-го ресурса ($\gamma = 90\%$).

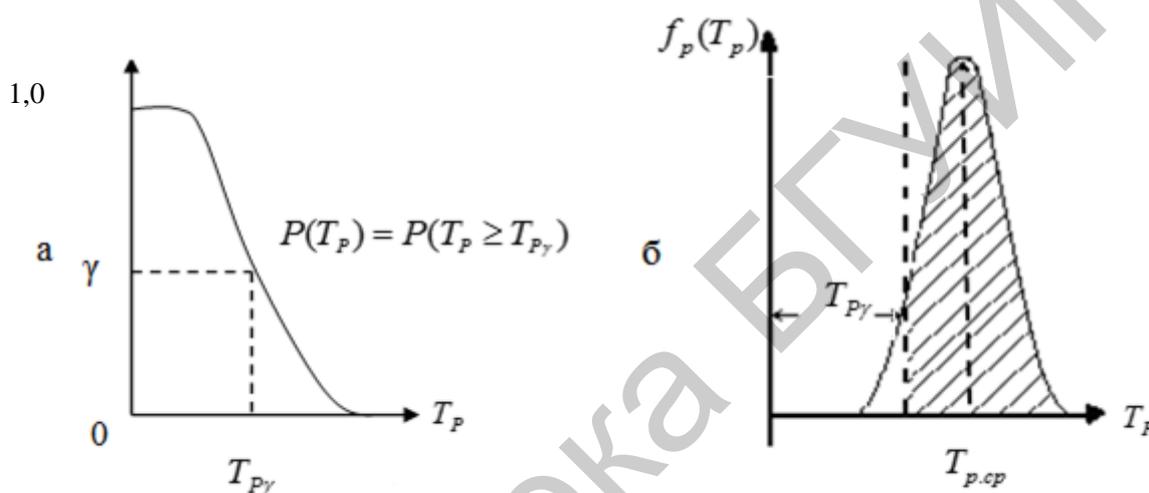
Вероятность $P(T_{p\gamma})$ обеспечения ресурса $T_{p\gamma}$, соответствующую значению $\gamma/100$, и, соответственно, величину $T_{p\gamma}$ определяют из решения уравнения

$$P(T_p \geq T_{py}) = P(T_{py}) = \frac{\gamma}{100} = \int_{T_{py}}^{\infty} f_p(T_p) dT_p, \quad (2.30)$$

где $f_p(T_p)$ – функция плотности распределения ресурса T_p для однотипной группы изделий, определяемая, как правило, экспериментально.

Значение гамма-процентного ресурса определяют с помощью кривых распределения ресурсов $f_p(T_p)$ (рисунок 2.3), где $f_p(T_p) = -dP(T_p)/dT_p$ по аналогии с функцией $f(t)$ для безотказной работы (2.4).

Значение функции $f_p(T_p)$ определяют как число изделий, вышедших из строя (достигших предельного состояния) в интервале $T_p \dots (T_p + dT_p)$, отнесенное к исходному числу изделий N_0 .



- а – зависимость вероятности $P(T_p)$ обеспечения ресурса T_p ;
 б – зависимость плотности распределения ресурса $f_p(T_p)$ от возможного значения ресурса

Рисунок 2.3 – Статистические показатели ресурса изделия

В технической документации на изделие часто приводят такие показатели долговечности, как назначенный и установленный ресурс.

Назначенный ресурс – суммарное время наработки, при достижении которого применение изделия по назначению должно быть прекращено независимо от его технического состояния.

Под **установленным ресурсом** понимается технически обоснованная или заданная величина ресурса, обеспечиваемая конструкцией, технологией и условиями эксплуатации, в пределах которой изделие не должно достигать предельного состояния.

Другой группой показателей долговечности являются **показатели срока службы**, которые, как уже говорилось, характеризуют календарную продолжительность жизни изделия от начала его эксплуатации до перехода в предельное состояние. Естественно, каждое изделие имеет свой срок службы $T_{сли}$ в зависи-

мости от условий применения и особенностей эксплуатации. Поэтому вводят понятие – **средний срок службы**, как математическое ожидание срока службы.

Статистическую оценку среднего срока службы определяют по формуле

$$T_{\text{сл.ср}} = \sum_{i=1}^{N_0} T_{\text{сли}} / N_0, \quad (2.31)$$

где $T_{\text{сли}}$ – срок службы i -го изделия;

N_0 – общее число однотипных изделий;

$i \in \overline{1, N_0}$.

Гамма-процентный срок службы представляет собой календарную продолжительность эксплуатации, в течение которой изделие не достигает предельного состояния с вероятностью γ , выраженной в процентах. Его расчет производится аналогично расчету γ -процентного ресурса [см. (2.30)] при известной функции плотности распределения срока службы $f_{\text{сл}}(T_{\text{сл}})$.

К другим показателям срока службы относят показатели соответственно назначенного, установленного и предельного срока службы.

Назначенный срок службы – суммарная календарная продолжительность эксплуатации, при достижении которой применение изделия по назначению должно быть прекращено независимо от его технического состояния.

Под **установленным сроком службы** понимают технически и экономически обоснованный срок службы, обеспечиваемый конструкцией, технологией и эксплуатацией, в пределах которого изделие не должно достигать предельного состояния.

Предельный срок службы $T_{\text{сл.п}}$ представляет собой календарную продолжительность эксплуатации или использования изделия до момента его списания и снятия с эксплуатации (использования). Он определяется аналогично тому, как определяют, например, средний срок службы [см. (2.31)].

2.5 Показатели сохраняемости

В ходе эксплуатации технических систем нередко возникает необходимость в их временном хранении в отключенном состоянии. В процессе хранения электро- и радиоэлементы систем стареют тем быстрее, чем неблагоприятнее (с точки зрения воздействия климатических и других деградиционных факторов) условия хранения техники.

Для обеспечения эффективного хранения объектов, а также для решения других вопросов поддержания техники в требуемой готовности к применению по назначению применяются показатели сохраняемости.

Показатели сохраняемости характеризуют свойство объектов сохранять исправное и работоспособное состояние (или свойство продуктов и материалов сохранять пригодное к применению состояние) в течение определенного времени при хранении и (или) транспортировании.

Во многих случаях в процессе хранения и транспортирования объекты подвергаются неблагоприятным воздействиям, например, колебаниям температуры, вибрации, сырости и т. п., что может привести объект в неработоспособное и даже предельное состояние. **Сохраняемость** объекта характеризует его способность противостоять отрицательному влиянию внешних условий и продолжительности хранения и транспортирования.

Показатели сохраняемости характеризуют продолжительность хранения как восстанавливаемых, так и невосстанавливаемых объектов. По истечении срока хранения объект должен соответствовать определенным требованиям безопасности, долговечности и ремонтпригодности (только для восстанавливаемых объектов), которые установлены нормативно-технической документацией на объект.

Основными **показателями сохраняемости** являются [13, 16, 35, 39]:

- гарантированный срок сохраняемости;
- средний срок сохраняемости;
- гамма-процентный срок сохраняемости;
- медианный срок сохраняемости и др.

Сроком сохраняемости называется календарная продолжительность хранения и (или) транспортирования изделия в заданных условиях, в течение и после которой значения показателей качества остаются в установленных пределах.

Показатели сохраняемости оценивают статистическими методами по результатам испытаний.

Средним сроком сохраняемости технического изделия называется математическое ожидание его срока сохраняемости. Средний срок сохраняемости определяют по формуле

$$T_{c.c.p} = \sum_{i=1}^N T_{ci} / N, \quad (2.32)$$

где T_{ci} – срок сохраняемости i -го изделия;

N – число однотипных изделий, поставленных на хранение.

Назначенный срок хранения есть календарная продолжительность хранения в заданных условиях, по истечении которой применение изделия по назначению не допускается независимо от его технического состояния.

Гамма-процентный срок сохраняемости – это срок сохраняемости, достигаемый изделием с заданной вероятностью γ , выраженной в процентах. Можно также сказать, что это минимальный срок сохраняемости, который будут иметь γ процентов изделий данного вида.

Гамма-процентный показатель сохраняемости по физическому смыслу аналогичен гамма-процентному показателю безотказности – гарантированному времени безотказной работы T_{Γ} с заданной вероятностью $P_{\Gamma} = \gamma$ [см. (2.14)].

При оценке показателей сохраняемости следует различать состояние объекта:

- а) объект все еще не введен в эксплуатацию (хранение после изготовления);
- б) объект находится в эксплуатации (при перерывах в работе).

Во втором случае срок сохраняемости входит составной частью в срок службы [16].

При оценке срока сохраняемости объекта, еще не введенного в эксплуатацию, в зависимости от особенностей и назначения объекта приходится учитывать такие факторы, как, например, сохраняется объект в упаковке или в расконсервированном виде, находится ли он в другом упакованном или законсервированном более сложном объекте и др. [37, 39].

2.6 Комплексные показатели надежности

Для более полного описания жизненного цикла восстанавливаемых изделий, который характеризуется чередованием этапов безотказной работы, ремонта, технического обслуживания, хранения, транспортировки и т. д. (см. подразделы 2.2–2.5), целесообразно использовать комплексные показатели, характеризующие совместно несколько показателей надежности.

В различных нормативных документах приводится большое число комплексных показателей, среди которых наиболее часто встречаются показатели, характеризующие совместно свойства безотказности и ремонтпригодности. К таким показателям относятся в частности:

- коэффициент готовности;
- коэффициент оперативной готовности;
- коэффициент технического использования и др.

Коэффициент готовности K_G характеризует вероятность того, что в произвольный момент времени объект окажется в работоспособном состоянии. При этом не учитываются планируемые периоды времени, в течение которых применение объекта по прямому назначению не предусматривается. В таком случае коэффициент готовности определяют из выражения [16, 18]

$$K_G = T_{0cp} / (T_{0cp} + T_{в.ср}), \quad (2.33)$$

где T_{0cp} – среднее время безотказной работы (см. рисунок 2.2);

$T_{в.ср}$ – среднее время восстановления (ремонта) объекта.

Статистическую оценку коэффициента готовности с учетом только периодов времени работы по назначению и ремонтов можно получить из выражения

$$K_G \cong \sum_{i=1}^n T_{0i} / (\sum_{i=1}^n T_{0i} + \sum_{i=1}^n T_{Ви}), \quad (2.34)$$

где T_{0i} – длительность i -го периода безотказной работы,

$T_{Ви}$ – длительность i -го периода ремонта (восстановления);

n – общее количество отказов за рассматриваемое время применения объекта.

Учитывая, что суммарное время безотказной работы, как правило, во много раз превышает суммарное время ремонтов, вместо (2.34) с достаточной точностью можно записать

$$K_G \cong 1 - \sum_{i=1}^n T_{Ви} / \sum_{i=1}^n T_{0i}. \quad (2.35)$$

Коэффициент оперативной готовности $K_{o,r}$ характеризует вероятность того, что в произвольный момент времени объект окажется в работоспособном состоянии и начиная с этого момента будет работать безотказно в течение заданного интервала времени. При этом так же, как и в отношении коэффициента готовности, не принимаются в учет планируемые интервалы времени, когда не предусмотрено применение объекта по назначению. В таком случае данный показатель определяется из выражения

$$K_{o,r} = K_{o,r}(t) = K_r P(t), \quad (2.36)$$

где K_r определяется из (2.33)–(2.35);

$P(t)$ – вероятность безотказной работы, определяемая из (2.1) или (2.6).

Коэффициент технического использования $K_{т.и}$ характеризует отношение суммарного времени наработки объекта за некоторый период эксплуатации к суммарному времени пребывания объекта как в работоспособном состоянии (наработке), так и в состоянии технического обслуживания и ремонтов за этот же период.

Статистическую оценку данного показателя определяют из выражения

$$K_{т.и} \cong \sum_{i=1}^n T_{0i} / [\sum_{i=1}^n T_{0i} + \sum_{j=1}^r T_{Bj} + \sum_{s=1}^m T_{T.0s}], \quad (2.37)$$

где T_{0i} – время безотказной работы на i -м интервале;

T_{Bj} – продолжительность j -го ремонта;

$T_{T.0s}$ – время, затраченное на s -е техническое обслуживание;

N – число интервалов работы ($i \in \overline{1, n}$);

r – количество проведенных ремонтов ($j \in \overline{1, r}$);

m – число техосмотров (техобслуживаний) ($s \in \overline{1, m}$).

Коэффициент технического использования, как следует из (2.37), характеризует долю времени нахождения объекта в работоспособном состоянии относительно общей продолжительности эксплуатации.

В ряде случаев в качестве комплексного показателя надежности используют **коэффициент простоя изделия** (системы), под которым понимают относительную долю времени из общего периода эксплуатации, когда изделие не функционировало по назначению.

Различают коэффициент простоя по вине (причине) отказов $K_{п.о}$ и суммарный коэффициент простоя $K_{п.с}$. При этом с учетом (2.33)–(2.35) получаем

$$K_{п.о} = 1 - K_r \cong \sum_{i=1}^n T_{Bi} / \sum_{i=1}^n T_{0i}. \quad (2.38)$$

Следовательно, коэффициент $K_{п.о}$ учитывает относительную долю времени только за счет вынужденных простоев вследствие отказов изделий и, соответственно, ремонтов (восстановлений).

Суммарный коэффициент простоя учитывает все непроизводственные затраты времени, включая время хранения устройства T_{xp} и нахождение его в резерве. В этом случае

$$K_{п.с} \cong (\sum_{i=1}^n T_{Bi} + \sum_{s=1}^m T_{xp s}) / [\sum_{i=1}^n T_{0i} + \sum_{j=1}^r T_{Bj} + \sum_{s=1}^m T_{xp s}]. \quad (2.39)$$

Как уже говорилось, подробная стандартизация показателей надежности приведена в ряде ГОСТ, например, в ГОСТ 27.002-89 «Надежность в технике».

Термины и определения», ГОСТ 27.301-95 «Надежность в технике. Расчет надежности. Основные определения», ГОСТ 27.310-95 «Надежность в технике. Анализ видов, последствий и критичности отказов», ГОСТ 20237-74 «Надежность в технике. Расчет показателей безотказности восстанавливаемых объектов» и др.

В частности, в ГОСТ 21623-76 «Система технического обслуживания и ремонта техники. Показатели для оценки ремонтпригодности» приводятся пояснения 65 показателей ремонтпригодности [18].

Библиотека БГУИР

3 ОСОБЕННОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ НА РАЗНЫХ ЭТАПАХ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПРОДУКЦИИ

3.1 Этапы жизненного цикла продукции

Жизненным циклом любой технической продукции называют совокупность состояний продукции начиная с момента ее зарождения в голове разработчика-конструктора и до завершения ее пути в результате утилизации после эксплуатации.

Укрупненно жизненный цикл продукции включает в себя стадии исследования и проектирования 1, изготовления 2, обращения/реализации 3, эксплуатации/потребления 4, уничтожения/утилизации 5 (рисунок 3.1) [18, 30].



Рисунок 3.1 – Стадии жизненного цикла технической продукции

Каждая стадия требует определенных сопровождающих документов, в которых указываются необходимые правила, требования, условия, параметры и т. п. для выполнения этапа работы.

Стадия исследования, проектирования – это научно-исследовательская работа, разработка технического задания и опытно-конструкторская проработка. На этом этапе:

- формируются требования к назначению, техническому уровню и качеству продукции;
- исследуются принципы ее создания;
- разрабатываются конструкция, методы и средства оценки точностных характеристик изделий при выпуске из производства и в эксплуатации.

Стадия изготовления включает в себя постановку на производство, изготовление, монтаж на месте эксплуатации и снятие изделия с производства.

Стадия обращения – это отгрузка, транспортирование, хранение изделий.

Стадия эксплуатации – это ввод изделий в эксплуатацию, техническое обслуживание при необходимости (поверка/калибровка), ремонт и снятие с эксплуатации.

Цикл разработки, изготовления и испытаний продукции зависит от **типа производства**: а) серийного, б) массового, в) единичного (единично повторяющегося или разового изготовления).

При этом под продукцией **серийного производства** понимается продукция, изготавливаемая периодически повторяющимися большими партиями.

Продукция **массового производства** – это продукция, непрерывно изготавливаемая, в течение продолжительного времени при большом объеме выпуска.

К **единичному производству** относится продукция, выпускаемая одновременно или периодически отдельными единицами. Продукция *повторяющегося единичного производства* – это продукция единичного производства, которая периодически изготавливается отдельными единицами при условии, что интервал времени между выпуском предыдущей и последующей единицами продукции превышает ее производственный цикл. Продукция *разового изготовления* – это продукция единичного производства или партия продукции, изготовленная одновременно и не предусмотренная к повторному выпуску.

В зависимости от типа производства жизненный цикл изделия имеет свои особенности. Например, для изделий единичного повторяющегося производства после разработки технического задания следуют:

- 1) разработка технической документации;
- 2) изготовление опытных образцов и их приемосдаточные испытания;
- 3) предварительные испытания;
- 4) корректировка конструкторской документации;
- 5) ведомственные (межведомственные) приемочные испытания;
- 6) подготовка производства;
- 7) непосредственно единичное повторяющееся производство с приемосдаточными испытаниями;
- 8) периодические контрольные испытания;
- 9) испытания на надежность;
- 10) техническое обслуживание в эксплуатации.

Как уже упоминалось ранее, очень важным и значительным этапом процесса разработки нового изделия является МО подготовки производства, которое представляет собой комплекс организационно-технических мероприятий, обеспечивающих определение с требуемой точностью характеристик:

- а) разработанного изделия;
- б) технологических процессов;
- в) оборудования, которое необходимо при его производстве.

Эти работы выполняются конструкторскими, технологическими и метрологическими службами предприятий и организаций.

Разработанная в процессе подготовки производства нормативная, конструкторская и технологическая документация, в которой регламентируются:

- а) основные характеристики и параметры изделия;
- б) нормы точности, методы, средства, условия и процедуры подготовки и проведения измерений;

в) способы обработки и представления результатов измерений, а также показатели точности измерений, – должна быть подвергнута **метрологической экспертизе** [18, 30].

К **конструкторской документации** относятся графические и текстовые документы, которые в отдельности или в совокупности определяют состав и устройство изделия (или его составные части) и содержат необходимые данные для его разработки или изготовления, контроля, эксплуатации и ремонта [30].

Технологические документы – это документы, которые содержат сводную информацию, необходимую для решения одной или комплекса инженерно-технических, планово-экономических, организационных задач. К технологическим также относятся документы, которые полностью и однозначно определяют технологический процесс (операцию) изготовления или ремонта изделия (и его составных частей).

Метрологическая экспертиза технической документации включает в себя:

- а) анализ и оценку технических решений по выбору параметров, подлежащих измерению;
- б) оценку полноты, однозначности и правильности установления норм точности, а также выбора средств и методов измерений, применяемых на разных стадиях жизненного цикла изделий (при разработке, производстве, эксплуатации и ремонте изделий);
- в) оценку корректности процедур обработки полученных результатов измерения [30].

3.2 Определение прогнозных показателей продукции на этапе технического задания на разработку

Стадия разработки нового изделия начинается с изучения потребности покупателей (маркетинга) с целью определения, продукция какого качества находит спрос. На основании этого составляют технические требования на продукцию и включают их в заказ-наряд на создание новой или на модернизацию изготавливаемой продукции.

Стадия разработки продукции на первом ее этапе включает установление норм (предельных значений) показателей свойств и качества и соответствующую разработку технического задания [18].

Нормативные значения показателей качества устанавливаются предприятием-разработчиком продукции. Основанием для принятия предельных значений показателей качества разрабатываемого изделия являются:

- а) характеристики базовых образцов и аналогов;
- б) требования отечественных и международных стандартов, технических условий;
- в) материалы НИР и ОКР;
- г) отзывы потребителей и т. п.

Международные стандарты на качество продукции создаются, например, Международной организацией по стандартизации (ИСО), Международным союзом электросвязи, Международной электротехнической комиссией, Европейской организацией по контролю качества, Международным комитетом мер и весов, Международной организацией законодательной метрологии и др.

При оценке технического уровня разрабатываемой продукции учитывают достижения отечественной и зарубежной науки и техники. Особенно большое внимание уделяют патентным исследованиям [18, 30].

При проектировании и конструировании новой техники в первую очередь заказчик задает необходимые значения основных технических параметров изделия, таких как производительность, вес, надежность и т. д. Разработчик изделия обоснованно принимает метод оценки и прогнозирования технического уровня. После этого определяют пределы или диапазоны показателей качества и формируют требования к качеству изделия.

При проектировании, как правило, осуществляют оптимизацию параметров качества. **Оптимальное проектирование** – это процесс определения таких значений основных параметров разрабатываемого изделия, которые обеспечивают экстремальные (максимальные или минимальные) значения нескольких технико-экономических характеристик при условии, что другие характеристики удовлетворяют заданной совокупности технических требований.

Так как еще на стадии проектирования изделия конструктор стремится максимизировать или минимизировать значения некоторых его показателей качества, то это приводит к необходимости поиска компромиссных вариантов в условиях противоречивых требований. Найденное множество таких компромиссных вариантов образует известное **Парето-оптимальное множество** [18].

Нахождение единственного эффективного и оптимального решения из некоторого множества вариантов может быть выполнено на основе неформального анализа либо с привлечением дополнительной информации. На завершающем этапе проектирования разработчик (конструктор) и заказчик выбирают наиболее оптимальный вариант проекта и значений технических параметров и других показателей качества изделия.

После выполнения проектных и конструкторских работ совокупность значений технических параметров сконструированного изделия, как правило, отличается от тех, что были предварительно предписаны техническим заданием на разработку и на тот момент являлись исходными.

В связи с этим всегда есть необходимость оценить степень соответствия показателей качества окончательного варианта сконструированного изделия с его первоначально заданными (базовыми) техническими и другими характеристиками. Численные значения единичных и обобщенных показателей качества, а также уровня качества разрабатываемого изделия в целом можно определить по известным методикам, рассмотренным в [18].

Подчеркнем, что установление необходимого уровня качества и разработка путей его достижения на стадии исследований, проектирования и конструирования

ния имеет особо важное значение, так как именно на этой стадии формируются и рассчитываются основные технико-экономические и эксплуатационные показатели будущей продукции. В это же время обосновывается возможное достижение положительного экономического и социального эффекта от производства, эксплуатации или использования создаваемой продукции.

На этапе составления технического задания на разработку новой техники (изделий, технологических процессов, систем управления, управленческих решений и т. п.) неизбежно возникает задача **прогнозирования** характеристик, показателей и свойств этой техники.

Здесь **прогноз** – научно обоснованное, вероятностное представление о будущем состоянии и развитии объекта и влияющих на него факторов. Прогноз объекта зависит от состояния внешней среды и принимаемых решений.

Желательно разрабатывать несколько вариантов прогноза (например, наиболее вероятный, оптимистичный и пессимистичный с указанием их вероятностей) и на их основе составлять программы и планы развития новой техники в виде совокупности целей, задач, мероприятий, необходимых ресурсов и исполнителей и т. п.

Методы прогнозирования в основном используют накопленный опыт за прошлые периоды деятельности системы (организации, процесса и т. д.) и определяют текущие допущения насчет будущего с целью его предсказания.

Основными **этапами разработки перспективного** плана развития технической системы (объекта, процесса и т. п.) являются [18, 33–34, 36, 39]:

- 1) анализ, оценка и прогнозирование развития факторов внешней среды, определяющих функционирование системы;
- 2) разработка стратегии, целей и задач развития объекта по периодам;
- 3) разработка альтернативных вариантов решения проблем, выбор лучших альтернатив;
- 4) разработка планов и мероприятий по реализации программы развития объекта;
- 5) определение необходимых ресурсов, заданий и исполнителей по периодам развития объекта.

Методы прогнозирования делятся на две группы: количественные и качественные.

Качественные методы прогнозирования предполагают сбор и обработку субъективных мнений групп людей, подобранных определенным образом, относительно ожидаемых в ближайшем или отдаленном будущем тенденций исследуемого показателя. Эти мнения систематизируются и тщательно обрабатываются. Результаты такой обработки превращаются в прогноз.

Такой способ прогнозирования имеет свои преимущества. Поскольку опрашиваемые лица непосредственно заняты в исследуемой сфере и, таким образом, относятся к прогнозированию весьма ответственно, они способны «чувствовать» наиболее вероятные тенденции исследуемых показателей, что повышает точность прогноза.

Недостатком является субъективность мнения эксперта, которое зависит от его опыта и квалификации. Если страдает погрешностью само экспертное заключение, то, как правило, рассматриваемый метод прогнозирования не способен определить источник ошибки и оценить эту ошибку количественно.

Качественные методы прогноза применяются в следующих ситуациях [18]:

- 1) отсутствие статистических данных за прошедший период по исследуемому показателю;
- 2) трудность количественного определения факторов, влияющих на исследуемый показатель, и установление взаимосвязей показателей;
- 3) ограничение по времени или по затратам на сбор и обработку информации;
- 4) быстроменяющаяся внешняя среда, в результате влияния которой использование статистического банка данных за прошедший период нецелесообразно;
- 5) появление новых факторов, влияющих на конечный результат.

При составлении прогноза используют различные подходы к формированию моделей прогноза, при этом учитывают: а) мнение экспертов; б) мнение жюри (мозговой штурм); в) совокупное мнение производителей; г) модель ожидания потребителя и др. [18].

Информация для прогнозирования может поступать из различных источников, например, из официальной вербальной (устной) информации, официальной письменной информации или за счет промышленного шпионажа и т. д. [18].

Прогнозирование на основе мнения экспертов является *прямым* (непосредственным) методом оценки в отличие от *косвенного* метода, основанного на обобщении мнения неспециалистов: потребителей, покупателей, руководства и т. п. (здесь полная аналогия с прямым и косвенным методом оценки качества продукции экспертным методом – см. [18]).

Количественные методы основаны на анализе временных рядов или причинно-следственных моделей.

Анализ временных рядов имеет два варианта [18]:

- 1) прогноз, основанный на усреднении ретроспективных данных;
- 2) прогнозирование методом статистического анализа.

Прогнозирование, основанное на усреднении данных в предыдущие периоды времени, опирается на предположение о правомерности *судить о будущем, располагая информацией о прошлом*. Один из вариантов усреднения заключается в вычислении арифметического среднего на всей совокупности данных за прошлые годы.

Если усреднение производится лишь по совокупности данных за последние периоды, то говорят о так называемом **динамическом (или скользящем) усреднении**. Совершенно очевидно, что точность прогноза (особенно при выявлении общих тенденций) зависит от того, насколько правильно выбрана длительность периода, на котором осуществляется ретроспективный анализ.

В ряде случаев используется методика **определения «взвешенного среднего»**, при использовании которой данным за последний период придается больший вес, нежели данным за предшествующие периоды. Путем подбора весовых коэффициентов удастся достичь известной степени эластичности (сглаженности) прогностических оценок. При правильном применении метода усреднения ретроспективных данных и при надлежащей корректировке полученных результатов удастся получать вполне удовлетворительные прогнозы [18].

Более надежные способы прогнозирования основаны на использовании **статистических** методов анализа.

В частности, при определении прогнозных значений показателей надежности проектируемой технической системы в первую очередь ориентируются на прогноз таких основных статистических показателей безотказной работы, как гарантированное время безотказной работы T_{Γ} (при заданной гарантированной вероятности P_{Γ}) и среднее время безотказной работы T_0 (см. подраздел 2.2).

И хотя разработка точных прогнозов с помощью статистического анализа ретроспективных данных может быть сопряжена со значительными затратами, они полностью оправдывают себя за счет обеспечения более эффективного и точного предсказания поведения системы в целом.

Обоснование прогнозируемых оценок показателей (например, T_{Γ} и T_0) в перспективе осуществляется на основании отчетных данных о выпуске аналогичной продукции и ее показателях в прошлом. Изменения значений этих показателей прослеживаются, как правило, в течение продолжительного периода (нескольких лет) в прошлом. В результате получаем набор данных типа $Y_i = Y(t = t_i)$, $i = 1, 2 \dots n$, где t_1 соответствует некому выбранному начальному году в прошлом, n – число анализируемых лет в прошлом, Y_i – значение выбранного показателя (например, T_{Γ} или T_0) в соответствующий момент времени t_i .

Затем выполняется процедура нахождения **прогнозирующей функции** $Y_i^* = Y^*(t = t_i)$, которая обеспечивает наилучшее приближение к эмпирическим (экспериментальным) данным Y_i . Как правило, эта процедура основывается на использовании метода наименьших квадратов (МНК), но допускает несколько вариантов решения в зависимости от выбора «подходящей» прогнозирующей функции Y_i^* [18].

Так, если точки на графике функции $Y_i = \varphi(t_i)$ имеют тенденцию располагаться по возрастающей прямой (рисунок 3.2), то принимают решение о применении аппроксимирующей прогнозной функции $Y^*(t_i)$ в виде линейной функции $Y_i^* = a + b(t_i - t_0)$, где параметры аппроксимирующей прямой Y_i^* рассчитываются из условия обеспечения минимума выражения

$$\theta = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2 \rightarrow \min.$$

Для этого, считая значение t_0 известным, достаточно решить систему уравнений $\partial\theta/\partial a = 0$ и $\partial\theta/\partial b = 0$, которые приводятся к виду

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - a - b(t_i - t_0)) = 0; \quad (3.1a)$$

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - a - b(t_i - t_0)](t_i - t_0) = 0. \quad (3.1б)$$

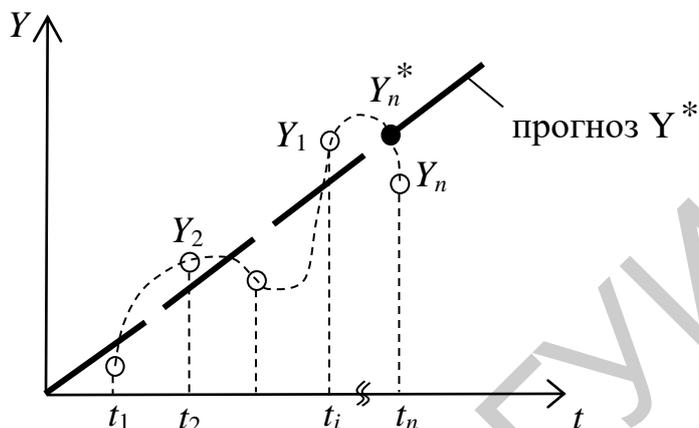


Рисунок 3.2 – Построение аппроксимирующей прогнозной кривой Y^* по фактическим данным в прошлом

Решение системы двух уравнений (3.1a) и (3.1б) позволяет найти оптимальные значения коэффициентов a и b функции Y_i^* . Решение существенно упрощается, если выбрать $t_0 = \sum_{i=1}^n t_i/n$. Тогда получаем [18]

$$a = \sum_{i=1}^n Y_i / n; \quad b = \sum_{i=1}^n Y_i (t_i - t_0) / \sum_{i=1}^n (t_i - t_0)^2. \quad (3.2)$$

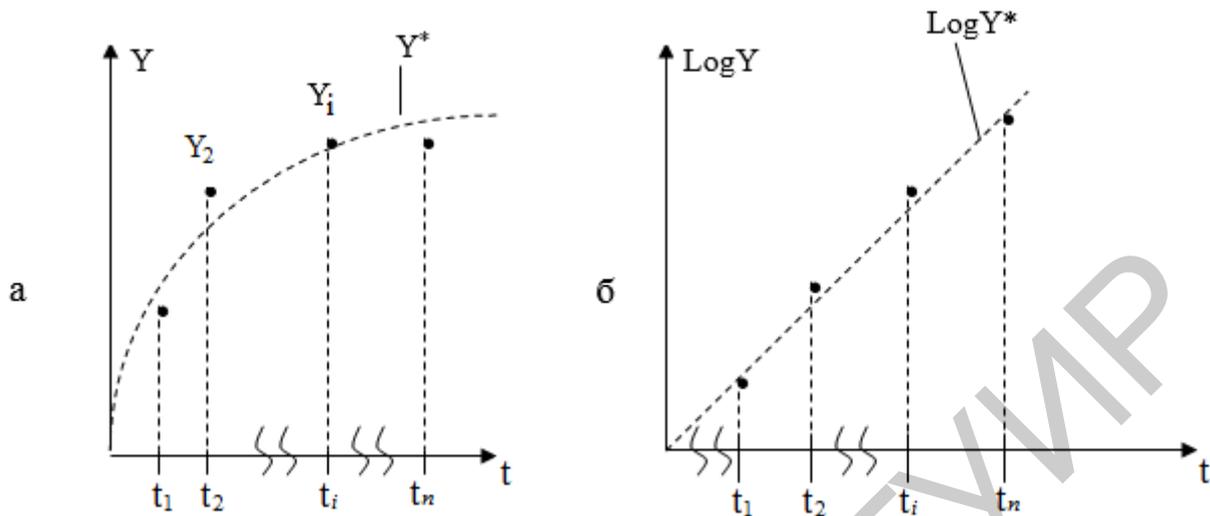
Зная уравнение прогнозируемой линейной функции Y_i^* (значения ее параметров a , b и t_0), нетрудно определить прогнозируемое значение этой функции в момент времени $t = t_k$, где t_k – ориентировочный момент времени выпуска серийного (промышленного) варианта проектируемой продукции:

$$Y^*(t = t_k) = Y_k^* = a + b(t_k - t_0). \quad (3.3)$$

Здесь Y_k^* , как упоминалось ранее, обозначает тот выбранный показатель надежности T_Γ или T_0 , который должна иметь разрабатываемая техническая продукция после освоения ее промышленного производства, т. е. с учетом фактора времени на проектирование новой техники, изготовление опытных образцов, корректировку конструкторской документации, подготовку производства, проведение приемосдаточных испытаний и др. (см. подраздел 3.1).

В ряде случаев лучшего соответствия между прогнозируемой функцией $Y^*(t)$ и исходными данными $Y_i = Y(t = t_i)$ можно добиться, если полагать прогностическую функцию в виде **показательной** функции $Y_i^* = ab^{(t_i - t_0)}$ (рисунок 3.3, а) [18].

Здесь a и b – неизвестные пока константы, подлежащие определению. Для этого удобно использовать полулогарифмическую шкалу (рисунок 3.3, б), т. е. построить зависимость $\log Y_i = \varphi_1(t_i)$ и $\log Y_i^* = \varphi_2(t_i)$.



а – исходные данные и прогнозная функция Y_i^* ;

б – графики исходных данных и прогнозной функции, полученные с помощью полулогарифмической шкалы

Рисунок 3.3 – Построение прогнозной показательной функции

При этом для прогнозной функции имеем

$$\log Y_i^* = \log(a \cdot b^{(t_i - t_0)}) = \log a + (t_i - t_0) \log b = a^* + b^*(t_i - t_0). \quad (3.4)$$

Из (3.4) видно, что функция $\log Y^*$ является линейной от времени, следовательно, параметры этой функции a^* и b^* при известном значении t_0 можно определять по аналогии с предыдущим вариантом аппроксимации.

Если, как и ранее, принять, что t_0 в (3.4) определяется в виде $t_0 = \sum_{i=1}^n t_i / n$, то, используя (3.2), получим

$$a^* = \log a = \sum_{i=1}^n \log Y_i / n; \quad (3.5)$$

$$b^* = \log b = \sum_{i=1}^n \log Y_i \cdot (t_i - t_0) / \sum_{i=1}^n (t_i - t_0)^2.$$

Далее обычным образом определяются коэффициенты a и b . Отметим, что основание логарифма при коэффициентах a , b и Y_i может быть любым (например, 2, e , 10 и т. д.), но обязательно одним и тем же в формулах (3.4) и (3.5).

Прогнозируемое значение Y_k^* в момент будущего времени t_k ($t_k > t_n$) при известных значениях a , b и t_0 определяется из выражения

$$Y^*(t = t_k) = Y_k^* = ab^{(t_k - t_0)}. \quad (3.6)$$

Рассмотренные варианты определения прогнозируемых значений показателей надежности являются наиболее часто используемыми на практике. С другими возможными вариантами можно познакомиться, например, в [18].

Чтобы определить, какой вид прогнозируемой функции дает наиболее точные результаты, полезно провести **сопоставительный анализ**. Удобным критерием для него может быть значение величины $\theta = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^*)^2$. Тот вариант прогнозной функции Y^* , для которого величина θ меньше, является более предпочтительным.

3.3 Прогноз показателей надежности на этапе проектирования

Как уже говорилось в подразделе 3.1, проектирование новой техники осуществляется на основе заданных заказчиком необходимых значений основных параметров и показателей изделия, в том числе и показателей надежности. Проектирование, как правило, ведется в режиме поиска компромиссных вариантов построения изделия в условиях противоречивых требований к разным показателям. На завершающем этапе проектирования разработчик и заказчик выбирают наиболее предпочтительный вариант построения и, соответственно, вариант значений технических параметров и показателей качества изделия.

После выполнения проектных и конструкторских работ реализованные значения технических параметров сконструированного изделия, как правило, отличаются от тех, что были предписаны техническим заданием на разработку. В связи с этим возникает необходимость оценки степени соответствия этих показателей качества и показателей надежности.

Наиболее удобным критерием оценки надежности сложной системы является функция вероятности безотказной работы $P_s(t)$ [18]. Преимуществом этой функции перед другими критериями надежности является то, что ее можно получить расчетным путем на этапе разработки системы и несложно оценить в процессе ее испытания.

Связь надежности реальной аппаратуры с надежностью ее элементов может иметь труднопредсказуемый характер. Поэтому обычно используется элементарная математическая модель, согласно которой система считается исправной, если исправны все ее основные элементы. Иными словами, при выходе из строя одного (любого) узла, модуля или элемента нарушается работа всего устройства.

Так как отказы отдельных элементов считаются независимыми событиями, вероятность безотказной работы системы может быть представлена произведением

$$P_s(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^N P_i(t), \quad (3.7)$$

где N – число элементов в системе;

$P_i(t)$ – вероятность безотказной работы i -го элемента системы.

Используя совместно (2.10) и (3.7), можно записать

$$P_s(t) = \exp \left[- \sum_{i=1}^N \int_0^t \lambda_i(t) dt \right], \quad (3.8)$$

где $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов i -го элемента системы.

Если справедливо предположение, что интенсивность отказов у каждого элемента есть величина, не изменяющаяся во времени (постоянная) ($\lambda_i(t) = \text{const}_i = \lambda_i$), то из (3.8) следует

$$P_s(t) = \exp[-\sum_{i=1}^N \lambda_i t] = \exp(-\lambda_s t); \quad \lambda_s = \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad (3.9)$$

где λ_s – опасность (интенсивность) отказа всей системы.

Таким образом, надежность системы зависит от надежности ее элементов и от их общего количества, поэтому чем больше число элементов, тем больше опасность отказа и ниже надежность системы.

Полный расчет надежности включает определение количества всех компонентов аппаратуры, количества внешних выводов, монтажных соединений и т. д. и поэтому представляет собой очень трудоемкую операцию. В связи с этим часто ограничиваются **ориентировочным расчетом** надежности в зависимости от числа используемых элементов.

Показатели надежности отдельных элементов λ_i , T_{0i} и T_{Bi} (см. раздел 2) известны по паспортным данным или определяются на основании статистических испытаний (опытным путем).

Для расчета показателей надежности **сложных** устройств: блоков, узлов, стоек и системы в целом – полагают известными одноименные показатели для первичных элементов (ПЭ), входящих в эти устройства. При этом для отдельного блока первичными элементами являются, например, транзисторы, диоды, резисторы и т. п.; для сложного прибора, например, измерительной стойки в качестве ПЭ принимают отдельные блоки и т. п.

Расчет показателей надежности сложного устройства (системы), состоящего из N_{Σ} первичных элементов, ведется в предположении, что выполняются следующие условия [18]:

- 1) отказы ПЭ являются внезапными, а не постепенными;
- 2) отказы различных ПЭ не зависят друг от друга и их интенсивность постоянна в течение всего периода эксплуатации аппаратуры;
- 3) отказ любого ПЭ приводит к отказу всего сложного устройства.

При этих условиях показатели надежности сложного устройства (системы) рассчитывают следующим образом.

Интенсивность отказов системы на основании (3.9) равна

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{N_{\Sigma}} \lambda_i = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j N_j; \quad \sum_{j=1}^{N_T} N_j = N_{\Sigma}, \quad (3.10)$$

где λ_i – интенсивность отказа i -го ПЭ;

$i \in [1; N_{\Sigma}]$;

N_{Σ} – общее число ПЭ;

λ_j – интенсивность отказа ПЭ j -го типа;

N_j – число однотипных ПЭ j -го типа;

$j \in [1; N_T]$;

N_T – число различных типов ПЭ.

При использовании экспоненциальной модели (3.9) **среднее время наработки** на отказ системы в часах равно

$$T_{os} = 1/\lambda_s. \quad (3.11)$$

Это выражение следует из (2.12) с учетом (3.9).

Вероятность безотказной работы системы за время t_u равна

$$P_s(t_u) = \exp(-\lambda_s t_u), \quad (3.12)$$

где t_u обычно берется равным 24 (сутки), 720 (месяц) или 8760 (год) часам.

Гарантированное время безотказной работы спроектированной системы T_{rs} рассчитывается из (3.12) для заданной гарантированной вероятности безотказной работы P_{rs} . Для типовых значений $P_{rs} = 0,9, 0,95$ и $0,99$ значения T_{rs}/T_{os} равны соответственно 0,1, 0,05 и 0,01, где T_{os} определяется из (3.11), (3.10).

Коэффициент готовности системы определяется выражением [см. (2.33)–(2.35)]

$$K_{rs} = \frac{T_{os}}{T_{os} + T_{bs}} \cong 1 - \frac{T_{bs}}{T_{os}} = 1 - \lambda_s T_{bs}, \quad (3.13)$$

поскольку время восстановления системы $T_{bs} \ll T_{os}$.

С другой стороны, полагая, что отказ любого элемента системы вызовет отказ и всей системы, можем считать, что вероятность безотказной работы системы равна произведению вероятностей безотказной работы всех элементов.

Тогда, учитывая (3.10), получим

$$K_{rs} = \prod_{i=1}^{N_{\text{Э}}} K_{ri} \cong \prod_{i=1}^{N_{\text{Э}}} \left(1 - \frac{T_{bi}}{T_{oi}}\right) \cong 1 - \sum_{i=1}^{N_{\text{Э}}} \frac{T_{bi}}{T_{oi}} = 1 - \sum_{j=1}^{N_T} \frac{T_{bj} N_j}{T_{oj}}. \quad (3.14)$$

В (3.14) T_{bj}, T_{oj} – среднее время восстановления и наработки на отказ ПЭ j -го типа, остальные обозначения использованы те же, что и в (3.10), при этом учтено, что $(T_{bj}/T_{oj}) \ll 1$. Приравнявая (3.13) и (3.14), можно рассчитать среднее время восстановления системы:

$$T_{bs} \cong \frac{1 - K_{rs}}{\lambda_s} = T_{os} \sum_{i=1}^{N_{\text{Э}}} \frac{T_{bi}}{T_{oi}} = \frac{1}{\lambda_s} \sum_{i=1}^{N_{\text{Э}}} \lambda_i T_{bi} = \frac{1}{\lambda_s} \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j N_j T_{bj}. \quad (3.15)$$

Обеспечение необходимых показателей **надежности** системы достигается за счет:

- а) использования высоконадежных элементов и узлов;
- б) использования облегченных режимов работы элементов в электрических схемах;
- в) постоянного контроля качества комплектующих изделий («входной» контроль);
- г) внедрения автоматизированных систем технической эксплуатации и т. п. [18, 30].

Эффективным методом повышения надежности технической системы является **резервирование**. Различают *общее* резервирование, когда резервируется

объект в целом (резервная магистраль, тракт, генераторное оборудование и т. п.), и *раздельное*, когда резервируются отдельные элементы системы.

Резервные системы (элементы) включаются вместо отказавших с помощью ручных или автоматических коммутаторов, при этом до включения в работу резервный элемент может:

- а) находиться в отключенном (ненагруженном) состоянии;
- б) быть полностью включенным под нагрузку (нагруженное или «горячее» состояние);
- в) находиться в облегченном («теплом») режиме.

На практике используют все виды резервирования, при этом раздельный резерв применяют для уменьшения вероятности отказа менее надежных элементов. Общий резерв применяют чаще для резервирования крупных блоков или систем.

Рассмотрим показатели надежности, например, для крупной информационно-измерительной системы, содержащей N параллельно работающих однопоточных систем, которые резервируются M такими же системами. Любая резервная система включается автоматически вместо любой отказавшей, при этом до своего включения резервная система может находиться в одном из указанных выше режимов: нагруженном («горячем»), ненагруженном («холодном») или облегченном («теплом»).

Поскольку системы однотипны, все они имеют одинаковые усредненные показатели надежности, в частности, основные N систем имеют коэффициент готовности $K_{Г1}$, а резервные M систем – $K_{Г2}$, где коэффициент готовности, как уже говорилось ранее, имеет смысл вероятности безотказной работы одной системы в любой момент времени.

Отказ на любом из N направлений при наличии M резервных систем произойдет всякий раз, когда выйдут из строя k основных систем, в то время как среди резервных будут исправными только $(k - 1)$ систем ($1 \leq k \leq M + 1$).

Вероятность такого события (**неготовности**) для каждой из N систем при наличии M резервных систем будет равна [17]

$$K_{н.р} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M+1} C_N^k (1 - K_{Г1})^k K_{Г1}^{N-k} \cdot C_M^{k-1} (1 - K_{Г2})^{M+1-k} K_{Г2}^{k-1} . \quad (3.16)$$

где C_N^k – число сочетаний из N по k ;

C_M^{k-1} – число сочетаний из M по $(k - 1)$;

величины $(1 - K_{Г1}) = K_{нр1}$ и $(1 - K_{Г2}) = K_{нр2}$ характеризуют **вероятность неготовности** соответственно для основной и резервной систем по отдельности.

Если резервные системы находятся в нагруженном состоянии, то $K_{Г1} = K_{Г2} = K_{Г}$, и вместо (3.16) получим выражение [18]

$$K_{н.р} = (1 - K_{Г})^{M+1} \cdot K_{Г}^{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{M+1} C_N^k \cdot C_M^{k-1} / N \cong (1 - K_{Г})^{M+1} \cdot \frac{(N + M)!}{(M + 1)!N!}, \quad (3.17)$$

которое характеризует вероятность неготовности каждой из N основных систем при наличии M резервных. В (3.17) учтено, что $K_r^{N-1} = [1 - K_{nr}]^{N-1} \cong \cong [1 - (N-1)K_{nr}] \approx 1$, так как $K_{nr} \ll 1$.

Усредненная вероятность безотказной работы при наличии резервирования, характеризуемая коэффициентом готовности $K_{r,p}$ для любой из N основных систем при наличии M резервных, в этом случае будет равна [17]

$$K_{r,p} = 1 - K_{nr,p} \cong 1 - \frac{(N+M)!}{(M+1)!N!} (1 - K_r)^{M+1}. \quad (3.18)$$

Пример. Пусть в основной системе средняя наработка на отказ и время восстановления равны соответственно $T_{o,\phi} = 1000$ ч и $T_B = 3$ ч. Как изменятся параметры этой системы при резервировании по схеме $N = 7$, $M = 1$, т. е. одна резервная на семь основных?

Используя (3.13), имеем $K_r \cong 0,997$, $K_{nr} = 1 - K_r = 3 \cdot 10^{-3}$. Из (3.17), (3.18) получаем $K_{nr,p} = 36 \cdot 10^{-6}$; $K_{r,p} \cong 0,99996$. Если считать, что при резервировании сохранилось $T_B = T_{B,p} = 3$ ч, тогда наработка на отказ при резервировании увеличится [см. (3.13)] до значения $T_{o,p} \cong T_{B,p}(1 - K_{r,p}) = T_{B,p}/K_{nr,p} \cong 8 \cdot 10^4$ ч вместо прежних $T_{o,\phi} = 10^3$ час, или возрастает примерно в 80 раз [18].

Таким образом, резервирование систем (блоков, элементов) при использовании высоконадежных автоматических переключателей позволяет значительно увеличить их время наработки на отказ и коэффициент готовности.

3.4 Необходимость экспериментальной оценки законов и показателей надежности

Приведенные в предыдущем подразделе материалы по расчету прогнозных характеристик и показателей надежности спроектированной технической системы являются в значительной мере приближенными, поскольку не могут учесть все реальные многообразные факторы, влияющие на работу технической системы (устройства) в процессе реальной эксплуатации.

Также временные зависимости характеристик и показателей надежности многих входящих в систему элементов и узлов существенно отличаются от тех гипотетических, что принимаются в предположении действия простейшего экспоненциального закона (3.9).

В связи с этим во многих случаях приходится проводить специальные **надежностные испытания**, в ходе которых значительные партии однотипных изделий/систем продолжительное время эксплуатируются в типовых или более «суровых» условиях (см. разделы 6, 8).

По результатам этих испытаний определяется, какой из рассматриваемых теоретических законов надежности и с какими параметрами наилучшим образом аппроксимирует результаты экспериментов. Далее рассчитывают основные

показатели выбранного (наилучшего) надежностного закона (см. разделы 7, 9), которые наряду с показателями стоимости, производительности и другими технико-экономическими показателями (см. подраздел 1.2) совместно определяют успешность и конкурентоспособность разработанной продукции на мировом рынке.

Для успешного решения этих задач необходимо знать особенности каждого из используемых теоретических законов надежности и уметь находить их оптимальные параметры и показатели, при которых обеспечивается наиболее точное приближение к конкретным результатам экспериментальных надежностных испытаний.

Библиотека БГУИР

4 ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПОКАЗАТЕЛИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ НАДЕЖНОСТИ

Многолетняя практика, в ходе которой обработаны результаты испытаний на надежность разнообразных изделий и устройств, доказала возможность и успешность обобщения этих результатов с помощью различных теоретических моделей.

Наличие подходящих теоретических моделей, которые описывают зависимости $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$, определенные выше (см. раздел 2), позволяет во многих случаях существенно уменьшить число испытываемых изделий, сократить время испытаний, экстраполировать результаты испытаний, которые проведены в одних условиях, на другие условия и т. п. [33–39].

В настоящее время исследовано большое число различных вероятностных законов, из которых далее будем использовать некоторые наиболее известные с учетом соотношений (2.1)–(2.18).

4.1 Экспоненциальный закон

Данный закон характеризуется следующими функциональными зависимостями и показателями [9, 37, 39]:

$$P(t) = \exp(-at); \quad (4.1a)$$

$$f(t) = a \cdot \exp(-at); \quad (4.1б)$$

$$\lambda(t) = a; \quad (4.1в)$$

$$M_1 = T_0 = 1/a; \quad (4.1г)$$

$$\sigma_T = \sqrt{D_2} = 1/a; \quad (4.1д)$$

$$T_\Gamma = (-1/a) \cdot \ln P_\Gamma \cong (1/a) \cdot (1 - P_\Gamma); \quad (4.1e)$$

$$M_2 = D_2 + M_1^2 = 2/a^2; \quad (4.1ж)$$

$$M_3 = 6/a^3; \quad (4.1и)$$

$$M_4 = 24/a^4; \quad (4.1к)$$

$$D_3 = 2/a^3; \quad (4.1л)$$

$$D_4 = 9/a^4; \quad (4.1м)$$

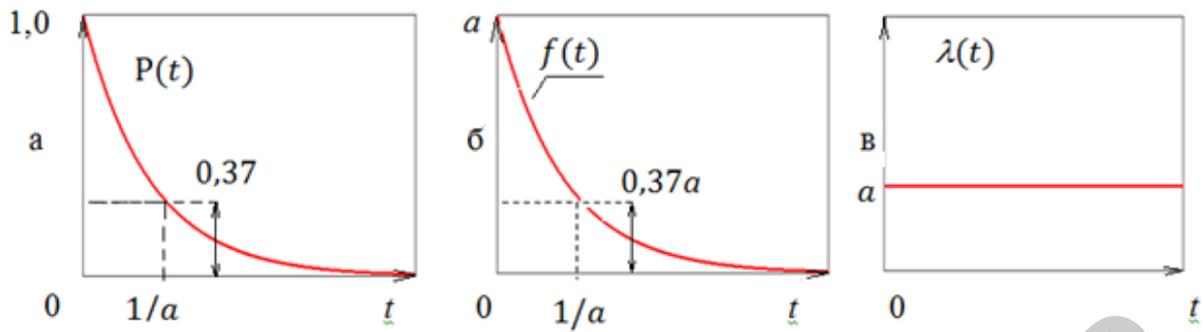
$$V = \sigma_T/M_1 = 1; \quad (4.1н)$$

$$S_k = D_3/\sigma_T^3 = 2; \quad (4.1п)$$

$$E_k = -3 + D_4/D_2^2 = 6; \quad (4.1р)$$

где a – параметр закона.

Теоретические зависимости для этого закона приведены на рисунке 4.1.



a – вероятность безотказной работы $P(t)$; b – частота отказов $f(t)$;
 v – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 4.1 – Теоретические зависимости экспоненциального закона

4.2 Закон Эрланга второго порядка

Закон характеризуется следующими функциями и показателями [9, 33–34, 37]:

$$P(t) = (1 + at) \exp(-at); \quad (4.2a)$$

$$f(t) = a^2 t \cdot \exp(-at); \quad (4.2б)$$

$$\lambda(t) = a^2 t / (1 + at); \quad (4.2в)$$

$$d\lambda(t)/dt = a^2 / (1 + at)^2; \quad (4.2г)$$

$$M_1 = T_0 = 2/a; \quad (4.2д)$$

$$\sigma_T = \sqrt{D_2} = \sqrt{2}/a; \quad (4.2е)$$

$$T_r \cong (1/a) \sqrt{1 - P_r}; \quad (4.2ж)$$

$$M_2 = M_1^2 + D_2 = 6/a^2; \quad (4.2и)$$

$$M_3 = 24/a^3; \quad (4.2к)$$

$$M_4 = 120/a^4; \quad (4.2л)$$

$$D_2 = 2/a^2; \quad (4.2м)$$

$$D_3 = 4/a^3; \quad (4.2н)$$

$$D_4 = 24/a^4; \quad (4.2п)$$

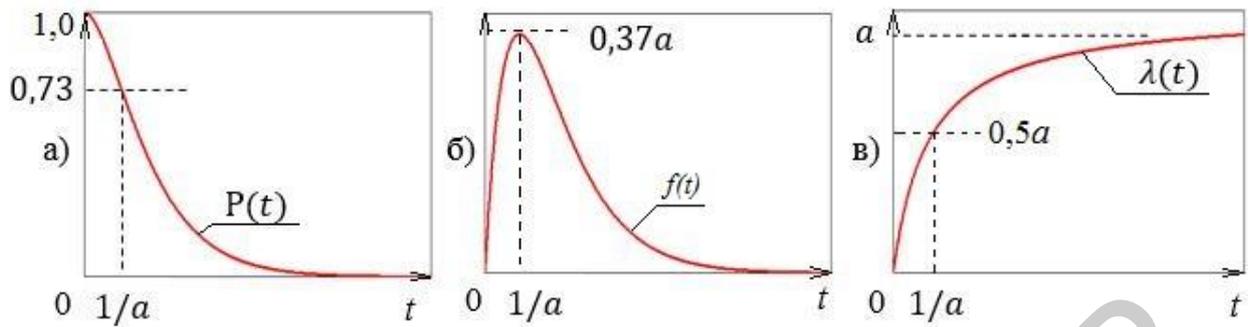
$$V = \sigma_T / M_1 = 1/\sqrt{2}; \quad (4.2р)$$

$$S_k = D_3 / \sigma_T^3 = \sqrt{2}; \quad (4.2с)$$

$$E_k = -3 + D_4 / D_2^2 = +3; \quad (4.2т)$$

где a – параметр закона.

Основные зависимости для этого закона приведены на рисунке 4.2.



a – вероятность безотказной работы $P(t)$; b – частота отказов $f(t)$;
 c – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 4.2 – Теоретические зависимости закона Эрланга второго порядка

4.3 Закон Рэлея

Закон характеризуется следующими функциями и показателями [9, 33–34, 39]:

$$P(t) = \exp(-at^2); \quad (4.3a)$$

$$f(t) = 2at \cdot \exp(-at^2); \quad (4.3б)$$

$$\lambda(t) = 2at; \quad (4.3в)$$

$$d\lambda(t)/dt = 2a; \quad (4.3г)$$

$$M_1 = T_0 = \sqrt{\pi/4a} \approx 0,886/\sqrt{a}; \quad (4.3д)$$

$$\sigma_T = \sqrt{D_2} = \sqrt{(4 - \pi)/4a} \approx \sqrt{\frac{0,214}{a}} = 0,456 / \sqrt{a}; \quad (4.3e)$$

$$T_r \cong \sqrt{(1 - P_r)/a}; \quad (4.3ж)$$

$$M_2 = T_0^2 + \sigma_T^2 = M_1^2 + D_2 = 1/a; \quad (4.3и)$$

$$M_3 = 3/2a \cdot \sqrt{\pi/4a} \approx 1,33/a^{1,5}; \quad (4.3к)$$

$$M_4 = 2/a^2; \quad (4.3л)$$

$$M_k = (1/a)^{k/2} \cdot \Gamma(1 + 0,5k); k = 1, 2, \dots; \quad (4.3м)$$

$$D_2 = (4 - \pi)/4a \cong 0,214/a; \quad (4.3н)$$

$$D_3 = (1/a)^{1,5} \cdot (\pi - 3)\sqrt{\pi}/4 \cong 0,063/a^{1,5}; \quad (4.3п)$$

$$D_4 = [2 - (3\pi^2/16)]/a^2 \cong 0,15/a^2; \quad (4.3р)$$

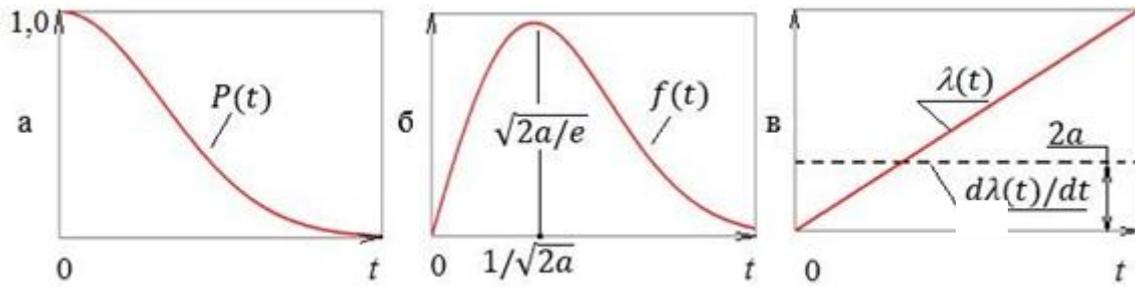
$$V = \sigma_T/M_1 = \sqrt{(4 - \pi)/\pi} \cong 0,5227; \quad (4.3с)$$

$$S_k = D_3/\sigma_T^3 = 2\sqrt{\pi}(\pi - 3)/(4 - \pi)^{1,5} \cong 0,631; \quad (4.3т)$$

$$E_k = -3 + D_4/D_2^2 \cong 0,245; \quad (4.3у)$$

где $a = \text{const}$ – параметр закона.

Примерный вид функций для этого закона показан на рисунке 4.3.



a – вероятность безотказной работы $P(t)$; δ – частота отказов $f(t)$;
 e – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 4.3 – Теоретические зависимости закона Рэлея

Как следует из выражений (4.1)–(4.3), законы, приведенные в подразделах 4.1–4.3, относятся к классу **однопараметрических** законов, когда вид функций и значения показателей закона T_0 , σ_T , T_r и др. однозначно определяются значением одного параметра a .

4.4 Закон Вейбулла

Закон Вейбулла в отличие от вышеперечисленных характеризуется не одним, а двумя постоянными параметрами и поэтому относится к классу **двухпараметрических** законов.

Для него справедливы следующие функциональные зависимости и показатели, зависящие от фиксированных параметров a , b и времени t [9, 37, 38]:

$$P(t) = \exp(-at^b); \quad (4.4a)$$

$$\lambda(t) = bat^{b-1}; \quad (4.4б)$$

$$f(t) = abt^{b-1} \exp(-at^b); \quad (4.4в)$$

$$M_2 = a^{-2/b} \Gamma(1 + 2/b); \quad (4.4г)$$

$$M_1 = T_0 = a^{-1/b} \Gamma(1 + 1/b); \quad (4.4д)$$

$$\sigma_T = D_2 = M_2 - M_1^2 = a^{-2/b} [\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)]; \quad (4.4е)$$

$$M_3 = a^{-3/b} \Gamma(1 + 3/b); \quad (4.4ж)$$

$$M_4 = a^{-4/b} \Gamma(1 + 4/b); \quad (4.4и)$$

$$D_3 = a^{-3/b} [\Gamma(1 + 3/b) - 3\Gamma(1 + 2/b)\Gamma(1 + 1/b) + 2\Gamma^3(1 + 1/b)]; \quad (4.4к)$$

$$D_4 = a^{-4/b} [\Gamma(1 + 4/b) - 4\Gamma(1 + 3/b)\Gamma(1 + 1/b) + 6\Gamma(1 + 2/b)\Gamma^2(1 + 1/b) - 3\Gamma^4(1 + 1/b)]; \quad (4.4л)$$

$$M_k = a^{-k/b} \Gamma(1 + k/b); \quad k = 1, 2, \dots; \quad (4.4м)$$

$$T_r \cong ((1 - P_r)/a)^{1/b}; \quad (4.4н)$$

$$P_r \cong 1 - aT_r^b; \quad (4.4п)$$

$$V = \sigma_T/M_1 = \sqrt{-1 + \Gamma(1 + 2/b)/\Gamma^2(1 + 1/b)}; \quad (4.4р)$$

$$S_k = D_3/\sigma_T^3; \quad (4.4с)$$

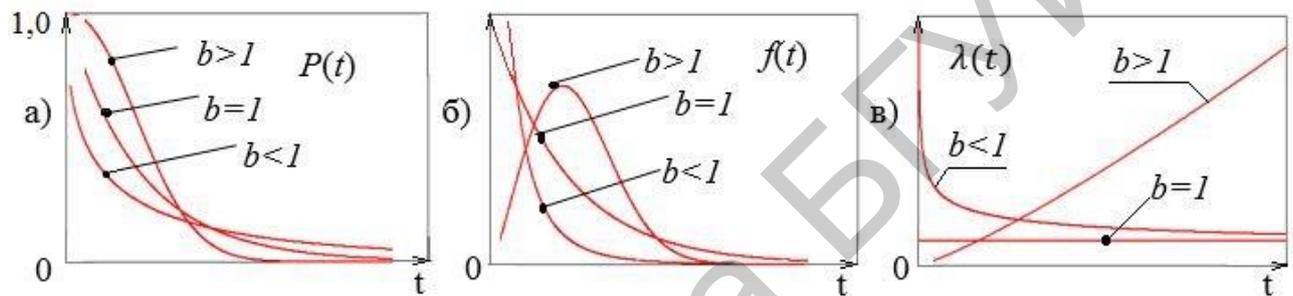
$$E_k = -3 + D_4/D_2^2, \quad (4.4т)$$

где $\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx$ – табличная гамма-функция (см. таблицу Б.1).

Характерными особенностями гамма-функции при $b \geq 0$, т. е. при $\nu = (1 + b) > 1$, являются [3, 4, 5, 7, 12, 22]:

- а) $\Gamma(\nu = 1) = \Gamma(\nu = 2) = 1$;
- б) $\Gamma(\nu = 1,5) \cong 0,886$;
- в) если ν – целое число, то $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$;
- г) если $\nu \geq 2$ и ν – нецелое число, то справедливо равенство $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)\Gamma(\nu - 1)$.

Примерные зависимости вероятностных функций для ряда значений параметров a и b приведены на рисунке 4.4. Отметим, что при $b = 1$ закон Вейбулла трансформируется в экспоненциальный закон (4.1), а при $b = 2$ – в закон Рэлея (4.3).



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;
в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 4.4 – Примерный вид зависимостей для закона Вейбулла

4.5 Нормальный закон (закон Гаусса)

Для нормального закона (закон Гаусса) характерно, что его временные зависимости и показатели определяются двумя **фиксированными параметрами** T_H и σ_H [9, 37, 39, 40]:

$$f(t) = (\sigma_H \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp(-(t - T_H)^2 / 2\sigma_H^2); \quad (4.5a)$$

$$P(t) = 0,5 - \Phi_0[(t - T_H) / \sigma_H]; \quad (4.5б)$$

$$\Phi_0(z) = (2\pi)^{-0,5} \int_0^z \exp(-x^2 / 2) dx; \quad (4.5в)$$

$$\lambda(t) = f(t) / P(t); \quad (4.5г)$$

$$M_1 = T_0 = T_H; \quad (4.5д)$$

$$\sigma_T = \sqrt{D_2} = \sigma_H; \quad (4.5е)$$

$$M_2 = M_1^2 + \sigma_T^2 = T_H^2 + \sigma_H^2; \quad (4.5ж)$$

$$M_3 = M_1(M_1^2 + 3D_2) = T_H(T_H^2 + 3\sigma_H^2); \quad (4.5и)$$

$$M_4 = M_1^4 + 6M_1^2 D_2 + 3D_2^2 = T_H^4 + 6T_H^2 \sigma_H^2 + 3\sigma_H^4; \quad (4.5к)$$

$$D_2 = \sigma_T^2 = \sigma_H^2; \quad (4.5л)$$

$$D_3 = 0; \quad (4.5м)$$

$$D_4 = 3D_2^2 = 3\sigma_H^4; \quad (4.5н)$$

$$D_k = (k - 1)\sigma_T^2 D_{k-2} = (k!/(k/2)!)(\sigma_T^2/2)^{k/2}; k = 2, 4, 6... \quad (4.5\text{п})$$

$$M_k = k! \cdot \sum_{i=0}^{I(k/2)} \left[M_1^{(k-2i)} \cdot (\sigma_T^2/2)/(k-2i)! \cdot i! \right]; \quad (4.5\text{р})$$

$I(k/2)$ – ближайшее целое, меньшее $k/2$;

$$V = \sigma_T/M_1 = \sigma_H/T_H; \quad (4.5\text{с})$$

$$S_k = 0; \quad (4.5\text{т})$$

$$E_k = 0. \quad (4.5\text{у})$$

T_Γ для заданного P_Γ определяется численным решением из уравнения

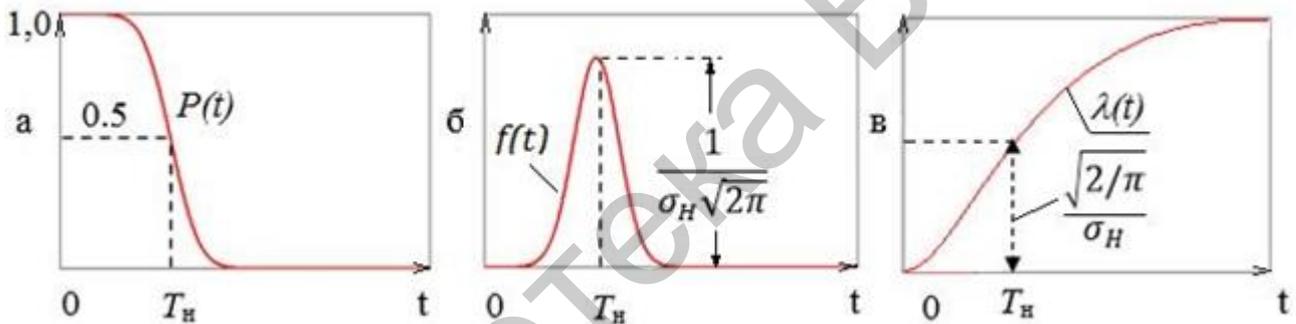
$$P_\Gamma = P(t = T_\Gamma) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{T_\Gamma - T_H}{\sigma_H}\right) = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{T_H - T_\Gamma}{\sigma_H}\right); \quad (4.6)$$

где $\Phi_0(+z) = -\Phi_0(-z)$;

T_H и σ_H – параметры нормального закона, при этом $T_H \geq 3\sigma_H$, $T_\Gamma < T_H$.

Формула (4.5в) – табличная функция Лапласа (см. приложение Г). Как следует из (4.5д), (4.5е), параметры закона T_H и σ_H в данном случае численно равны показателям закона: среднему времени безотказной работы T_0 и его среднему квадратическому отклонению σ_T .

Типовые зависимости для нормального закона приведены на рисунке 4.5.



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;

в – интенсивность отказа $\lambda(t)$

Рисунок 4.5 – Типовые зависимости для нормального закона (Гаусса)

4.6 Усеченный нормальный закон

Усеченный нормальный закон характеризуется параметрами T_y , σ_y и следующими временными зависимостями и показателями [9, 37, 40]:

$$f(t) = [C_y / (\sigma_y \sqrt{2\pi})] \exp\left(-\frac{(t - T_y)^2}{2\sigma_y^2}\right); \quad (4.7\text{а})$$

$$C_y = 1/[0,5 + \Phi_0(Z_0)]; z_0 = T_y/\sigma_y; \quad (4.7\text{б})$$

$$P(t) = C_y [0,5 - \Phi_0((t - T_y)/\sigma_y)]; \quad (4.7\text{в})$$

$$\lambda(t) = f(t)/P(t); \quad (4.7\text{г})$$

$$M_1 = T_0 = T_y + k\sigma_y; k = \sigma_y f(t=0) = [C_y/\sqrt{2\pi}] \cdot \exp(-T_y^2/2\sigma_y^2); \quad (4.7\text{д})$$

$$D_2 = \sigma_T^2 = \sigma_y^2 + M_1(T_y - M_1) = \sigma_y^2(1 - k^2 - kT_y/\sigma_y); \quad (4.7\text{е})$$

$$\sigma_T = \sqrt{D_2}; \quad (4.7\text{ж})$$

$$M_2 = M_1^2 + D_2 = T_y^2 + \sigma_y^2 + kT_y\sigma_y; \quad (4.7\text{и})$$

$$M_3 = T_y M_2 + 2\sigma_y^2 M_1 = T_y^3 + 3\sigma_y^2 T_y + kT_y^2 \sigma_y + 2k\sigma_y^3; \quad (4.7к)$$

$$M_4 = T_y M_3 + 3\sigma_y^2 M_2 = T_y^4 + k\sigma_y T_y^3 + 5k\sigma_y^3 T_y + 6T_y^2 \sigma_y^2 + 3\sigma_y^4; \quad (4.7л)$$

$$D_3 = (T_y - M_1)D_2 + (M_1 - T_y)M_1^2 = (M_1 - T_y)(M_1^2 - D_2) = \\ = k\sigma_y(T_y^2 - \sigma_y^2 + 3k\sigma_y T_y + 2k^2 \sigma_y^2); \quad (4.7м)$$

$$M_k = T_y M_{k-1} + (k-1)\sigma_y^2 M_{k-2}; \quad k = 3, 4, 5 \dots; \quad (4.7н)$$

$$D_4 = (T_y - M_1)D_3 + 3\sigma_y^2 D_2 - (M_1 - T_y)M_1^3 = 3\sigma_y^2 D_2 - k\sigma_y(D_3 + M_1^3); \quad (4.7п)$$

$$V = \sigma_T / M_1 = \sqrt{1 - k^2 - kT_y / \sigma_y / (k + T_y / \sigma_y)}; \quad (4.7р)$$

$$S_k = D_3 / D_2^{1,5}; \quad (4.7с)$$

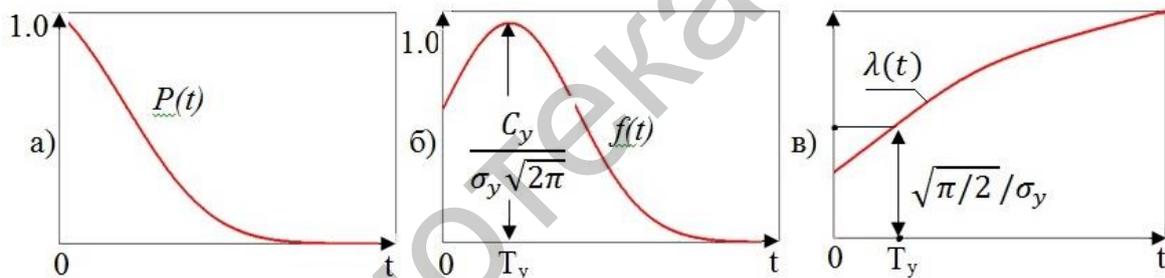
$$E_k = -3 + D_4 / D_2^2. \quad (4.7т)$$

Гарантированное время безотказной работы T_Γ определяется численным решением из уравнения

$$P_\Gamma = C_y [0,5 - \Phi_0((T_\Gamma - T_y) / \sigma_y)]. \quad (4.8)$$

Отметим, что здесь, в отличие от нормального закона, показатели закона T_0 и σ_T не равны параметрам закона T_y и σ_y : $M_1 = T_0 \neq T_y$; $\sigma_T \neq \sigma_y$. При этом $T_y < 3\sigma_y$; $T_0 > T_y$.

Теоретические зависимости, относящиеся к усеченному нормальному закону, показаны на рисунке 4.6.



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$; в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 4.6 – Примерные зависимости для усеченного нормального закона

4.7 Логнормальный закон

Закон характеризуется двумя параметрами μ_λ и σ_λ и следующими соотношениями [9]:

$$f(t) = (t\sigma_\lambda\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(\ln t - \mu_\lambda)^2 / (2\sigma_\lambda^2)); \quad (4.9а)$$

$$P(t) = 0,5 - \Phi_0(z); \quad z = (\ln t - \mu_\lambda) / \sigma_\lambda; \quad (4.9б)$$

$$\Phi_0(z) = -\Phi_0(-z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^z \exp(-x^2/2) dx; \quad (4.9в)$$

$$\lambda(t) = f(t) / P(t); \quad (4.9г)$$

$$M_1 = T_0 = \exp(\mu_\lambda + \sigma_\lambda^2/2); \quad (4.9д)$$

$$\sigma_T^2 = D_2 = (-1 + \exp\sigma_\lambda^2) \exp(\sigma_\lambda^2 + 2\mu_\lambda); \quad (4.9е)$$

$$M_2 = M_1^2 + D_2 = \exp(2\mu_\lambda + 2\sigma_\lambda^2); \quad (4.9ж)$$

$$P_T = 0,5 - \Phi_0(z_T); z_T = (\ln T_T - \mu_L)/\sigma_L; \quad (4.9и)$$

$$M_3 = \exp(3\mu_L + 9\sigma_L^2/2); \quad (4.9к)$$

$$M_4 = \exp(4\mu_L + 8\sigma_L^2); \quad (4.9л)$$

$$M_k = \exp(k\mu_L + (k^2/2)\sigma_L^2), k = 1, 2, 3 \dots; \quad (4.9м)$$

$$D_3 = \exp(3\mu_L + 3\sigma_L^2/2) [2 - 3\exp\sigma_L^2 + \exp 3\sigma_L^2]; \quad (4.9н)$$

$$D_4 = \exp(4\mu_L + 2\sigma_L^2) [-3 + 6\exp\sigma_L^2 - 4\exp 3\sigma_L^2 + \exp 6\sigma_L^2]; \quad (4.9п)$$

$$V = \sigma_T/M_1 = \sqrt{-1 + \exp\sigma_L^2}; \quad (4.9р)$$

$$S_k = D_3/\sigma_T^3 = (-2 + \exp\sigma_L^2 + \exp 2\sigma_L^2)\sqrt{-1 + \exp\sigma_L^2}; \quad (4.9с)$$

$$E_x = -6 + 3\exp 2\sigma_L^2 + 2\exp 3\sigma_L^2 + \exp 4\sigma_L^2; \quad (4.9т)$$

где μ_L и σ_L – параметры логнормального закона, причем, как видно из (4.9д) и (4.9е), они не равны показателям закона T_0 и σ_T ;

$\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа [9].

Примерный вид зависимостей $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ для логнормального закона показан на рисунке 4.7.

4.8 Гамма-закон (гамма-распределение)

Гамма-закон, как и логнормальный закон, характеризуется двумя параметрами – α и β , а также рядом нижеследующих функций и показателей [9]:

$$f(t) = (\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha))^{-1} \cdot t^{\alpha-1} \exp(-t/\beta); \quad (4.10а)$$

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = 1 - I(\alpha, t/\beta); \quad (4.10б)$$

$$I(\alpha, t/\beta) = \Gamma^{-1}(\alpha) \int_0^{t/\beta} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx; \quad (4.10в)$$

$$\lambda(t) = f(t)/P(t); \quad (4.10г)$$

$$M_1 = T_0 = \int_0^\infty t f(t)dt = \alpha \cdot \beta; \quad (4.10д)$$

$$M_2 = \int_0^\infty t^2 f(t)dt = \alpha(\alpha + 1)\beta^2; \quad (4.10е)$$

$$D_2 = \sigma_T^2 = M_2 - M_1^2 = \alpha\beta^2; \quad (4.10ж)$$

$$P_T = P(t = T_T) = 1 - I(\alpha, T_T/\beta); \quad (4.10и)$$

$$M_3 = \int_0^\infty t^3 f(t)dt = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^3; \quad (4.10к)$$

$$M_4 = \int_0^\infty t^4 f(t)dt = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)\beta^4; \quad (4.10л)$$

$$M_k = \beta^k \Gamma(\alpha + k)/\Gamma(\alpha) = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1)\beta^k; \quad (4.10м)$$

$$D_3 = 2\alpha\beta^3; \quad (4.10н)$$

$$D_4 = 3\alpha(\alpha + 2)\beta^4; \quad (4.10п)$$

$$V = \sigma_T/M_1 = 1/\sqrt{\alpha}; \quad (4.10р)$$

$$S_k = D_3/\sigma_T^3 = 2/\sqrt{\alpha}; \quad (4.10с)$$

$$E_x = -3 + D_4/D_2^2 = 6/\alpha, \quad (4.10т)$$

где α и β – параметры гамма-распределения (α – называют параметром формы, β – параметром масштаба);

$\Gamma(\alpha)$ – табличная гамма-функция [см. (4.4)];

$I(\alpha, t/\beta)$ – табличная неполная гамма-функция [9].

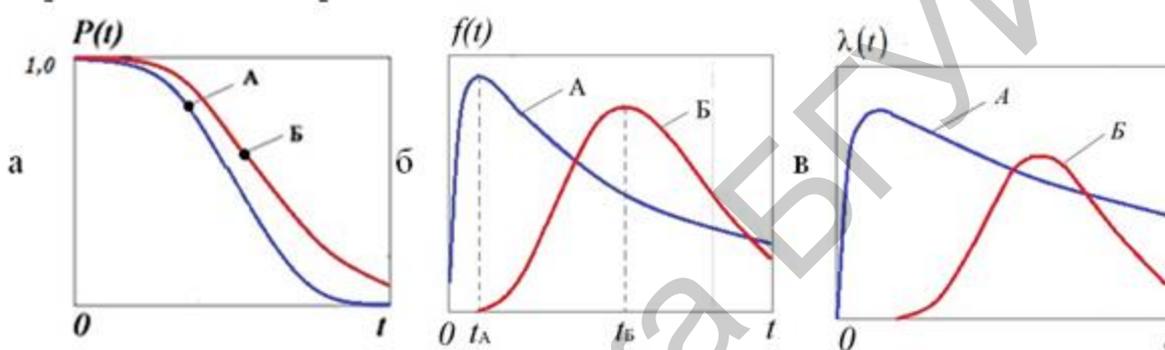
Если параметр формы α является целым числом, то выражения (4.10б), (4.10в), (4.10и) могут быть представлены в более удобной для расчетов форме, поскольку при этом $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.

Тогда, обозначая $q = 1/\beta$, получим вместо (4.10б), (4.10в), (4.10и) более удобное выражение [39]

$$P(t) = \exp(-qt) \cdot [1 + qt + \dots + (qt)^{\alpha-1}/(\alpha - 1)!]. \quad (4.11)$$

Соответственно, гарантированная вероятность безотказной работы P_T определяется из (4.11) для заданного значения $t = T_T$.

Примерные зависимости функций $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ для логнормального закона (вариант А) и гамма-распределения (вариант Б) показаны на рисунке 4.7. Здесь также отмечены соответствующие моды t_A и t_B этих законов, где $t_A = \exp(\mu_L - \sigma_L^2)$, $t_B \cong (\alpha - 1)\beta$ для $\alpha \geq 2$.



$a - P(t)$; $b - f(t)$; $v - \lambda(t)$

Рисунок 4.7 – Примерный вид зависимостей вероятностных функций для логнормального закона (А) и закона гамма-распределения (Б)

Функции $f(t)$ и $\lambda(t)$ для логнормального и гамма-законов показаны на рисунке 4.7 существенно разными, однако при определенных значениях параметров этих законов различие может быть неочевидным.

Приведенные законы распределения, хотя и являются широко распространенными и хорошо исследованными, тем не менее составляют только часть известных в науке вероятностных законов. Кроме того, на практике часто применяют также и композиции рассмотренных выше законов (см. разделы 8, 9).

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Опытные испытания являются очень важным инструментом для определения реальных характеристик и параметров надежности технических объектов. На практике применяют различные варианты проведения опытных испытаний, которые отличаются, например, числом испытываемых изделий, условиями проведения экспериментов, возможностью замены в ходе испытаний отказавших изделий на другие исправные или на те же, но после восстановительного ремонта, и т. д. [7, 33–34, 36–38].

В зависимости от условий проведения опытных испытаний различают **форсированные** (ускоренные) и **нормальные** (эксплуатационные) испытания.

В режиме **форсированных** испытаний сознательно создают более тяжелые условия работы испытываемых изделий (например, за счет повышенной температуры, повышенных или пониженных питающих напряжений, значительной вибрации, тряски, ударов и т. п.), при которых существенно сокращается время безотказной работы каждого изделия и, соответственно, общее время испытания всей партии изделий.

По результатам форсированных испытаний определяются вид и параметры вероятностного закона (например, из числа рассмотренных в разделе 4), которые наиболее точно аппроксимируют результаты опыта.

В режиме проведения **нормальных** (или эксплуатационных) испытаний условия проведения эксперимента соответствуют типовым условиям эксплуатации испытываемых изделий, при которых время безотказной работы изделия существенно (в десятки и сотни раз) больше, чем в режиме форсированных испытаний. При этом среднее время безотказной работы может составлять десятки лет и более (например, среднее время безотказной работы навигационных спутников (ИСЗ) системы ГЛОНАСС и GPS составляет не менее 5 лет [10]).

В таких условиях приходится проводить **укороченные** (по времени) испытания на надежность, не дожидаясь выхода из строя всех изделий из испытываемой партии. При известном законе вероятности безотказной работы (обоснованном по результатам форсированных испытаний) в этом случае определяются только параметры этого закона (один или два параметра), которые наиболее точно аппроксимируют результаты укороченного эксперимента.

После определения параметров выбранного закона далее, используя материалы раздела 4, определяют необходимые показатели этого закона, например, гарантированное T_r и среднее T_0 время безотказной работы.

Для решения указанных задач целесообразно осуществлять **предварительную обработку** исходных данных – результатов опытных испытаний, которые обычно представляют в виде набора пар данных $\{H_j, t_j\}$, $j \in [1, N_0]$, где H_j – номер j -го изделия, присвоенный ему до начала испытания; t_j – время работы до отказа j -го изделия; N_0 – общее число изделий.

Пусть максимальное время работы до отказа последнего из партии изделия составляет t_{\max} . Поскольку представляемое число изделий в партии N_0 , как правило, не менее 100, удобно весь рассматриваемый временной интервал $0 \dots t_{\max}$ разделить на K одинаковых подынтервалов длительностью Δt , рассчитываемых из уравнений [6, 33–34]

$$K \geq (1 + 1,4 \ln N_0) \cong 1 + 3,2 \lg N_0; \quad (5.1a)$$

$$\Delta t = t_{\max}/K. \quad (5.1б)$$

Рекомендуется выбирать K не менее 10.

Результаты испытаний удобно свести в двухстрочную таблицу вида $i - n_i$, где в верхней строке указывается номер интервала $i = 1, 2 \dots K$, а в нижней строке – число изделий n_i , вышедших из строя в промежутке времени $\Delta t_i \in [t_{i-1}, t_i]$ от $t_{i-1} = (i - 1)\Delta t$ до $t_i = i\Delta t$. Пример такого представления результатов испытаний приведен в таблице 5.1 (строки 1, 2). Здесь $K = 13$; $i \in \overline{1; 13}$; $N_0 = \sum_{i=1}^{13} n_i = 100$.

Таблица 5.1 – Пример группирования опытных данных по интервалам

1	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	n_i	33	27	14	10	5	3	4	0	0	1	0	2	1
3	N_i	67	40	26	16	11	8	4	4	4	3	3	1	0
4	P_i	0,67	0,40	0,26	0,16	0,11	0,08	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,01	0,00
5	$f_i \Delta t$	0,33	0,27	0,14	0,1	0,05	0,03	0,04	0	0	0,01	0	0,02	0,01
6	$\lambda_i \Delta t$	0,4	0,51	0,42	0,47	0,38	0,33	0,66	0	0	0,28	0	1,0	2,0

Имея результаты испытаний, представленные в виде, подобном строкам 1, 2 таблицы 5.1, нетрудно затем определить **выборочные значения** других характеристик безотказной работы по формулам

$$P(t = i\Delta t) = P_i = \frac{N_i}{N_0} = 1 - \sum_{s=1}^i \frac{n_s}{N_0} = 1 - \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_i}{N_0}; \quad (5.2a)$$

$$P_0 = P(t = 0) = 1,0;$$

$$P((i - 1)\Delta t < t < i\Delta t) = P_{i-1} - (P_{i-1} - P_i)(t - (i - 1)\Delta t)/\Delta t; \quad (5.2б)$$

$$P(t = (i - 0,5)\Delta t) \cong (P_{i-1} + P_i)/2 = (N_{i-1} + N_i)/(2N_0); \quad (5.2в)$$

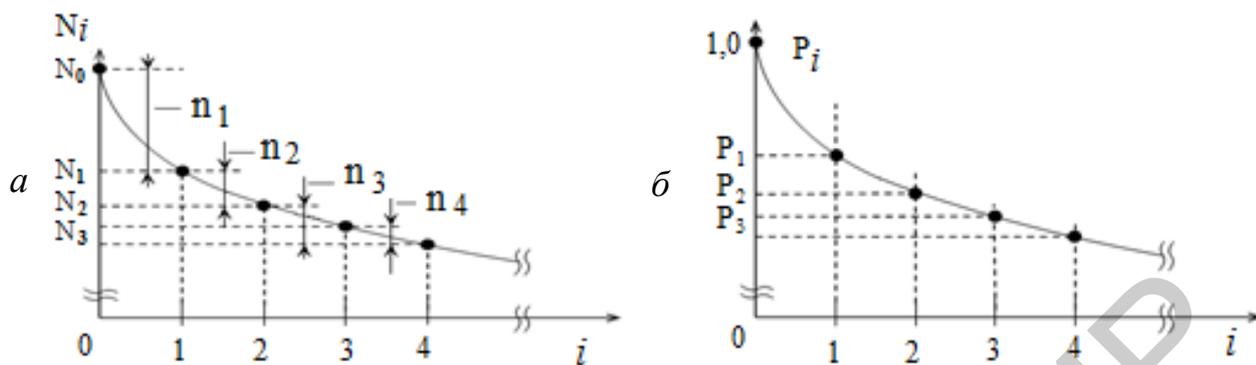
$$f((i - 1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t) = f_i = (P_{i-1} - P_i)/\Delta t = n_i/N_0\Delta t; i \in \overline{1, K}; \quad (5.2г)$$

$$\lambda(t = (i - 0,5)\Delta t) = f_i/P(t = (i - 0,5)\Delta t) \cong 2f_i/(P_{i-1} + P_i) \cong \cong 2n_i/(\Delta t(N_i + N_{i-1})); \quad (5.2д)$$

$$\Delta\lambda_i/\Delta t = (\lambda_i - \lambda_{i-1})/\Delta t = (2/\Delta t^2) \cdot [n_i/(N_i + N_{i-1}) - n_{i-1}/(N_{i-1} + N_{i-2})]. \quad (5.2e)$$

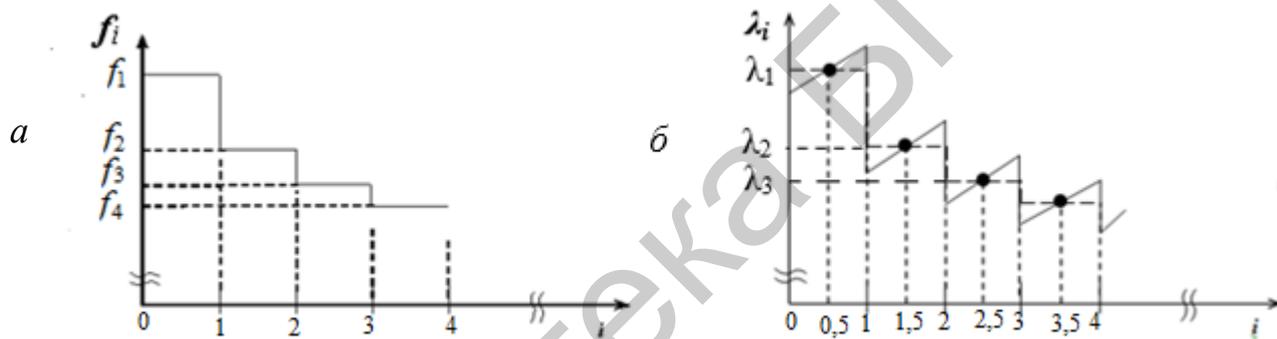
В качестве поясняющих примеров в нижних строках таблицы 5.1 (строки 3–6) приведены примерные значения функций $N_i = N_0 - \sum_{s=1}^i n_s$, P_i , f_i и λ_i , рассчитанные по формулам (5.2) в зависимости от времени $t_i = i\Delta t$ по конкретным исходным данным таблицы 5.1, которые приведены в строке 2 этой таблицы. Соответствующие им зависимости показаны на рисунках 5.1 и 5.2. Пунктиром показаны приближенные зависимости $P(t_i)$ и $\lambda(t_i)$, которые обычно

используются в последующих задачах о нахождении оптимальных параметров функций безотказной работы.



$$a - N_i = \varphi(t_i); \quad б - P_i = P(t_i)$$

Рисунок 5.1 – Примерный вид изменения функций $N(i)$ и $P(i)$ по данным таблицы 5.1



$$a - f(t_i); \quad б - \lambda(t_i)$$

Рисунок 5.2 – Примерная зависимость во времени функций $f(t_i)$ и $\lambda(t_i)$ по данным таблицы 5.1

В качестве **числовых характеристик (оценок, показателей)** выборочных функций (5.2) используют так называемые **выборочные начальные m_e и центральные d_e моменты** ($e = 1, 2, 3 \dots$). Наиболее часто применяют выборочные первый m_1 и второй m_2 моменты распределения и выборочную дисперсию d_2 :

$$m_1 = \sum_{i=1}^k t_i f_i \Delta t = (\Delta t / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5) n_i; \quad (5.3a)$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^k t_i^2 f_i \Delta t = (\Delta t^2 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^2 n_i; \quad (5.3б)$$

$$d_2 = \sum_{i=1}^k (t_i - m_1)^2 f_i \Delta t = m_2 - m_1^2 = (\Delta t^2 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1 / \Delta t)^2 n_i; \quad (5.3в)$$

$$m_3 = \sum_{i=1}^k t_i^3 f_i \Delta t = (\Delta t^3 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^3 n_i; \quad (5.3г)$$

$$d_3 = \sum_{i=1}^k (t_i - m_1)^3 f_i \Delta t = (\Delta t^3 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1 / \Delta t)^3 n_i = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3; \quad (5.3д)$$

$$m_4 = \sum_{i=1}^k t_i^4 f_i \Delta t = (\Delta t^4 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^4 n_i; \quad (5.3e)$$

$$d_4 = \sum_{i=1}^k (t_i - m_1)^4 f_i \Delta t = (\Delta t^4 / N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1 / \Delta t)^4 n_i =$$

$$= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4; \quad (5.3ж)$$

$$V = \sqrt{d_2}/m_1; \quad (5.3и)$$

$$S_k = d_3/d_2^{1,5}; \quad (5.3к)$$

$$E_x = -3 + d_4/d_2^2. \quad (5.3л)$$

Формулы для расчета выборочных моментов, приведенные в (5.3а)–(5.3ж), представляют собой варианты приближенных расчетов интегральных выражений (2.15а) и (2.15б). Расчет обобщенных показателей экспериментального закона, проводимый по формулам (5.3и)–(5.3л), полностью аналогичен исходным расчетам по (2.18) и отличается только обозначениями (m_1 вместо M_1 и d_i вместо D_i , $i = 2 \dots 4$).

Первый выборочный момент m_1 называется также **выборочным средним**, второй – **выборочным средним квадратом** m_2 . Они определяются по аналогии с (2.15)–(2.17) и учетом (5.2) из выражений (5.3а), (5.3б). В формулах (5.3) за t_i принимают середину i -го интервала $t_i = (i - 0,5)\Delta t$.

Показатели m_3 и m_4 являются соответственно выборочным третьим и четвертым начальным моментом экспериментального распределения, а показатели d_3 и d_4 – соответственно третьим и четвертым выборочным центральным моментом.

Выражения (5.3г)–(5.3л) определяются по аналогии с (2.17) и (2.18).

Основной задачей при статистической обработке выборочных функций (5.2) является нахождение такого оптимального теоретического закона распределения и его параметров, которые в наибольшей степени обеспечивают совпадение с выборочными экспериментальными функциями и показателями (5.3), полученными по результатам опытных испытаний.

В качестве **критерия близости** обычно используют **средний квадрат отклонений** между значениями выбранной экспериментальной функции $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ и соответствующей теоретической кривой $\varphi_T(t_i)$ в виде

$$\Delta_{\varphi 1} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\varphi_{\text{Э}}(t_i) - \varphi_T(t_i))^2. \quad (5.4а)$$

Очевидно, функции $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ и $\varphi_T(t_i)$ должны быть **одноименными** и отражать или функцию вероятности безотказной работы $P(t)$, или плотность вероятности (частоту отказов) $f(t)$, или, наконец, интенсивность отказов $\lambda(t)$ для реального (экспериментального) и теоретического распределений.

Во многих случаях, особенно когда экспериментальная функция $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ существенно меняется в разные моменты времени t_i , более «чутким» **критерием различия** экспериментальной и теоретической функций является так называемый **средний относительный квадрат отклонения**, или **взвешенный средний квадрат отклонений** [18]:

$$\Delta_{\varphi 2} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left(\frac{\varphi_{\text{Э}}(t_i) - \varphi_T(t_i)}{\varphi_{\text{Э}}(t_i)} \right)^2; \quad (5.4б)$$

$$\Delta_{\varphi 3} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{(\varphi_{\text{Э}}(t_i) - \varphi_T(t_i))^2}{\varphi_{\text{Э}}(t_i)}. \quad (5.4в)$$

К сожалению, в настоящее время не существует таких аналитических методов решения, которые в ходе минимизации функционалов (5.4а)–(5.4в) позволяли бы сразу найти и оптимальный теоретический закон распределения $\varphi_T(t_i)$ и его оптимальные параметры (точечные оценки). Поэтому на практике применяют метод, который называют «синтез через анализ». Он включает в себя несколько последовательно выполняемых процедур – этапов [18].

На *первом* этапе, ориентируясь на вид выбранной экспериментальной зависимости $\varphi_{\text{э}}(t_i)$, $i \in \overline{1, K}$, выбирают несколько типов теоретических законов распределения, которые имеют теоретические зависимости $\varphi_T(t_i)$, подобные экспериментальной кривой.

На *втором* этапе для каждого из выбранных теоретических законов (например, s -го) подбирают его параметры (параметры закона) таким образом, чтобы минимизировать (5.4) (далее мы увидим, что эту процедуру можно выполнить несколькими способами, например, i -м, и каждый из них следует проверить).

На *третьем* этапе выбирают тот теоретический закон распределения (его называют **квазиоптимальным**), который обеспечивает минимальное значение (5.4) по сравнению с другими.

Алгоритм принятия решения по предлагаемой схеме показан на рисунке 5.3.

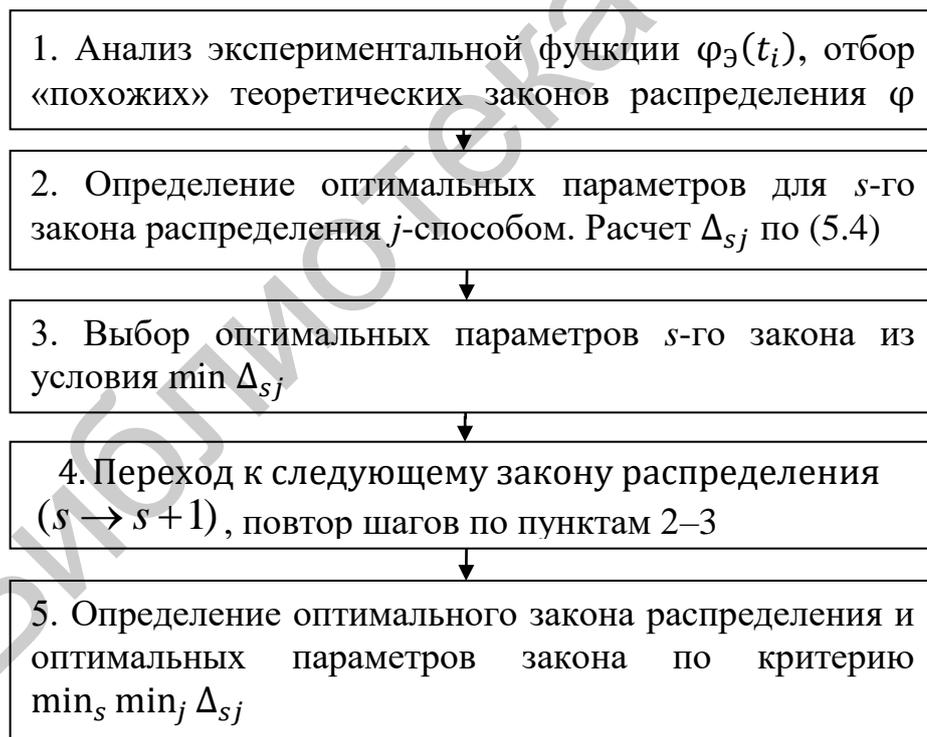


Рисунок 5.3 – Алгоритм оптимизации теоретического закона распределения и его параметров по результатам эксперимента

6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЫБРАННОГО ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЗАКОНА БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Как упоминалось ранее, для каждого из выбранных теоретических законов распределения с учетом особенностей поведения его функций $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ можно предложить несколько вариантов определения параметров этого закона. На практике наиболее часто применяются методы, получившие название «метод моментов», «метод максимального правдоподобия» и «метод наименьших квадратов». Используем их применительно к каждому из рассмотренных выше теоретических законов распределения.

6.1 Параметрическая оптимизация экспоненциального закона

Для экспоненциального закона [см. (4.1)] неизвестным является один параметр a [25]. Используя **метод моментов**, примем, что среднее время безотказной работы T_0 , определяемое из (2.11) и (4.1г), примерно равно выборочному среднему m_1 экспериментальной функции, определяемому из (5.3а). Тогда имеем $m_1 \cong M_1$ и

$$\frac{1}{a} \cong \sum_{i=1}^K \frac{n_i \Delta t (i - 0,5)}{N_0}; \quad a = a_{11} = \frac{N_0}{\Delta t} \left[\sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i \right]^{-1}. \quad (6.1а)$$

Аналогично можно говорить о примерном равенстве среднего квадрата теоретического распределения (4.1ж) и выборочного среднего квадрата опытного (экспериментального) распределения. Тогда, учитывая (5.3б) и (4.1ж), получим

$$\begin{aligned} T_0^2 + \sigma_T^2 = 2/a^2 = m_2 \quad \text{или} \\ a = a_{1.2} \cong \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 \Delta t^2 n_i / 2N_0 \right\}^{-0,5} = \\ = (\sqrt{2N_0} / \Delta t) \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i \right\}^{-0,5}. \end{aligned} \quad (6.1б)$$

Также нет оснований отвергать тот факт, что при совпадении экспериментального и теоретического закона у них должны совпадать и другие моменты распределения, например, *третий* и *четвертый начальные моменты*. Тогда, приравнявая M_3 из (4.1и) и m_3 из (5.3г), получим

$$a_{1.3} = (6/m_3)^{1/3} = (1/\Delta t) \left[6N_0 / \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^3 n_i \right]^{1/3}. \quad (6.1в)$$

Соответственно, приравнявая M_4 из (4.1к) и m_4 из (5.3е), находим

$$a_{1.4} = (24/m_4)^{1/4} = (1/\Delta t) [24N_0 / \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^4 n_i]^{1/4}. \quad (6.1г)$$

Аналогичный подход может быть применен и к *центральному моментам* экспериментального и теоретического законов. Тогда, приравнявая, например, D_2 из (4.1д) и d_2 из (5.3в), получим

$$a_{1.5} = \left(\frac{1}{d_2}\right)^{0,5} = (1/\Delta t)\sqrt{N_0} \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^2 n_i \right]^{-0,5}. \quad (6.1д)$$

Приравнявая D_3 из (4.1л) и d_3 из (5.3г), найдем

$$a_{1.6} = (2/d_3)^{1/3} = (1/\Delta t)(2N_0)^{1/3} \cdot \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^3 n_i \right]^{-1/3}. \quad (6.1е)$$

Приравнявая D_4 из (4.1м) и d_4 из (5.3ж), получим

$$a_{1.7} = (9/d_4)^{1/4} = (1/\Delta t)(9N_0)^{1/4} \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^4 n_i \right]^{-1/4}. \quad (6.1ж)$$

При использовании **метода наименьших квадратов** учтем свойства этого закона (4.1в) и (5.2г), тогда имеем $\lambda_i \approx a$. Подберем параметр a методом наименьших квадратов таким образом, чтобы минимизировать функционал: $Q = \sum_{i=1}^K (\lambda_i - a)^2 \rightarrow \min$.

Из условия $dQ/da = 0$ и с учетом (5.2г) получим

$$a = a_{1.8} = \sum_{i=1}^K \lambda_i / K = (2/K\Delta t) \sum_{i=1}^K n_i / (N_{i-1} + N_i). \quad (6.1и)$$

Следовательно, по этому методу оптимальный параметр закона a равен среднему арифметическому дискретных значений интенсивности отказов λ_i .

При использовании **метода максимального правдоподобия** неизвестный параметр a находится на основе использования **функции правдоподобия**, которая определяется в виде [1, 4, 5, 11, 12]

$$L = \prod_{i=1}^M f(t_i),$$

где $f(t_i)$ определяется из (4.1б);

M – достаточно большое число анализируемых точек.

Можно показать [3, 12, 32], что исследование на экстремум функции $L = \varphi(a)$ в зависимости от параметра a дает такое же оптимальное значение a , как и исследование функции $\ln L = \ln \varphi(a)$. Тогда, решая уравнение $d \ln L / da = 0$ и учитывая (4.1б), придем к выражению

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{da} &= \frac{d \ln \prod_{i=1}^M a \exp(-at_i)}{da} = \frac{d}{da} \left\{ \ln a^M \exp\left(-a \sum_{i=1}^M t_i\right) \right\} = \\ &= \frac{d}{da} \left[M \ln a - a \sum_{i=1}^M t_i \right] = 0. \end{aligned}$$

Взяв производную от выражения в квадратных скобках, придем к уравнению $a_{\text{опт}}^{-1} = \sum_{i=1}^M t_i / M_0$. Затем, приняв $M = K$, $t_i = \Delta t(i - 0,5)$, $i \in [1, K]$ и учитывая, что $\sum_{i=1}^K t_i = \sum_{i=1}^K \Delta t(i - 0,5) = \Delta t K^2 / 2$, приходим к выражению

$$a = a_{1.9} = 2/K\Delta t. \quad (6.1к)$$

Предпочтительность выбора того или иного расчетного варианта параметра a_{1j} ($j = 1 \dots 9$) оценивают по величине среднего квадрата ошибки аппроксимации закона вероятности безотказной работы, например, используя (5.4а), (4.1а), (5.2а) и (5.2б). Тогда

$$\Delta_{1j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [\exp(-a_{1j}(i - 0,5)\Delta t) - 0,5(P_{i-1} + P_i)]^2, \quad j = 1, 2, 3 \dots 9. \quad (6.2a)$$

Наряду с критерием (6.2а) при сравнении нескольких законов распределения может быть полезным также использовать критерий минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации по отношению к **функции плотности вероятности** экспериментального закона. Тогда, используя (4.1б) и (5.2г), получим

$$\Delta_{1j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [a_{1j} \exp(-a_{1j}(i - 0,5)\Delta t) - (n_i/N_0\Delta t)]^2. \quad (6.2б)$$

То расчетное значение a_{1j} , $j = 1, 2 \dots 9$, которое обеспечивает наименьшее значение Δ_{1j} или Δ_{1j}^* , считается более точным и используется в последующих расчетных процедурах.

Примечание – Наряду с (6.2а) и (6.2б) можно использовать и другие критерии близости, в частности, средний относительный (5.4 б) и взвешенный средний (5.4в) квадрат отклонения теоретической функции $\varphi_T(t_i)$ от экспериментальной $\varphi_3(t_i)$.

6.2 Параметрическая оптимизация закона Эрланга

Для закона Эрланга [см. выражения (4.2)] неизвестным также является один параметр a . Применяя **метод моментов**, совместно используем выражения (4.2) и (5.3). Тогда на основании (5.3а) и (4.2д), т. е. приравнивая *первые моменты*, получим [25]

$$a = a_{21} = \frac{2N_0}{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^K (i - 0,5)n_i \right)^{-1}. \quad (6.3a)$$

Используя совместно (4.2и) и (5.3б) и приравнивая *вторые начальные моменты*, находим

$$a = a_{22} = \frac{\sqrt{6N_0}}{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i \right)^{-0,5}. \quad (6.3б)$$

Приравнивая *третьи начальные моменты* экспериментальной и теоретической функции, т. е. M_3 из (4.2к) и m_3 из (5.3г), определяем

$$a_{23} = (24/m_3)^{1/3} = \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \left[24N_0 / \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^3 n_i \right]^{1/3}. \quad (6.3в)$$

Соответственно, приравнивая M_4 из (4.2л) и m_4 из (5.3е), получим

$$a_{24} = (120/m_4)^{1/4} = \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \left[120N_0 / \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^4 n_i \right]^{1/4}. \quad (6.3г)$$

Аналогичный подход можно применить и в отношении *центральных моментов* экспериментальной и аппроксимирующей теоретической функции.

Так, приравнявая, например, D_2 из (4.2е) и d_2 из (5.3в), получим

$$a_{25} = (2/d_2)^{0,5} = (1/\Delta t)\sqrt{2N_0} \cdot \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^2 n_i \right]^{-0,5}. \quad (6.3д)$$

Приравнявая D_3 из (4.2н) и d_3 из (5.3д), находим

$$a_{26} = (4/d_3)^{1/3} = (1/\Delta t)(4N_0)^{1/3} \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^3 n_i \right]^{-1/3}. \quad (6.3е)$$

Приравнявая D_4 из (4.2п) и d_4 из (5.3ж), получим

$$a_{27} = (24/d_4)^{1/4} = (1/\Delta t)(24N_0)^{1/4} \left[\sum_{i=1}^k (i - 0,5 - m_1/\Delta t)^4 n_i \right]^{-1/4}. \quad (6.3ж)$$

Метод наименьших квадратов (МНК) требует преобразования функций $P(t)$, $f(t)$, или $\lambda(t)$ к виду, удобному для однозначного определения неизвестного параметра a . Возможно несколько вариантов преобразования. В первом случае целесообразно использовать функцию

$$\Psi(t) = \sqrt{\frac{d\lambda(t)}{dt}} = \frac{a}{1 + at},$$

определяемую из (4.2г), в таком случае получим

$$a = \frac{\Psi(t)}{1 - t\Psi(t)} = \varphi(t).$$

Подберем параметр a таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$Q = \sum_{i=1}^K (\varphi(t_i) - a)^2 \rightarrow \min.$$

Из условия $dQ/da = 0$ получим

$$a = \sum_{i=1}^K \frac{\varphi(t_i)}{K} = \sum_{i=1}^K \frac{\Psi(t_i)}{K(1 - t_i\Psi(t_i))}.$$

Полагая, что $\Psi(t) \cong \sqrt{\Delta\lambda(t)/\Delta t}$ и $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, получим

$$a = a_{28} = \sum_{i=1}^K \frac{K^{-1}\sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1})/\Delta t}}{1 - (i - 0,5)\Delta t\sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1})/\Delta t}}. \quad (6.3и)$$

Для удобства вычислений по формуле (6.3и) полезно использовать (5.2д).

Во втором случае удобно использовать функцию $\lambda(t)$, определяемую из (4.2в) для моментов времени t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, тогда получим

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = \frac{(t_i + \Delta t)(1 + at_i)}{t_i(1 + a(t_i + \Delta t))} = \frac{(1 + \Delta t/t_i)(1 + at_i)}{1 + a(t_i + \Delta t)},$$

$$\text{откуда } a = \frac{\Delta t/t_i - \Delta\lambda_i/\lambda_i}{(t_i + \Delta t)\Delta\lambda_i/\lambda_i} = \varphi(t_i),$$

где $\Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$.

Минимизируя, как и ранее, функцию $Q = \sum_{i=1}^K (\varphi(t_i) - a)^2$, из условия $dQ/da = 0$ получим

$$a = a_{29} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\Delta t/t_i - \Delta\lambda_i/\lambda_i}{(t_i + \Delta t)\Delta\lambda_i/\lambda_i} = \frac{1}{\Delta t(K-1)} \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\lambda_i(i-0,5)^{-1} - \Delta\lambda_i}{(i+0,5)\Delta\lambda_i}. \quad (6.3к)$$

При использовании метода ММП с учетом (4.2б) приходим к решению уравнения $d \ln L/da = 0$ или

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{da} &= \frac{d}{da} \ln \prod_{i=1}^M f(t_i) = \frac{d}{da} \ln \prod_{i=1}^M a^2 t_i \exp(-at_i) = \\ &= \sum_{i=1}^M (\ln t_i + 2 \ln a - at_i) = \frac{2M}{a} - \sum_{i=1}^M t_i = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $a^{-1} = \sum_{i=1}^M t_i/2M$. Здесь, как и ранее, M – достаточно большое число точек анализа. Полагая, что $M = K$, $t_i = \Delta t(i - 0,5)$, и учитывая, что $\sum_{i=1}^K t_i = \sum_{i=1}^K \Delta t(i - 0,5) = \Delta t K^2/2$, получаем

$$a = a_{2.10} = 4/K\Delta t. \quad (6.3л)$$

Как и в предыдущем подразделе, выбор предпочтительного значения a_{2j} , $j = 1 \dots 10$ из (6.3а)–(6.3л) производят, ориентируясь на оценку среднего квадрата ошибки аппроксимации – экспериментального закона выбранным теоретическим законом. Например, используя (5.4а), (4.2а) и (5.2а)–(5.2б), т. е. аппроксимируя закон вероятности безотказной работы, для $j = 1 \dots 10$ имеем

$$\Delta_{2j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[(1 + a_{2j}(i - 0,5)\Delta t) \exp(-a_{2j}(i - 0,5)\Delta t) - \frac{(P_{i-1} + P_i)}{2} \right]^2. \quad (6.4а)$$

Если для сравнения с другими возможными законами распределения более наглядно производить сравнение по функциям **плотности вероятности** теоретического и опытного законов, то средний квадрат ошибки аппроксимации находят, используя (4.2б) и (5.2в), в виде

$$\Delta_{2j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[a_{2j}^2 (i - 0,5)\Delta t \exp(-a_{2j}(i - 0,5)\Delta t) - n_i/N_0\Delta t \right]^2. \quad (6.4б)$$

В последующих расчетах используется то определенное значение a_{2j} , которое обеспечивает минимальное значение Δ_{2j} или Δ_{2j}^* .

Примечание – Наряду с выражениями (6.4а) и (6.4б) можно также использовать и критерии (5.4б)–(5.4в).

6.3 Параметрическая оптимизация закона Рэлея

Для закона Рэлея [см. (4.3)] оптимизируемым является один параметр a . Применяя **метод моментов**, можно несколькими способами определить этот параметр. Так, используя (4.3д) и (5.3а), т. е. приравнивая *первые моменты* теоретического и экспериментального распределений, получим [25]

$$a = a_{31} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{N_0}{\Delta t} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i \right\}^{-2}. \quad (6.5a)$$

Приравнивая *вторые моменты* распределений (4.3и) и (5.3б), находим

$$a = a_{32} = \frac{N_0}{\Delta t^2} \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i \right\}^{-1}. \quad (6.5б)$$

Приравнивая аналогично *третий* и *четвертый начальные моменты* теоретического (4.3) и экспериментального (5.3) распределений, т. е. приравнивая M_3 из (4.3к) и m_3 из (5.3г) и, соответственно, M_4 из (4.3л) и m_4 из (5.3е), получим:

а) из условия $M_3 = m_3$:

$$a_{33} \cong \left(\frac{1,8}{m_3^2} \right)^{1/3} \cong 1,2 m_3^{-2/3} = 1,2 \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right) N_0^{2/3} \left[\sum_{i=1}^K (i - 0,5)^3 \cdot n_i \right]^{-2/3}; \quad (6.5в)$$

б) из условия $M_4 = m_4$:

$$a_{34} = \left(\frac{2}{m_4} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right) \sqrt{2N_0} \left[\sum_{i=1}^K (i - 0,5)^4 n_i \right]^{-0,5}. \quad (6.5г)$$

Приравнивая соответственно *центральные моменты* теоретического (4.3) и экспериментального (5.3) распределений, получим другие варианты определения искомого параметра теоретического закона. Так, приравнивая D_2 из (4.3е) и d_2 из (5.3в), получим

$$a_{35} = \left(\frac{4 - \pi}{4d_2} \right) = \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1}{\Delta t^2} \right) N_0 \left[\sum_{i=0}^K \left(i - 0,5 - \frac{m_1}{\Delta t} \right)^2 \cdot n_i \right]^{-1}. \quad (6.5д)$$

Аналогично приравниваем D_3 из (4.3п) и d_3 из (5.3д):

$$a_{36} = (0,063/d_3)^{2/3} \cong 0,156 \cdot \Delta t^{-2} \cdot N_0^{2/3} \left[\sum_{i=1}^K \left(i - 0,5 - \frac{m_1}{\Delta t} \right)^3 \cdot n_i \right]^{-2/3}. \quad (6.5е)$$

Приравнивая D_4 из (4.3р) и d_4 из (5.3ж), получим

$$a_{37} = (0,15/d_4)^{0,5} \cong 0,39 \sqrt{N_0} (\Delta t^{-2}) \left[\sum_{i=1}^K \left(i - 0,5 - \frac{m_1}{\Delta t} \right)^4 \cdot n_i \right]^{-0,5}. \quad (6.5ж)$$

При использовании **МНК** можно применить как условие (4.3в), так и (4.3г). При использовании (4.3в) подбор параметра a сводится к задаче минимизации функционала $Q = \sum_{i=1}^K (\lambda(t_i) - 2at_i)^2$. Из условия $dQ/da = 0$ приходим к уравнению вида $a = a_{38} = \frac{\sum_{i=1}^K \lambda_i t_i}{2 \sum_{i=1}^K t_i^2}$, которое с учетом (5.2г) приводится к виду

$$a = a_{38} = \frac{12}{K \Delta t^2 (4K^2 - 1)} \sum_{i=1}^K \frac{n_i (i - 0,5)}{N_{i-1} + N_i}. \quad (6.5и)$$

При выводе (6.5и) учтено, что $t_i = (i - 0,5)\Delta t$ и $\sum_{i=1}^K i^2 = K(K + 1)(2K + 1)/6$ [7].

При использовании выражения (4.3г) в соответствии с методом наименьших квадратов подбор параметра a сводится к минимизации функционала $Q = \sum_{i=1}^K (\lambda'(t_i) - 2a)^2$, где $\lambda'(t_i) \cong (\lambda_{i+1} - \lambda_i)/\Delta t$. Из условия $dQ/da = 0$ приходим к уравнению $\sum_{i=1}^K (\lambda'(t_i) - 2a) = 0$, которое записывается в виде [см. (5.2д)]

$$a = a_{39} = \sum_{i=1}^K \frac{\lambda'(t_i)}{2K} \cong \frac{(\lambda_K - \lambda_1)}{2K\Delta t} \cong \frac{1}{K\Delta t^2} \left(\frac{n_K}{N_{K-1}} - \frac{n_1}{N_0 + N_1} \right). \quad (6.5к)$$

При использовании ММП, как и ранее, анализируется функция $\ln L = \ln \prod_{i=1}^M 2at_i \exp(-at_i^2)$ [см. (4.3б)]. Решая уравнение $d \ln L/da = 0$, после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} [\ln L] &= \frac{d}{da} \left\{ \ln \prod_{i=1}^M 2at_i \exp(-at_i^2) \right\} = \frac{d}{da} \left\{ \sum_{i=1}^M (\ln 2at_i - at_i^2) \right\} = \\ &= \frac{d}{da} \left\{ \sum_{i=1}^M (\ln a + \ln 2t_i - at_i^2) \right\} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{a} - t_i^2 \right) = \frac{M}{a} - \sum_{i=1}^M t_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Далее, полагая, что $M = K$, $t_i = \Delta t \cdot (i - 0,5)$, $i \in \overline{1, K}$, и учитывая, что

$$\sum_{i=1}^K t_i^2 = \sum_{i=1}^K \Delta t^2 (i - 0,5)^2 = \Delta t^2 \sum_{i=1}^K (i^2 - i + 0,25) = \Delta t^2 K(4K^2 - 1)/12,$$

приходим к решению:

$$a = a_{3,10} = 12/\Delta t^2(4K^2 - 1). \quad (6.5л)$$

Как и для предыдущих законов, предпочтительным считается тот вариант параметра a_{3j} ($j = 1 \dots 10$), который для закона Рэлея обеспечивает минимум среднего квадрата ошибки аппроксимации эксперимента, в частности, предполагаемого (эмпирического) **закона вероятности безотказной работы**:

$$\Delta_{3j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\exp(-a_{3j}(i - 0,5)^2 \Delta t^2) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2. \quad (6.5м)$$

Если сравниваются **функции плотности вероятности** теоретического и эмпирического закона, то используют (4.3б) и (5.2в), при этом

$$\Delta_{3j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[2a_{3j}(i - 0,5)\Delta t \exp(-a_{3j}(i - 0,5)^2 \Delta t^2) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2. \quad (6.5н)$$

Наряду с (6.5м) и (6.5н) можно использовать и критерии близости (5.4б) и (5.4в).

6.4 Оптимизация параметров закона Вейбулла

Для закона Вейбулла [см. выражение (4.4)] необходимо оптимизировать два параметра – a и b . Как видно из (4.4г) и (4.4д), метод моментов не

позволяет непосредственно определить эти параметры, поскольку и первый, и второй моменты распределения сложным образом зависят одновременно от параметров a и b . Также неконструктивным оказывается и метод максимального правдоподобия [24].

При использовании метода наименьших квадратов требуется предварительно провести определенные преобразования над известными функциями $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$, чтобы привести их к системе линейных уравнений относительно оптимизируемых параметров [24]. Целесообразно в качестве исходной преобразуемой функции выбрать функцию (4.4в): $\lambda(t) = abt^{b-1}$, считая известными ее значения в моменты $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, $i \in \overline{1, K}$.

Логарифмируя обе части равенства, приходим к выражению вида

$$\ln \lambda(t_i) = \ln(ab) + (b - 1) \ln t_i,$$

которое с учетом введенных обозначений $\ln(ab) = X_0$, $(b - 1) = Y_0$, $\ln \lambda(t_i) = \ln \lambda_i = \varphi_i$, $\ln t_i = \Psi_i$ приводится к уравнению вида

$$X_0 + Y_0 \Psi_i - \varphi_i = 0, \quad (6.6a)$$

являющемуся линейным относительно неизвестных переменных X_0 и Y_0 .

Необходимо подобрать эти переменные таким образом, чтобы они минимизировали функционал $Q = \sum_{i=1}^K (X_0 + Y_0 \Psi_i - \varphi_i)^2$. Из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} dQ/dX_0 &= 0; \\ dQ/dY_0 &= 0, \end{aligned}$$

приходим к системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} KX_0 + Y_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i &= \sum_{i=1}^K \varphi_i; \\ X_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i + Y_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 &= \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i. \end{aligned} \right. \quad (6.6b)$$

Система двух линейных относительно X_0 и Y_0 уравнений решается известным образом, в результате получаем

$$X_0 = \frac{(\sum_{i=1}^K \varphi_i)(\sum_{i=1}^K \Psi_i^2) - (\sum_{i=1}^K \Psi_i)(\sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i)}{K(\sum_{i=1}^K \Psi_i^2) - (\sum_{i=1}^K \Psi_i)(\sum_{i=1}^K \Psi_i)}; \quad (6.6в)$$

$$Y_0 = \frac{(\sum_{i=1}^K \varphi_i)(\sum_{i=1}^K \Psi_i) - K(\sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i)}{(\sum_{i=1}^K \Psi_i)(\sum_{i=1}^K \Psi_i) - K(\sum_{i=1}^K \Psi_i^2)}.$$

Учитывая (6.6a) и (6.6в), определяем искомые параметры:

$$b = 1 + Y_0; \quad a = \exp(X_0)/(1 + Y_0). \quad (6.6г)$$

При расчете по формулам (6.6г) и (6.6в) целесообразно использовать приводимые ниже упрощения [26]:

- 1) $\sum_{i=1}^K \varphi_i = \sum_{i=1}^K \ln \lambda_i = \ln(\prod_{i=1}^K \lambda_i)$;
- 2) $\sum_{i=1}^K \Psi_i = \sum_{i=1}^K \ln t_i = \sum_{i=1}^K \ln(i - 0,5) \Delta t =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^K (\ln(i - 0,5) + \ln \Delta t) = K \ln \Delta t + \ln[(2K)! / (K! 2^{2K})] = \\
&= \ln\{(\Delta t^K (2K)!)/(2^{2K} K!)\}; \\
3) \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 &= \sum_{i=1}^K (\ln(i - 0,5) \Delta t)^2 = \sum_{i=1}^K (\ln(i - 0,5) + \ln \Delta t)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^K \ln^2(i - 0,5) + 2 \ln \Delta t \cdot \ln\{(2K)! / (2^{2K} \cdot K!)\} + K (\ln \Delta t)^2; \quad (6.7) \\
4) \sum_{i=1}^K \Psi_i &= (\sum_{i=1}^K \Psi_i)^2 = \ln^2\{(\Delta t^K \cdot (2K)!)/(2^{2K} \cdot K!)\}; \\
5) \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i &= \sum_{i=1}^K \ln \lambda_i \cdot \ln t_i = \sum_{i=1}^K (\ln \lambda_i (\ln(i - 0,5) + \ln \Delta t)) = \\
&= (\ln \Delta t) \cdot \ln(\prod_{i=1}^K \lambda_i) + \ln(\prod_{i=1}^K (i - 0,5)^{\ln \lambda_i}).
\end{aligned}$$

В этих формулах λ_i определяется из (5.2г).

После определения оптимальных параметров распределения a и b рассчитывается средний квадрат ошибки аппроксимации из выражения

$$\Delta_4 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\exp(-a((i - 0,5)\Delta t)^b) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2, \quad (6.8a)$$

если сравниваются **функции вероятности безотказной работы** для теоретического и экспериментального законов.

Иногда удобнее ориентироваться на средний квадрат ошибки аппроксимации **функций плотности вероятности** теоретического и экспериментального законов. Тогда, используя (4.4б) и (5.2в), получим

$$\Delta_4^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[ab t_i^{b-1} \exp(-a t_i^b) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2, \quad (6.8б)$$

где, как и ранее, $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, $i \in [1, K]$.

При необходимости наряду с (6.7а) и (6.8б) можно использовать и критерии близости типа (5.4б) и (5.4в).

6.5 Параметрическая оптимизация нормального закона

Для нормального закона [см. выражения (4.5)] характерно, что его параметры T_H и σ_H легко определить на основе **метода моментов**. Тогда с учетом (4.5д) и (5.3а), т. е. приравнивая *первые начальные моменты*, получим [24]

$$T_H = T_{H1} \cong m_1 = \frac{\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i. \quad (6.9)$$

С учетом (4.5ж) и (5.3б)–(5.3в), т. е. приравнивая *вторые начальные моменты*, получим

$$\sigma_H^2 = \sigma_{H1}^2 \cong m_2 - m_1^2 = \frac{\Delta t^2}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i - T_{H1}^2. \quad (6.10a)$$

Считая известным первый выборочный момент и полагая равными *третьи начальные моменты* ($m_3 = M_3$), т. е., используя (4.5д), (4.5и) и (5.3а), (5.3г), получим второй вариант расчета σ_H :

$$\sigma_{\text{H2}}^2 = \frac{(m_3 - m_1^3)}{3m_1} = \frac{\left\{ \frac{\Delta t^3}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^3 n_i - \frac{\Delta t^3}{N_0^3} [\sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i]^3 \right\}}{3(\Delta t/N_0) \sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i} =$$

$$= \frac{1}{3} \Delta t^2 \left\{ \frac{\sum_{i=1}^K (i - 0,5)^3 n_i}{\sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i} - \frac{1}{N_0^2} \left[\sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i \right]^2 \right\}. \quad (6.10б)$$

Используя (4.5н) и приравнявая D_4 и d_4 из (5.3ж), получим вариант

$$\sigma_{\text{H3}}^2 = \left(\frac{d_4}{3} \right)^{0,5} = \Delta t^2 \left(\frac{1}{3N_0} \right)^{0,5} \cdot \left[\sum_{i=1}^K \left(i - 0,5 - \frac{m_1}{\Delta t} \right)^4 \cdot n_i \right]^{0,5}. \quad (6.10в)$$

Полагая, как и ранее, известным $T_{\text{H}} = m_1$ и приравнявая M_4 из (4.5к) и m_4 из (5.3е), приходим к выражению $T_{\text{H}}^4 + 6T_{\text{H}}^2 \sigma_{\text{H}}^2 + 3\sigma_{\text{H}}^4 = m_4$, которое является уравнением второй степени относительно неизвестной $x = \sigma_{\text{H}}^2$. Решением этого уравнения является величина

$$\sigma_{\text{H4}}^2 = -T_{\text{H}}^2 + \frac{1}{3} [6T_{\text{H}}^4 + 3m_4]^{0,5} = \frac{1}{3} [6T_{\text{H}}^4 +$$

$$+ \left(\frac{3\Delta t^4}{N_0} \right) \sum_{i=1}^K \left(i - 0,5 - \frac{T_{\text{H}}}{\Delta t} \right)^4 n_i]^{0,5} - T_{\text{H}}^2, \quad (6.10г)$$

где $T_{\text{H}} = T_{\text{H1}} = m_1$.

Отметим, что для рассмотренных расчетных пар $T_{\text{H}j}$ и $\sigma_{\text{H}j}$ ($j = 1...4$) параметр $\sigma_{\text{H}j}$ рассчитывается согласно (6.10а)–(6.10г), а параметр $T_{\text{H}j}$ остается фиксированным согласно (6.8), т. е. $T_{\text{H}j} = T_{\text{H1}}$.

В исследованиях [45] показано, что с целью уменьшения влияния разброса экспериментальных наблюдений на параметры нормального закона последние целесообразно определять по критерию **максимальной устойчивости**:

$$T_{\text{H}} = T_{\text{H5}} = \frac{\sum_{i=1}^K t_i f_i}{\sum_{i=1}^K f_i};$$

$$\sigma_{\text{H}}^2 = \sigma_{\text{H5}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (t_i - T_{\text{H5}})^2 f_i}{0,5 \sum_{i=1}^K f_i},$$

где f_i определяется из (5.2в).

Если в этих выражениях умножить числитель и знаменатель дроби на величину Δt и учесть, что $\sum_{i=1}^K f_i \Delta t \cong 1,0$, то получим

$$T_{\text{H5}} = T_{\text{H1}} \text{ [см. (6.9)];}$$

$$\sigma_{\text{H5}}^2 = 2\sigma_{\text{H1}}^2 \text{ [см. (6.10а)].} \quad (6.10д)$$

Следующий вариант определения параметров нормального закона T_{H} и σ_{H} основан на использовании **метода наименьших квадратов**. С этой целью найдем значения функции плотности распределения $f(t)$ [см. (4.5а)] для двух значений $t_1 = t_i$ и $t_2 = t_j$: $f(t = t_i) = f_i$; $f(t = t_j) = f_j$. В этом случае

$$f_i/f_j = \exp \left[\frac{(t_j - T_H)^2 - (t_i - T_H)^2}{2\sigma_H^2} \right]$$

и после логарифмирования получаем

$$(t_j - T_H)^2 - (t_i - T_H)^2 - 2\sigma_H^2 \ln(f_i/f_j) = 0, \quad (6.11)$$

где $t_j = (j - 0,5)\Delta t$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} T_H/\Delta t &= X_0; \\ \sigma_H^2/\Delta t^2 &= Y_0; \\ j &= i + 1; \ln f_i/f_{i+1} = \Psi_i. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Тогда предыдущее уравнение (6.10) приведет к виду

$$i - X_0 - Y_0\Psi_i = 0.$$

По методу наименьших квадратов необходимо подобрать такие значения X_0 и Y_0 , которые бы минимизировали функционал $Q = \sum_{i=1}^{K-1} (X_0 + Y_0\Psi_i - i)^2$.

Для этого следует решить систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \partial Q/\partial X_0 &= 0, \\ \partial Q/\partial Y_0 &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных X_0 и Y_0 .

Можно показать, что эта система имеет вид [24, 26]

$$\begin{cases} X_0(K-1) + Y_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i = \frac{(K-1)K}{2}; \\ X_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i + Y_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^{K-1} i\Psi_i. \end{cases} \quad (6.13a)$$

Обозначим коэффициенты и постоянные члены в (6.13a) с учетом (6.12):

$$\begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i = \sum_{i=1}^{K-1} \ln \frac{f_i}{f_{i+1}} = \ln \prod_{i=1}^{K-1} \frac{f_i}{f_{i+1}} = \ln \frac{f_1}{f_K}; \\ \beta = \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^{K-1} \ln^2 \frac{f_i}{f_{i+1}}; \gamma = \sum_{i=1}^{K-1} i\Psi_i = \ln \prod_{i=1}^{K-1} \left(\frac{f_i}{f_{i+1}} \right)^i, \end{cases} \quad (6.13b)$$

где значения f_i определяются из (5.2в).

Тогда решение системы (6.12a) приведем к виду

$$\begin{cases} Y_0 = \frac{(K-1)(0,5K\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \beta(K-1)}; \\ X_0 = \frac{0,5K\beta(K-1) - \gamma\alpha}{\beta(K-1) - \alpha^2}. \end{cases} \quad (6.13b)$$

С учетом (6.12) и (6.13в) получим окончательно

$$\sigma_H^2 = \sigma_{H6}^2 = Y_0\Delta t^2; \quad T_H = T_{H6} = X_0\Delta t. \quad (6.14)$$

Следующий вариант расчета параметров нормального закона основан на использовании **функции правдоподобия**, определяемой с учетом (4.5а) в виде [3, 11, 37, 39]

$$L = \prod_{i=1}^M f(t_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^M \sigma_H^M} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_H^2} \sum_{i=1}^M (t_i - T_H)^2 \right],$$

где M – общее число анализируемых точек по времени ($M \gg 1$).

Оптимальные параметры T_H и σ_H находят путем решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial \ln L / \partial T_H &= 0, \\ \partial \ln L / \partial \sigma_H &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае, полагая $M = K$, $t_i = \Delta t(i - 0,5)$, имеем [26]

$$\begin{aligned} T_H &= T_{H7} = \sum_{i=1}^K \frac{t_i}{K} \approx 0,5\Delta t \cdot K; \\ \sigma_H^2 &= \sigma_{H7}^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(t_i - T_{H7})^2}{K} = \sum_{i=1}^K \frac{t_i^2}{K} - T_{H7}^2 \cong \Delta t^2(K^2 - 1)/12. \end{aligned}$$

В отличие от других законов распределения, рассматриваемых выше, нормальный закон для определения вероятности безотказной работы $P(t)$ в момент времени t_i требует обращения к табличной функции Лапласа [см. выражение (4.5б)]. Тогда средний квадрат ошибки отклонения выбранного теоретического закона распределения с параметрами T_{Hj} и σ_{Hj} при $j = 1 \dots 7$ определяется в виде

$$\Delta_{5j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[0,5 - \Phi_0 \left(\frac{t_i - T_{Hj}}{\sigma_{Hj}} \right) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2, \quad (6.15a)$$

где $t_i = (i - 0,5)\Delta t$;

P_i, P_{i-1} – экспериментальные значения вероятности безотказной работы для $t = t_i$ и $t = t_{i-1}$ [см. (5.2а), (5.2б)];

$\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, определяемая для $z = z_i = [(i - 0,5)\Delta t - T_{Hj}]/\sigma_{Hj}$ [см. (4.5в)].

В ряде случаев удобнее определить средний квадрат ошибки аппроксимации, сравнивая функции **плотности вероятности** теоретического и экспериментального законов распределения. Используя (4.5а) и (5.2в), получим

$$\Delta_{Sj}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\frac{1}{\sigma_{Hj}\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t_i - T_{Hj})^2}{2\sigma_{Hj}^2} \right) - \frac{n_i}{N_0\Delta t} \right]^2. \quad (6.15б)$$

Расчет по (6.15а)–(6.15б) проводится для всех вариантов расчета параметров T_{Hj} и σ_{Hj} ($j = 1 \dots 7$). Оптимальными считаются те пары значений T_{Hj}, σ_{Hj} , которые обеспечивают минимум Δ_{5j} или Δ_{5j}^* .

Примечание – Для повышения точности расчетов целесообразно использовать критерии (5.4б), (5.4в), а в качестве функций $\varphi(t_i)$ – функции плотности вероятности.

6.6 Параметрическая оптимизация усеченного нормального закона

Для усеченного нормального закона [см. выражение (4.6)] необходимо оптимизировать параметры T_y и σ_y .

При использовании **метода моментов** будем полагать, что начальные и центральные моменты теоретического распределения равны соответствующим выборочным моментам экспериментального распределения. Так, полагая, что $M_1 = m_1$, $M_2 = m_2$ и соответственно $D_2 = d_2$ и $D_3 = d_3$, получим, используя (4.7) и (5.3), следующие уравнения [24]:

а) используя (4.7д)–(4.7и):

$$m_2 = \sigma_y^2 + m_1 T_y; \quad (6.16)$$

б) используя (4.7н):

$$d_3 = (m_1 - T_y)(m_1^2 - d_2) \text{ или } T_y = m_1 - d_3 / (m_1^2 - d_2). \quad (6.17)$$

Подставляя (6.17) в (6.16), получим

$$\sigma_y = (m_2 - m_1 T_y)^{0,5} = \{m_2 - m_1^2 + m_1 d_3 / (m_1^2 - d_2)\}^{0,5}. \quad (6.18)$$

В выражениях (6.17) и (6.18) выборочные моменты m_1, m_2 и d_2, d_3 определяются по результатам испытаний из (5.3).

Расчетные коэффициенты k и C_y , используемые в (4.7), могут быть определены двумя способами. В первом случае из уравнения (4.7д) получаем

$$k = k_1 = m_1 - T_y / \sigma_y; \quad C_y = C_{y1} = k_1 \sqrt{2\pi} \cdot \exp(T_y^2 / 2\sigma_y^2). \quad (6.19)$$

Во втором случае используем сначала (4.7б), а затем (4.7д):

$$C_y = C_{y2} = [0,5 + \Phi_0(Z_0 = T_y / \sigma_y)]^{-1};$$
$$k = k_2 = \frac{C_{y2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{T_y^2}{2\sigma_y^2}\right). \quad (6.20)$$

Альтернативным методом расчета параметров теоретического усеченного нормального закона является **метод наименьших квадратов**, который, как следует из преобразований (6.11)–(6.13), пригоден как для неусеченного, так и усеченного нормального законов. При этом оказывается, что если осуществлять такие же процедуры преобразования над функцией плотности распределения $f(t)$ из (6.16), какие ранее применялись к функции $f(t)$ из (4.5а), то можно полностью использовать результаты (6.11)–(6.14) [24].

Далее по рассчитанным на основании (6.14) параметрам T_y и σ_y определяется поправочный множитель $C_y = \varphi(T_y, \sigma_y)$ [см. (4.7а) и (4.5в)].

Таким образом, порядок расчета имеет вид:

- 1) определяем X_0, Y_0 из (6.13в);
- 2) рассчитываем $\sigma_y^2 = Y_0 \Delta t^2$; $T_y = X_0 \Delta t$; (6.21)
- 3) определяем C_y из (4.7б).

Для каждого из приведенных вариантов расчета (в данном случае их всего три, $j = 1 \dots 3$) находят средний квадрат ошибки между теоретическим и экспериментальным законами распределения:

$$\Delta_{6j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[C_{yj} \left(0,5 - \Phi_0 \left(\frac{t_i - T_y}{\sigma_y} \right) \right) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2 ; \quad (6.22a)$$

$$\Delta_{6j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\frac{C_{yj}}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t_i - T_{yj})^2}{2\sigma_{yj}^2} \right) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2. \quad (6.22б)$$

Здесь выражение (6.22а) определяет средний квадрат погрешности аппроксимации для функции вероятности безотказной работы, а (6.22б) – для функции плотности вероятности. При этом параметры экспериментального закона определяются, как и ранее, из (5.2): $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, $i \in \overline{1, K}$; $\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, определяемая для $Z = Z_i = (t_i - T_{yj})/\sigma_{yj}$ [см. (4.5в)].

Оптимальным считается тот набор расчетных параметров (T_{yj} , σ_{yj} , C_{yj}), который обеспечивает минимальное значение (6.22а) или (6.22б).

Примечание – Для удобства сравнения с другими возможными вариантами аппроксимации теоретического закона целесообразно оценить и значения среднего **относительного** квадрата отклонения, определяемого из (5.4б), или **взвешенного** квадрата отклонения по (5.4в), при этом в качестве функций $\varphi_3(t_i)$ и $\varphi_T(t_i)$ использовать функции $P_3(t_i)$ и $P_T(t_i)$ или $f_3(t_i)$ и $f_T(t_i)$.

6.7 Оптимизация параметров логнормального закона

Для логнормального закона [см. выражения (4.9)] необходимо оптимизировать два параметра – μ_l и σ_l . Как и для вышерассмотренных законов, целесообразно использовать наиболее часто применяемые методы решения: метод моментов, метод максимального правдоподобия и метод наименьших квадратов [1–5, 27, 37, 39].

Для **логнормального** закона при использовании **метода моментов** возможны несколько вариантов решения поставленной задачи.

Для **первого** варианта, например, примем, что среднее время безотказной работы, определяемое из (4.9д), равно выборочному среднему m_1 экспериментальной функции (5.3а), а также равны средний квадрат отклонений теоретического закона (4.9е) и выборочная дисперсия d_2 по эксперименту в (5.3в). В этом случае получаем систему уравнений

$$\begin{cases} T_0 = \exp \left(\mu_l + \frac{\sigma_l^2}{2} \right) = m_1; \\ \sigma_T^2 + T_0^2 = \exp(2\mu_l + 2\sigma_l^2) = m_2. \end{cases} \quad (6.23)$$

Можно показать [27], что решением этой системы являются значения

$$\sigma_l^2 = \sigma_{l1}^2 = \ln \frac{m_2}{m_1^2}; \quad \mu_l = \mu_{l1} = 0,5 \ln \frac{m_1^4}{m_2}, \quad (6.24a)$$

которые после подстановки (5.3а), (5.3б) и ряда упрощений приводятся к виду

$$\begin{cases} \sigma_{л1}^2 = \ln \left(\sum_{i=1}^K \frac{(i-0,5)^2 n_i}{N_0} \right) - 2 \ln \left(\sum_{i=1}^K \frac{(i-0,5) n_i}{N_0} \right); \\ \mu_{л1} = \ln \Delta t + 2 \ln \left(\sum_{i=1}^K (i-0,5) n_i / N_0 \right) - 0,5 \ln \left(\sum_{i=0}^K (i-0,5)^2 n_i / N_0 \right). \end{cases} \quad (6.246)$$

Вторым вариантом использования метода моментов является, например, признание того факта, что $m_1 = M_1$ и $m_3 = M_3$, где m_1 и m_3 определяются по результатам эксперимента (5.3), а M_1 и M_3 – из (4.9). В этом случае получаем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 = M_2 = \exp(\mu_l + \sigma_l^2/2); \\ m_3 = M_3 = \exp(3\mu_l + 9\sigma_l^2/2). \end{cases} \quad (6.25)$$

Решением этой системы являются значения [27]

$$\sigma_l^2 = \sigma_{л2}^2 = \ln \frac{\sqrt[3]{m_3}}{m_1}; \quad (6.26)$$

$$\mu_l = \mu_{л2} = 0,5 \ln(m_1^3 / \sqrt[3]{m_3}),$$

где m_1 определяется по (5.3а), m_3 – по (5.3г).

Третьим возможным вариантом применения метода моментов является утверждение, что совместно равны $m_1 = M_1$ и $m_4 = M_4$. В этом случае совместно решаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} m_1 = M_1 = \exp(\mu_l + \sigma_l^2/2); \\ m_4 = M_4 = \exp(4\mu_l + 8\sigma_l^2). \end{cases} \quad (6.27)$$

Ее решением являются значения

$$\sigma_l^2 = \sigma_{л3}^2 = (1/3) \ln(\sqrt{m_4}/m_1^2); \quad (6.28)$$

$$\mu_l = \mu_{л3} = (1/3) \ln(m_1^4 / \sqrt[4]{m_4}),$$

где m_4 определяется по (5.3е).

Четвертый вариант использования метода моментов основан на признании, что равны соответственно $m_2 = M_2$ и $m_3 = M_3$. Тогда, используя (6.23), (6.25), придем к выражениям [27]

$$\sigma_l^2 = \sigma_{л4}^2 = \ln(m_3^{2/3}/m_2); \quad (6.29)$$

$$\mu_l = \mu_{л4} = 0,5 \ln(m_2^3/m_3^{4/3}).$$

Пятый вариант расчета по методу моментов основан на том, что равны соответственно $m_2 = M_2$ и $m_4 = M_4$. Используя (4.9ж) и (4.9л), находим

$$\sigma_l^2 = \sigma_{л5}^2 = 0,5 \ln(\sqrt{m_4}/m_2); \quad \mu_l = \mu_{л5} = \ln(m_2/m_4^{1/4}). \quad (6.30)$$

Шестой вариант расчета по методу моментов основан на использовании равенства $m_3 = M_3$ и $m_4 = M_4$. Из (4.9к) и (4.9и) получим

$$\sigma_l^2 = \sigma_{л6}^2 = 0,5 \ln(m_4/m_3^{4/3}); \quad \mu_l = \mu_{л6} = \ln(m_3^{1/3}/m_4^{3/4}). \quad (6.31)$$

При использовании **метода максимального правдоподобия** для логнормального закона будем использовать значение функции (4.9а) для произвольного $t = t_i$ и определять логарифм функции правдоподобия в виде

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^K f(t_i) = \sum_{i=1}^K \ln f(t_i) = \sum_{i=1}^K (\ln 1/t_i + \ln 1/\sigma\sqrt{2\pi} - (\ln t_i - \mu_{л7})^2/2\sigma_{л7}^2).$$

Решая совместно уравнения $d\ln L/d\mu_{л7} = 0$ и $d\ln L/d\sigma_{л7} = 0$ и опуская промежуточные преобразования, получим [27]

$$\mu_{л7} = \mu_{л7} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln t_i \cong \ln \Delta t - 2 \ln 2 + \frac{1}{K} \ln\{(2K)!/K!\}; \quad (6.32)$$

$$\sigma_{л7}^2 = \sigma_{л7}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln^2 t_i - \mu_{л7}^2 \cong (2\mu_{л7} - \ln \Delta t) \ln \Delta t + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln^2(i - 0,5) - \mu_{л7}^2.$$

При выводе (6.246) и (6.32) принималось $t_i = (i - 0,5)\Delta t$.

Следующий вариант определения параметров $\mu_{ли}$, $\sigma_{ли}$ для логнормального закона может быть выполнен при использовании **метода наименьших квадратов**. В этом случае решение находим путем определения функции из выражения (4.9а) для двух значений $t = t_i$ и $t = t_j$ и затем исследования функции $f(t_i)/f(t_j) = f_i/f_j$, которая приводится к виду

$$\ln \frac{f_i \cdot t_i}{f_j \cdot t_j} = \frac{(\ln^2 t_j - \ln^2 t_i) + 2\mu_{л7} \ln(t_i/t_j)}{2\sigma_{л7}^2}. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.33), в свою очередь, после подстановки $j = i + 1$ и несложных преобразований приводится к выражению

$$\mu_{л7} - \sigma_{л7}^2 \left(1 + \frac{\ln(f_{i+1}/f_i)}{\ln(t_{i+1}/t_i)} \right) - \ln \sqrt{t_i \cdot t_{i+1}} = 0. \quad (6.34)$$

Обозначая $\mu_{л7} = x$, $\sigma_{л7}^2 = y$, $a_i = 1 + \frac{\ln(f_{i+1}/f_i)}{\ln(t_{i+1}/t_i)}$, $b_i = 0,5 \ln(t_i \cdot t_{i+1})$, можно привести (6.34) к виду

$$x - ya_i - b_i = 0; i = 1, 2 \dots (K - 1). \quad (6.35)$$

Очевидно, для разных значений i параметры x и y из (6.35) будут разными. В соответствии с методом наименьших квадратов оптимальными будем считать такие значения параметров x и y , которые минимизируют функционал $Q(x, y) = \sum_{i=1}^{K-1} (x - ya_i - b_i)^2 \rightarrow \min$. Для этого следует решить систему из двух линейных уравнений

$$d\theta/dx = 0 \text{ и } d\theta/dy = 0,$$

которая имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{K-1} (x - ya_i - b_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{K-1} (x - ya_i - b_i)a_i &= 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Можно показать, что решением системы (6.36) является [27]

$$x = \mu_{л8} = \frac{(\sum_{i=1}^{K-1} b_i) \cdot (\sum_{i=1}^{K-1} a_i^2) - (\sum_{i=1}^{K-1} a_i) \cdot (\sum_{i=1}^{K-1} (a_i \cdot b_i))}{(K-1)(\sum_{i=1}^{K-1} a_i^2) - (\sum_{i=1}^{K-1} a_i)^2} = \frac{\gamma \cdot q - pz}{(K-1)q - p^2}; \quad (6.37a)$$

$$y = \sigma_{л8}^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{K-1} b_i) \cdot (\sum_{i=1}^{K-1} a_i) - (K-1)(\sum_{i=1}^{K-1} (a_i \cdot b_i))}{(K-1)(\sum_{i=1}^{K-1} a_i^2) - (\sum_{i=1}^{K-1} a_i)^2} = \frac{\gamma \cdot q - (K-1)z}{(K-1)q - p^2}. \quad (6.37б)$$

Полагая, что $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, можно привести выражения для элементов, входящих в (6.37a) и (6.37б), к более удобной для расчета форме [27]

$$a_i = 1 + \ln(f_{i+1}/f_i) / \ln[(i + 0,5)/(i - 0,5)]; \quad (6.38a)$$

$$b_i = 0,5 \ln(t_i \cdot t_{i+1}) = \ln \Delta t + 0,5 \ln(i^2 - 0,25); \quad (6.38б)$$

$$p = \sum_{i=1}^{K-1} a_i = (K-1) + \sum_{i=1}^{K-1} (\ln(f_{i+1}/f_i) / \ln[(i + 0,5)/(i - 0,5)]); \quad (6.38в)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i=1}^{K-1} b_i = \sum_{i=1}^{K-1} 0,5 \ln(t_i t_{i+1}) = 0,5 \ln \prod_{i=1}^{K-1} (t_i t_{i+1}) = \\ &= 0,5 \ln(t_1 t_K) + \sum_{i=1}^{K-1} \ln t_i = \\ &= (K-1) \ln \left(\frac{\Delta t}{4} \right) + \ln \left\{ \frac{(2K-2)! (2K-1)^{0,5}}{(K-1)!} \right\}; \end{aligned} \quad (6.38г)$$

$$q = \sum_{i=1}^{K-1} a_i^2 = 2p - (K-1) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\ln^2(f_{i+1}/f_i)}{\ln^2[(i + 0,5)/(i - 0,5)]} \right); \quad (6.38д)$$

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{K-1} a_i b_i = \gamma + (p + 1 - K) \ln \Delta t + \\ &+ \sum_{i=1}^{K-1} \ln(f_{i+1}/f_i) \cdot \ln(i^2 - 0,25) / 2 \ln[(i + 0,5)/(i - 0,5)]. \end{aligned} \quad (6.38е)$$

После получения расчетных значений всех возможных пар параметров логнормального закона $\mu_{лj}$ и $\sigma_{лj}$ ($j = 1 \dots 8$) определяется одна из них, которая обеспечивает минимальное значение среднего квадрата отклонений по выбранной формуле (5.4a), (5.4б). Эта пара и будет считаться наилучшим вариантом аппроксимации результатов эксперимента логнормальным законом распределения.

6.8 Оптимизация параметров гамма-закона

Для гамма-закона [см. (4.10)] необходимо определить оптимальные значения двух параметров – α и β . Как и для других законов, целесообразно использовать ММ, ММП и МНК.

Для гамма-распределения, используя **метод моментов**, целесообразно проанализировать два возможных способа решения поставленной задачи [27].

В первом случае примем, что среднее время безотказной работы, определяемое из (4.10д), равно выборочному среднему m_1 экспериментальной функции (5.3а). Соответственно, также полагаем, что среднее квадратическое отклонение среднего времени безотказной работы σ_T , определяемое из (4.10ж), равно корню квадратному выборочной дисперсии из (5.3в). Решая систему из двух уравнений $m_1 \cong M_1$ и $d_2 \cong D_2$, имеющих вид

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha\beta; \\ m_2 - m_1^2 &= \alpha\beta^2, \end{aligned} \quad (6.39)$$

нетрудно найти искомые параметры закона для этого варианта:

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}; \quad \beta = \beta_1 = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1}. \quad (6.40)$$

Во втором случае будем полагать, что экспериментальный и теоретический гамма-законы имеют равные второй и третий центральные моменты, т. е. $d_2 = D_2$ и $d_3 = D_3$, где d_2 и d_3 определены в (5.3в), (5.3д), а D_2 и D_3 – в (4.10и), (4.10м). Решая систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} d_2 &= D_2 = \alpha\beta^2; \\ d_3 &= D_3 = 2\alpha\beta^3, \end{aligned} \quad (6.41)$$

получим

$$\beta = \beta_2 = 0,5d_3/d_2; \quad \alpha = \alpha_2 = d_2/\beta^2 = 4d_2^3/d_3^2. \quad (6.42)$$

При использовании **метода максимального правдоподобия** для гамма-распределения анализируется логарифм функции правдоподобия, определяемый на основании (4.10а) в виде

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \prod_{i=1}^K f(t_i) = \sum_{i=1}^K \ln f(t_i) = \\ &= \sum_{i=1}^K \left\{ (\alpha - 1) \ln t_i - \frac{t_i}{\beta} - \alpha \ln \beta - \ln \Gamma(\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция от аргумента α [см. пояснения к (4.4)].

Оптимизируемые параметры α и β находят из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} d \ln L / d \alpha &= 0; \\ d \ln L / d \beta &= 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование (6.43) по α приводит к уравнению

$$\ln \beta = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln t_i - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha}, \quad (6.44)$$

а дифференцирование (6.43) по β – к уравнению

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \sum_{i=1}^K \frac{t_i}{K} = \sum_{i=1}^K \frac{(i-0,5)\Delta t}{K} = \\ &= \left(\frac{\Delta t}{K}\right) \left(\frac{K(K+1)}{2} - \frac{K}{2}\right) = \frac{K\Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Учтем, что в (6.44)

$$\sum_{i=1}^K \ln t_i \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln(i-0,5)\Delta t \cong \ln \Delta t - 2\ln 2 + K^{-1} \ln \frac{(2K)!}{K!},$$

а в (6.45) $\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta = \ln K\Delta t - \ln 2$.

Приходим к выражению

$$\ln \alpha - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} = \ln 2K - K^{-1} \cdot \ln \frac{(2K)!}{K!}, \quad (6.46)$$

которое имеет одно решение, определяемое численным методом с использованием табличных значений гамма-функции для $\alpha \in [1,0; 2,0]$ и расчетной формулы $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, если $\alpha > 2$ [33–34, 45].

Как показывают расчеты, решением (6.44) и (6.43) для типовых значений $K = 5 \dots 12$ являются значения [27]

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_3 \cong 2,25; \\ \beta &= \beta_3 \cong K\Delta t/4,5. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Таковы оптимальные параметры гамма-распределения по методу ММП.

При использовании **МНК** для определения оптимальных параметров гамма-распределения будем использовать выражение (4.10а) для двух значений $t = t_i$ и $t = t_j$, получим

$$\frac{f(t_i)}{f(t_j)} = (t_i/t_j)^{\alpha-1} \cdot \exp[-(t_i - t_j)/\beta]. \quad (6.48)$$

Если в (6.48) принять $j = i + 1$, $t_i = (i-0,5)\Delta t$ и обозначить $f(t_i) = f_i$, то придем к выражениям

$$\frac{f_i}{f_{i+1}} = \left(\frac{i-0,5}{i+0,5}\right)^{\alpha-1} \cdot \exp\left(\frac{\Delta t}{\beta}\right); \quad (6.49)$$

$$\ln(f_i/f_{i+1}) = (\alpha-1) \ln\left(\frac{i-0,5}{i+0,5}\right) + \frac{\Delta t}{\beta}. \quad (6.50)$$

Обозначим $(1/\beta) = x$, $(\alpha-1) = y$ и приведем (6.50) к виду

$$x\Delta t + y \ln\left(\frac{i-0,5}{i+0,5}\right) - \ln \frac{f_i}{f_{i+1}} = 0. \quad (6.51)$$

Подберем параметры x и y такими, чтобы минимизировать функционал

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{K-1} \left(x\Delta t - y \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) + \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Для этого необходимо решить систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} d\theta/dx &= 0; \\ d\theta/dy &= 0, \end{aligned}$$

которые приводятся к виду [27]

$$\begin{cases} \Delta t(K-1)x - y \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} = 0; \\ x\Delta t \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) - y \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \ln^2 \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \cdot \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

Решая известным образом систему уравнений (6.52) и возвращаясь к основным параметрам $\beta = 1/x$ и $\alpha = y + 1$, получим $\alpha = \alpha_4$, $\beta = \beta_4$, где

$$\alpha_4 = 1 + \frac{\ln(2K-1) \cdot \ln \left(\frac{f_K}{f_1} \right) - (K-1) \sum_{i=1}^{K-1} \left[\ln \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \cdot \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) \right]}{\ln^2(2K-1) - (K-1) \sum_{i=1}^{K-1} \ln^2 \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right)}; \quad (6.53a)$$

$$\beta_4 = 1 + \frac{\ln(2K-1) - (K-1) \sum_{i=1}^{K-1} \ln^2 \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right)}{\ln(2K-1) \cdot \ln(f_K/f_1) - (K-1) \sum_{i=1}^{K-1} \left[\ln \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \cdot \ln \left(\frac{i+0,5}{i-0,5} \right) \right]}. \quad (6.53b)$$

Далее выбор каждой из четырех полученных пар параметров $\{\alpha_j, \beta_j\}$ ($j = 1 \dots 4$) оценивается по величине используемого критерия (5.4а), (5.4б) – суммы квадратов отклонения выборочной (экспериментальной) функции от соответствующей теоретической функции. Определяется та пара значений α_j, β_j , которая обеспечивает наименьшее отклонение и наилучший результат аппроксимации результатов эксперимента с помощью гамма-распределения.

6.9 Выбор и обоснование оптимального теоретического закона распределения

Как уже говорилось выше, в качестве оптимального теоретического закона выбирается тот из числа рассмотренных (см. подразделы 6.1–6.8), который обеспечивает минимальное значение среднего квадрата ошибки (разности) между выборочными значениями одноименных функций экспериментального (эмпирического, опытного) и каждого из рассматриваемых теоретических законов распределения [см. (5.3)] [24–27]. При малых различиях между полученными данными целесообразно находить относительную

величину $\delta_{sq} = \Delta_s / \Delta_q$ или $\delta_{sq}^* = \Delta_s^* / \Delta_q^*$, где $s = 1 \dots 8$ – текущий номер теоретического закона (см. подразделы 6.1–6.8), q – номер закона, выбранного условно в качестве опорного. Очевидно, при $s = q$ имеем $\delta_{sq} = \delta_{sq}^* = 1$.

В случае, если несколько (два и более) теоретических закона дают приблизительно одно и то же значение δ_{sq} или δ_{sq}^* , целесообразно выбрать тот из них, который дает минимальное значение среднего квадрата отклонения Δ_s или Δ_s^* на укороченном интервале времени безотказной работы $0 < t_i < t_{\min}$ (см. рисунок 5.1) или соответственно для числа точек

$$0 < i < K^*; K^* \leq [t_{\min} / \Delta t],$$

где K^* – ближайшее меньшее целое от величины $t_{\min} / \Delta t$, причем $t_{\min} < t_{\max}$; $K^* < K$.

В таком случае расчет Δ_s и Δ_s^* ведется по вышеприведенным формулам для $i = 0, 1 \dots K^*$, т. е. для тех значений времени безотказной работы, где вероятность безотказной работы достаточно велика ($P_i \geq 0,5$) и где близость теоретического и опытного законов распределения позволяет более точно прогнозировать гарантированное время работы проектируемого изделия.

7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ УКОРОЧЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ В НОРМАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Как уже говорилось (см. раздел 5), в режиме форсированных (ускоренных) опытных испытаний (ФИ) оценивается время безотказной работы представительной партии однотипных изделий, когда условия их работы существенно отличаются от реальных эксплуатационных условий.

Вследствие «тяжелых» условий работы изделий в режиме форсированных испытаний (повышенная/пониженная температура, повышенные/пониженные питающие напряжения, вибрации, удары и т. п.) изделия сравнительно быстро выходят из строя. В результате за относительно небольшое время испытаний удается вывести из строя всю опытную партию и тем самым получить достаточную информацию о примерных вероятностных законах безотказной работы в таком режиме.

Главная задача ФИ – определить оптимальный теоретический закон распределения времени безотказной работы, наилучшим образом описывающий результаты испытаний (см. раздел 6).

Главная трудность при этом – обеспечить эквивалентность (пропорциональность по времени) законов распределения времени безотказной работы в режиме форсированных и нормальных испытаний.

Если это условие выполнено, то можно считать, что оптимальный закон распределения, найденный по результатам форсированных испытаний, сохраняется (с точностью до значений параметров этого закона) на этапе проведения испытаний в нормальных условиях. Тогда в режиме нормальных испытаний (эксплуатации) остается только задача определения параметров этого закона.

Эту задачу можно решить, учитывая результаты **укороченных нормальных испытаний**, когда используется только начальный участок зависимости вероятности $P(t)$ или плотности вероятности $f(t)$ времени безотказной работы.

Расчет показателей надежности в режиме укороченных испытаний в нормальных условиях опирается на таблицу опытных данных, которую оформляют, как правило, по образцу таблицы 5.1 (см. раздел 5). Характерным отличием этой таблицы от упомянутой выше является то, что единичный интервал времени Δt_3 в десятки, а то и в сотни раз больше, чем единичный интервал Δt в режиме форсированных испытаний (как правило, Δt – не более нескольких дней или недель, Δt_3 – не более несколько месяцев или лет). При этом число изделий n_i , выходящих из строя на интервале Δt_3 , как правило, невелико (обычно несколько единиц). Кроме того, невелико также и число самих исследуемых интервалов: $i \in [1, m]$, $m < K$, где K и m – число интервалов соответственно в режиме форсированных и укороченных (нормальных) испытаний.

Формулы для расчета показателей надежности в нормальном режиме определяются в зависимости от выбранного (и обоснованного ранее по результатам форсированных испытаний) теоретического закона.

В предыдущих разделах было показано, что для выбранного (заданного) вероятностного закона выбор параметров этого закона может производиться различным образом, при этом оптимальное значение параметра определяется в результате нахождения минимума среднего квадрата отклонения между теоретическим и экспериментальным законами.

В режиме укороченных испытаний приходится использовать только небольшое число отказов на *начальном* участке функции вероятности или плотности вероятности безотказной работы. Тогда при выбранной функции закона распределения расчет его параметров ведут, как правило, по методу наименьших квадратов. Другие варианты определения параметров, например, метод моментов, метод максимального правдоподобия и т. п., принципиально требуют большого массива опытных данных, охватывающих поведение исследуемой функции в широкой области значений.

После определения **параметров** выбранного закона для режима **нормальной эксплуатации** расчет основных **показателей** этого закона (например, среднего $T_{0э}$ и гарантированного $T_{г.э}$ времени безотказной работы, коэффициентов вариации $V_э$, асимметрии $S_э$, эксцесса $E_{х.э}$ и др.) не вызывает затруднений и проводится по известным формулам, приведенным в разделе 4 для соответствующего закона.

Примечание – Во избежание разночтений далее ко всем функциям, параметрам и показателям закона, которые определяются в режиме нормальной эксплуатации, а не в форсированном режиме, будет добавляться подстрочный индекс «э» (например, $T_{0э}$, $\sigma_{т.э}$, $T_{г.э}$, $V_э$ и т. д.)

7.1 Экспоненциальный закон

Если по результатам форсированных (ускоренных) испытаний было принято решение о предпочтительности экспоненциального закона распределения среди других конкурирующих законов, то можно использовать аналогичные выражения из (4.1), (5.2) и (6.1). При этом сначала учтем (4.1в) и (5.2г) и применим метод наименьших квадратов (6.1и), когда $a_э \cong \sum_{i=1}^m \lambda(t_i)/m = \lambda_{ср}$. В этом случае [25]

$$P_э(t) = \exp(-a_э t); \quad (7.1a)$$

$$a_э = a_{э1} = \sum_{i=1}^m \frac{2n_i}{m\Delta t_э(N_{i-1} + N_i)}; \quad (7.1б)$$

$$T_{0э} = 1/a_э; \quad (7.1в)$$

$$\sigma_{т.э} = 1/a_э; \quad (7.1г)$$

$$T_{г.э} \cong (1 - P_{г.э})/a_э, \quad (7.1д)$$

где $T_{Г.Э}$ – гарантированное время нормальной работы (эксплуатации) при гарантированной вероятности $P_{Г.Э}$ [см (4.1e)];

N_i – число изделий, оставшихся годными к моменту времени $t_i = i \cdot \Delta t_э$ после начала испытаний;

N_0 – исходное число годных изделий.

Затем учтем, что точка с координатами $(P_{Г.Э}, T_{Г.Э})$ принадлежит функции $P_э(t)$, проходящей через точки $P_{эi} = \varphi(i\Delta t_э)$, и для этих точек также справедлива функциональная связь типа уравнения (7.1д). Тогда найдем параметр закона в виде среднего арифметического:

$$\begin{aligned} a_э = a_{э2} &\cong \sum_{i=1}^m (1 - P_{эi}) / (i \Delta t_э \cdot m) = (1/m\Delta t_э) \cdot \sum_{i=1}^m (1 - P_{эi}) / i = \\ &= (1/N_0 m \Delta t_э) \cdot \sum_{i=1}^m (N_0 - N_i) / i. \end{aligned} \quad (7.1e)$$

Ввиду близости расчетных значений $a_{э1}$ и $a_{э2}$ целесообразно принять $a_{э3} = (a_{э1} + a_{э2})/2$. Остальные показатели закона можно определить, используя совместно (7.1) и (4.1).

В ряде случаев предпочтительный вариант выбора параметра $a_э$ можно обосновать, используя критерий минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации закона вероятности безотказной работы. С этой целью можно использовать, например, выражения (4.1к) и (4.1л), где все данные результатов эксперимента относятся уже к нормальному режиму испытаний и сравниваются при разных значениях $a_э$ (в данном случае $a_{э1}$, $a_{э2}$ и $a_{э3}$).

7.2 Закон Эрланга второго порядка

Используя (4.2), (5.2г), а также метод наименьших квадратов по типу (6.3и) или (6.3к), получим [25]

$$P_э(t) = (1 + a_э t) \exp(-a_э t); \quad (7.2a)$$

$$a_э = a_{э1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t_э}} \sum_{i=1}^m \frac{m^{-1} \sqrt{\lambda_i - \lambda_{i-1}}}{1 - (i - 0,5) \sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \Delta t_э}}; \quad (7.2б)$$

$$\lambda_i = \frac{2n_i}{\Delta t_э (N_{i-1} + N_i)}; \quad (7.2в)$$

$$a_э = a_{э2} = \frac{1}{(m-1)\Delta t_э} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i (i - 0,5)^{-1} - \Delta \lambda_i}{(i + 0,5) \Delta \lambda_i}; \quad (7.2г)$$

$$\Delta \lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i; \quad (7.2д)$$

$$T_{Г.Э} = a_э^{-1} \cdot \sqrt{1 - P_{Г.Э}}; \quad (7.2е)$$

$$T_{0Э} = 2/a_Э; \quad (7.2ж)$$

$$\sigma_{Т.Э} = \sqrt{2}/a_Э. \quad (7.2з)$$

По аналогии с экспоненциальным законом можно получить другой вариант расчета приближенного значения параметра $a_Э$, полагая, что точка с координатами $P_{Г.Э}$, $T_{Г.Э}$, определяемая из (7.2е), принадлежит множеству точек $P_{Эi} = \varphi(i\Delta t_Э)$. Следовательно, среднее арифметическое значение параметра $a_Э$ равно

$$a_Э = a_{Э3} \cong \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sqrt{1 - P_{Эi}})/i\Delta t_Э = (1/m\Delta t_Э) \sum_{i=1}^m \sqrt{(1 - P_{Эi})/i^2}. \quad (7.2и)$$

Для повышения точности и надежности расчетов иногда целесообразно принять $a_Э = a_{Э4} = (a_{Э1} + a_{Э2} + a_{Э3})/3$ и для этого значения параметра $a_Э$ рассчитывать остальные показатели и характеристики закона, используя (7.2) и (4.2).

В некоторых случаях целесообразно каждый вариант выбора $a_{Эi}$ ($i = 1 \dots 4$) проверить по критерию (6.4а) или (6.4б), подставив соответственно результаты укороченных испытаний.

7.3. Показатели безотказной работы для закона Рэлея

Целесообразно использовать метод наименьших квадратов, применяя его к (4.3в) или к (4.3г). По аналогии с (6.5и), (6.5к) приходим к выражениям [25]

$$P_Э(t) = \exp(-a_Э t^2); \quad (7.3а)$$

$$a_{Э1} = \frac{12}{m(4m^2 - 1)\Delta t_Э^2} \sum_{i=1}^m \frac{n_i(i - 0,5)}{N_{i-1} + N_i}; i = \overline{1; m}; \quad (7.3б)$$

$$a_{Э2} = \frac{(\lambda_m - \lambda_1)}{2m\Delta t_Э}, \lambda_i = \frac{2n_i}{\Delta t_Э(N_{i-1} + N_i)}; \quad (7.3в)$$

$$T_{Г.Э} = \sqrt{(1 - P_{Г.Э})/a_Э}; \quad (7.3г)$$

$$T_{0Э} = \sqrt{\pi/4a_Э}; \quad (7.3д)$$

$$\sigma_{Т.Э} = \sqrt{(4 - \pi)/4a_Э}. \quad (7.3е)$$

Для закона Рэлея так же, как и для предыдущих законов, возможно более быстрое, хотя и менее точное определение параметра закона $a_Э$ исходя из предположения, что точка с координатами $P_{Г.Э}$, $T_{Г.Э}$, определяемая из (7.3г), принадлежит семейству точек $P_{Эi} = \varphi(i\Delta t)$:

$$a_Э = a_{Э3} \cong \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - P_{Эi})/(i\Delta t_Э)^2 = \left(\frac{1}{m\Delta t_Э^2}\right) \sum_{i=1}^m (1 - P_{Эi})/i^2. \quad (7.3ж)$$

Во многих случаях может быть полезным выбор параметра закона по правилу $a_{\text{э}} = a_{\text{э}4} = (a_{\text{э}1} + a_{\text{э}2} + a_{\text{э}3})/3$.

При окончательном решении выбирают тот вариант определения параметра $a_{\text{э}}$, который по аналогии с (6.5м) минимизирует средний квадрат ошибки аппроксимации, например,

$$\Delta_{3j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\exp(-a_{\text{э}j} t_i^2) - 0,5(P_{\text{э}(i-1)} + P_{\text{э}i})]^2, \quad (7.3з)$$

где $j = 1 \dots 4$;

$$t_i = (i - 0,5)\Delta t_{\text{э}};$$

$P_{\text{э}i}$ и $P_{\text{э}(i-1)}$ – результаты опыта по (5.2а), (5.2б) в режиме нормальной эксплуатации.

7.4. Показатели надежности для закона Вейбулла

Двухпараметрический закон Вейбулла [см. (4.4)] по результатам укороченных испытаний в нормальном режиме эксплуатации характеризуется набором данных, который подобен (5.2) и отличается величиной интервала $\Delta t_{\text{э}}$ (вместо Δt) и числом учтенных точек $i \in [1, m]$ (вместо K). С учетом этих изменений параметры закона a и b определяются из (6.4г), (6.4д) с учетом (5.2г).

При малом числе экспериментальных данных расчет параметров закона Вейбулла $a_{\text{э}}$ и $b_{\text{э}}$ по (6.4в), (6.4г) может дать большие ошибки. В этом случае удобно принять во внимание, что вероятностные законы $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ для режимов форсированных и нормальных испытаний всегда подобны друг другу (в противном случае следует признать, что режим форсированных испытаний выбран неправильно).

Как видно из анализа рисунка 4.4 (см. подраздел 4.4), это подобие будет выполняться, если принять $b = b_{\text{э}}$, где параметр b известен по результатам форсированных испытаний [см. (6.4в), (6.4г)]. Учитывая (4.4в), можно записать

$$\lambda(t = t_i) = \lambda_i = a_{\text{э}} b_{\text{э}} t_i^{b_{\text{э}}-1}, \quad i \in [1, m], \quad (7.4а)$$

где λ_i определяется из (5.2г);

$$t_i = (i - 0,5)\Delta t_{\text{э}}.$$

Применяя метод МНК, найдем значение параметра $a_{\text{э}}$, определяющее наилучшее поведение экспериментальной функции λ_i [24–27].

С этой целью, используя предыдущее уравнение (7.4а), будем считать, что оптимальное значение $a_{\text{э}}$ должно минимизировать функционал вида $Q(a_{\text{э}}) = \sum_{i=1}^m (a_{\text{э}} - \lambda_i / b_{\text{э}} t_i^{b_{\text{э}}-1})^2 \rightarrow \min$. Решая уравнение $dQ(a_{\text{э}})/da_{\text{э}} = 0$, приходим к выражению $\sum_{i=1}^m (a_{\text{э}} - \lambda_i / b_{\text{э}} t_i^{b_{\text{э}}-1}) = 0$, откуда следует, что оптимальное значение параметра $a_{\text{э}}$ равно [27]

$$a_{\text{э}} = \frac{1}{mb_{\text{э}}} \sum_{i=1}^m \lambda_i [(i - 0,5)\Delta t_{\text{э}}]^{1-b_{\text{э}}} = \frac{\Delta t_{\text{э}}^{1-b_{\text{э}}}}{mb_{\text{э}}} \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i (i - 0,5)^{1-b_{\text{э}}}. \quad (7.4б)$$

Зная параметры закона $a_{\text{э}}$ и $b_{\text{э}}$, затем определяем показатели закона $T_{0\text{э}}$, $\sigma_{0\text{э}}$, $P_{\Gamma,\text{э}}$, $T_{\Gamma,\text{э}}$ и др., используя формулы (4.4a)–(4.4c).

7.5 Определение показателей для нормального закона

Для нормального закона [см. (4.5)], учитывая укороченный режим испытаний (т. е. малое число точек функций вероятности безотказной работы), целесообразно использовать только **метод наименьших квадратов** [см. (6.5е–6.5л)] [23]. При этом учитываются результаты испытаний типа (5.2) для $i \in [1, m]$ с заменой $K \rightarrow m$ и $\Delta t \rightarrow \Delta t_{\text{э}}$. Соответственно, ошибка аппроксимации рассчитывается из (6.5м), а гарантированное время наработки – из (4.6). Параметры обозначаются соответственно $\sigma_{\text{н.э}}$, $P_{\Gamma,\text{э}}$, $T_{\Gamma,\text{э}}$, $T_{\text{н.э}}$ и т. п. [см. (4.5)].

При малом числе экспериментальных данных расчет параметров закона $T_{\text{н.э}}$ и $\sigma_{\text{н.э}}$ по (6.13) может давать большие ошибки. В этом случае целесообразно учесть подобие вероятностного закона в режиме форсированных и нормальных испытаний, а именно условие равенства коэффициентов вариации V [см. (2.18)] для обоих режимов: $T_{\text{н.э}}/\sigma_{\text{н.э}} = T_{\text{н}}/\sigma_{\text{н}} = V^{-1} = C$. Здесь $V = \text{const}$ и определяется по результатам форсированных испытаний.

Тогда с учетом (6.11)–(6.12) приходим к условию [24]

$$\frac{T_{\text{н.э}}}{\Delta t_{\text{э}}} = i + (\sigma_{\text{н.э}}^2 / \Delta t_{\text{э}}^2) \ln(f_{i+1}/f_i), \quad i \in \overline{1, m}. \quad (7.5a)$$

Применяя метод МНК к этому выражению, находим сначала сумму квадратов отклонений между левой и правой частью уравнения (7.5a):

$$Q = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{T_{\text{н.э}}}{\Delta t_{\text{э}}} - i - \frac{\sigma_{\text{н.э}}^2}{\Delta t_{\text{э}}^2} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \right)^2; \quad i \in \overline{1, m-1}. \quad (7.5б)$$

Затем возможны два пути решения задачи [24]. Первый – строгий, когда в (7.5б) подставляют $\sigma_{\text{н.э}} = T_{\text{н.э}}/C$ и из условия $dQ/dT_{\text{н.э}} = 0$ пытаются непосредственно определить оптимальное значение $T_{\text{н.э}}$, а затем и $\sigma_{\text{н.э}}$. К сожалению, аналитически такое решение найти затруднительно, и требуются численные методы решения. Второй путь – приближенное решение, когда сначала полагают, что $\sigma_{\text{н.э}}$ не зависит от $T_{\text{н.э}}$. Тогда, решая снова уравнение $dQ/dT_{\text{н.э}} = 0$, приходим к выражению [26]

$$\frac{dQ}{dT_{\text{н.э}}} = \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{T_{\text{н.э}}}{\Delta t} - i - \frac{\sigma_{\text{н.э}}^2}{\Delta t^2} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \right) = 0.$$

Его решением является равенство

$$(m-1) \frac{T_{\text{н.э}}}{\Delta t_{\text{э}}} = \sum_{i=1}^{m-1} \left(i + \frac{\sigma_{\text{н.э}}^2}{\Delta t_{\text{э}}^2} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \right) = \frac{m \cdot (m-1)}{2} + \frac{\sigma_{\text{н.э}}^2}{\Delta t_{\text{э}}^2} \ln \frac{f_m}{f_1},$$

которое с учетом известного значения $T_{\text{н.э}}/\sigma_{\text{н.э}} = C$ приводится к виду

$$\frac{T_{н.э}}{\Delta t_э} = \frac{m}{2} + \frac{(T_{н.э}/\Delta t_э)^2}{C^2(m-1)} \ln \frac{f_m}{f_1}. \quad (7.5в)$$

Приближенное решение этого уравнения имеет вид [25, 26]

$$\frac{T_{н.э}}{\Delta t_э} \cong \frac{(m-1)C^2}{\ln(f_m/f_1)} - \frac{m}{2}. \quad (7.5г)$$

Определив параметры $T_{н.э}$ и $\sigma_{н.э} = T_{н.э}/C$, далее рассчитывают $T_{Г.э}$ и $P_{Г.э}$, используя (4.6) и таблицу Г.1.

7.6 Показатели безотказности для усеченного нормального закона

Если в результате расчетов характеристик надежности в режиме форсированных испытаний оказалось, что наилучшее приближение к эксперименту обеспечивает усеченный нормальный закон [см. (4.6)], то, очевидно, и в нормальном режиме эксплуатации это будет справедливо. В этом случае по результатам укороченных испытаний необходимо только определить параметры усеченного нормального закона T_y и σ_y для нормальных условий эксплуатации $T_{y.э}$ и $\sigma_{y.э}$.

Учитывая, как правило, малый объем экспериментальных данных (испытания проводятся в течение небольшого периода времени и число вышедших из строя изделий мало), а также сложный нелинейный характер зависимостей между функциями надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ и параметрами T_y и σ_y , целесообразно использовать только **метод наименьших квадратов** [см. (6.10д), (6.11)–(6.14)]. При этом учитываются результаты нормальных испытаний типа (5.2) для $i \in [1, m]$ с заменой $K \rightarrow m$ ($m < K$) и $\Delta t \rightarrow \Delta t_э$ ($\Delta t_э \gg \Delta t$). Следовательно, по сравнению с режимом форсированных испытаний в данном случае уменьшается число экспериментальных точек и существенно увеличивается масштаб времени.

При этом ошибка аппроксимации теоретическим законом реальных функций надежности оценивается аналогично (6.22), а гарантированное время наработки на отказ для заданного значения $P_{Г.э}$ рассчитывается аналогично (4.8).

С целью повышения точности расчетов для усеченного нормального закона целесообразно учесть подобие вероятностных законов в режиме форсированных и нормальных испытаний, а именно условия [24]:

$$\begin{aligned} T_y/\sigma_y &= T_{y.э}/\sigma_{y.э} = C; \\ C_y &= C_{y.э} \text{ [см. (4.7а)–(4.7б)],} \end{aligned}$$

где T_y , σ_y , C и C_y – параметры, определенные для режима форсированных испытаний.

При известных значениях C , используя по результатам испытаний значения функции плотности вероятности $f(t_i) = f_i$ [см. (5.2в)], $i \in \overline{1, m}$,

рассчитывают $T_{y,\varepsilon}$ по той же формуле, что и $T_{н,\varepsilon}$ для нормального закона [см. (7.5г)].

Далее, зная $T_{y,\varepsilon}$, $\sigma_{y,\varepsilon} = T_{y,\varepsilon}/C$ и коэффициент $C_y = C_{y,\varepsilon}$, по формулам (4.6д) и (4.6е) определяют среднее $T_{0\varepsilon}$ и гарантированное $T_{г,\varepsilon}$ время эксплуатации в нормальных условиях [24], [26].

7.7 Определение показателей логнормального закона

Для рассматриваемого закона, характеризуемого двумя параметрами σ_l и μ_l [см. подраздел 4.7], как показывают исследования [16, 26, 32, 36], наиболее стабильным и мало изменяющимся от режима испытаний является показатель, именуемый коэффициентом вариации $V_i = \sigma_{Ti}/T_{0i}$, где индекс i в данном случае характеризует соответствующий вид испытаний ($i = \varepsilon$ – эксплуатационные (нормальные); $i = \phi$ – форсированные); σ_{Ti} и T_{0i} – основные показатели закона [см. (4.9)] в i -м режиме [27].

Для логнормального закона, как следует из (4.7е), (4.7д),

$$V_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_{л,\phi}^2}{T_{0\phi}^2} = (-1 + \exp \sigma_{л,\phi}^2); \quad V_\phi^2 = \frac{\sigma_{л,\phi}^2}{T_{0\phi}^2} = (-1 + \exp \sigma_{л,\phi}^2).$$

Полагая $V_\varepsilon = V_\phi$, получим $\sigma_{л,\varepsilon} = \sigma_{л,\phi}$.

Следовательно, для этого закона при проведении эксплуатационных испытаний можно считать известным один из параметров закона, а именно параметр $\sigma_{л,\phi} = \sigma_{л,\varepsilon} = \sigma_l$, который определен по результатам форсированных испытаний [см. (6.7)].

Затем для режима эксплуатационных измерений целесообразно использовать общее выражение (6.7н), где теперь $\mu_l = \mu_{л,\varepsilon}$, $\sigma_l = \sigma_{л,\varepsilon}$.

Применим к этому выражению, где неизвестным является только параметр $\mu_{л,\varepsilon}$, метод МНК [27]. Решая уравнение $d\theta/d\mu_{л,\varepsilon} = 0$, где

$$\theta = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\mu_{л,\varepsilon} - \sigma_l^2 \left(1 + \frac{\ln(f_{i+1}/f_i)}{\ln(t_{i+1}/t_i)} \right) - \ln \sqrt{t_i \cdot t_{i+1}} \right]^2, \quad (7.7a)$$

придем к выражению

$$\mu_{л,\varepsilon} = \frac{1}{m-1} \cdot \left[\sigma_l^2 \sum_{i=1}^{m-1} \left(1 + \frac{\ln(f_{i+1}/f_i)}{\ln(t_{i+1}/t_i)} \right) + \sum_{i=1}^{m-1} \ln \sqrt{t_i \cdot t_{i+1}} \right]. \quad (7.7б)$$

где $t_i = (i - 0,5)\Delta t_\varepsilon$;

m – число интервалов укороченных испытаний;

Δt_ε – длительность элементарного интервала.

Используя результаты (6.37)–(6.38), в которых вместо коэффициента K подставляется число m , получим окончательно [27]

$$\mu_{л.э} = \sigma_{л}^2 + \ln\left(\frac{\Delta t_{э}}{4}\right) + (m-1)^{-1} \cdot \ln \frac{(2m-2)!}{(m-1)! \sqrt{2m-1}} + \quad (7.7в)$$

$$+ (m-1)^{-1} \sigma_{л}^2 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\ln(f_{i+1}/f_i)}{\ln[(i+0,5)/(i-0,5)]}.$$

После определения параметров логнормального распределения $\mu_{л.э} = \mu_{л}$ и $\sigma_{л.э} = \sigma_{л}$, используя выражения (4.7д), (4.7е), рассчитывают показатели $T_{0э}$ и $\sigma_{Т.э}$.

Показатель гарантированного времени наработки $T_{Г.э}$ определяют численным методом, последовательно задавая ряд нарастающих значений $t_i = (i-0,5)\Delta t_{э}$ и находя из (4.7б) соответствующие им значения $P(t_i)$. Решением является то значение $t_i = t_i^* = T_{Г.э}$, для которого $P(t_i^*) = P_{Г.э}$ [27].

Остальные показатели при необходимости рассчитывают с помощью соответствующих выражений (4.7а)–(4.7т).

7.8 Показатели безотказности гамма-закона

При анализе результатов укороченных испытаний в режиме нормальной эксплуатации полагают, что и здесь будет «работать» гамма-закон, если он оказался предпочтительным по результатам форсированных испытаний [27].

Для этого закона, характеризуемого двумя параметрами α и β (см. подраздел 4.8), так же как и для логнормального закона, наиболее стабильным и мало изменяющимся от режима испытаний является показатель коэффициент вариации $V_i = \sigma_{Ti}/T_{0i}$, где индекс i характеризует режим испытаний: $i = \phi$ – форсированный; $i = \varepsilon$ – режим нормальной эксплуатации; σ_{Ti} и T_{0i} – показатели закона для i -го режима.

Для гамма-распределения из (4.10д), (4.10ж) следует

$$V_{\phi}^2 = \sigma_{Т.Ф}^2/T_{0Ф}^2 = 1/\alpha_{\phi}; \quad V_{\varepsilon}^2 = \sigma_{Т.Э}^2/T_{0Э}^2 = 1/\alpha_{\varepsilon}. \quad (7.8а)$$

Из условия $V_{\phi} = V_{\varepsilon}$ получаем $\alpha_{\phi} = \alpha_{\varepsilon} = \alpha$. Следовательно, можно считать, что параметр формы α , определенный в режиме форсированных испытаний, сохраняет свое значение и в режиме нормальной эксплуатации.

Для определения второго параметра этого закона – параметра масштаба β [см. (4.10а)] – используем уравнение (6.50), записав его для режима укороченных испытаний в виде

$$\beta_{\varepsilon}^{-1} = \{\ln(f_i/f_{i+1}) - (\alpha_{\varepsilon} - 1) \ln[(i-0,5)/(i+0,5)]\}/\Delta t_{э} \quad \text{при } i \in \overline{1, m}. \quad (7.8б)$$

Применим к выражению (7.8б), где неизвестным является только параметр $x_{\varepsilon} = 1/\beta_{\varepsilon}$, метод МНК [27].

Решая уравнение

$$\frac{d}{dx_3} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \left[x_3 - \frac{[\ln(f_i/f_{i+1}) - (\alpha_3 - 1) \ln[(i - 0,5)/(i + 0,5)]]^2}{\Delta t_3} \right] \right) = 0, \quad (7.8B)$$

придем к выражению

$$\Delta t_3(m - 1)x_3 = \sum_{i=1}^m \ln(f_i/f_{i+1}) - (\alpha_3 - 1) \sum_{i=1}^m \ln[(i - 0,5)/(i + 0,5)],$$

которое можно упростить, учитывая, что

$$\sum_{i=1}^m \ln(f_i/f_{i+1}) = \ln \frac{f_1}{f_m} = -\ln \frac{f_m}{f_1};$$

$$\sum_{i=1}^m \ln \left(\frac{i - 0,5}{i + 0,5} \right) = \ln \frac{1}{2m - 1} = -\ln(2m - 1).$$

В результате придем к выражению [27]

$$\beta_3 = \Delta t_3(2m - 1) \{ (\alpha_3 - 1) \ln(2m - 1) - \ln f_m/f_1 \}^{-1}, \quad (7.8Г)$$

где f_m и f_1 – экспериментальные значения функции плотности вероятности предполагаемого гамма-закона для моментов времени соответственно $t_m = (m - 0,5)\Delta t_3$ и $t_1 = 0,5\Delta t_3$.

После определения параметров экспериментального гамма-закона α_3 и β_3 для режима укороченных нормальных испытаний дальнейшее определение показателей гамма-закона осуществляется на основании известных выражений (4.10).

В частности, $T_{03} = \alpha_3\beta_3$, $\sigma_{T3}^2 = \alpha_3\beta_3^2$. Гарантированное время наработки $T_{Г.3}$ находится численным методом на основании (4.8з) путем последовательного увеличения $t = t_i$ и расчета $P_3(t = t_i)$. То значение $t = t_i^*$, при котором $P_3(t = t_i^*) = P_{Г.3}$, где $P_{Г.3}$ – заданное значение гарантированной вероятности, является решением: $t_i^* = T_{Г.3}$.

В ряде случаев, например, когда $P_{Г.3} \geq 0,9$, значение $T_{Г.3}$ можно определить непосредственно по результатам эксперимента, анализируя поведение экспериментальной функции $P_3(t = t_i)$.

Остальные показатели и коэффициенты, характеризующие гамма-закон в режиме нормальной эксплуатации, можно определить из (4.8), используя подстановку параметров α_3 вместо α и β_3 вместо β .

7.9 Доверительные оценки рассчитанных параметров и показателей

Во многих случаях полезно знать не только средние значения параметров вероятностного закона, но и возможный разброс (интервал) значений этих параметров. Это позволяет определить соответственно и разброс значений показателей закона, например, $T_{Г.3}$, T_{03} и $\sigma_{T.3}$ относительно их средних значений, которые определены выше.

Наиболее просто эта задача решается для однопараметрических законов [см. (7.1)–(7.3)] и в случаях, когда среднее значение параметра a_3 определяется по приближенным выражениям (7.1е), (7.2ж), (7.3ж) [27].

В этом случае **среднее квадратическое отклонение** σ_{a_3} расчетного параметра a_3 определяется по известной методике обработки результатов многократных наблюдений [1,4,5,33]:

– для экспоненциального закона, используя (7.1е), получим [26, 27]

$$\sigma_{a_3} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1-P_{3i}}{i\Delta t_3} - a_3 \right)^2 \right\}^{0,5}; \quad (7.9a)$$

– для закона Эрланга, используя (7.2ж), находим

$$\sigma_{a_3} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{(1-P_{3i})^{0,5}}{i\Delta t_3} - a_3 \right]^2 \right\}^{0,5}; \quad (7.9б)$$

– для закона Рэлея на основании (7.3ж) получим

$$\sigma_{a_3} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{1-P_{3i}}{i^2\Delta t_3^2} - a_3 \right]^2 \right\}^{0,5}. \quad (7.9в)$$

Далее известным образом определяют **доверительный интервал отклонения** Δa_3 рассчитываемого параметра относительно его среднего значения a_3 по формуле $\Delta a_3 = t_s \cdot \sigma_{a_3}$, где t_s – коэффициент Стьюдента, зависящий от принятой доверительной вероятности P_α и числа наблюдений m [12, 30, 32].

В частности, при $P_\alpha = 0,95$ и $m = 4; 6$ и 8 имеем соответственно $t_s = 3,18; 2,57$ и $2,36$ [3–5, 11, 15]. Полагая, что истинное значение параметра лежит в интервале значений $a_3 \pm \Delta a_3$, затем на основании соответствующих выражений (7.1)–(7.3) рассчитывают доверительный интервал возможных значений показателей закона.

Например, для экспоненциального закона на основании (7.1д) и (7.9а) получим

$$T_{Г.Э \min} = \frac{1 - P_{Г.Э}}{a_3 + t_s \cdot \sigma_{a_3}}; \quad T_{Г.Э \max} = \frac{1 - P_{Г.Э}}{a_3 - t_s \cdot \sigma_{a_3}}. \quad (7.9г)$$

Для остальных показателей этого закона, например, $T_{0.Э}$, $\sigma_{T.Э}$, а также для других однопараметрических законов расчеты выполняются аналогично.

Для вероятностных законов, характеризуемых *двумя* расчетными параметрами, учет возможного разброса рассчитываемых параметров, как правило, более сложен и менее точен. Например, для закона Вейбулла, полагая, что параметр b_3 достаточно точно определен по результатам форсированных испытаний, и используя (7.4б), приходим к выражению (7.9д) [24], где σ_{a_3} – среднее квадратическое отклонение расчетного параметра a_3 , имеющего номинальные значения по (7.4б):

$$\sigma_{a_3} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{\lambda_i/b_3}{((i-0,5)\Delta t_3)^{b_3-1}} - a_3 \right]^2 \right\}^{0,5}. \quad (7.9д)$$

По аналогии с предыдущим материалом полагаем, что реальное значение параметра $a_э$ имеет доверительный интервал отклонения относительно его среднего значения по (7.4б) на величину $\Delta a_э = \pm t_s \sigma_{a_э}$, где t_s – коэффициент Стьюдента.

Подставляя в выражение (4.4) вместо параметра $a_э$ его реальное значение $a_э \pm \Delta a_э$, нетрудно найти доверительный интервал разброса основных показателей закона Вейбулла.

Так, используя, например, (4.4г), получим [24, 27]

$$\begin{aligned} M_1 = T_{0э} \pm \Delta T_{0э}; \quad T_{0э} = a_э^{1/b_э} \Gamma(1 + 1/b_э); \\ \Delta T_{0э} \cong (dT_{0э}/da_э) \Delta a_э; \quad \Delta T_{0э}/T_{0э} = \pm (1/b_э a_э) t_s \sigma_{a_э}. \end{aligned} \quad (7.9е)$$

Аналогично, используя (4.4) для других начальных и центральных моментов, получим

$$\Delta M_k/M_k = \Delta D_k/D_k = \pm (k/b_э) t_s \sigma_{a_э}/a_э; \quad k = 2, 3, 4 \dots \quad (7.9ж)$$

В приведенных выражениях учитывается относительный доверительный интервал отклонения моментов M_k и D_k , который обусловлен возможным разбросом параметра $a_э$ относительно его среднего значения.

Для нормального закона, как следует из подраздела 7.5, по результатам расчетов определяется среднее значение параметра $T_{н.э}$, который одновременно является и показателем закона $T_{0э}$, характеризующим среднее время безотказной работы. При этом считается, что и в режиме форсированных испытаний, и в режиме типовой эксплуатации коэффициент вариации V нормального закона остается неизменным: $V = \sigma_{т.э}/T_{0э} = \sigma_{т.ф}/T_{0ф} = \sigma_{т.ср}/T_{0ср} = C^{-1} = \text{const}$. Следовательно, считается известным и среднее квадратическое отклонение результатов нормальных испытаний $\sigma_{т.э} = T_{0э} V = T_{0э}/C$.

Доверительный интервал отклонения (разброса) возможного значения $T_{0э}$ относительно его среднего значения определяется по формуле [26]

$$\Delta T_{0э} = \pm (t_s \sigma_{т.э})/\sqrt{m}, \quad (7.9з)$$

где m – число отказов на временном интервале проведения укороченных нормальных испытаний $t_{ук}$;

t_s – коэффициент Стьюдента, который зависит от значения m [1–5, 35, 36].

Доверительные интервалы отклонений других показателей нормального закона нетрудно определить, используя (4.5) [25]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_2 &\cong \frac{dM_2}{dT_{0э}} \Delta T_{0э} = 2M_2(\Delta T_{0э}/T_{0э}); \\ \Delta M_3 &\cong \frac{dM_3}{dT_{0э}} \Delta T_{0э} = 3M_3(\Delta T_{0э}/T_{0э}); \\ \Delta M_4 &\cong \frac{dM_4}{dT_{0э}} \Delta T_{0э} = 4M_4(\Delta T_{0э}/T_{0э}). \end{aligned} \right\} \quad (7.9и)$$

Доверительный интервал отклонения гарантированного времени безотказной работы $\Delta T_{Г.э}$ определяется на основании (4.5т) при условии $P_{Г} = \text{const}$ и $T_{Н.э} = T_{0э} \pm \Delta T_{0э}$. Нетрудно убедиться, что это условие выполняется, если $\Delta T_{Г.э} = \Delta T_{0э}$. Следовательно, $\Delta T_{Г.э}$ определяется непосредственно из (7.9з).

Библиотека БГУИР

8 АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ФОРСИРОВАННЫХ ИСПЫТАНИЙ СОСТАВНЫМ ВЕРОЯТНОСТНЫМ ЗАКОНОМ

8.1 Алгоритм решения задачи

Экспериментальные результаты распределения времени безотказной работы достаточно большой партии однотипных технических устройств в ряде случаев неточно (с большой погрешностью) описываются каким-либо одним однопараметрическим вероятностным законом даже при оптимальном подборе его параметров. Более эффективный результат (более точное совпадение надежностного эксперимента и его теоретического описания) может быть получен, если описать эксперимент суммой двух вероятностных законов и найти оптимальные параметры этих законов.

Приводимый ниже материал посвящен решению этой задачи, которую в общем виде можно сформулировать следующим образом: найти параметры a_1 и a_2 двух однопараметрических вероятностных законов $P_{T1}(a_1, t)$ и $P_{T2}(a_2, t)$ и их веса c_1 и c_2 , которые совместно наилучшим образом описывают поведение экспериментально полученного вероятностного закона $P_3(t)$.

При этом формально задача ставится, например, таким образом: найти параметры a_1, a_2 и c_1, c_2 , при которых

$$\sum_{i=1}^K [P_3(t_i) - c_1 P_{T1}(a_1, t_i) - c_2 P_{T2}(a_2, t_i)]^2 / P_3(t_i) \rightarrow \min, \quad (8.1)$$

где $t_i = i \cdot \Delta t$;

$$i \in \overline{1, K};$$

$$\Delta t = T_K / K;$$

T_K – время окончания эксперимента, когда последний экземпляр испытываемой техники выйдет из строя;

K – «число контрольных» точек времени, когда производят определение (подсчет) числа вышедших из строя изделий (или число остающихся годными N_i изделий к моменту времени t_i).

Очевидно, $P_3(t_i) = N_i / N_0$, где N_0 – число годных изделий в начале испытаний, при этом для $t_i = 0$ справедливо $P_3(0) = P_{T1}(0) = P_{T2}(0) = 1,0$, соответственно, из (8.1) получаем $1 = c_1 + c_2$ или $c_2 = 1 - c_1$.

Число контрольных точек измерения K рекомендуется выбирать не менее 10 в соответствии с уравнением $K \geq (1 + 1,4 \ln N_0) = (1 + 3,2 \lg N_0)$ [см. (5.1)].

Результаты испытаний обычно записывают в виде двухстрочной таблицы « $i - n_i$ », где в верхней строке указывается номер интервала наблюдения $i = 1, 2 \dots K$, а в нижней строке – число изделий n_i , вышедших из строя в этом интервале (в промежутке времени $t_{i-1} < t < t_i$). По данным этой таблицы можно рассчитать и построить ряд функций, характеризующих особенности выхода из строя анализируемой партии изделий [см. также (3.2)]:

$$N(t = t_i) = N_i = N_0 - (n_1 + n_2 + \dots + n_i); \quad (8.2a)$$

$$P_3(t = t_i) = N_i / N_0; \quad (8.2б)$$

$$P_3(t = t_i - 0,5\Delta t) \cong (N_i + N_{i-1})/2N_0; \quad (8.2\text{в})$$

$$f_3(t = t_i) = f_i = \frac{(P_{i-1} - P_i)}{\Delta t} = \frac{n_i}{N_0\Delta t}; f(t_{i-1} < t < t_i) \cong f_i; \quad (8.2\text{г})$$

$$\lambda_3(t_{i-1} < t < t_i) \cong f_i/P_3(t = t_i - 0,5\Delta t) = 2f_i/(P_{i-1} + P_i) \cong \cong 2n_i/\Delta t(N_i + N_{i-1}), \quad (8.2\text{д})$$

где $f_3(t)$ – плотность вероятности безотказной работы, или частота отказов;

$\lambda_3(t) = f_3(t)/P_3(t)$ – интенсивность отказов экспериментальных испытаний (см. раздел 4).

По выражениям (8.2а)–(8.2д) можно построить гистограммы функций $P_3(t)$, $f_3(t)$ и $\lambda_3(t)$ и сделать выводы об особенностях надежностных характеристик.

В качестве числовых показателей (оценок) экспериментальных функций (8.2), которые называют выборочными, часто применяют так называемые выборочный s -й начальный момент M_s и выборочный s -й центральный момент D_s , определяемые из выражений [см. также (5.3)]

$$m_s = \sum_{i=1}^k t_i^s f_3(t_i)\Delta t = (\Delta t^s/N_0) \sum_{i=1}^k (i - 0,5)^s n_i; s = 1, 2 \dots; \quad (8.3)$$

$$d_s = \sum_{i=1}^k (t_i - m_1)^s f_3(t_i)\Delta t = \sum_{i=1}^k [(i - 0,5)\Delta t - m_1]^s n_i/N_0; s = 2, 3 \dots, \quad (8.4)$$

где n_i – число изделий, вышедших из строя в интервале времени $t_{i-1} \leq t \leq t_i$;

$$t_i = i \cdot \Delta t;$$

Δt – единичный интервал;

$$i = 1, 2 \dots k.$$

Для теоретических законов $P_{Tj}(t)$ ($j = 1, 2$), входящих в (8.1) и описываемых непрерывными функциями времени на интервале $t \in [0; \infty]$, s -й начальный момент и s -й центральный момент выражаются соответственно в виде [см. также (2.15)]

$$M_{s,j} = \int_0^\infty t^s \cdot f_j(t)dt; \quad s = 1; 2; 3 \dots;$$

$$D_{s,j} = \int_0^\infty (t - M_{1,j})^s \cdot f_j(t)dt; \quad s = 2; 3 \dots; \quad j = 1; 2.$$

Функции и показатели составного теоретического закона $P_{TC}(t)$ определяются по общим принципам и выражениям, приведенным в подразделе 2.2. При этом, используя (2.15)–(2.17), получаем

$$P_{TC}(t) = cP_{T1}(t) + (1 - c)P_{T2}(t); \quad (8.5\text{а})$$

$$f_{TC}(t) = cf_{T1}(t) + (1 - c)f_{T2}(t); \quad (8.5\text{б})$$

$$M_{sC} = cM_{s1} + (1 - c)M_{s2}; \quad s = 1, 2, 3, 4 \dots; \quad (8.5\text{в})$$

$$\begin{aligned} D_{2C} &= M_{2C} - M_{1C}^2 = (cM_{21} + (1 - c)M_{22}) - [cM_{11} + (1 - c)M_{12}]^2 = \\ &= c^2D_{21} + (1 - c)^2D_{22} + c(1 - c)(M_{21} + M_{22} - 2M_{11}M_{12}) = \\ &= cD_{21} + (1 - c)D_{22} + c(1 - c)(M_{11} - M_{12})^2; \end{aligned} \quad (8.5\text{г})$$

$$\begin{aligned} D_{3C} &= M_{3C} - 3M_{2C} \cdot M_{1C} + 2M_{1C}^3 = cM_{31} + (1 - c)M_{32} + \\ &+ 2[cM_{11} + (1 - c)M_{12}]^3 - 3[cM_{21} + (1 - c)M_{22}] \times \\ &\times [cM_{11} + (1 - c)M_{12}] = cD_{31} + (1 - c)D_{32} + 3c(1 - c) \times \end{aligned} \quad (8.5\text{д})$$

$$\times (M_{11} - M_{12})(M_{21} - M_{22}) + 2c(1 - c) \times \\ \times \{3cM_{11}^2M_{12} + 3(1 - c)M_{12}^2M_{11} - (1 + c)M_{11}^3 - (2 - c)M_{12}^3\}.$$

В формулах (8.5а)–(8.5д) начальные и центральные моменты $M_{S1}(M_{11}, M_{21} \dots)$ и $D_{S1}(D_{21}, D_{31} \dots)$ соответствуют теоретическому закону $P_{T1}(t)$, а моменты $M_{S2}(M_{12}, M_{22} \dots)$ и $D_{S2}(D_{22}, D_{32} \dots)$ – второму закону $P_{T2}(t)$. При этом моменты M_{SC} и D_{SC} соответствуют суммарному теоретическому закону.

В классе однопараметрических вероятностных законов наиболее часто применяются три теоретических закона: экспоненциальный, Эрланга и Рэлея, основные функции и показатели которых описываются формулами (4.1)–(4.3) и графиками.

Процедура оптимального описания результатов надежностного эксперимента [см. (8.2)] в виде **суммы** двух теоретических вероятностных законов с определенными параметрами и весами [см. (8.1)] может быть выполнена на основе двух возможных вариантов решения.

Первый вариант основан на использовании того факта, что при достаточно точной аппроксимации экспериментальной функции (8.2) суммой двух теоретических законов (4.1)–(4.3) выборочные начальные и центральные моменты экспериментальной функции из (8.3)–(8.4) будут равны соответственно начальным и центральным моментам теоретической функции из (8.5). Таким образом, здесь используется метод моментов (ММ).

Второй вариант нахождения суммарной теоретической функции основан на непосредственном решении задачи (8.1) методом наименьших квадратов (МНК).

Как и в рассмотренных ранее задачах оптимальной аппроксимации одним теоретическим законом (см. разделы 6 и 7), и первый, и второй вариант решения дают в общем случае разные значения оптимизированных параметров теоретических законов. Поэтому для окончательного решения (выбора наилучшего сочетания параметров аппроксимации) используют определенный **критерий близости** экспериментального $\varphi_3(t)$ и составного теоретического $\varphi_T(t)$ законов распределения. Здесь функции $\varphi_3(t)$ и $\varphi_T(t)$ должны быть одноименными и отражать или функцию вероятности безотказной работы $P(t)$, или функцию плотности вероятности $f(t)$.

В качестве критерия близости обычно используют варианты [см. (5.4)]

$$\Delta_1 = (1/K) \sum_{i=1}^K [\varphi_3(t_i) - \varphi_T(t_i)]^2; \quad (8.6a)$$

$$\Delta_2 = (1/K) \sum_{i=1}^K [\varphi_3(t_i) - \varphi_T(t_i)]^2 / \varphi_3(t_i). \quad (8.6b)$$

При использовании указанных выше трех однопараметрических теоретических законов возможны шесть вариантов формирования (построения) составного (суммарного) теоретического закона:

- а) три варианта, когда используются комбинации двух разных законов;
- б) три варианта, когда используются суммы двух однотипных законов, но с разными параметрами.

Каждый из этих шести вариантов представления теоретического закона сначала следует проанализировать, используя методы ММ или МНК, на предмет определения трех оптимальных параметров, далее выбрать лучшую «тройку» параметров по критерию (8.6).

Затем по этому же критерию надо сравнить лучшие результаты, полученные для каждого из шести вариантов аппроксимации, и принять решение, какое же сочетание из используемых трех теоретических законов и с какими параметрами обеспечивает наименьшую погрешность аппроксимации. Алгоритм принятия решения по описанной выше методике приведен на рис. 8.1.

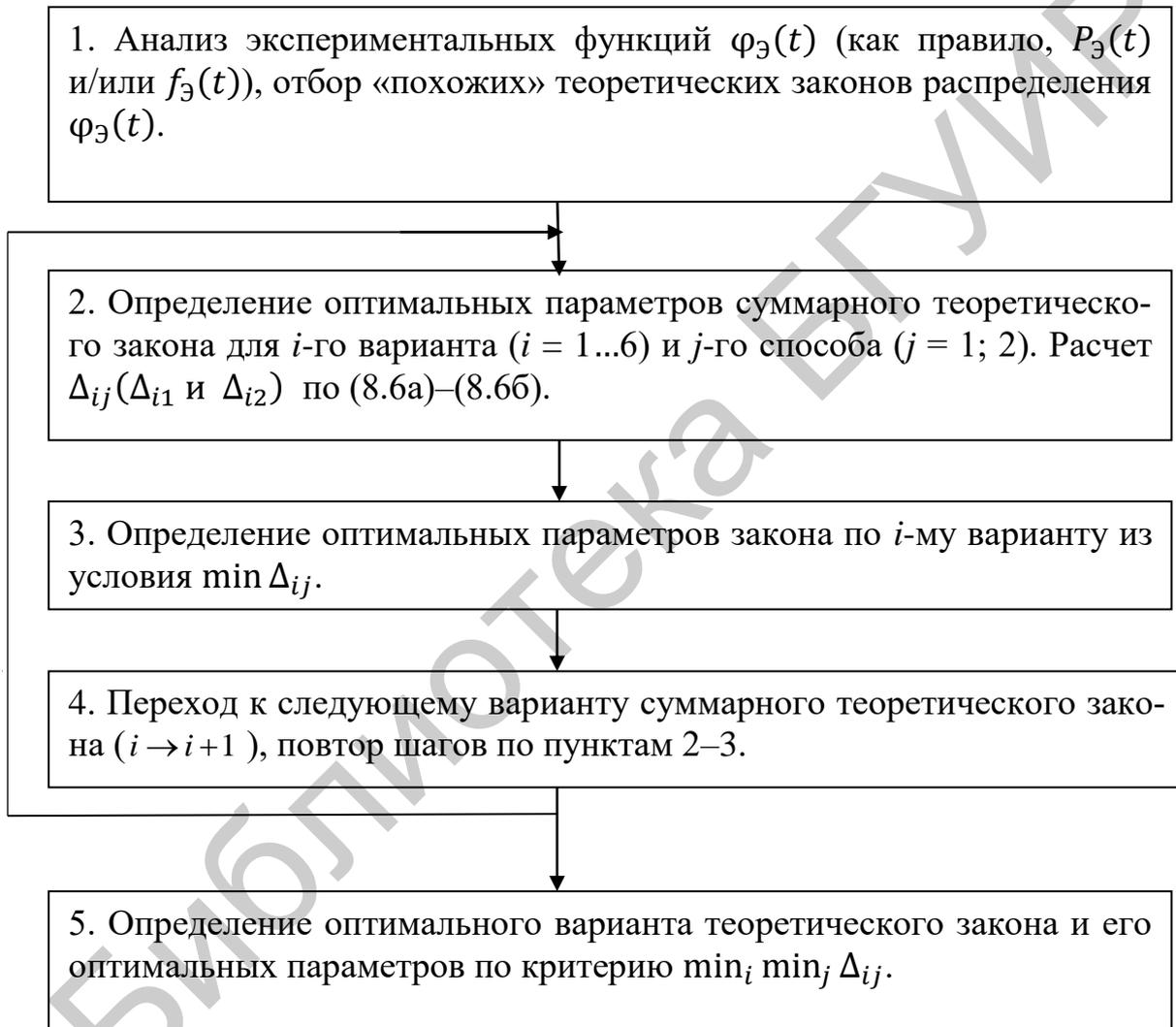


Рисунок 8.1 – Алгоритм оптимизации теоретического закона и его параметров по результатам эксперимента

Далее в подразделах 8.2–8.7 рассмотрим последовательно каждый из вариантов формирования теоретического закона и определения его оптимальных параметров по результатам эксперимента.

8.2 Аппроксимация эксперимента суммой двух экспоненциальных законов

Рассмотрим решение поставленной по указанному алгоритму задачи (см. рисунок 8.1), представляя теоретический закон в виде суммы двух экспоненциальных законов [28]. Для этого варианта, используя (4.1), получим

$$P_T(t) = c \cdot \exp(-a_1 t) + (1 - c) \exp(-a_2 t); \quad (8.7a)$$

$$f_T(t) = -dP_T(t)/dt = a_1 c \exp(-a_1 t) + (1 - c) a_2 \exp(-a_2 t); \quad (8.7б)$$

$$M_1 = c/a_1 + (1 - c)/a_2; \quad (8.7в)$$

$$M_2 = 2c/a_1^2 + 2(1 - c)/a_2^2; \quad (8.7г)$$

$$M_3 = 6c/a_1^3 + 6(1 - c)/a_2^3; \quad (8.7д)$$

$$D_2 = M_2 - M_1^2, \quad (8.7е)$$

где a_1 и a_2 – параметры экспоненциальных законов;
 c и $(1 - c)$ – веса этих законов, $0 \leq c \leq 1$.

Такое представление составного теоретического закона уместно только в том случае, когда экспериментальная функция $f_{\exists}(t)$ при $t \cong 0$ существенно отличается от нуля и с ростом t ($t > 0$) имеет тенденцию к снижению, причем всегда $f_{\exists}(t_1) > f_{\exists}(t_2)$, если $t_1 < t_2$.

При использовании ММ будем полагать, что выборочные моменты экспериментальной функции $P_{\exists}(t)$ равны соответствующим моментам аппроксимирующей теоретической функции $P_T(t)$. Тогда имеем три уравнения вида $m_s = M_s$, где $s = 1, 2, 3$, m_s определено в (5.3), M_s – в (8.7).

Обозначая искомые параметры $c = x$, $1/a_1 = y$, $1/a_2 = z$, приходим к системе уравнений

$$m_1 = M_1 = xy + (1 - x)z; \quad (8.8a)$$

$$m_2 = M_2 = 2xy^2 + 2(1 - x)z^2; \quad (8.8б)$$

$$m_3 = M_3 = 6xy^3 + 6(1 - x)z^3; \quad (8.8в)$$

$$d_2 \cong D_2 = M_2 - M_1^2 = 2xy^2 + 2(1 - x)z^2 - x^2y^2 - \quad (8.8г)$$

$$-2xyz(1 - x) - (1 - x)^2z^2;$$

$$f_{\exists}(t \cong 0) \cong f_{\exists}(t_1 = \Delta t) = f_{\exists,0} = x/y + (1 - x)/z \text{ или} \quad (8.8д)$$

$$xz + y(1 - x) - f_{\exists,0} \cdot yz = 0.$$

Из приведенных в (8.8) уравнений для определения трех неизвестных x , y и z целесообразно выбрать три уравнения, допускающие наиболее простую процедуру решения. Такими являются уравнения (8.8а), (8.8б), (8.8д), которые после использования обозначений

$$m_1 = A, 0,5m_2 = B, f_{\exists}(t_1) \cong f_{\exists,0} = Q \quad (8.9)$$

приводятся к системе уравнений

$$xy + z(1 - x) = A; \quad (8.10a)$$

$$xy^2 + z^2(1 - x) = B; \quad (8.10б)$$

$$xz + y(1 - x) - Qyz = 0. \quad (8.10в)$$

Выражая в (8.10а) $z = (A - xy)/(1 - x)$ и подставляя в (8.10б), (8.10в), приходим к системе двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x и y , которые после несложных преобразований приводятся к виду

$$xy^2 - 2Axy + Bx = (B - A^2); \quad (8.11а)$$

$$Qxy^2 - 2xy + Ax = -y(1 - QA). \quad (8.11б)$$

Умножая обе части уравнения (8.11а) на величину $(-Q)$ и складывая с (8.11б), приходим к более простому уравнению

$$y(1 - QA)(1 - 2x) + (1 - BQ)x + (B - A^2)Q = 0. \quad (8.12)$$

Затем снова вернемся к системе уравнений (8.11), умножим обе части уравнения (8.11б) на $(-A)$ и сложим с (8.11а). Тогда приходим к уравнению

$$(1 - QA)xy^2 + (B - A^2)x = (B - A^2) + y(1 - QA)A.$$

Оно после умножения обеих частей на x и введения новой переменной $q = xy$ сведется к уравнению вида

$$q^2 - Aq = (B - A^2)(x - x^2)/(1 - QA),$$

которое решается известным образом, в результате получим сначала зависимость $q = \varphi(x)$, а затем

$$y = \frac{q}{x} = \frac{A}{2x} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4x^2} + \frac{(B - A^2)}{(1 - QA)} \left(\frac{1}{x} - 1\right)}. \quad (8.13)$$

Далее, располагая двумя нелинейными уравнениями $y = \varphi_1(x)$ из (8.12) и $y = \varphi_2(x)$ из (8.13), численным методом строим зависимости $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, изменяя x в пределах $x \in [0; 1,0]$. Пересечение функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дает решение задачи: $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0 = (A - x_0y_0)/(1 - x_0)$.

Возвращаясь к искомой теоретической функции (8.7а) или (8.7б) имеем: $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0$; $a_2 = 1/z_0$.

На этом задача оптимальной аппроксимации результатов эксперимента суммой двух экспоненциальных распределений ММ считается решенной.

Для сравнения с другими возможными вариантами аппроксимации составным теоретическим законом, которые рассматриваются ниже, целесообразно использовать критерии близости, рассчитываемые по формулам (5.4) и (8.6).

8.3 Аппроксимация эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Эрланга

Для этого варианта аппроксимирующий теоретический закон и его основные показатели можно представить в виде [27]

$$P_T(t) = c \exp(-a_1 t) + (1 - c)(1 + a_2 t) \exp(-a_2 t); \quad (8.14а)$$

$$f_T(t) = ca_1 \exp(-a_1 t) + (1 - c)a_2^2 t \exp(-a_2 t); \quad (8.14б)$$

$$M_1 = c/a_1 + 2(1 - c)/a_2; \quad (8.14в)$$

$$M_2 = 2c/a_1^2 + 6(1 - c)/a_2^2; \quad (8.14г)$$

$$M_3 = 6c/a_1^3 + 24(1 - c)/a_2^3. \quad (8.14д)$$

Такое представление уместно только в случае, если экспериментальная функция $f_3(t)$, определяемая на основании (8.2г), при $t \approx 0$ существенно отличается от нуля. При этом, в отличие от предыдущего случая, **поведение функции $f_3(t)$** на начальном участке может быть **более сложным**, например, сначала она будет возрастать, достигать некоего максимума, а затем уже спадать с ростом t .

Так же как и для предыдущего случая, используя ММ, полагаем, что выборочные моменты экспериментальной функции (8.3), (8.4) равны соответствующим моментам аппроксимирующей теоретической функции (8.14).

Обозначая, как и ранее, неизвестные искомые параметры закона в виде $c = x$; $1/a_1 = y$; $1/a_2 = z$, приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными [28]:

$$m_1 = M_1 = xy + 2(1 - x)z; \quad (8.15а)$$

$$m_2 = M_2 = 2xy^2 + 6(1 - x)z^2; \quad (8.15б)$$

$$f_3(t \cong 0) \cong f_T(0) = Q = x/y. \quad (8.15в)$$

В (8.15) выбраны те уравнения из (8.14), которые приводят к наиболее простой процедуре решения. Для удобства сравнения результатов примем те же обозначения, что и в (8.9), и приходим к системе трех уравнений:

$$xy + 2(1 - x)z = A; \quad (8.16а)$$

$$xy^2 + 3(1 - x)z^2 = B; \quad (8.16б)$$

$$x = Qy. \quad (8.16в)$$

Выражая в (8.16а) $z = (A - xy)/2(1 - x)$ и подставляя в (8.16б), приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$4xy^2 - x^2y^2 - 6Axy + 4Bx = 4B - 3A^2; \quad (8.17а)$$

$$x = Qy. \quad (8.17б)$$

Затем, подставляя (8.17б) в уравнение (8.17а), приходим к одному уравнению с одним неизвестным:

$$-Q^2y^4 + 4Qy^3 - 6AQy^2 + 4BQy = 4B - 3A^2. \quad (8.18)$$

Уравнение (8.18) решается численно путем последовательного задания нарастающих значений y . В большинстве случаев, когда такая аппроксимация «работает», $y \in [0,1; 10] \cdot m_1$. Найденное из (8.18) значение $y = y_0$ позволяет затем с помощью (8.15в) определить недостающие значения $x = x_0 = Qy_0$, $z = z_0 = (A - x_0y_0)/2(1 - x_0)$ и параметры составного закона $c = x_0$, $a_1 = 1/y_0$, $a_2 = 1/z_0$.

Подстановка их в (8.14а) и (8.14б) определяет составной искомый теоретический закон.

8.4 Аппроксимация эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Рэлея

Для этого варианта аппроксимирующий теоретический закон и его основные показатели представляем в виде [см. (4.1) и (4.3)]

$$P_T(t) = c \exp(-a_1 t) + (1 - c) \exp(-a_2 t^2); \quad (8.19a)$$

$$f_T(t) = ca_1 \exp(-a_1 t) + (1 - c) 2a_2 t \exp(-a_2 t^2); \quad (8.19б)$$

$$M_1 = c/a_1 + (1 - c) \sqrt{\pi/4 a_2}; \quad (8.19в)$$

$$M_2 = 2c/a_1^2 + (1 - c)/a_2; \quad (8.19г)$$

$$f_T(t \cong 0) = ca_1. \quad (8.19д)$$

Используя ММ, будем, как и ранее, полагать, что выборочные моменты экспериментальной функции (8.3) равны соответствующим моментам аппроксимирующей функции (8.19).

Обозначая по аналогии с предыдущими решениями неизвестные (искомые) параметры теоретического закона в виде $c = x$, $1/a_1 = y$, $1/\sqrt{a_2} = z$, приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными [28]:

$$m_1 = M_2 = xy + (1 - x) \sqrt{\pi/4} \cdot z; \quad (8.20a)$$

$$m_2 = M_2 = 2xy^2 + (1 - x)z^2; \quad (8.20б)$$

$$f_T(t \cong 0) = f_T(0) = Q = x/y. \quad (8.20в)$$

Для удобства сравнения результатов с предыдущими вариантами примем те же обозначения, что и в (8.9), и приведем (8.20) к виду

$$xy + (1 - x) \sqrt{\pi/4} \cdot z = A; \quad (8.21a)$$

$$2xy^2 + (1 - x)z^2 = 2B; \quad (8.21б)$$

$$x = Q \cdot y. \quad (8.21в)$$

Выражая из (8.21a) $z = (A - xy)/(1 - x) \cdot \sqrt{\pi/4}$ и подставляя в (8.21б), получим систему уравнений с двумя неизвестными:

$$(2 - \pi)x^2 y^2 + \pi x y^2 - 4Axy + 2A^2 = B\pi(1 - x); \quad (8.22a)$$

$$x = Qy. \quad (8.22б)$$

Затем, решая совместно (8.22a) и (8.22б), придем к одному уравнению с одним неизвестным:

$$(2 - \pi)Q^2 y^4 + \pi Q^3 - 4AQy^3 + B\pi Qy = \pi B - 2A^2. \quad (8.23)$$

Уравнение (8.23) решается, как и (8.18), численно, путем последовательного задания нарастающих значений y . В большинстве случаев, когда возможна принятая аппроксимация (8.19a), (8.19б), решение ищут в пределах $y \in [0,1; 10] \cdot m_1$.

Найденное из уравнения (8.23) значение $y = y_0$ позволяет с помощью (8.22б) определить остальные неизвестные параметры в (8.19): сначала $x = x_0 = Qy_0$, $z = z_0 = (A - x_0 y_0)/(1 - x_0) \sqrt{\pi/4}$, а затем и непосредственно параметры составного закона $c = x_0$, $a_1 = 1/y_0$, $a_2 = 1/z_0^2$.

Подставляя их в (8.19a), (8.19б), получаем требуемый теоретический закон.

8.5 Аппроксимация эксперимента суммой двух законов Эрланга

Для этого варианта теоретический закон и его основные показатели представляем в виде [см. (4.3)]:

$$P_T(t) = c(1 + a_1 t) \exp(-a_1 t) + (1 - c)(1 + a_2 t) \exp(-a_2 t); \quad (8.24a)$$

$$f_T(t) = ca_1^2 t \exp(-a_1 t) + (1 - c)a_2^2 t \exp(-a_2 t); \quad (8.24б)$$

$$M_1 = 2c/a_1 + 2(1 - c)/a_2; \quad (8.24в)$$

$$M_2 = 6c/a_1^2 + 6(1 - c)/a_2^2; \quad (8.24г)$$

$$M_3 = 24(c/a_1^3 + (1 - c)/a_2^3); \quad (8.24д)$$

$$D_2 = M_2 - M_1^2. \quad (8.24е)$$

Как следует из (8.24), аппроксимация в виде (8.24а), (8.24б) целесообразна только в случае, когда экспериментальная функция $f_{\Sigma}(t)$ [см. (8.2г)] при $t \rightarrow 0$ также стремится к нулю.

Если это условие выполняется, то, применяя метод моментов, будем полагать, что выборочные моменты m_s экспериментальной функции [см. (8.3) и (8.4)] равны соответствующим моментам M_s аппроксимирующего закона (8.24) ($s = 1; 2; 3...$).

Обозначим, как и ранее, искомые параметры теоретического закона в виде $c = x$, $1/a_1 = y$, $1/a_2 = z$, а также будем полагать, что $m_1 \cong M_1$, $m_2 \cong M_2$ и $m_3 \cong M_3$, где m_1 , m_2 и m_3 определены по результатам эксперимента (8.3), (8.4).

С учетом (8.24в)–(8.24д) получим систему трех уравнений с тремя неизвестными [28]:

$$m_1 \cong M_1 = 2xy + 2(1 - x)z; \quad (8.25a)$$

$$m_2 \cong M_2 = 6xy^2 + 6(1 - x)z^2; \quad (8.25б)$$

$$m_3 \cong M_3 = 24xy^3 + 24(1 - x)z^3. \quad (8.25в)$$

Введем обозначения

$$A_1 = m_1/2; \quad (8.26a)$$

$$B_1 = m_2/6; \quad (8.26б)$$

$$F_1 = m_3/24 \quad (8.26в)$$

и перейдем к системе уравнений с тремя неизвестными:

$$A_1 = xy + (1 - x)z; \quad (8.27a)$$

$$B_1 = xy^2 + (1 - x)z^2; \quad (8.27б)$$

$$F_1 = xy^3 + (1 - x)z^3. \quad (8.27в)$$

Выразим из (8.27а) $z = (A_1 - xy)/(1 - x)$ и, подставляя в (8.27б), (8.27в), придем к системе двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$xy^2 - 2A_1 xy - B_1(1 - x) + A_1^2 = 0; \quad (8.28a)$$

$$y^3(x - 2x^2) + y^2 \cdot 3A_1 x^2 - y \cdot 3A_1^2 x + A_1^3 - F_1(1 - x)^2 = 0. \quad (8.28б)$$

Используя (8.28а), нетрудно получить вспомогательные выражения типа

$$x^2 y^2 = B_1(1 - x)x + 2A_1 x^2 y - A_1^2 x; \quad (8.29a)$$

$$xy^3 = B_1(1 - x)y + 2A_1 xy^2 - A_1^2 y; \quad (8.29б)$$

$$-2x^2 y^3 = -4A_1 x^2 y^2 + A_1^2 \cdot 2xy - 2B_1(1 - x)xy, \quad (8.29в)$$

которые после подстановки в (8.28б) позволяют получить более простое выражение:

$$y(B_1 - A_1^2)(1 - 3x + 2x^2) + xA_1(A_1^2 - 3B_1 + B_1x) + A_1(2B_1 - A_1^2) = F_1(1 - x)^2. \quad (8.30)$$

В свою очередь, используя (8.28а), также можно получить более простое расчетное выражение:

$$y = A_1 \pm \sqrt{(B_1 - A_1^2)(1 - x)/x}; \quad x \in [0; 1,0]. \quad (8.31)$$

Система уравнений (8.30)–(8.31) решается графоаналитически, например, путем построения двух расчетных функций: а) $y = \varphi_1(x)$ на основании (8.31) и б) $y = \varphi_2(x)$ на основании (8.30) – при изменении x в интервале $0 \dots 1,0$.

Точка пересечения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дает решение системы (8.30)–(8.31): $x = x_0$; $y = y_0$. Соответственно, $z = z_0 = (A_1 - x_0 y_0)/(1 - x_0)$.

Окончательно для теоретической функции (8.24а) получаем расчетные параметры $c = x_0$, $a_1 = 1/y_0$, $a_2 = 1/z_0$, что в итоге позволяет определить поведение теоретических функций $P_T(t)$ и $f_T(t)$ для $t \in [0; \infty]$ и, соответственно, погрешность аппроксимации (8.6).

8.6 Аппроксимация эксперимента суммой двух законов Рэлея

Для этого варианта теоретический закон и его основные показатели представляем в виде [28]

$$P_T(t) = c \exp(-a_1 t^2) + (1 - c) \exp(-a_2 t^2); \quad (8.32а)$$

$$f_T(t) = 2ca_1 t \exp(-a_1 t^2) + 2(1 - c)a_2 t \exp(-a_2 t^2); \quad (8.32б)$$

$$M_1 = \sqrt{\pi/4}(c/\sqrt{a_1} + (1 - c)/\sqrt{a_2}); \quad (8.32в)$$

$$M_2 = c/a_1 + (1 - c)/a_2; \quad (8.32г)$$

$$D_2 = M_2 - M_1^2; \quad (8.32д)$$

$$M_3 = (3\sqrt{\pi}/4)(c/a_1^{1,5} + (1 - c)/a_2^{1,5}). \quad (8.32е)$$

Как видно из (8.32б), аппроксимация эксперимента в виде (8.32а) целесообразна только в случае, когда экспериментальная функция $f_3(t)$ [см. (8.2г)] удовлетворяет условию $f_3(t \rightarrow 0) \rightarrow 0$. Если оно выполняется, то, используя метод моментов, можно полагать, что условием оптимальной аппроксимации будет условие равенства выборочных моментов экспериментальной функции [см. (8.3)–(8.4)] и соответствующих моментов аппроксимирующей теоретической функции (8.32).

Обозначим искомые параметры теоретического закона (8.32) в виде $c = x$, $1/a_1 = y^2$, $1/a_2 = z^2$ и примем, что $m_1 \cong M_1$, $m_2 \cong M_2$, $m_3 \cong M_3$, где моменты m_1 , m_2 и m_3 определены (известны) по результатам эксперимента на основании (8.3)–(8.4).

С учетом (8.32в)–(8.32д) получим систему уравнений [28]

$$m_1 \cong M_1 = \sqrt{\pi/4}(xy + (1 - x)z); \quad (8.33а)$$

$$m_2 \cong M_2 = xy^2 + (1 - x)z^2; \quad (8.33б)$$

$$m_3 \cong M_3 = (3\sqrt{\pi}/4)(xy^3 + (1-x)z^3). \quad (8.33в)$$

Если в (8.33) обозначить $A_2 = m_1\sqrt{4/\pi}$, $B_2 = m_2$, $F_2 = 4m_3/3\sqrt{\pi}$ и выразить из (8.33а) $z = (A_2 - xy)/(1-x)$, то после подстановки z в уравнения (8.33б)–(8.33в) придем к системе двух нелинейных уравнений относительно x и y :

$$xy^2 - y \cdot 2A_2x + A_2^2 - B_2(1-x) = 0; \quad (8.34а)$$

$$y^3(x - 2x^2) + y^2 \cdot 3A_2x^2 - y \cdot 3A_2^2x + A_2^3F_2(1-x)^2 = 0. \quad (8.34б)$$

Сравнивая систему (8.34а)–(8.34б) с системой уравнений (8.28), убеждаемся, что они отличаются только постоянными коэффициентами: A_2 вместо A_1 , B_2 вместо B_1 и F_2 вместо F_1 . Следовательно, можно утверждать, что система (8.34) приводится к системе двух уравнений вида

$$y = A_2 \pm \sqrt{(B_2 - A_2^2)(1-x)/x}; \quad (8.34в)$$

$$y(B_2 - A_2^2)(1 - 3x + 2x^2) + xA_2(A_2^2 - 3B_2 + B_2x) + A_2(2B_2 - A_2^2) = F_2(1-x). \quad (8.34г)$$

Опуская дальнейшие преобразования (8.34), отметим, что система уравнений (8.34) решается графоаналитически при изменении x в пределах $x \in (0; 1,0)$. Точка пересечения функций $y_i = \varphi_i(x)$ ($i = 1,2$), определяемых, например, из (8.34в) и (8.34г), дает решение системы (8.34): $x = x_0$; $y = y_0$. Следовательно, $z = z_0 = (A_2 - x_0y_0)/(1 - x_0)$.

Далее определяются оптимальные параметры теоретической функции (8.32а)–(8.32б): $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0^2$; $a_2 = 1/z_0^2$. Это позволяет затем определить поведение функций $P_T(t)$ и $f_T(t)$ и рассчитать погрешность аппроксимации (8.6).

8.7 Аппроксимация эксперимента суммой законов Эрланга и Рэлея

Для этого варианта теоретический закон и его основные показатели представляют в виде [27]:

$$P_T(t) = c(1 + a_1t) \exp(-a_1t) + (1 - c) \exp(-a_2t^2); \quad (8.35а)$$

$$f_T(t) = ca_1^2t \exp(-a_1t) + 2(1 - c)a_2t \exp(-a_2t^2); \quad (8.35б)$$

$$M_1 = 2c/a_1 + (1 - c)\sqrt{\pi/4a_2}; \quad (8.35в)$$

$$M_2 = 6c/a_1^2 + (1 - c)/a_2; \quad (8.35г)$$

$$D_2 = M_2 - M_1^2; \quad (8.35д)$$

$$M_3 = 24c/a_1^3 + (1 - c)(3/2a_2)\sqrt{\pi/4a_2}. \quad (8.35е)$$

Из выражений (8.35а)–(8.35б) видно, что их применение в качестве аппроксимирующего теоретического закона целесообразно только в случае, когда экспериментальная функция $f_3(t)$ [см. (8.2г)] удовлетворяет условию $f_3(t \rightarrow 0) \rightarrow 0$. В противном случае аппроксимация будет давать недопустимую погрешность.

Если нет таких противопоказаний, то, применяя метод моментов, добиваются оптимальной аппроксимации из условия, что выборочные моменты

(начальные и центральные) экспериментальной функции распределения (8.3) и (8.4) равны соответствующим моментам аппроксимирующего закона (8.35).

Обозначим искомые параметры теоретического закона (8.35) в виде $c = x$, $1/a_1 = y$, $1/a_2 = z^2$ и примем, что $M_1 = m_1$, $M_2 = m_2$ и $M_3 = m_3$, где моменты m_1 , m_2 и m_3 определены (известны) по результатам эксперимента [см. формулы (8.3), (8.4)].

Так, с учетом (8.35в), (8.35г) и (8.35е) получим систему уравнений [28]

$$m_1 = 2xy + (1-x) \cdot z\sqrt{\pi/4}; \quad (8.36a)$$

$$m_2 = 6xy^2 + (1-x)z^2; \quad (8.36б)$$

$$m_3 = 24xy^3 + (1-x)z^3 \cdot 3\sqrt{\pi}/4. \quad (8.36в)$$

Если в (8.36) обозначить $m_1 = A_3$, $m_2 = B_3$, $m_3 = F_3$ и $\sqrt{\pi/4} = K$, а также выразить из (8.36а) $z = (A_3 - 2xy)/K(1-x)$, то после подстановки z в (8.36б)–(8.36в) придем к системе двух нелинейных уравнений относительно неизвестных x и y :

$$B_3 = 6xy^2 + (A_3 - 2xy)^2/(1-x)K^2; \quad (8.37a)$$

$$F_3 = 24xy^3 + 3(A_3 - 2xy)^3/2K^2(1-x)^2. \quad (8.37б)$$

После несложных преобразований уравнение (8.37а) приводится к виду

$$y^2 - y \frac{4A_3x}{q(x)} + \frac{A_3^2 - B_3K^2(1-x)}{q(x)} = 0, \quad (8.38)$$

$$\text{где } q(x) = 6K^2x - (6K^2 - 4)x^2. \quad (8.39)$$

Решением уравнения (8.37) является выражение

$$y = \varphi_1(x) = \frac{2A_3x}{q(x)} \pm \sqrt{\frac{4A_3^2x^2}{q^2(x)} - \frac{A_3^2 - B_3K^2(1-x)}{q(x)}}. \quad (8.40)$$

В свою очередь, уравнение (8.37) сначала приводится к очевидной форме $y^3\{48K^2(1-x)^2x - 8x^3\} + y^2 \cdot 12A_3x^2 - y \cdot 6A_3^2x + A_3^3 =$ $= 2K^2(1-x)^2F_3.$ (8.41)

Затем вместо y^2 используется подстановка из (8.38). После несложных преобразований приходим к типовому квадратному уравнению вида

$$y^2 \cdot S_2 + y \cdot S_1 + S_0 = 0, \quad (8.42)$$

где коэффициенты S_0 , S_1 и S_2 не зависят от y и определяются из выражений [28]

$$S_2 = 32A_3x^2(6K^2 - 12K^2x + (6K^2 - 1)x^2); \quad (8.43a)$$

$$S_1 = 2\{4B_3K^2x(1-x)(6K^2 - 12K^2x + (6K^2 - 1)x^2) - A_3x(24K^2 + 3 - 48K^2x + x^2(24K^2 - 28))\}; \quad (8.43б)$$

$$S_0 = A_3\{B_3K^2(1-x)12x^2 - A_3^2(2x^2 - 1)\} - 2K^2(1-x)^2F_3q(x), \quad (8.43в)$$

где $q(x)$ определено в (8.39).

Решением уравнения (8.42) с учетом (8.43) является стандартное выражение вида

$$y = \psi_2(x) = (1/S_2) \left(-S_1/2 \pm \sqrt{S_1^2/4 - S_2S_0} \right). \quad (8.44)$$

После определения функциональных зависимостей $y = \varphi_1(x)$ из (8.39), (8.40) и $y = \varphi_2(x)$ из (8.33), (8.34) ищем такое решение (пару значений $x = x_0$ и $y = y_0$), которые принадлежат одновременно этим зависимостям.

Для этого система уравнений (8.40) и (8.44) решается графически путем последовательного изменения величин x в пределах $(0; 1,0)$: $x = x_j \in [0; 1,0]$; $x_j = 0,05 \cdot j$; $j = 1 \dots 20$. На каждом шаге рассчитываются значения $\varphi_1(x_j)$ и $\varphi_2(x_j)$, которые откладываются на общем графике. Точка пересечения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дает решение системы $x = x_0$, $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$, соответственно, $z = z_0 = (A_2 - 2x_0y_0)/K(1 - x_0)$, $K = \sqrt{\pi/4}$.

После этого рассчитываются оптимальные параметры теоретической функции (8.35): $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0$; $a_2 = 1/z_0^2$, что позволяет затем определить поведение функций $P_T(t)$ и $f_T(t)$ и рассчитать погрешность аппроксимации экспериментальных зависимостей из выражений (8.6а)–(8.6б).

Библиотека БГУИР

9 ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕДУРЫ АППРОКСИМАЦИИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ УКРОЧЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

9.1 Постановка задачи

В подразделах 8.1–8.7 задача ставилась следующим образом: по результатам форсированных (ускоренных) испытаний, когда вся большая партия из N_0 однотипных изделий (систем) постепенно выходит из строя, получают экспериментальный закон надежности, например, вероятность безотказной работы изделий в виде $P_3(t_i) = N(t_i)/N_0$, где $N(t_i)$ – число годных изделий к моменту t_i (при $t_i = 0$ имеем $N(t_i = 0) = N_0$ и $P_3(0) = 1,0$).

Затем предполагают, что результат эксперимента $P_3(t)$ может быть аппроксимирован суммой двух теоретических однопараметрических вероятностных законов $P_{T1}(a_1, t)$ и $P_{T2}(a_2, t)$ с параметрами соответственно a_1 и a_2 , взятых с соответствующими весами c_1 и c_2 так, что $P_3(t) \cong P_{TC}(t) = c_1 P_{T1}(a_1, t) + c_2 P_{T2}(a_2, t)$.

В качестве исходных теоретических законов были выбраны однопараметрические экспоненциальный закон и законы Эрланга и Рэлея, при этом были проанализированы шесть различных вариантов построения составного (суммарного) вероятностного закона: три варианта, когда оба закона являются одноименными, но с разными параметрами a_1, a_2 и весами c_1, c_2 , и три варианта, когда используются два разноименных закона.

Параметры и веса теоретических законов рассчитывались с использованием метода моментов, а именно из условия, что начальные и центральные моменты экспериментальной функции $P_3(t)$ должны быть равны соответствующим моментам составного теоретического закона $P_{TC}(t)$.

Наилучшим вариантом аппроксимации из шести рассмотренных считается тот, который обеспечивает минимальное значение среднего квадратического отклонения найденного суммарного теоретического закона относительно экспериментального закона. Это отклонение определяется, например, по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^K [P_3(t_i) - c_1 P_{T1}(a_1, t_i) - c_2 P_{T2}(a_2, t_i)]^2 / P_3(t_i) \rightarrow \min, \quad (9.1)$$

где $j = 1 \dots 6$ – вариант аппроксимации;

$$t_i = \Delta t \cdot i; i \in [1, K];$$

K – число точек измерения экспериментальной функции $P_3(t_i)$, причем $P_3(t_i = K\Delta t) \cong 0$.

По результатам форсированных испытаний на основе описанной выше процедуры определяется наилучший вариант аппроксимации эксперимента составным теоретическим законом, при этом считается, что этот вариант будет оптимальным и для режима нормальной эксплуатации.

Следовательно, можно считать, что в этом режиме сохранится как оптимальный вариант функций $P_{T1}(t)$ и $P_{T2}(t)$, так и весовые коэффициенты c_1 и c_2

при этих функциях (причем, как было показано, $c_1 + c_2 = 1,0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$). Также сохраняются определенные соотношения между параметрами функций a_1 и a_2 , которые будут указаны ниже.

Что касается непосредственно самих параметров a_1 и a_2 , то их определение для режима нормальной (не форсированной!) эксплуатации всегда требует обязательного экспериментального исследования, а именно укороченных испытаний. Особенностью таких испытаний является то, что время $\Delta t_{\text{ук}}$, отводимое на их проведение, существенно меньше, чем реальное среднее время $T_{\text{ср}}$ безотказной работы испытываемой техники, которое в режиме нормальной эксплуатации может достигать десятков лет и более. Естественно, за такой сравнительно малый срок проведения укороченных испытаний из строя выходят не более 5–15 % от исследуемой партии изделий, что не позволяет найти параметры аппроксимирующего закона.

Однако в сочетании с результатами, полученными в рамках форсированных испытаний, эта задача может быть успешно решена, что и будет показано ниже. При этом будем последовательно рассматривать в качестве возможной оптимальной композиции составного теоретического закона все шесть возможных вариантов, которые могут оказаться наилучшими по результатам форсированных испытаний (см. раздел 8).

9.2 Аппроксимация укороченного эксперимента суммой двух экспоненциальных законов

В этом случае, учитывая результаты форсированных испытаний, полагаем, что в режиме нормальных испытаний будет «работать» именно такая аппроксимация реального эксперимента:

$$P_3(t) \cong c \cdot \exp(-a_1 t) + (1 - c) \exp(-a_2 t). \quad (9.2a)$$

В (9.2a) неизвестны параметры a_1 и a_2 , однако по результатам форсированных испытаний известны параметры c и $b = a_1/a_2$, которые сохраняются и в режиме нормальных испытаний.

Примем, что за время проведения укороченных испытаний $\Delta t_{\text{ук}}$ было проведено K сеансов измерения числа годных изделий соответственно в моменты времени $t_i = i \Delta t_3$, где $\Delta t_3 = \Delta t_{\text{ук}}/K$, $i = 1, 2, \dots, K$. В каждый момент t_i определялось число остающихся годными изделий N_i и оценивалась величина $P_{3i} = P_3(t = t_i) = N_i/N_0$ [см. (5.2)].

При проведении укороченных испытаний всегда выполняются условия $\Delta t_{\text{ук}} \ll 1/a_1$ и $\Delta t_{\text{ук}} \ll 1/a_2$. При этом для $t_i \in [0; \Delta t_{\text{ук}}]$ с учетом известного соотношения $\exp z \cong 1 + z$, если $z \ll 1$, справедливо приближенное равенство [29]

$$\begin{aligned} P_3(t_i) &\cong c(1 - a_1 t_i) + (1 - c)(1 - a_2 t_i) = \\ &= 1 - c a_1 t_i - (1 - c) a_1 t_i / b = 1 - (c + (1 - c)/b) a_1 t_i = 1 - C_S t_i a_1; \quad (9.2b) \\ C_S &= c + (1 - c)/b. \end{aligned}$$

Здесь параметр $C_S = \text{const}$ и известен по результатам форсированных испытаний.

Из (9.2б) следует: $a_1 \cong (1 - P_{Эi})/C_S t_i$, т. е. строго говоря, $a_1 = \varphi(t_i)$. Для выбора оптимального значения a_1 целесообразно использовать метод наименьших квадратов, который формально сводится к задаче минимизации выражения [29]

$$S = \sum_{i=1}^K [a_1 - (1 - P_{Эi})/C_S t_i]^2 \rightarrow \min.$$

Задача решается путем анализа выражения $dS/da_1 = 0$, из чего следует

$$dS/da_1 = \sum_{i=1}^K [a_1 - (1 - P_{Эi})/C_S t_i] = 0; \quad (9.2в)$$

$$a_{1\text{опт}} = (1/K) \sum_{i=1}^K (1 - P_{Эi})/C_S t_i = (1/K C_S \Delta t_{Э}) \sum_{i=1}^K (1 - P_{Эi})/i; \quad (9.2г)$$

$$a_{2\text{опт}} = a_{1\text{опт}}/b. \quad (9.2д)$$

Далее, используя материалы подраздела 8.2 применительно к функции (9.2а), находим среднее время безотказной работы $T_{\text{ср.э}}$ технической системы в режиме нормальной эксплуатации:

$$T_{\text{ср.э}} = M_1 = c/a_{1\text{опт}} + (1 - c)/a_{2\text{опт}}, \quad (9.2е)$$

а также среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы $\sigma_{T_{\text{э}}}$ от его среднего значения $T_{\text{ср.э}}$:

$$\sigma_{T_{\text{э}}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = 2c/a_{1\text{опт}}^2 + 2(1 - c)/a_{2\text{опт}}^2 - T_{\text{ср.э}}^2. \quad (9.2ж)$$

Гарантированное время безотказной работы в режиме нормальной эксплуатации $T_{\text{Г.э}}$, используя (9.2б) и (9.2г), (9.2д), можно рассчитать из выражения

$$T_{\text{Г.э}} = \frac{1 - P_{\text{Г.э}}}{C_S a_{1\text{опт}}} = \frac{1 - P_{\text{Г.э}}}{a_{1\text{опт}} [c + (1 - c)/b]}; \quad (9.2з)$$

где $P_{\text{Г.э}}$ – заданное значение гарантированной вероятности безотказной работы.

Другие показатели функции (9.2а) определяются с учетом рассчитанных параметров (9.2г), (9.2д) из соответствующих выражений (8.7).

9.3 Аппроксимация укороченных испытаний суммой экспоненциального закона и закона Эрланга

Учитывая результаты форсированных испытаний, полагаем, что в режиме нормальной эксплуатации оптимальная аппроксимация результатов эксперимента будет соответствовать составному закону вида

$$P_3(t) \cong c \cdot \exp(-a_1 t) + (1 - c)(1 + a_2 t) \exp(-a_2 t), \quad (9.3а)$$

где первый член выражает экспоненциальный закон, второй – закон Эрланга [см. (8.14)], а a_1 и a_2 – параметры этих законов.

По результатам форсированных испытаний полагаем известными в (9.3а) коэффициенты c и $b = a_1/a_2$, которые сохраняются и при нормальном режиме. Как и в подразделе 9.2, полагаем, что укороченные испытания проведены за от-

носителем малое время $\Delta t_{\text{ук}}$, причем измерения проводились в дискретные моменты времени $t_i = i\Delta t_{\text{э}}$, где $i = 1, 2, \dots, K$, $K\Delta t_{\text{э}} = \Delta t_{\text{ук}}$, $\Delta t_{\text{э}}$ – интервал времени между соседними измерениями.

Учитывая, что при проведении укороченных испытаний всегда выполняются условия $\Delta t_{\text{ук}} \ll 1/a_1$ и $\Delta t_{\text{ук}} \ll 1/a_2$, вместо (9.3а) можно записать приближенное равенство [29]:

$$P_{\text{э}}(t = t_i; 0 < t_i < \Delta t_{\text{ук}}) \cong c(1 - a_1 t_i) + (1 - c)(1 + a_2 t_i)(1 - a_2 t_i) = \\ = c(1 - a_1 t_i) + (1 - c)(1 - a_2^2 t_i^2) = 1 - cba_2 t_i - (1 - c)a_2^2 t_i^2. \quad (9.3б)$$

Из (9.3б) следует: $(1 - c)a_2^2 t_i^2 + cba_2 t_i = 1 - P_{\text{э}i}$.

Используя метод наименьших квадратов, подберем оптимальное значение параметра a_2 из условия

$$\sum_{i=1}^K [(1 - c)a_2^2 t_i^2 + cba_2 t_i - (1 - P_{\text{э}i})]^2 = S \rightarrow \min; \quad dS/da_2 = 0$$

и придем к уравнению вида [29]

$$\sum_{i=1}^K [(1 - c)a_2^2 t_i^2 + cba_2 t_i - (1 - P_{\text{э}i})] \cdot [2(1 - c)t_i^2 a_2 + cbt_i] = 0,$$

которое после приведения подобных членов запишется в виде

$$a_2^3 \cdot 2(1 - c)^2 \sum_{i=1}^K t_i^4 + a_2^2 \cdot 3(1 - c)cb \sum_{i=1}^K t_i^3 + a_2 c^2 b^2 \sum_{i=1}^K t_i^2 - \\ - a_2 \cdot 2(1 - c) \sum_{i=1}^K t_i^2 (1 - P_{\text{э}i}) - cb \sum_{i=1}^K t_i (1 - P_{\text{э}i}) = 0. \quad (9.3в)$$

Учтем, что $t_i = i\Delta t_{\text{э}}$, и воспользуемся известными выражениями [7]

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^K t_i^4 &= \Delta t_{\text{э}}^4 \sum_{i=1}^K i^4 = \Delta t_{\text{э}}^4 K(K+1)(2K+1)(3K^2+3K-1)/30, \\ \sum_{i=1}^K t_i^3 &= \Delta t_{\text{э}}^3 \sum_{i=1}^K i^3 = \Delta t_{\text{э}}^3 K^2(K+1)^2/4, \\ \sum_{i=1}^K t_i^2 &= \Delta t_{\text{э}}^2 \sum_{i=1}^K i^2 = \Delta t_{\text{э}}^2 K(K+1)(2K+1)/6. \end{aligned} \right\} \quad (9.3г)$$

Далее разделим все члены уравнения (9.3 в) на $\Delta t_{\text{э}}$ и введем новую переменную – безразмерную величину $y = \alpha_2 \Delta t_{\text{э}}$. Таким образом придем к уравнению

$$y^3 \alpha_3 + y^2 \alpha_2 + y \alpha_1 - \alpha_0 = 0, \quad (9.3д)$$

где коэффициенты α_j ($j = 0; 1; 2; 3$) равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= 2(1 - c)^2 K(K+1)(2K+1)(3K^2+3K-1)/30; \\ \alpha_2 &= 3cb(1 - c)K^2(K+1)^2/4; \\ \alpha_1 &= c^2 b^2 K(K+1)(2K+1)/6 - 2(1 - c) \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{э}i})i^2; \\ \alpha_0 &= cb \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{э}i})i. \end{aligned} \right\} \quad (9.3е)$$

Определив с учетом данных эксперимента коэффициенты α_0 , α_1 , затем рассчитывают из (9.3е) коэффициенты α_2 , α_3 и решают численным методом уравнение (9.3д). Решением является значение $y = y_{\text{опт}} = a_{2\text{опт}} \Delta t_{\text{э}}$, откуда находим $a_{2\text{опт}} = y_{\text{опт}}/\Delta t_{\text{э}}$, а затем $a_{1\text{опт}} = a_{2\text{опт}} b$.

После этого закон вероятности безотказной работы системы в нормальных условиях (9.3а) может считаться полностью определенным, а показатели этого закона нетрудно определить из известных выражений (8.14). Например, среднее время безотказной работы определяется как

$$T_{\text{ср.э}} = M_1 = c/a_{1\text{опт}} + 2(1-c)/a_{2\text{опт}}; \quad (9.3\text{е})$$

среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы $\sigma_{T\text{э}}$ от среднего $T_{\text{ср.э}}$ равно

$$\sigma_{T\text{э}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = 2c/a_{1\text{опт}}^2 + 6(1-c)/a_{2\text{опт}}^2 - T_{\text{ср.э}}^2. \quad (9.3\text{ж})$$

Гарантированное время безотказной работы в режиме нормальной эксплуатации $T_{\text{Г.э}}$ можно определить, используя (9.3 б) и полагая, что при $t_i = T_{\text{Г.э}}$ имеем $P_{\text{э}} = P_{\text{Г.э}}$. Тогда получим

$$(1-c)a_{2\text{опт}}^2 T_{\text{Г.э}}^2 + ca_{1\text{опт}} T_{\text{Г.э}} = 1 - P_{\text{Г.э}},$$

откуда, решая квадратное уравнение с неизвестным $T_{\text{Г.э}}$, находим

$$T_{\text{Г.э}} = \frac{-ca_{1\text{опт}} + [c^2 a_{1\text{опт}}^2 + 4(1-P_{\text{Г.э}})(1-c)a_{2\text{опт}}^2]^{0,5}}{2(1-c)a_{2\text{опт}}}. \quad (9.3\text{з})$$

Другие показатели функции (9.3а) определяются с учетом известных параметров $a_{1\text{опт}}$ и $a_{2\text{опт}}$ непосредственно из (8.14).

9.4. Аппроксимация укороченного эксперимента суммой экспоненциального закона и закона Рэлея

Для этого случая предполагаем, что результаты нормальных эксплуатационных испытаний наилучшим образом будут описываться выражением

$$P_{\text{э}}(t) \cong c \cdot \exp(-a_1 t) + (1-c)\exp(-a_2 t^2), \quad (9.4\text{а})$$

где первый член соответствует экспоненциальному закону, второй – закону Рэлея [см. (8.19)], a_1 и a_2 – параметры этих законов.

Для укороченных испытаний, как говорилось, временной интервал испытаний $\Delta t_{\text{ук}}$ таков, что для $0 \leq t \leq \Delta t_{\text{ук}}$ всегда выполняется условие $a_1 \Delta t_{\text{ук}} \ll 1$ и $a_2 \Delta t_{\text{ук}}^2 \ll 1$. Это позволяет считать, что для $t < \Delta t_{\text{ук}}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} P_{\text{э}}(t < \Delta t_{\text{ук}}) &\cong c(1 - a_1 t) + (1-c)(1 - a_2 t^2) = \\ &= 1 - ca_1 t - (1-c)a_2 t^2. \end{aligned} \quad (9.4\text{б})$$

Полагаем, как и ранее, что коэффициенты c и $b = a_1/\sqrt{a_2}$ не зависят от вида испытаний и известны по результатам форсированных испытаний. Тогда для $t_i \in [0; \Delta t_{\text{ук}}]$ можно записать

$$P_{\text{э}}(t_i) = P_{\text{э}i} \cong 1 - ca_1 t_i - (1-c)t_i^2 a_1^2/b^2$$

и, соответственно,

$$a_1^2 (1-c)t_i^2/b^2 + ct_i a_1 \cong 1 - P_{\text{э}i}, \quad (9.4\text{в})$$

где $t_i = i \cdot \Delta t_{\text{Э}}$; $K = \Delta t_{\text{ук}}/\Delta t_{\text{Э}}$; $i = 1, 2 \dots K$.

Как видно из (9.4в), для каждой пары результатов измерений $(t_i, P_{\text{Э}i})$ значение a_1 может быть разным. Для минимизации ошибки при подборе a_1 , как и ранее, используем метод наименьших квадратов. С этой целью определяем оптимальное значение параметра a_1 из условия

$$\sum_{i=1}^K [a_1^2(1-c)t_i^2/b^2 + ct_i a_1 - (1 - P_{\text{Э}i})]^2 = S \rightarrow \min; \quad dS/da_1 = 0.$$

В этом случае приходим к уравнению вида [28]

$$\sum_{i=1}^K [a_1^2(1-c)t_i^2/b^2 + ct_i a_1 - (1 - P_{\text{Э}i})][2a_1(1-c)t_i^2/b^2 + ct_i] = 0.$$

Раскрывая это уравнение и сгруппировав подобные члены, получим выражение

$$2a_1^3(1-c)^2 \sum_{i=1}^K t_i^4/b^4 + 3a_1^2(1-c)c \sum_{i=1}^K t_i^3/b^2 + c^2 a_1 \sum_{i=1}^K t_i^2 - (1-c)2a_1 \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})t_i^2/b^2 - c \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})t_i = 0. \quad (9.4г)$$

Используя (9.4г) и обозначив $z = a_1 \Delta t_{\text{Э}}$, приходим к выражению

$$z^3 \beta_3 + z^2 \beta_2 + z \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad (9.4д)$$

где с учетом (9.3г) коэффициенты β_j ($j = 0, 1, 2, 3$) равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} \beta_3 &= 2(1-c)^2 \sum_{i=1}^K i^4/b^4 = \\ &= (1-c)^2 K(K+1)(2K+1)(3K^2+3K-1)/15b^4; \\ \beta_2 &= 3(1-c)c \sum_{i=1}^K i^3/b^2 = 3(1-c)cK^2(K+1)^2/4b^2; \\ \beta_1 &= c^2 \sum_{i=1}^K i^2 - 2(1-c) \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i}) i^2/b^2 = \\ &= [c^2 - 2(1-c)/b^2] \sum_{i=1}^K i^2 + 2(1-c) \sum_{i=1}^K P_{\text{Э}i} i^2/b^2 = \\ &= [c^2 b^2 - 2(1-c)]K(K+1)(2K+1)/6b^2 + \\ &\quad + 2(1-c) \sum_{i=1}^K P_{\text{Э}i} \cdot i^2/b^2; \\ \beta_0 &= -c \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i}) i = -cK(K+1)/2 + c \sum_{i=1}^K i \cdot P_{\text{Э}i}. \end{aligned} \right\} (9.4е)$$

Рассчитав коэффициенты по (9.4е), далее численным путем решают уравнение (9.4д) и находят искомое значение $z = z_{\text{опт}} = a_{1\text{опт}} \Delta t_{\text{Э}}$. Следовательно, получаем

$$a_{1\text{опт}} = z_{\text{опт}}/\Delta t_{\text{Э}}; \quad a_{2\text{опт}} = a_{1\text{опт}}^2/b^2. \quad (9.4ж)$$

Затем, используя материалы (8.19), определяют среднее время безотказной работы

$$T_{\text{СР.Э}} = M_1 = c/a_{1\text{опт}} + (1-c)\sqrt{\pi/4a_{2\text{опт}}} \quad (9.4з)$$

и среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы $\sigma_{T_{\text{Э}}}$ от среднего значения $T_{\text{СР.Э}}$

$$\sigma_{T_{\text{Э}}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = 2c/a_{1\text{опт}}^2 + (1-c)/a_{2\text{опт}} - T_{\text{СР.Э}}^2. \quad (9.4и)$$

Гарантированное время безотказной работы $T_{\text{Г.Э}}$ находят численным методом, используя (9.4а) или (9.4б) и последовательно задавая ряд значений

$t = t_i = i\Delta t_{\text{Э}}, i = 1, 2, \dots, K$. Решением является то значение $t_i \cong T_{\text{Г.Э}}$, при котором $P_{\text{Э}}(t = t_i) \cong P_{\text{Г.Э}}$, где $P_{\text{Г.Э}}$ – заданная гарантированная вероятность безотказной работы.

Значение $T_{\text{Г.Э}}$ можно найти приближенно, используя (9.4б). Тогда имеем уравнение

$$(1 - c)a_{2\text{опт}}T_{\text{Г.Э}}^2 + ca_{1\text{опт}}T_{\text{Г.Э}} = 1 - P_{\text{Г.Э}},$$

откуда, решая квадратное уравнение с неизвестным $T_{\text{Г.Э}}$, находим

$$T_{\text{Г.Э}} = \frac{-ca_{1\text{опт}} + [c^2a_{1\text{опт}}^2 + 4(1 - P_{\text{Г.Э}})(1 - c)a_{2\text{опт}}]^{0,5}}{2(1 - c)a_{2\text{опт}}}. \quad (9.4к)$$

9.5 Аппроксимация укороченных испытаний суммой двух законов Эрланга

Если по результатам форсированных испытаний наиболее точной оказалась аппроксимация в виде суммы двух законов Эрланга, то предполагается, что аналогичный вывод будет справедлив и для нормальных эксплуатационных испытаний.

В этом случае с учетом (8.24) принимают, что

$$P_{\text{Э}} \cong c(1 + a_1t) \exp(-a_1t) + (1 - c)(1 + a_2t) \exp(-a_2t), \quad (9.5а)$$

где a_1 и a_2 – параметры этих законов.

По результатам форсированных испытаний считаются известными значения коэффициентов c и $b = a_1/a_2$, которые сохраняются и в режиме нормальных испытаний.

Учтем, что в режиме укороченных испытаний, проводимых в моменты времени $t_i = i \cdot \Delta t_{\text{Э}}$, где $i \in [1, K]$, $K = \Delta t_{\text{ук}}/\Delta t_{\text{Э}}$, $\Delta t_{\text{ук}}$ – полное время проведения укороченных испытаний, справедливо полагать, что $a_1t_i \ll 1$ и $a_2t_i \ll 1$.

Вместо (9.5а) можно использовать [29]

$$\begin{aligned} P_{\text{Э}}(t \leq \Delta t_{\text{ук}}) &\cong c(1 + a_1t)(1 - a_1t) + (1 - c)(1 + a_2t)(1 - a_2t) = \\ &= 1 - ca_1^2t^2 - (1 - c)a_2^2t^2 = 1 - cb^2a_2^2t^2 - (1 - c)a_2^2t^2 = \\ &= 1 - a_2^2t^2(cb^2 + 1 - c) = 1 - a_2^2t^2C_{\text{Э}}, \end{aligned} \quad (9.5б)$$

где $C_{\text{Э}} = cb^2 + 1 - c = 1 + c(b^2 - 1)$, причем значение коэффициента $C_{\text{Э}}$ известно по результатам форсированных испытаний.

Обозначим $a_2^2 = x$ и, используя (9.5б) для $t = t_i$, когда $P_{\text{Э}}(t = t_i) = P_{\text{Э}i}$, получим $x = (1 - P_{\text{Э}i})/C_{\text{Э}}t_i^2$. Поскольку значение x получается разным для разных пар $P_{\text{Э}i}$ и t_i , определим оптимальное значение x по методу наименьших квадратов, когда

$$\sum_{i=1}^K [x - (1 - P_{\text{Э}i})/C_{\text{Э}}t_i^2]^2 = S \rightarrow \min \text{ и } dS/dx = 0.$$

Можно показать, что при этом [29]

$$x = x_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})/C_{\text{Э}}t_i^2 K = (1/KC_{\text{Э}}\Delta t_{\text{Э}}^2) \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})/i^2; \quad (9.5в)$$

$$a_2 = a_{2\text{опт}} = \sqrt{x_{\text{опт}}} = \quad (9.5\Gamma)$$

$$= (1/\Delta t_{\text{Э}}) \sqrt{\sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})/i^2 K(1 + c(b^2 - 1))};$$

$$a_1 = a_{1\text{опт}} = a_{2\text{опт}} b. \quad (9.5Д)$$

Определив основные параметры вероятностного закона [(9.5а), (9.5Г), (9.5д)], далее нетрудно найти основные показатели, используя (8.24). Так, среднее время безотказной работы $T_{\text{ср.Э}}$ для закона (9.5а) определяется выражением

$$T_{\text{ср.Э}} = M_1 = 2c/a_{1\text{опт}} + 2(1 - c)/a_{2\text{опт}}. \quad (9.5е)$$

Среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы $\sigma_{T_{\text{Э}}}$ относительно его среднего значения $T_{\text{ср.Э}}$ рассчитывают по формуле

$$\sigma_{T_{\text{Э}}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = 6c/a_{1\text{опт}}^2 + 6(1 - c)/a_{2\text{опт}}^2 - T_{\text{ср.Э}}^2. \quad (9.5ж)$$

Гарантированное время безотказной работы в режиме нормальной эксплуатации $T_{\text{Г.Э}}$ можно найти, задавая последовательно ряд значений $t_i = i\Delta t_{\text{Э}}$ и определяя из (9.5а) значения $P_{\text{Э}}(t_i)$. Построив по этим данным график зависимости $P_{\text{Э}}(t)$, для $P_{\text{Э}}(t_i) \cong P_{\text{Г.Э}}$ находят $t_i = T_{\text{Г.Э}}$. Приблизенно значение $T_{\text{Г.Э}}$ можно найти, используя (9.5б)

$$T_{\text{Г.Э}} \cong \sqrt{(1 - P_{\text{Г.Э}})/a_{2\text{опт}}^2(1 + cb^2 - c)}. \quad (9.5з)$$

Другие показатели закона нетрудно найти самостоятельно, используя формулы (8.24).

9.6 Аппроксимация укороченного эксперимента суммой двух законов Рэлея

Для рассматриваемого случая предполагается, что как в режиме форсированных испытаний, так и в режиме нормальной эксплуатации наиболее точное описание реального надежностного эксперимента будет в виде (8.32)

$$P_{\text{Э}}(t) = c \cdot \exp(-a_1 t^2) + (1 - c)\exp(-a_2 t^2), \quad (9.6а)$$

где коэффициенты c и $b = a_1/a_2$, определенные по результатам форсированных испытаний, сохраняют свои значения и для режима нормальных испытаний.

Поскольку в интервале проведения укороченных испытаний, когда $0 \leq t \leq \Delta t_{\text{ук}}$, всегда выполняется условие $a_1 \Delta t_{\text{ук}}^2 \ll 1$ и $a_2 \Delta t_{\text{ук}}^2 \ll 1$, вместо (9.6а) можно использовать [29]

$$P_{\text{Э}}(t \leq \Delta t_{\text{ук}}) \cong c(1 - a_1 t^2) + (1 - c)(1 - a_2 t^2) = 1 - t^2(ca_1 + (1 - c)a_2) = 1 - a_2 t^2(cb + 1 - c) = 1 - a_2 t^2 C_r, \quad (9.6б)$$

где коэффициент $C_r = (cb + 1 - c)$ – определяется по результатам форсированных испытаний.

Если полагать, что для $t = t_i = i \cdot \Delta t_{\text{Э}}$, ($i = 1, 2 \dots K$, $K = \Delta t_{\text{ук}}/\Delta t_{\text{Э}}$) известно значение $P_{\text{Э}}(t = t_i) = P_{\text{Э}i}$, получим на основании (9.6б) $a_2 = (1 - P_{\text{Э}i})/C_r t_i^2$.

Как и ранее, будем находить такое оптимальное значение $a_{2\text{опт}}$, которое минимизирует по методу МНК выражение

$$\sum_{i=1}^K [a_2 - (1 - P_{\text{Э}i})/C_r t_i^2]^2 = S \rightarrow \min \text{ и } dS/da_2 = 0.$$

Из выражения $dS/da_2 = \sum_{i=1}^K [a_2 - (1 - P_{\text{Э}i})/C_r t_i^2] = 0$ следует, что [29]

$$a_{2\text{опт}} = \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})/K C_r t_i^2 = (1/K C_r \Delta t_{\text{Э}}^2) \sum_{i=1}^K (1 - P_{\text{Э}i})/i^2; \quad (9.6в)$$

$$a_{1\text{опт}} = b a_{2\text{опт}}. \quad (9.6г)$$

Зная для закона (9.6а) его параметры (9.6в), (9.6г), основные показатели закона нетрудно определить, используя формулы (8.32). Так, среднее время безотказной работы $T_{\text{ср.Э}}$ и его среднее квадратическое отклонение $\sigma_{T_{\text{Э}}}$ определяются из выражений

$$T_{\text{ср.Э}} = M_1 = \sqrt{\pi/4} (c/\sqrt{a_{1\text{опт}}} + (1 - c)/\sqrt{a_{2\text{опт}}}); \quad (9.6д)$$

$$\sigma_{T_{\text{Э}}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = c/a_{1\text{опт}} + (1 - c)/a_{2\text{опт}} - T_{\text{ср.Э}}^2. \quad (9.6е)$$

Значение гарантированного времени безотказной работы $T_{\text{Г.Э}}$ определяется, как и для предыдущих случаев, из графика $P_{\text{Э}}(t_i)$ при условии $P_{\text{Э}}(t = T_{\text{Г.Э}}) = P_{\text{Г.Э}}$, где $P_{\text{Г.Э}}$ – заданное значение гарантированной вероятности безотказной работы.

Для приближенной оценки (при $P_{\text{Г.Э}} \geq 0,9$) можно использовать (9.6б), следовательно,

$$T_{\text{Г.Э}} \cong \sqrt{(1 - P_{\text{Г.Э}})/a_{2\text{опт}} C_r}. \quad (9.6ж)$$

Другие показатели можно определить, используя (8.32).

9.7 Аппроксимация укороченных испытаний суммой законов Эрланга и Рэлея

Для этого случая полагаем, что как в режиме форсированных испытаний, так и в режиме нормальной эксплуатации закон вероятности безотказной работы наиболее точно описывается суммой двух законов (Эрланга и Рэлея) в виде [см. (8.35)]

$$P_{\text{Э}}(t) \cong c(1 + a_1 t) \exp(-a_1 t) + (1 - c) \exp(-a_2 t^2), \quad (9.7а)$$

где по результатам форсированных испытаний известны коэффициенты c и $b = a_1/\sqrt{a_2}$, которые остаются такими же и в режиме нормальной эксплуатации.

В режиме укороченных нормальных испытаний, проводимых в интервале, когда $0 \leq t \leq \Delta t_{\text{ук}}$, и оцениваемых дискретно в моменты времени $t_i = i \cdot \Delta t_{\text{Э}}$, где (при $i \in [1, K]$), $\Delta t_{\text{Э}} = \Delta t_{\text{ук}}/K$, можно считать, что $a_1 \Delta t_{\text{ук}} \ll 1$ и $a_2 \Delta t_{\text{ук}}^2 \ll 1$. Тогда для режима укороченных испытаний (в интервале $0 \leq t \leq \Delta t_{\text{ук}}$) вместо (9.7а) можно использовать приближенное выражение [29]

$$\begin{aligned}
P_3(t) &\cong c(1 + a_1 t)(1 - a_1 t) + (1 - c)(1 - a_2 t^2) = c(1 - a_1^2 t^2) + \\
&+ (1 - c)(1 - a_2 t^2) = 1 - ca_1^2 t^2 - (1 - c)a_2 t^2 = \\
&= 1 - ca_1^2 t^2 - (1 - c)t^2 a_1^2 / b^2 = 1 - a_1^2 t^2 C_d,
\end{aligned} \tag{9.76}$$

где $C_d = c + (1 - c)/b^2$ – постоянный коэффициент, определяемый по результатам форсированных испытаний.

В момент времени $t = t_i$ имеем $P_3(t_i) = P_{3i}$ и на основании (9.76) получим $a_1^2 = (1 - P_{3i})/C_d t_i^2$.

Для оптимального выбора a_1 , как и ранее, используем МНК. Обозначив $a_1^2 = \gamma$, получим

$$S = \sum_{i=1}^K [\gamma - (1 - P_{3i})/C_d t_i^2]^2 \rightarrow \min; \quad dS/d\gamma = 0.$$

Следовательно, $dS/d\gamma = \sum_{i=1}^K [\gamma - (1 - P_{3i})/C_d t_i^2] = 0$, откуда [29]

$$\gamma_{\text{опт}} = a_{1\text{опт}}^2 = \sum_{i=1}^K (1 - P_{3i})/K C_d t_i^2 = \sum_{i=1}^K (1 - P_{3i})/i^2 K C_d \Delta t_3^2. \tag{9.7в}$$

В этом случае, соответственно,

$$a_{1\text{опт}} = \sqrt{\gamma_{\text{опт}}} = (1/\Delta t_3) \sqrt{(1/K C_d) \sum_{i=1}^K (1 - P_{3i})/i^2}; \tag{9.7г}$$

$$a_{2\text{опт}} = a_{1\text{опт}}^2 / b^2 = (1/K b^2 C_d \Delta t_3^2) \sum_{i=1}^K (1 - P_{3i})/i^2. \tag{9.7д}$$

Определив основные параметры функции (9.7а) по формулам (9.7г), (9.7д), далее нетрудно рассчитать основные показатели закона (9.7а), используя выражения (8.35). В частности, среднее время безотказной работы $T_{\text{ср.э}}$ и среднеквадратическое отклонение этого времени $\sigma_{T,\text{э}}$ определяются из выражений

$$T_{\text{ср.э}} = M_1 = 2c/a_{1\text{опт}} + (1 - c)\sqrt{\pi/4a_{2\text{опт}}}; \tag{9.7е}$$

$$\sigma_{T,\text{э}}^2 = D_2 = M_2 - M_1^2 = 6c/a_{1\text{опт}}^2 + (1 - c)/a_{2\text{опт}} - T_{\text{ср.э}}^2. \tag{9.7ж}$$

Значение гарантированного времени безотказной работы $T_{\text{Г.э}}$ в режиме нормальной эксплуатации определяют путем последовательного расчета по формуле (9.7а) значений $P_3(t_i)$ для моментов времени $t_i = i \cdot \Delta t_3$. Пересечение графика $P_3(t_i)$ с прямой $P_3 = P_{\text{Г.э}}$, где $P_{\text{Г.э}}$ – заданное значение гарантированной вероятности безотказной работы в режиме нормальной эксплуатации, дает значение $T_{\text{Г.э}}$.

Для приближенных расчетов (при $P_{\text{Г.э}} \geq 0,9$) можно использовать (9.7б) и (9.7г), при этом

$$T_{\text{Г.э}}^2 \cong (1 - P_{\text{Г.э}})/a_{1\text{опт}}^2 C_d. \tag{9.7и}$$

Другие показатели закона можно определить, используя (8.35).

10 КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ

10.1 Общие сведения

На основе изложенного в предыдущих разделах материала разработано программное и методическое обеспечение для выполнения компьютеризированных лабораторных работ под общим названием «Прогнозирование показателей надежности технических систем по результатам испытаний».

В этих работах на основе имитации разнообразных результатов надежных испытаний техники в режимах форсированных (ускоренных) и укороченных (нормальных) испытаний ставится задача определения оптимального теоретического вероятностного закона, который наилучшим образом описывает результаты эксперимента, а затем и определения основных показателей этого закона, например, гарантированного и среднего времени безотказной работы. Указанные показатели имеют важнейшее значение в конкурентной борьбе любой продукции на мировом рынке.

Лабораторные работы предназначены для студентов БГУИР, обучающихся по направлению специальности «Инфокоммуникационные системы (стандартизация, сертификация и контроль качества)», также они могут быть использованы студентами других специальностей и вузов, курсантами военных вузов и факультетов при изучении вопросов надежности различной техники и технологий.

Общими **целями** лабораторных работ являются:

- изучение основных законов, характеризующих процесс безотказной работы технической системы, а также методов оптимизации параметров и показателей этих законов по результатам опытных (экспериментальных) испытаний;
- определение типа вероятностного закона надежности и его параметров, которые наилучшим образом соответствуют этим испытаниям (по конкретным результатам форсированных испытаний техники и с использованием компьютерной поддержки);
- определение по конкретным результатам укороченных испытаний этой же техники, но уже в реальных (нормальных) условиях эксплуатации, реальных параметров и показателей надежности, например, гарантированного и среднего времени безотказной работы.

Цикл лабораторных работ по указанной тематике состоит из трех работ, кратко описанных ниже.

В первой работе (см. подраздел 10.2) результаты испытаний оптимально аппроксимируются одним из исследуемых теоретических законов путем последовательного перебора трех однопараметрических вероятностных законов. При этом для каждого из них исследуется большое число (не менее восьми) вариантов определения оптимального параметра закона (см. подразделы 6.1–6.3). Окончательный выбор оптимального теоретического закона вероятности безот-

казной работы и его оптимального параметра производится с учетом критериев, рассмотренных в разделе 5 [см. (5.4)].

Во второй лабораторной работе (см. подраздел 10.3) результаты испытаний (эксперимента) оптимально аппроксимируются путем последовательного анализа и оптимизации каждого из пяти двухпараметрических теоретических вероятностных законов с использованием материалов подразделов 6.4–6.8.

В третьей лабораторной работе (см. подраздел 10.4) результаты экспериментальных исследований являются базой для определения и оптимизации параметров составного теоретического вероятностного закона, который представляет собой взвешенную сумму двух разных однопараметрических законов. Здесь, так же как и в предыдущих работах, решение задачи аппроксимации определяется путем перебора и оптимизации шести возможных вариантов описания составного теоретического вероятностного закона и использования критериев оптимальности, приведенных в разделе 5.

10.2 Оптимальное описание результатов испытаний одним однопараметрическим вероятностным законом

Опуская рассмотрение общих теоретических вопросов, приводимых в описании каждой лабораторной работы и основанных на материалах разделов 4–9 настоящего учебно-методического пособия, кратко рассмотрим основные этапы компьютерного моделирования надежностных испытаний каждым из трех однопараметрических вероятностных законов: экспоненциальным, Эрланга и Рэ-ля (см. подразделы 4.1–4.3) [28].

10.2.1 Выбор исходных данных

На первом этапе лабораторной работы студент (курсант) знакомится с условиями предлагаемого ему варианта результатов опытных испытаний технической системы – ее вероятностных характеристик в режиме форсированных (ускоренных) испытаний и нормальной эксплуатации.

Для режима **форсированных испытаний** студенту задается (или он сам выбирает) номер одного из предлагаемых вариантов исходных данных (см. приложение Б). В таблице Б.1 задается число интервалов испытаний K (как правило, $K \geq 10$) и число изделий n_i , отказавших на i -м интервале времени (в промежутке времени $(i - 1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t$, где $i \in [\overline{1, K}]$). Также задается величина единичного интервала Δt или общее время проведения испытаний $\Delta t_{\max} = K \cdot \Delta t$.

Общее число изделий N_0 , поставленных на испытания, для всех вариантов постоянно: $N_0 = 100$ (см. приложение Б). При $t \geq \Delta t_{\max}$ вся партия изделий, поставленная на форсированные испытания, считается вышедшей из строя.

Для режима **укороченных испытаний** (проводимых в режиме нормальной эксплуатации) студенту предлагается один из вариантов исходных данных

для укороченных испытаний, приведенных в таблице Б.2 (см. приложение Б). В таблице указывается конкретный закон вероятности безотказной работы (экспоненциальный, Эрланга или Рэлея), величина элементарного интервала испытаний $\Delta t_{\text{Э}}$ в нормальных условиях эксплуатации, общее время проведения испытания в укороченном режиме $\Delta t_{\text{ук}}$ или число интервалов наблюдений $m = \Delta t_{\text{ук}}/\Delta t_{\text{Э}}$, а также количество изделий n_i , отказавших на i -м интервале времени испытаний в промежутке $(i - 1)\Delta t_{\text{Э}} \leq t \leq i\Delta t_{\text{Э}}$, $i \in \overline{1, m}$.

Вариант табличных данных для режима укороченных испытаний, как правило, задается преподавателем индивидуально в зависимости от вида вероятностного закона, обоснованного студентом по результатам форсированных (ускоренных) испытаний.

В указанных таблицах приводятся также значения гарантированной вероятности безотказной работы в режиме эксплуатации $P_{Г.Э}$, для которой затем потребуется определить гарантированное время безотказной работы $T_{Г.Э}$.

10.2.2 Имитационное моделирование надежностных испытаний

Программное моделирование надежностных испытаний ведется в следующем типовом режиме.

1 Включается программа моделирования в режиме **форсированных испытаний**. Для этого на рабочем столе щелкните на значке «Прогнозирование 1». Запустите программу «Лабораторная работа – Надежность 1».

2 В рабочем окне программы (рисунок 10.1) введите исходные данные для режима форсированных испытаний: количество интервалов времени $[K]$, длительность элементарного интервала $[\Delta t]$ и число изделий, вышедших из строя на i -м временном интервале $[n_i]$.

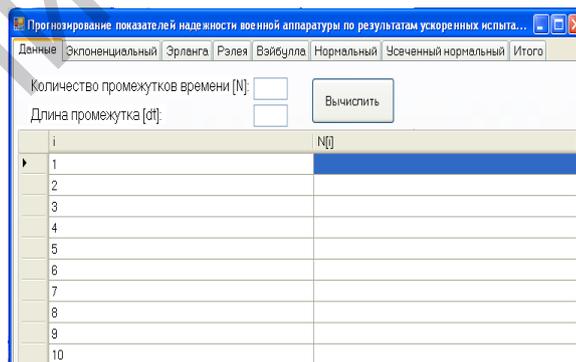


Рисунок 10.1 – Рабочее окно программы для прогнозирования показателей надежности

По этим данным и формулам (5.2a)–(5.2б), то есть по дискретным значениям экспериментальной функции вероятности безотказной работы в режиме форсированных испытаний: $P(t = i\Delta t)$ из (5.2a) или $P(t = (i - 0,5)\Delta t)$ по

(5.2б) – строится кусочно-линейная функция $P(t)$, достаточно точно описывающая результат испытаний.

3 В рабочем окне программы (см. рисунок 10.1) выберите тип теоретического (аппроксимирующего) вероятностного закона, например, **экспоненциальный**. В этом случае программа рассчитывает оптимальный параметр закона a_{1j} при $j = 1 \dots 9$ [см. (6.1а)–(6.1и)], который соответствует каждому j -му критерию оптимизации.

По рассчитанному значению параметра a_{1j} строится соответствующая функция P_{1j} для данного теоретического закона. Поскольку различные варианты теоретических функций законов P_{1j} по-разному аппроксимируют экспериментальный закон вероятности безотказной работы, то выбор оптимального варианта параметра $a_{1\text{опт}} \in [a_{1j}; j = 1 \dots 9]$ производится по критерию близости. На первом этапе используется более простой вариант этого критерия – по формулам (5.4а) и (6.2а). При необходимости (в случае, если несколько вариантов a_{1j} дают практически равные значения близости по этим критериям) используют более точный критерий близости – по формуле (5.4б) или (5.4в).

Полученные значения $a_{1\text{опт}}$ и $\Delta_1 \text{ min}$ отражают наилучшие (наиболее точные) результаты аппроксимации экспериментального вероятностного закона выбранным экспоненциальным теоретическим законом.

4 В рабочем окне программы (см. рисунок 10.1) выберите другой тип теоретического аппроксимирующего закона, например, **закон Эрланга**.

В этом случае программа рассчитывает оптимальный параметр закона a_{2j} , $j = 1 \dots 10$ [см. (6.3а)–(6.3л)], который соответствует своему j -му критерию оптимальности. Примерные варианты поведения экспериментальной и прогнозируемых теоретических функций для j -го варианта закона Эрланга показаны на рисунке 10.2.

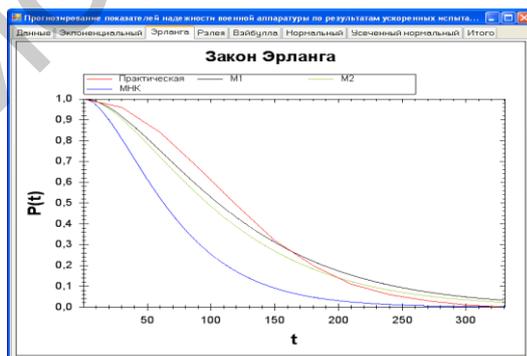


Рисунок 10.2 – Поведение экспериментальной зависимости и теоретических функций для закона Эрланга

Выбор оптимального значения параметра $a_{2\text{опт}} \in [a_{2j}; j = 1 \dots 10]$ производится по той же методике, что и в предыдущем подпункте 3 [см. (5.4а)–(5.4в)], только вместо критерия (6.2а) используют критерий (6.4а), при этом определя-

ются величины $a_{2\text{опт}}$ и $\Delta_{2\text{ min}}$, которые характеризуют наилучший результат аппроксимации эксперимента теоретическим законом Эрланга.

5 На следующем этапе работы в рабочем окне программы (см. рисунок 10.1) выберите последний из исследуемых в данной работе законов – однопараметрический вероятностный закон Рэля.

В этом случае программа рассчитывает оптимальный параметр a_{3j} , $j = 1 \dots 10$ [см. формулы (6.5а)–(6.5л)], который соответствует выбранному j -му критерию оптимальности (равенства того или иного показателя выбранного закона по результатам экспериментальных и теоретических исследований).

Выбор оптимального варианта искомого параметра $a_{3\text{опт}} \in [a_{3j}; j = 1 \dots 10]$ производится, как и в предыдущих подпунктах, с использованием формул (5.4а)–(5.4в). При использовании критерия близости вида (5.4а) можно непосредственно использовать выражение (6.5м).

Как и для предыдущих законов, оптимальный вариант параметра $a_{3\text{опт}}$ обеспечивает минимальное значение критерия близости $\Delta_{3\text{ min}}$ и таким образом характеризует наилучший вариант аппроксимации экспериментального закона теоретическим законом Рэля.

6 Для выбора оптимального вероятностного закона из трех анализируемых и его оптимального параметра в рабочем окне программы (см. рисунок 10.1) щелкаем на вкладке «Итого».

При этом для всех трех рассматриваемых законов выводится итоговая таблица со значениями оптимальных параметров и критериев близости – среднего квадрата отклонения теоретического закона относительно экспериментального по (5.4а), среднего относительного квадрата отклонения по (5.4б) и среднего взвешенного квадрата отклонения по (5.4в).

По данным итоговой таблицы (рисунок 10.3) выбирается один из трех типов оптимального теоретического вероятностного закона и его оптимальный параметр, которые обеспечивают наилучшее совпадение с результатами эксперимента при проведении форсированных испытаний.

Экспоненциальный	Эрланга	Рэля
a1 = 7,955449e-003, Погр: 1,408479e+057	a1 = 1,591090e-002, Погр: 2,099017e-001	a1 = 4,970720e-005, Погр: 9,399347e-002
a2 = 9,980308e-003, Погр: 9,499009e+072	a2 = 1,726640e-002, Погр: 1,801667e-001	a2 = 4,980329e-005, Погр: 9,405497e-002
a3 = 1,947424e-002, Погр: 1,565256e+147	a3 = 2,669550e-002, Погр: 6,503253e+000	a3 = 5,913785e-005, Погр: 4,289563e-001
Погр: 1,408479e+057	Погр: 1,801667e-001	Погр: 9,399347e-002
Вэйбулла	Нормальный	Усеченный нормальный
-	-	-
-	-	-
-	-	-
Погр: 1,750083e-001	Погр: 3,845724e+004	Погр: 2,113055e-001

Рисунок 10.3 – Итоговая таблица для определения оптимального закона распределения

Принимается решение, что именно этому закону будут подчиняться результаты надежностных испытаний в режиме **нормальной** эксплуатации.

7 Откройте рабочее окно программы для прогнозирования показателей надежности по результатам укороченных испытаний в режиме нормальной эксплуатации. Для этого на рабочем столе щелкните на ярлыке «Прогнозирование 2».

По указанию преподавателя для обоснованного в подпункте 6 лучшего варианта теоретического закона выберите в соответствующем столбце таблицы Б.2 приложения Б исходные данные по результатам укороченных испытаний (типа первых двух строк таблицы 5.1) и занесите их в программу. Также укажите число интервалов m (как правило, $m < 10$) и отрезок времени Δt_3 , соответствующий одному интервалу. Введите также значение гарантированной вероятности $P_{Г.Э}$ и исходное число испытываемых изделий $N_0 = 100$.

Нажмите кнопку соответствующего теоретического закона, а затем кнопку «Вычислить». При этом для значений $t = i\Delta t_3$ или $t = (i - 0,5)\Delta t_3$, $1 \in [1, m]$ по исходным данным укороченных испытаний вычисляются дискретные значения функций $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ с использованием (5.2). Появляется окно с рисунком, аналогичным рисунку 10.2, отображающим поведение экспериментальной функции вероятности безотказной работы для режима укороченных испытаний, когда число выходящих из строя изделий сравнительно мало и, соответственно, достаточно велико значение функции $P(t)$ (как правило, $0,8 < P(t) < 1,0$).

Дальнейшая обработка результатов укороченных испытаний зависит от того, какой из трех рассматриваемых теоретических законов признан наиболее близким к эксперименту по результатам форсированных испытаний. Считается, что этот закон и будет «работать» в режиме нормальных испытаний.

Рассмотрим эти варианты последовательно.

А. Пусть наиболее близким к эксперименту оказался **экспоненциальный закон**. В этом случае, используя материалы подраздела 7.1, по формулам (7.1б) и (7.1е) определяем два варианта возможных значений параметра $a_{Э1}$ и $a_{Э2}$ и среднее значение $a_{Э3} = (a_{Э1} + a_{Э2})/2$. Предпочтительный вариант параметра $a_{Эi}$ (при $i = 1, 2, 3$) проверяем по критерию, например, минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации. С этой целью можно использовать выражение типа (6.1к), где все данные, естественно, относятся к нормальному режиму работы и испытаний.

Затем по формулам (7.1д) и (7.1в) определяется значение гарантированного времени нормальной работы (эксплуатации) $T_{Г.Э}$ при заданном значении гарантированной вероятности $P_{Г.Э}$, а затем и среднее время безотказной работы $T_{0.Э}$.

Б. Если наиболее близким к эксперименту оказался **закон Эрланга**, то, как видно из материалов подраздела 7.2, возможны три варианта определения параметра закона $a_{Эi}$ (при $i = 1, 2, 3$) по формулам (7.2б), (7.2в) и (7.2ж), а также комбинированный вариант $a_{Э4} = \sum_{i=1}^3 a_{Эi}/3$. Приоритет каждого варианта, как и ранее, можно проверить по критерию минимума среднеквадратического отклонения (6.2л) или (6.2м), подставив соответственно результаты укороченных

испытаний. Затем остальные показатели закона рассчитывают по формулам (7.2е), (7.2ж), (7.2з).

В. Если наиболее близким к эксперименту оказался закон Рэлея, то, основываясь на материалах подраздела 7.3, можно использовать три варианта определения параметра теоретического закона $a_{Эi}$ (при $i = 1...3$), применяя формулы (7.3б), (7.3е) и (7.3ж), а также компромиссный вариант $a_{Э4} = \sum_{i=1}^3 a_{Эi}/3$. Затем предпочтительный вариант $a_{Э.опт} \in [a_{Эi}]$ (при $i = 1...4$) выбирают, как правило, по критерию минимума среднего квадрата ошибки из выражения (7.3з).

Остальные показатели закона при выбранном параметре $a_{Э.опт}$ определяют по формулам (7.3г)–(7.3е).

В частности, гарантированное время безотказной работы $T_{Г.Э}$ при заданном значении $P_{Г.Э}$ можно определить непосредственно по результатам эксперимента (рисунок 10.4).

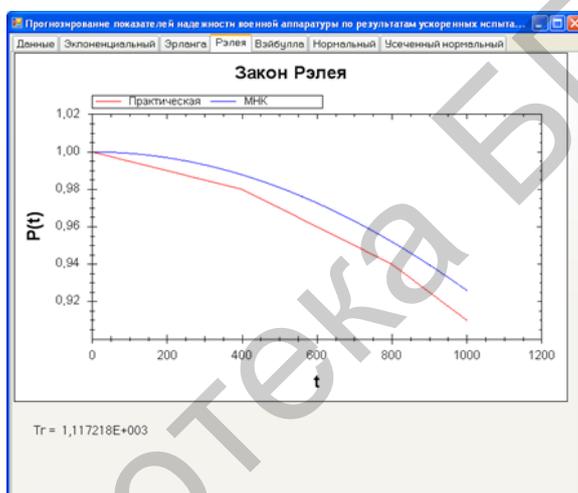


Рисунок 10.4 – Определение гарантированного времени безотказной работы по результатам укороченных испытаний

После завершения всех процедур подпунктов 1–7 пункта 10.2.2 задача определения оптимального теоретического описания результатов надежностных форсированных и укороченных испытаний с помощью одного из трех однопараметрических вероятностных законов может считаться завершённой.

Примечание – В ряде случаев проведение форсированных испытаний технических систем для выпускающего предприятия является очень сложной и «неподъёмной» задачей, так как требует, в частности, специализированного и сложного оборудования, квалифицированного персонала, больших финансовых затрат и т. п.

Вдобавок зачастую после форсированных испытаний изделия не поддаются восстановительному ремонту и их приходится утилизировать. В этой ситуации приходится ограничиваться только результатами укороченных нормальных испытаний и определять основные показатели надёжностных испытаний, в частности, гарантированное $T_{Г.Эi}$ и среднее $T_{0Эi}$ время безотказной рабо-

ты последовательно для трех рассмотренных выше однопараметрических законов: экспоненциального, Эрланга и Рэлея.

Для каждого из законов по приведенным выше выражениям определяют параметры закона и его показатели $T_{Г.эi}$ и $T_{0эi}$, а далее принимают решение (как правило, компромиссное) относительно окончательного выбора показателей надежности разработанной партии изделий. В большинстве случаев принимают $T_{Г.э} = \min T_{Г.эi}$ и $T_{0э} = \min T_{0эi}$, $i = А, Б, В$.

10.3 Оптимизация двухпараметрических вероятностных законов, аппроксимирующих результаты испытаний

Общие теоретические сведения о двухпараметрических вероятностных законах приводятся в самостоятельном описании лабораторной работы и основаны на соответствующих материалах разделов 4–7 данного учебно-методического пособия.

Кратко рассмотрим основные этапы компьютерного моделирования надежностных испытаний каждым из пяти двухпараметрических вероятностных законов: Вейбулла, нормального (Гаусса), усеченного нормального, лог-нормального и гамма-закона.

При этом обоснование оптимальных параметров любого из этих законов, а также выбор предпочтительного варианта закона основывается на результатах конкретных испытаний техники в форсированном (ускоренном) и нормальном (но укороченном) режимах испытаний.

10.3.1 Выбор исходных данных

Процедура выбора исходных данных в данной лабораторной работе примерно такая же, как и в предыдущей (см. пункт 10.2.1). Для исследования надежностных испытаний в форсированном режиме преподаватель задает студенту/курсанту номер одного из вариантов результатов испытаний, приведенных в виде таблицы В.1 в приложении В.

Как и в пункте 10.2.1, в таблице задается число интервалов времени испытаний K , число изделий техники n_i , отказавших на i -м интервале времени (в промежутке времени $(i - 1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t$, где $i \in \overline{1, K}$), а также величина единичного интервала Δt (или общее время проведения форсированных испытаний $\Delta t_{\max} = K \cdot \Delta t$). При этом общее число изделий N_0 , первоначально поставленных на испытания, для всех вариантов постоянно: $N_0 = 100$.

Для $t \geq \Delta t_{\max} = K\Delta t$ вся партия изделий, поставленных на испытания, считается вышедшей из строя (неисправной).

После обработки студентом результатов экспериментальных измерений (их последовательность описана в пункте 10.3.2) и определения лучшего варианта вероятностного закона (одного из пяти) и его параметров преподавателем задается индивидуально каждому студенту конкретный вариант результатов

укороченных (нормальных) испытаний – один из четырех в таблице исходных данных (см. таблицу В.2). Этот вариант соответствует конкретному «предпочтительному» закону вероятности безотказной работы (одному из пяти рассматриваемых законов, обоснованному по результатам форсированных испытаний).

Типовыми исходными данными в режиме укороченных испытаний являются:

а) величина элементарного интервала времени испытаний Δt_3 в нормальных условиях эксплуатации;

б) число интервалов испытаний m или общее время проведения укороченных испытаний $\Delta t_{\text{ук}} = m \cdot \Delta t_3$;

в) число изделий n_i , отказавших на i -м интервале испытаний (в промежутке времени $((i - 1)\Delta t_3 \leq t \leq i\Delta t_3)$, где $i \in \overline{1, m}$).

Как и в пункте 10.2.1, в таблицах результатов укороченных испытаний (см. таблицу В.2) приводится значение соответствующей гарантированной вероятности безотказной работы $P_{Г.Э.}$, для которой после обработки результатов испытаний потребуется определить гарантированное время безотказной работы $T_{Г.Э.}$.

10.3.2 Компьютерное моделирование результатов надежностного эксперимента

Компьютерное моделирование надежностного эксперимента ведется в следующем типовом режиме [24–26].

1 Включается программа моделирования в режиме форсированных испытаний. Для этого на рабочем столе откройте папку «Прогнозирование 1». Запустите программу «Лабораторная работа – Надежность 2».

2 В рабочем окне программы аналогично рисунку 10.1 введите исходные данные для режима форсированных испытаний в соответствии с заданной таблицей исходных данных, а именно:

а) количество наблюдаемых интервалов времени $[K]$;

б) длительность одного элементарного интервала наблюдения $[\Delta t]$;

в) число изделий, вышедших из строя на i -м интервале времени $[n_i]$.

По этим данным и формулам (5.2а)–(5.2б) определяются дискретные значения экспериментальной функции вероятности безотказной работы в режиме форсированных испытаний: $P(t = i\Delta t)$ по формуле (5.2а); $P(t = (i - 0,5)\Delta t)$ по формуле (5.2б) ($i \in \overline{1, K}$).

Затем по этим дискретным значениям строится кусочно-линейная функция $P(t)$, которая достаточно точно описывает результат форсированных испытаний. Именно эта функция в большинстве случаев является базой для сравнения с вариантами теоретической аппроксимации результатов испытаний.

Наряду с экспериментальной функцией $P(t)$ для некоторых приводимых ниже вариантов расчетов понадобится также знание экспериментальных значе-

ний функции плотности вероятности $f(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$, определяемых по формулам (5.2в) и (5.2г) соответственно.

3 В рабочем окне программы выберите тип теоретического (аппроксимирующего) вероятностного закона, например, **закон Вейбулла** (см. выражение (4.4) и рисунок 10.5).

Для закона неизвестными являются два параметра – a и b . Их оптимальные значения, которые минимизируют средний квадрат отклонений между экспериментальной и теоретической функциями (в данном случае это функции интенсивности отказов) определяются из выражений (6.4в)–(6.4г), при этом требуется предварительно рассчитать постоянные коэффициенты по формулам (6.7).

После определения параметров a и b по формулам (6.8а) и (6.8б) рассчитывается средний квадрат отклонений теоретического закона Вейбулла относительно экспериментальной функции для того, чтобы в последующих расчетах сравнить этот закон с другими возможными вариантами аппроксимации.

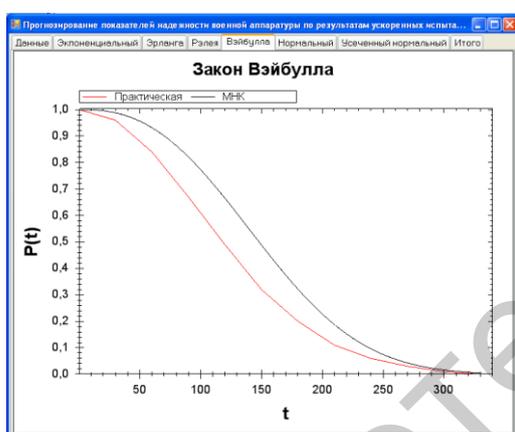


Рисунок 10.5 – Поведение экспериментальной зависимости и теоретических функций для закона Вейбулла

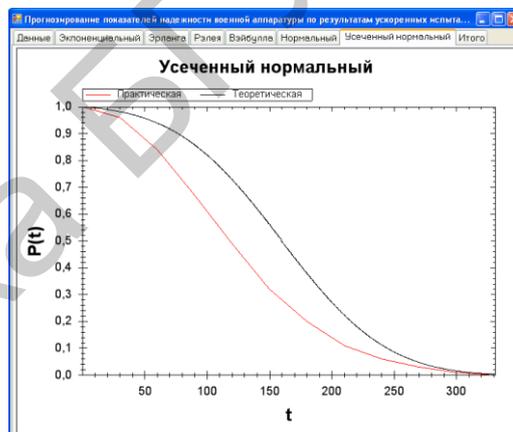


Рисунок 10.6 – Экспериментальные зависимости и теоретические функции для усеченного нормального закона

4 В рабочем окне программы выберите другой тип вероятностного теоретического закона, например, **нормальный закон** (закон Гаусса [см. (4.5) и (6.9)–(6.15)]).

Здесь возможны **шесть вариантов** определения двух оптимизируемых параметров теоретического закона T_{nj} и σ_{nj} , $j = \overline{1,6}$. Для вариантов $j = 1..5$ параметр $T_{nj} = T_{n1}$ и определяется по формуле (6.8), тогда как параметр σ_{nj} определяется отдельно по формулам соответственно (6.9а)–(6.9д).

Для шестого варианта ($j = 6$) параметры T_{n6} и σ_{n6} рассчитываются по формулам (6.13б), (6.13в) и (6.14) при использовании МНК.

По расчетным значениям **каждой j -й пары** параметров T_{nj} и σ_{nj} затем производится расчет дискретных значений теоретических функций вероятности безотказной работы $P(t_i)$ и плотности вероятности $f(t_i)$ для моментов времени

$t_i = (i - 0,5)\Delta t$ при $i \in \overline{1, K}$, а затем по формулам (6.15а) и (6.15б) определяется средний квадрат ошибки аппроксимации Δ_{5j} и Δ_{5j}^* .

Расчет по (6.15) производится для всех вариантов оптимизации $j = 1..6$, наилучшей считается та пара параметров T_{nj} и σ_{nj} , которая обеспечивает минимальное значение средней квадратической ошибки аппроксимации $\Delta_{5j} = \Delta_{5\min} \in [\Delta_{5j}, j = 1..6]$.

Для повышения точности расчетов при сравнении с другими теоретическими законами аппроксимации может оказаться предпочтительным критерий близости типа (5.4б), (5.4в).

5 В рабочем окне программы выберите следующий тип теоретического вероятностного закона, например, **усеченный нормальный закон** (см. выражения (4.7) и (6.16)–(6.22) и рисунок 10.6). Здесь, используя результаты форсированного эксперимента [см. выражения (5.2) и (5.3)], оптимальные параметры теоретического закона можно рассчитать двумя способами.

Первый способ основан на использовании выражений (6.17)–(6.20), когда по результатам эксперимента считаются известными (рассчитываются) выборочные моменты m_1, m_2 и d_2, d_3 экспериментального закона [см. (5.3)].

Второй вариант расчета основан на использовании метода наименьших квадратов и результатов его применения к задаче оптимизации нормального закона (см. выражения (6.6)–(6.8) и подпункт 4 настоящего пункта). Процедура расчета проводится по формуле (6.21).

Для обоих вариантов определяется средний квадрат ошибки между теоретическим и экспериментальным законами распределения по формулам (6.22), при этом, как и ранее, лучшим вариантом определения параметров теоретического закона (T_y, σ_y и C_y) считается тот, который обеспечивает минимальное значение среднего квадрата ошибки аппроксимации $\Delta_6(\Delta_6^*)$.

Для сравнения анализируемого теоретического закона с другими возможными вариантами аппроксимации может быть целесообразным использование более сложных критериев близости законов, например, (5.4б)–(5.4в).

6 В рабочем окне программы выберите следующий тип теоретического вероятностного закона, в данном случае **логнормальный закон**. Как показано в подразделе 6.7, оптимальные параметры этого закона, которые позволяют наилучшим образом аппроксимировать результаты форсированных испытаний, могут быть определены несколькими способами.

При использовании метода моментов, приравнивая различные сочетания начальных и центральных моментов экспериментального закона из выражений (5.3) и теоретического закона – из (4.9), можно получить шесть вариантов определения параметров логнормального закона μ_{lj} и σ_{lj} ($j = 1..6$) на основании выражений (6.24а), (6.26), (6.28)–(6.31).

При использовании метода максимального правдоподобия оптимальные параметры логнормального закона μ_{lj} и σ_{lj} ($j = 7$) определяются из уравнений

(6.32), а при использовании метода наименьших квадратов (для $j = 8$) – из (6.37) с учетом (6.38).

При совместном рассмотрении этих вариантов расчета параметров закона, как и ранее, лучшей считается та пара рассчитанных параметров μ_{lj} и σ_{lj} ($j = 1 \dots 8$), которая обеспечивает минимальное значение среднего квадрата отклонений теоретического закона относительно экспериментального по выбранной формуле (5.4).

7 В рабочем окне программы выберите последний из рассматриваемых в данной лабораторной работе тип теоретического двухпараметрического закона, а именно **гамма-закон**. Параметры этого закона α и β , которые позволяют наилучшим образом аппроксимировать результаты форсированного эксперимента, как показано в подразделе 6.8, могут быть рассчитаны несколькими способами.

При использовании метода моментов можно получить две различные комбинации параметров α_j и β_j ($j = 1, 2$), которые определяются по формулам (6.40)–(6.42).

При использовании метода максимального правдоподобия показатели α_j и β_j ($j = 3$), рассчитывают по формулам (6.47), а при использовании метода наименьших квадратов эти показатели при $j = 4$ определяют по формуле (6.53б).

Как и ранее, та пара показателей α_j и β_j ($j = 1 \dots 4$) считается лучшей (и, соответственно, лучшим считается результат аппроксимации экспериментального закона), если она обеспечивает минимум выбранного критерия близости [см. формулы (5.4а)–(5.4в)].

8 Для окончательного выбора оптимального теоретического вероятностного закона и его оптимальных параметров в рабочем окне щелкаем на вкладке «Итого». Для лучших вариантов пар искомых параметров каждого из рассмотренных двухпараметрических законов составляется итоговая таблица, которая содержит:

- а) название закона;
- б) название пары параметров и их наилучшие значения, при которых минимизируется средний квадрат отклонений от эксперимента;
- в) значение среднего квадрата отклонений для определенного (и одного и того же для всех законов) критерия близости. По данным этой таблицы производится обоснование выбора лучшего из рассмотренных законов (с его оптимальными параметрами), который обеспечивает наибольшее приближение к конкретно заданному эксперименту. Считается, что этот же закон будет лучшим и для описания результатов нормальных испытаний.

9 Откройте окно программы для прогнозирования показателей надежности по результатам укороченных нормальных испытаний. Для этого на рабочем столе щелкните на ярлыке «Прогнозирование 2».

По указанию преподавателя для обоснованного в подпункте 8 (по результатам форсированных испытаний) лучшего теоретического закона выберите в

соответствующем столбце таблицы Б.2 приложения Б исходные данные по результатам укороченных испытаний (типа первых двух строк таблицы 5.1).

Занесите эти данные в программу. Укажите также число интервалов наблюдения m (как правило, $m < 10$), величину элементарного временного интервала Δt_3 (в часах), а также исходное число испытываемых изделий $N_0 = 100$ и значение гарантированной вероятности $P_{Г.3}$ безотказной работы.

Нажмите кнопку соответствующего теоретического закона, затем кнопку «Вычислить». При этом так же, как и в пункте 10.2.2 (подпункт 7), по исходным данным укороченных испытаний для значений $t_i = i\Delta t_3$ или $t_i = (i - 0,5)\Delta t_3$ при $i = \overline{1, m}$ вычисляются дискретные значения экспериментальных функций $P_3(t_i)$, $f_3(t_i)$, $\lambda_3(t_i)$ на основе выражений (5.2).

Дальнейшая обработка результатов укороченных испытаний зависит от того, какой из пяти рассмотренных теоретических законов был признан наиболее близким к экспериментальному закону по результатам форсированных испытаний. Принимается решение, что именно этот закон будет точнее других отражать результаты и нормальных испытаний.

Рассмотрим последовательно возможные варианты такого решения.

А. Допустим, что наиболее точным признан **закон Вейбулла**. Используя материалы подразделов 7.4 и 4.4, можно утверждать, что графики функции надежности в форсированном и нормальном режимах будут подобны по форме временной зависимости, если у них будут равны коэффициенты формы – параметр b (в форсированном режиме) и параметр b_3 (в нормальном режиме).

Полагаем, что $b_3 = b$, где параметр b известен по результатам форсированных испытаний [см. (6.6)]. Тогда второй параметр закона Вейбулла – параметр масштаба a_3 в нормальном режиме рассчитывается по дискретным значениям функции интенсивности отказов λ_{3i} , определяемой по формуле (5.2г), при подстановке результатов укороченных нормальных испытаний. Соответственно, параметр a_3 рассчитывается по формуле (7.9).

Затем, зная параметры закона a_3 и b_3 , по формулам (4.4а)–(4.4с) определяют все требуемые функции и показатели закона, в частности, $T_{Г.3}$ – по (4.4н), $T_{0.3}$ – по (4.4г).

Б. Если наиболее точным признан **нормальный закон (закон Гаусса)**, считается (см. подразделы 4.5, 6.5 и 7.5), что параметры нормального закона в форсированном режиме испытаний (T_H и σ_H) и параметры этого же закона в нормальном режиме эксплуатации ($T_{H.3}$ и $\sigma_{H.3}$) удовлетворяют условию $T_H/\sigma_H = T_{H.3}/\sigma_{H.3} = C$, где C – коэффициент, известный по результатам форсированных испытаний.

По результатам укороченных испытаний, когда определены (известны) значения экспериментальных функций $P_3(t_i)$, $f_3(t_i)$, $\lambda_3(t_i)$ для каждого i -го интервала наблюдения ($i = \overline{1, m}$) [см. (5.2)], расчет параметра $T_{H.3}$ ведется по (7.12б), а затем рассчитывается параметр $\sigma_{H.3} = T_{H.3}/C$.

Зная параметры закона $T_{H.3}$ и $\sigma_{H.3}$, далее функции и показатели этого закона для нормального режима эксплуатации рассчитываем известным образом

по формулам (4.5) (в частности, показатель $T_{Г.Э}$ – из (4.6), при этом показатель $T_{0Э} = T_{Н.Э}$, показатель $\sigma_{Т.Э} = \sigma_{Н.Э}$).

В. Если наиболее точным признан **усеченный нормальный закон**, то, рассмотрев материалы подразделов 4.6, 6.6 и 7.6, а также с учетом очевидного признания того, что временные зависимости вероятностного закона (в том числе $P(t), f(t)$ и $\lambda(t)$) в режиме форсированных и нормальных испытаний должны быть подобны, принимаем решение:

$$\begin{aligned} T_y / \sigma_y &= T_{y.Э} / \sigma_{y.Э} = C, \\ C_y &= C_{y.Э}, \end{aligned}$$

где T_y , σ_y и C_y – параметры, определенные по результатам форсированных испытаний;

$T_{y.Э}$, $\sigma_{y.Э}$, $C_{y.Э}$ – то же по результатам нормальной эксплуатации.

По известным результатам расчетов функции плотности вероятности безотказной работы $f_{Эi}$ в нормальном режиме для $i = \overline{1, m}$ и известном значении коэффициента C рассчитывают параметр $T_{y.Э}$ по той же формуле (7.12б), что и параметр $T_{Н.Э}$ для нормального закона. Далее определяют $\sigma_{y.Э} = T_{y.Э} / C$ и, зная коэффициент $C_{y.Э} = C_y$, по формулам (4.7д)–(4.7е) рассчитывают среднее $T_{0Э}$ и гарантированное $T_{Г.Э}$ время безотказной эксплуатации в нормальных условиях.

Г. Если более точным признан **логнормальный закон**, то, как следует из материалов подразделов 4.7, 6.7 и 7.7, необходимо в первую очередь определить два параметра ($\sigma_{Л.Э}$ и $\mu_{Л.Э}$) в режиме нормальной эксплуатации. Аналогичные параметры (σ_L и μ_L) для форсированного режима измерения считаются известными и обоснованными по материалам различных вариантов расчетов, приведенных в подразделе 6.7.

В подразделе 7.7 показано, что параметр σ_L является достаточно стабильным и мало меняющимся в зависимости от режима испытаний. Тогда принимается решение, что $\sigma_L \cong \sigma_{Л.Э}$, следовательно, для режима нормальной эксплуатации (укороченных испытаний) параметр $\sigma_{Л.Э}$ может считаться известным.

Другой параметр $\mu_{Л.Э}$ существенно отличается от своего аналога μ_L и требует самостоятельно расчета по формуле (7.14б), но уже с использованием результатов измерений плотности вероятности $f_{Эi}$ при $i = \overline{1, m}$ по формуле (5.2в) для нормального (укороченного) режима испытаний.

Определив параметры логнормального закона $\mu_{Л.Э}$ и $\sigma_{Л.Э}$, затем различные функции и показатели этого закона для нормального режима рассчитывают используя выражения (4.9). В частности, показатель $T_{0Э}$ определяют по (4.9д), показатель $\sigma_{Т.Э}$ – по (4.9е), показатель $T_{Г.Э}$ – гарантированное время наработки рассчитывают численным методом, используя (4.9и) и (4.9б).

Д. Если по результатам форсированных испытаний наиболее точным оказался **гамма-закон**, то в режиме нормальной эксплуатации (укороченных испытаний) необходимо знать два параметра: параметр формы $\alpha_Э$ и параметр масштаба $\beta_Э$ [см. (4.10)–(4.11)]. Для режима форсированных испытаний анало-

гичные параметры были рассчитаны несколькими способами и обоснован лучший вариант выбора пары параметров α и β .

В подразделе 7.8 показано, что параметр формы α , определенный в режиме форсированных испытаний, сохраняет свое значение и в нормальном режиме. Следовательно, можно считать $\alpha_3 = \alpha$.

Относительно параметра масштаба β_3 можно утверждать, что он существенно зависит от режима испытаний и требует самостоятельного анализа для каждого режима. В режиме укороченных испытаний, когда известно мало данных об отказах изделий в испытываемой партии, для расчета параметра масштаба β_3 целесообразно использовать формулу (7.16).

Определив параметры закона α_3 и β_3 , дальнейший расчет функций и показателей закона для режима нормальной эксплуатации проводим на основании выражений (4.10). В частности, $T_{03} = \alpha_3 \beta_3$, $\sigma_{Т.Э} = (\alpha_3 \beta_3^2)^{0,5}$.

Другие показатели и коэффициенты также определяем из соответствующих выражений (4.10), используя подстановку параметра α_3 вместо α и параметра β_3 вместо β .

10 После завершения всех процедур подпунктов 1–9 пункта 10.3.2 на основе приведенного совместного анализа и обобщения результатов надежностных испытаний техники в форсированном (ускоренном) и укороченном (нормальном) режимах работы принимается решение, что задача наиболее точного определения значений прогнозируемых двухпараметрических законов, их параметров и показателей надежности для конкретной испытываемой партии изделий в режиме нормальной (как правило, многолетней) эксплуатации считается завершенной.

10.4. Оптимальная аппроксимация результатов испытаний суммой двух однопараметрических вероятностных законов

Общие теоретические сведения о возможностях и свойствах составного вероятностного закона, полученного путем суммы различных комбинаций из трех однопараметрических законов приводятся в самостоятельном описании лабораторной работы «Надежность – 3» и основаны на соответствующих материалах разделов 8 и 9 настоящего учебно-методического пособия.

В приводимом ниже материале кратко рассмотрены основные этапы компьютерного моделирования надежностных испытаний, когда экспериментальные результаты испытаний наилучшим образом аппроксимируются или суммой двух однотипных законов, имеющих разные параметры, или суммой двух разнотипных законов.

При этом, как и в подразделах 10.2 и 10.3, выбор предпочтительного варианта такого составного теоретического закона и его параметров обосновывается совместно по результатам как форсированного, так и укороченного (но в «нормальных» условиях) эксперимента.

10.4.1 Выбор исходных данных

Исходные данные для проведения лабораторных исследований задаются преподавателем сначала для режима **форсированных испытаний** путем указания одного из нескольких возможных результатов эксперимента, приведенных в виде таблиц в приложении Д.

В таблицах задается число интервалов времени наблюдений K , число изделий техники n_i , отказавших на i -м интервале наблюдения (в промежутке времени $(i - 1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t$), где $i \in [1, K]$, Δt – величина единичного интервала наблюдения, определяемого из выражения $\Delta t = \Delta t_{\max}/K$. Здесь Δt_{\max} – время завершения форсированных испытаний, когда все изделия в исследуемой партии выйдут из строя. При этом принимается, как и ранее, что общее число исправных изделий, первоначально поставленных на испытания, для всех вариантов постоянно и равно $N_0 = 100$.

После завершения компьютерной обработки результатов форсированных испытаний и определения лучшего варианта описания составного вероятностного закона (одного из шести возможных) и его параметров преподаватель задает индивидуально каждому студенту конкретный вариант таблицы результатов **укороченных** (нормальных) испытаний. Этот вариант должен соответствовать конкретному и известному (по результатам форсированных испытаний) составному вероятностному закону.

Типовыми исходными данными для режима укороченных нормальных испытаний являются:

- а) величина элементарного интервала испытаний Δt_3 ;
- б) число интервалов испытаний m и общее время проведения укороченных испытаний $\Delta t_{\text{ук}} = \Delta t_3 \cdot m$;
- в) число изделий техники n_i , отказавших на i -м интервале наблюдения (испытания), т. е. в промежутке времени $(i - 1)\Delta t_3 \leq t \leq i\Delta t_3$, $i \in \overline{1, m}$.

Как и в подразделах 10.2 и 10.3, в таблицах результатов укороченных испытаний приводится также значение определенной гарантированной вероятности безотказной работы $P_{Г.Э}$, для которой после соответствующей обработки результатов испытаний потребуется определить гарантированное время безотказной работы $T_{Г.Э}$ в нормальном режиме эксплуатации.

10.4.2 Основные процедуры компьютерного моделирования надежностного эксперимента составным вероятностным законом

Компьютерное моделирование составного вероятностного закона, который наилучшим образом аппроксимирует результаты надежностного эксперимента, ведется в следующем типовом режиме [27, 28].

1 Включается программа моделирования в режиме **форсированных испытаний**. Для этого на рабочем столе найдите и откройте «Прогнозирование 1». Запустите программу «Лабораторная работа – Надежность 3».

2 В рабочем окне программы введите исходные данные для режима форсированных испытаний в соответствии с заданной таблицей исходных данных (см. таблицу Д1):

- а) количество наблюдаемых интервалов времени испытаний $[K]$;
- б) длительность одного элементарного интервала наблюдения $[\Delta t]$;
- в) число изделий, вышедших из строя на i -м интервале наблюдения $[n_i]$.

По этим данным и формулам (5.2а)–(5.2б) рассчитываются дискретные значения экспериментальной функции вероятности (при необходимости и значения плотности вероятности) безотказной работы технической системы в режиме форсированных испытаний: $P(t = i\Delta t)$ по формуле (5.2а) или $P(t = (i - 0,5)\Delta t)$ по формуле (5.2б) для $i \in \overline{[1, K]}$.

Далее по этим дискретным значениям строится кусочно-линейная функция $P(t)$ (при необходимости $f(t)$ и $\lambda(t) = f(t)/P(t)$), которая достаточно точно описывает результат форсированных испытаний и является базой для сравнения с вариантами теоретической аппроксимации результатов испытаний.

Используя формулы (5.3), рассчитываем начальные моменты экспериментальной функции m_1, m_2, m_3 , а также примерное значение плотности вероятности экспериментальной функции $f(t \cong 0) \cong (P_{\text{Э}0} - P_{\text{Э}1})/\Delta t = -(P_{\text{Э}1} - 1,0)/\Delta t$, где $P_{\text{Э}1} = P_{\text{Э}}(t \cong t_i)$ при $i = 1$ [см. (5.2в)].

3 В рабочем окне программы выберите вариант теоретического составного вероятностного закона, например, в виде суммы двух **разных экспоненциальных** законов [см. подраздел 8.2 и формулы (8.7)].

Определите расчетные показатели экспериментального закона, используя (8.9): $A = m_1$; $B = m_2/2$; $Q = f(t \cong 0)$. Используя систему уравнений (8.12), где $y = \psi_1(x)$, и (8.13), где $y = \psi_2(x)$, рассчитайте таблицы значений $\psi_1(x_j)$ и $\psi_2(x_j)$ для $x_j = j \cdot 0,05$, $j \in \overline{[1, 20]}$.

На одном графике постройте зависимости $\psi_1(x_j)$ и $\psi_2(x_j)$ в функции от x_j , найдите точку пересечения этих зависимостей и координаты $x_{j0} \cong x_0$, $\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) = y_0$.

По рассчитанным значениям x_0 и y_0 определите параметр $z_0 = (A - x_0 y_0)/(1 - x_0)$, а затем и параметры выбранного составного теоретического закона [см. (8.7)]: $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0$; $a_2 = 1/z_0$.

Для сравнения с другими возможными вариантами формирования составного теоретического закона определите значения критериев близости по формулам (8.6а)–(8.6б), где функция $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ отражает результаты эксперимента, а функция $\varphi_{\text{Т}}(t_i)$ – вариант составного теоретического закона (в данном случае, по формуле (8.7) с рассчитанными параметрами c, a_1 и a_2).

4 В рабочем окне программы выберите следующий вариант составного теоретического закона, например, в виде суммы экспоненциального закона и закона Эрланга по выражению (8.14).

Для этого варианта используйте те же известные значения расчетных показателей $A = m_1$, $B = m_2/2$, $Q = f(t \cong 0)$, что и в предыдущем случае.

Затем используйте одно нелинейное уравнение (8.18) с одним неизвестным параметром y . Это уравнение решается численно, путем последовательного задания нарастающих значений $y = y_i = j \cdot A \cdot 0,1$ при $j \in [1; 100]$. По найденному решению (значению $y = y_0$) затем определяются расчетные параметры $x = x_0 = y_0 \cdot Q$, $z = z_0 = (A - x_0 y_0)/2(1 - x)$ и оптимальные параметры закона (8.14): $c = x_0$, $a_1 = 1/y_0$, $a_2 = 1/z_0$.

Близость рассчитанного составного закона (8.14) к исходному экспериментальному закону определяется по упомянутым критериям близости (8.6а)–(8.6б).

5 В рабочем окне программы выберите следующий вариант составного закона, например, в виде суммы экспоненциального закона и закона Рэлея по выражению (8.19). Для этого варианта используются те же обозначения исходных расчетных параметров A , B и Q , что и в предыдущих случаях: $A = m_1$; $B = m_2/2$; $Q = f(t \cong 0)$.

Анализ, произведенный в подразделе (8.4), показал, что один из оптимизируемых параметров составного закона определяется в результате численного решения нелинейного уравнения (8.23) с одним неизвестным.

Уравнение решается путем последовательного задания нарастающих значений искомого параметра y в интервале $y = y_j = j \cdot 0,1 \cdot A$ при $j \in [1; 100]$. По найденному решению (параметру $y = y_0$) затем определяют расчетные параметры $x = x_0 = y_0 \cdot Q$ и $z = z_0 = (A - x_0 y_0)/(1 - x_0)\sqrt{\pi/4}$, а по ним рассчитывают и оптимальные параметры выбранного составного закона (8.19): $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0$; $a_2 = 1/z_0^2$.

Близость рассчитанного составного закона (8.19) к исходному экспериментальному закону, как и для вышеприведенных вариантов, определяется по соответствующим критериям близости на основании (8.6а)–(8.6б).

6 В рабочем окне программы выберите очередной вариант составного теоретического закона, в частности, в виде суммы двух законов Эрланга с различными параметрами по выражению (8.24).

Для этого варианта используется другая совокупность известных расчетных параметров, опирающихся на результаты эксперимента и, соответственно, на параметры экспериментального закона m_1 , m_2 и m_3 [см. (8.3)]. Тройка расчетных параметров имеет вид $A_1 = m_1/2$, $B_1 = m_2/6$, $F_1 = m_3/24$.

Как показано в подразделе 8.5, искомые параметры составного закона в данном случае определяются путем графоаналитического решения двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x и y вида (8.30) и (8.31), которые приводятся к виду $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$. Параметр x дискретно изменяется в интервале $x = x_j = j \cdot 0,05$, $j \in \overline{1, 20}$. Пересечение функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ дает решение системы: $x = x_0$, $y = y_0$. Соответственно, параметр $z = z_0 = (A_1 - x_0 y_0)/(1 - x_0)$.

Оптимальные параметры непосредственно составного теоретического закона определяются из выражений $c = x_0$, $a_1 = 1/y_0$, $a_2 = 1/z_0$. «Удаленность» рассчитанного составного закона (8.24) от исходного экспериментального закона определяется с помощью известных критериев близости (8.6а).

7 В рабочем окне программы выберите вариант составного теоретического закона в виде суммы двух законов Рэлея с разными параметрами по выражению (8.32).

Здесь, как и ранее, искомые параметры теоретического закона выбираются из условия, что его первые три начальных момента M_1 , M_2 и M_3 равны соответственно первым трем выборочным начальным моментам m_1 , m_2 и m_3 экспериментального закона [см. (8.33а)–(8.33в)].

Система трех нелинейных уравнений (8.33а)–(8.33в) после использования подстановок $A_2 = m_1\sqrt{4/\pi}$, $B_2 = m_2$ и $F_2 = 4m_3/3\sqrt{\pi}$ приводится к системе двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x и y [см. (8.34в)–(8.34г)], которая решается графо-аналитически при изменении x в пределах $x \in (0; 1,0)$. Для каждого значения $x = x_j = j \cdot 0,05$ при $j \in [1; 20]$ определяется значение $y = y_{j1}$ из (8.34в) и $y = y_{j2}$ из (8.34г). Точка пересечения функций y_{j1} и y_{j2} дает решение системы (8.34): $x = x_0$, $y = y_0 = y_{j1}(x_0) = y_{j2}(x_0)$. Соответственно, третья неизвестная величина составляет $z_0 = (A_2 - x_0 y_0)/(1 - x_0)$.

Оптимальные параметры выбранного теоретического закона (8.32) определяются из выражений (8.32а)–(8.32б): $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0^2$; $a_2 = 1/z_0^2$.

Близость рассчитанного составного закона (8.29) к исходному экспериментальному закону определяется с помощью известных критериев близости (8.6а)–(8.6б).

8 В рабочем окне программы выберите вариант составного теоретического закона в виде суммы законов Эрланга и Рэлея.

Напоминаем, что такой вариант, так же, как и варианты по предыдущим подпунктам 6 и 7, целесообразен только в случае, когда экспериментальная функция $f(t)$ [см. (8.2г)] удовлетворяет условию $f(t \rightarrow 0) \rightarrow 0$.

Здесь, как и в подпунктах 6 и 7, искомые параметры теоретического закона выбираются из условия, что его первые три начальных момента $M_1 \dots M_3$ равны соответственно первым трем выборочным моментам $m_1 \dots m_3$ экспериментальной функции $P(t)$.

Решение системы трех нелинейных уравнений (8.36а)–(8.36в) относительно трех неизвестных – параметров теоретического закона [см. (8.35)] – после ряда преобразований и подстановок приводится к системе двух нелинейных уравнений вида $y = \psi_1(x)$ из (8.39) и $y = \psi_2(x)$ из (8.44), (8.43), где параметры A_3 , B_3 и F_3 известны по результатам эксперимента [см. (8.36а)–(8.36в)]: $A_3 = m_1$; $B_3 = m_2$; $F_3 = m_3$; $k = \sqrt{\pi/4}$.

Эта система решается графоаналитически, путем последовательного дискретного задания переменной $x = x_j = j \cdot 0,05$ ($j \in [1, 20]$). На каждом шаге x_j

рассчитываются значения $\psi_1(x_j)$ и $\psi_2(x_j)$, которые откладываются на общем графике. Точка пересечения функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ дает решение системы уравнений: $x = x_0$, $y = y_0 = \psi_1(x_0) = \psi_2(x_0)$. Третья переменная z определяется из выражения $z = z_0 = (A_3 - 2x_0y_0)/k(1 - x_0)$, где $k = \sqrt{\pi/4}$.

Оптимальные параметры рассматриваемого составного закона определяются из выражений (8.35): $c = x_0$; $a_1 = 1/y_0$; $a_2 = 1/z_0^2$. Удаленность полученного теоретического закона от исходного экспериментального закона оценивается, как и ранее, с помощью критериев близости (8.6а)–(8.6б).

9 Для выбора наилучшего варианта составного теоретического закона и его параметров в рабочем окне программы нажмите вкладку «Итого». При этом для каждого из вариантов составного теоретического закона составляется итоговая таблица, которая содержит:

- а) название варианта составного закона;
- б) значение оптимальных показателей этого варианта;
- в) значение выбранного критерия близости (одного и того же для всех вариантов).

По данным этой таблицы производится выбор наилучшего варианта составного теоретического закона (с его оптимальными параметрами), который обеспечивает минимальное отклонение от экспериментального закона надежных испытаний.

Считается, что именно этот вариант составного закона будет наилучшим при описании результатов нормальных (не форсированных) испытаний.

10 Откройте окно программы для прогнозирования показателей надежности по результатам **укороченных (нормальных)** испытаний. Для этого на рабочем столе найдите ярлык «Прогнозирование 2».

По указанию преподавателя для обоснованного в подпункте 9 лучшего варианта составного теоретического закона выберите в соответствующем столбце таблицы Д.2 приложения Д исходные данные по результатам укороченных испытаний (типа первых двух строк таблицы 5.1).

Занесите эти данные в программу, указав при этом:

- а) число интервалов наблюдения m ;
- б) длительность одного элементарного интервала Δt_3 (в часах);
- в) исходное число испытываемых изделий $N_0 = 100$;
- г) значение гарантированной вероятности безотказной работы $P_{Г.Э}$.

Нажмите кнопку с номером соответствующего составного теоретического закона, затем кнопку «Вычислить». При этом сначала так же, как и в пунктах 10.2.2 и 10.3.2, по исходным данным укороченных испытаний вычисляются дискретные значения экспериментальных функций $P_3(t_i)$, $f_3(t_i)$ и $\lambda_3(t_i)$ в выбранные моменты времени $t_i = i \cdot \Delta t_3$ или $t_i = (i - 0,5)\Delta t_3$ ($i \in \overline{1, m}$) на основе выражений (5.2).

Дальнейшая обработка результатов укороченных испытаний ведется по-разному в зависимости от того, какой из шести рассмотренных вариантов со-

ставного закона был признан наиболее близким к экспериментальному закону по результатам форсированных испытаний.

Принимается решение, что именно этот вариант составного закона будет точнее других отражать результаты надежных испытаний в нормальном режиме эксплуатации.

Рассмотрим последовательно возможные варианты такого решения.

А. Если наиболее точным признан составной закон, представляемый **суммой двух разных экспоненциальных законов**, принимается решение, что в нормальном режиме теоретический закон вероятности безотказной работы будет иметь вид (9.2а), где параметры c и $b = a_1/a_2$ считаются известными по результатам форсированных испытаний (см. подпункт 3 пункта 10.4.2). Остальные параметры (a_1 и a_2) определяются по результатам укороченных нормальных испытаний из формул (9.4а) и (9.4б) с использованием (9.2б).

Основные показатели составного закона при известных параметрах закона c , a_1 и a_2 рассчитываются известным образом из выражений (8.7) и (9.5)–(9.7).

Б. Если наиболее точным признан закон, представленный **суммой экспоненциального закона и закона Эрланга**, то принимается решение, что составной закон в нормальном режиме будет определяться в виде (9.8), где параметры c и $b = a_1/a_2$ известны по результатам форсированных испытаний (см. подпункт 4 пункта 10.4.2). Затем, используя результаты укороченных испытаний, например, значение $P_{Эi} = \varphi(t_i)$ при $i = \overline{1, m}$, рассчитывают по формулам (9.13) коэффициенты α_j при $j = 0; 1; 2; 3$ и численным методом решают алгебраическое уравнение третьей степени из (9.12).

Решением является значение $y = y_{\text{опт}} = a_{2\text{опт}} \Delta t_{Э}$, откуда $a_2 = a_{2\text{опт}} = y_{\text{опт}} / \Delta t_{Э}$. Далее определяется параметр $a_1 = a_{1\text{опт}} = a_{2\text{опт}} \cdot b$.

Совокупность параметров a_1 , c и a_2 полностью определяет составной закон (9.8), а его показатели, например, начальные и центральные моменты, гарантированное и среднее время наработки и др., однозначно определяются из выражений (8.14) и (9.14)–(9.16).

В. Если наиболее точным признан составной закон в виде **суммы экспоненциального закона и закона Рэлея**, то принимается решение, что составной закон в нормальном режиме будет определяться в виде (9.17), где по результатам форсированных испытаний считаются известными параметры c и $b = a_1/\sqrt{a_2}$ (см. подпункт 5 пункта 10.4.2). Затем, используя экспериментальные результаты укороченных нормальных испытаний, в частности, значения $P_{Эi} = \varphi(t_i)$ при $i = \overline{1, m}$, определяют по формулам (9.22) коэффициенты β_j ($j = 0; 1; 2; 3$).

После этого численным методом решают алгебраическое уравнение третьей степени с одной неизвестной переменной z ($z = a_1 \Delta t_{Э}$). Решением является значение $z = z_{\text{опт}}$, откуда можно найти $a_{1\text{опт}} = z_{\text{опт}} / \Delta t_{Э}$ и $a_{2\text{опт}} = a_{1\text{опт}}^2 / b^2$.

На этом составной закон может считаться полностью определенным, а его основные показатели, например, среднее и гарантированное время наработ-

ки, начальные и центральные моменты и т. д. однозначно рассчитываются на основании (8.19) и (9.24)–(9.26).

Г. Если наиболее точным признан составной закон в виде **суммы двух законов Эрланга с разными параметрами**, то принимается, что составной закон будет определяться в виде (9.27), где по результатам форсированных испытаний считаются известными параметры c и $b = a_1/a_2$ (см. подпункт 6 пункта 10.4.2).

Затем, используя набор экспериментальных данных $P_{Эi} = \varphi(t_i)$, где $t_i = i\Delta t_Э$ ($i = \overline{1, m}$), определяют остальные оптимальные параметры составного закона: $a_2 = a_{2\text{опт}}$ – из (9.30), $a_1 = a_{1\text{опт}} = a_{2\text{опт}} \cdot b$ – из (9.31), при этом коэффициент $C_Э$ определяют из (9.28).

На этом задача определения параметров составного вероятностного закона (9.27) считается завершенной. Основные показатели этого закона: гарантированное и среднее время безотказной работы, выборочные начальные и центральные моменты и др. показатели – рассчитываются известным образом по формулам (8.24) и (9.32)–(9.34).

Д. Если наиболее точным признан составной закон в виде **суммы двух законов Рэлея с разными параметрами**, то принимается, что в режиме нормальной эксплуатации составной закон будет определяться в виде (9.35), где по результатам форсированных испытаний можно считать неизменными (известными) коэффициенты (параметры) c и $b = a_1/a_2$ (см. подпункт 7 пункта 10.4.2).

Далее используют результаты нормальных укороченных испытаний, в частности, набор значений $P_{Эi} = \varphi(t_i)$, где $t_i = i\Delta t_Э$ ($i \in \overline{1, K}$). На основании этих данных по формулам (9.37) и (9.38) рассчитывают остальные оптимальные параметры составного закона: $a_2 = a_{2\text{опт}}$ – из (9.37); $a_1 = a_{1\text{опт}} = a_{2\text{опт}} \cdot b$ – из (9.38).

Подставляя эти результаты в выражение (9.35), получаем законченную формулу для функции вероятности безотказной работы анализируемой системы в нормальном режиме эксплуатации. Основные показатели этой функции рассчитываются по соответствующим формулам (8.32) и (9.39)–(9.41).

Е. Если наиболее точным признан составной закон в виде **суммы законов Эрланга и Рэлея**, то принимается, что в режиме нормальной эксплуатации будет выполняться составной закон вида (9.42), поскольку именно он оказался лучшим по результатам форсированных испытаний.

При этом, как и ранее, полагают, что параметры закона c и $b = a_1/\sqrt{a_2}$ для обоих режимов испытаний остаются неизменными.

Далее используют результаты укороченных нормальных испытаний, в частности, зависимость $P_{Эi} = \varphi(t_i)$, где $t_i = i\Delta t_Э$ ($i \in \overline{1, K}$), и, применяя МНК, определяют оптимальные значения остальных параметров составного закона: $a_1 = a_{1\text{опт}}$ – из (9.45а); $a_2 = a_{2\text{опт}}$ – из (9.45б).

На этом задача определения основной функции составного закона-вероятности безотказной работы $P_Э(t)$ считается завершенной.

Другие функции, в частности, $f_3(t)$ и $\lambda_3(t)$ несложно определить из выражений (8.35б)–(8.35в). Из выражений (8.35г)–(8.35е) можно рассчитать также основные показатели составного закона: гарантированное и среднее время безотказной работы, начальные и центральные моменты и т. п. При этом также можно использовать расчетные формулы (9.46)–(9.47).

11 По завершении расчетов по подпунктам 1–10 пункта 10.4.2 можно полагать, что задача наиболее точного прогнозирования типа составного надежного закона, его параметров и показателей на основе использования экспериментальных результатов форсированных (ускоренных) и укороченных (нормальных) испытаний **считается решенной**.

Полученные показатели надежности, как об этом говорилось в разделах 1–3, относятся к основным показателям качества любой технической системы. Они в обязательном порядке анализируются на мировом рынке и принимаются во внимание при выборе конкурирующих вариантов систем.

Библиотека БГУИР

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящем учебно-методическом пособии материалы охватывают основной круг проблем, которые необходимо решать при изучении, анализе, проектировании и испытании технических систем с целью обеспечения требуемых показателей надежности. Поскольку показатели надежности относятся к группе основных показателей любой технической системы, они существенно влияют на конкурентоспособность этих систем как на внутреннем рынке страны-производителя, так и на международном рынке.

Успешное решение этих задач невозможно без проведения фундаментальных научных исследований с целью создания и совершенствования новых методов проектирования и испытания технических систем, которые позволили бы оптимизировать достаточно затратную (по временным и экономическим ресурсам) процедуру прогнозирования показателей надежности, в первую очередь – гарантированного и среднего времени безотказной работы. Эти показатели для ряда технических систем, например, таких как спутниковые телевизионные и метеорологические системы, должны составлять несколько, а то и десятки лет.

В свою очередь, процедура оптимизации прогнозных работ всегда требует разработки оптимального программного обеспечения и в совокупности специализированной системы поддержки принятия решения. Оптимальное решение (выбор того или иного варианта проекта, структуры построения системы, совокупности показателей качества технической системы с учетом показателей надежности и т. п.), как правило, принимается на основе разработки и расчета обобщенного показателя качества, например, по критерию «эффективность – стоимость» [18, 21, 22].

Приложение А (рекомендуемое)

Контрольные вопросы по материалам учебно-методического пособия

- 1 Назовите основные виды функций, характеризующие безотказную работу технических систем.
- 2 Как связаны между собой функции вероятности безотказной работы $P(t)$, частоты отказов $f(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$? Запишите уравнения связи между этими функциями.
- 3 Что такое работоспособность изделия? Как она определяется и от чего зависит?
- 4 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от причин возникновения отказов?
- 5 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от характера проявления отказа?
- 6 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от закономерности возникновения отказа?
- 7 Какой отказ называется независимым (зависимым)?
- 8 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от сложности устранения?
- 9 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от места устранения?
- 10 Что такое среднее время безотказной работы? Как оно определяется экспериментально и теоретически?
- 11 Что такое среднее квадратическое отклонение среднего времени наработки? Как оно определяется экспериментально и теоретически?
- 12 Что такое гарантированное время наработки? Как оно определяется?
- 13 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для экспоненциального закона. Как они изменяются во времени?
- 14 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Эрланга второго порядка. Как они изменяются во времени?
- 15 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Рэлея. Как они изменяются во времени?
- 16 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Вейбулла. Как они изменяются во времени?
- 17 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для нормального закона (закона Гаусса). Как они изменяются во времени?
- 18 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для усеченного нормального закона. Как они изменяются во времени?
- 19 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для логнормального закона. Как они изменяются во времени?

20 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для гамма-закона. Как они изменяются во времени?

21 Какие виды экспериментальных испытаний технических изделий применяют на практике?

22 В чем заключаются отличия ускоренных и укороченных опытных испытаний изделий на надежность?

23 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию вероятности безотказной работы?

24 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию плотности вероятности безотказной работы?

25 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию интенсивности отказов?

26 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить первый выборочный момент – выборочное среднее?

27 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить второй момент распределения – выборочный средний квадрат?

28 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить n -й начальный выборочный момент ($n = 3, 4, \dots$)?

29 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить выборочную среднюю дисперсию?

30 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить n -й центральный выборочный момент ($n = 3, 4, \dots$)?

31 Каким образом можно оценить различие (близость) между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующей ее теоретической функцией?

32 Как определяется средний квадратический критерий близости?

33 Как определяется относительный средний квадратический критерий близости?

34 Как определяется взвешенный средний квадратический критерий близости?

35 Что такое параметрическая оптимизация вероятностного закона? Каковы критерии оптимизации?

36 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация экспоненциального закона, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

37 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Эрланга второго порядка, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

38 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Рэлея, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

39 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Вейбулла, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

40 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация нормального закона, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

41 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация усеченного нормального закона, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

42 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация логнормального закона, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

43 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация гамма-закона, аппроксимирующего результаты форсированных (ускоренных) испытаний на надежность?

44 В чем различие процедур параметрической оптимизации вероятностного закона, аппроксимирующего результаты эксперимента в режиме ускоренных (форсированных) и укороченных испытаний?

45 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация экспоненциального закона, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

46 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Эрланга, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

47 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Рэлея, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

48 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Вейбулла, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

49 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация нормального закона (закона Гаусса), аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

50 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация усеченного нормального закона, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

51 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация логнормального закона, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

52 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация гамма-закона, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность?

ных нормальных испытаний на надежность, если он выбирается в виде взвешенной суммы двух законов Рэлея?

64 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация составного теоретического закона, аппроксимирующего результаты укороченных нормальных испытаний на надежность, если он выбирается в виде взвешенной суммы закона Рэлея и закона Эрланга?

65 Каким образом можно оценить различие (близость) между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующим ее составным теоретическим законом?

66 Как определяется средний квадратический критерий близости между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующим ее составным теоретическим законом?

67 Как определяется относительный среднеквадратический критерий близости между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующим ее составным теоретическим законом?

68 Как определяется взвешенный средний квадратический критерий близости между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующим ее составным теоретическим законом?

69 Как определяется лучший вариант аппроксимации экспериментальной функции надежности составным теоретическим законом?

Приложение Б
(обязательное)

**Моделирование эксперимента *однопараметрическим*
вероятностным законом**

Таблица Б.1 – Варианты результатов *форсированных* (ускоренных) испытаний
(число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1 \dots 12$)

Интервал \ Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\Delta t_3, \text{ч}$
1	38	24	14	9	6	3	2	2	1	1	–	–	96
2	38	24	14	9	6	3	2	2	1	1	–	–	120
3	38	23	15	9	6	3	2	2	1	1	–	–	144
4	40	25	14	8	6	3	1	1	1	1	–	–	192
5	15	24	21	15	10	6	4	2	1	1	1	–	96
6	14	24	20	15	10	7	4	2	2	1	1	–	120
7	13	23	21	15	10	7	5	2	2	1	1	–	144
8	18	27	22	14	9	4	3	1	1	1	–	–	192
9	4	12	17	18	16	13	8	6	3	2	1	–	72
10	5	12	17	17	16	13	9	5	3	2	1	–	96
11	5	12	18	18	17	12	8	5	3	1	1	–	120
12	5	15	20	19	16	12	6	3	2	2	–	–	144

Таблица Б.2 – Варианты результатов *укороченных* (нормальных) испытаний
(число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1 \dots 5$)

Вариант \ Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	4	4	3	0	1	1	0	1	1	1	0
2	3	5	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	4	3	3	1	2	2	1	3	3	3	2
4	2	3	3	2	1	3	3	1	5	5	5	4
5	4	–	3	–	2	–	–	2	5	–	–	5
$\Delta t_3, \text{ч}$	1200	1500	1200	1500	1000	1200	1200	1000	1000	1200	1500	1000

Приложение В
(обязательное)

**Моделирование эксперимента *двухпараметрическим*
вероятностным законом**

Таблица В.1 – Варианты результатов *форсированных* испытаний
(число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1 \dots 10$)

Интервал \ Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Δt , ч
1	51	15	9	6	5	4	3	3	2	2	96
2	65	9	7	6	3	3	2	2	2	1	120
3	64	10	7	5	4	3	2	2	2	1	144
4	1	6	13	21	23	19	10	4	2	1	120
5	1	5	13	21	23	20	11	5	1	0	96
6	1	1	2	6	12	19	22	19	12	6	120
7	1	1	3	8	14	20	21	17	11	4	144
8	1	1	4	8	14	19	20	17	11	5	120
9	10	13	14	16	14	12	9	6	4	2	96
10	17	13	14	15	13	11	8	5	3	1	120
11	5	9	12	15	16	15	12	8	5	3	144
12	7	9	12	13	14	12	11	10	7	5	120
13	37	22	13	8	6	5	3	3	2	1	96
14	34	24	13	10	6	4	3	3	2	1	120
15	37	23	13	8	6	5	3	2	2	1	144
16	41	22	13	7	5	4	3	2	2	1	120
17	8	23	24	18	12	7	4	2	1	1	90
18	1	9	19	22	20	13	8	5	2	1	120
19	8	23	25	18	11	7	4	2	1	1	144
20	2	3	27	26	19	11	7	3	1	1	192

Таблица В.2 – Варианты результатов укороченных испытаний
 (число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1 \dots 5$)

Интервал Вариант	1	2	3	4	5	Δt , ч
1	6	3	2	2	1	1200
2	11	3	2	1		1500
3	1	1	3	5	7	1200
4	1	2	3	7		1500
5	1	1	3	6		1400
6	1	1	2	4	9	1200
7	1	1	3	6		1500
8	1	1	2	5	8	1200
9	2	3	3	3	3	1750
10	1	3	3	4	5	1200
11	2	3	3	4	5	1300
12	3	2	2	3	3	1600
13	17	6	4	3	2	1000
14	12	5	4	3	2	1400
15	13	6	4	3	3	1000
16	16	6	4	3	2	1400
17	5	16	17	19	15	1500
18	1	3	8	13	16	1500
19	5	16	21	19	15	1400
20	1	2	6	10	14	1400

Приложение Г
(обязательное)

Таблицы значений табулированных функций

Таблица Г.1 – Значения гамма-функции

x	$\gamma(x)$	x	$\gamma(x)$
1	1	1,55	0,88887
1,05	0,9735	1,6	0,89352
1,1	0,95135	1,65	0,90012
1,15	0,93304	1,7	0,90864
1,2	0,91817	1,75	0,91906
1,25	0,9064	1,8	0,93138
1,3	0,89747	1,85	0,94561
1,35	0,89115	1,9	0,96177
1,4	0,88726	1,95	0,97988
1,45	0,88566	2	1
1,5	0,88623	–	–

Значения гамма-функции для $x < 1$ и для $x > 2$ могут быть вычислены с помощью формул [3, 8, 9, 22]:

- а) при $x < 1$: $\gamma(x) = \gamma(x + 1)/x$;
б) при $x > 2$: $\gamma(x) = (x - 1)\gamma(x - 1)$.

$$\text{Функция Лапласа } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Таблица Г.2 – Значения функции Лапласа [9, 40]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0	0,000	0004	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359	
0,1	0398	0438	0478	0517	0556	0596	0636	0675	0714	0753	
0,2	0792	0832	0871	0909	0948	0987	1025	1064	1103	1141	
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517	
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879	
0,5	1915	1949	1985	2019	2054	2088	2126	2156	2190	2224	
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549	
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2793	2823	2852	
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3123	
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3364	3389	
1,0	0,341	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621	
1,1	3643	3665	3686	3707	3729	3749	3770	3790	3810	3830	
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3961	3980	3997	4015	
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177	
1,4	4192	4207	4222	4236	4250	4265	4278	4292	4306	4319	
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441	
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544	
1,7	4554	4563	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633	
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4685	4693	4699	4706	
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767	
2,0	0,477	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817	
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857	
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890	
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916	
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936	
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952	
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4961	4962	4963	4964	
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974	
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981	
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986	
3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0,49966	3,5	0,49977
3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0,49995	4,0	0,499968	5,0	0,4999997

Приложение Д
(обязательное)

Аппроксимация эксперимента составным вероятностным законом

Таблица Д.1 – Варианты результатов форсированных испытаний
(число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1...10$)

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
№ i -го промежутка	1	49	50	44	56	20	33	21	31	7	7	8
	2	25	24	25	21	28	32	29	34	19	17	20
	3	12	11	13	10	21	17	21	18	23	21	24
	4	6	7	8	6	14	9	13	8	21	20	20
	5	3	3	4	3	8	4	8	4	14	15	14
	6	2	2	3	2	4	2	4	2	9	9	8
	7	1	1	1	1	2	2	2	2	4	6	4
	8	1	1	1	0	2	0	1	0	2	3	1
	9	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
	10	1	1	1	–	1	–	1	–	–	1	–
Δt , ч	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
Варианты	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21		
№ i -го промежутка	1	11	39	34	34	43	38	17	34	28	13	
	2	24	26	25	25	30	35	21	30	37	28	
	3	23	16	17	17	12	17	22	16	16	27	
	4	16	8	10	11	7	5	18	9	8	17	
	5	10	5	6	6	3	3	11	6	5	9	
	6	7	3	4	3	2	1	6	2	2	4	
	7	4	1	2	2	1	0	3	2	2	1	
	8	2	1	1	1	0	1	1	0	1	0	
	9	2	1	0	1	1	0	1	1	0	1	
	10	1	–	1	–	–	–	–	–	1	–	
Δt , ч	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100		

Таблица Д.2 – Варианты результатов *укороченных нормальных* испытаний
(число вышедших из строя изделий на i -м интервале, $i = 1 \dots 5$)

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№ i -го промежутка	1	2	3	3	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	3	3	1	1	1	2	1	2	2
	3	2	3	3	1	2	2	2	2	2	3
	4	2	2	3	1	2	3	3	3	3	4
	5	2	–	–	1	2	–	–	3	4	–
$\Delta t_{\text{Э}}, \text{ч}$	1200	1500	1500	1200	1000	1200	1200	1000	1000	1200	1500
Варианты	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
№ i -го промежутка	1	1	2	2	2	2	3	2	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	3	2	2	2	1
	3	2	2	2	2	3	3	2	3	3	2
	4	3	2	2	2	3	3	2	3	3	3
	5	4	2	–	2	3	–	2	4	–	4
$\Delta t_{\text{Э}}, \text{ч}$	1000	1000	1250	1000	1000	1250	1000	1000	1250	1000	

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Айвазян, С. А. Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. : справоч. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Ю Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
- 2 Прикладная статистика: исследование зависимостей. : справоч. изд. / С. А. Айвазян [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
- 3 Аксенчик, А. В. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие / А. В. Аксенчик. – Минск : БГУИР, 2011. – 184 с.
- 4 Теоретические основы испытаний и экспериментальная отработка сложных технических систем : учеб. пособие / Я. Н. Александровская [и др.]. – М. : Логос, 2003. – 736 с.
- 5 Белов, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / А. А. Белов, Б. А. Баллод, Н. Е. Елизарова. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 318 с.
- 6 Большаков, А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов : учеб. пособие / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 522 с.
- 7 Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1981. – 720 с.
- 8 Боровиков, С. М. Статистическое прогнозирование для отбраковки потенциально ненадежных изделий электронной техники / С. М. Боровиков. – М. : Новое знание, 2013. – 343 с.
- 9 Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р. Н. Вадзинский. – СПб. : Наука, 2001. – 295 с.
- 10 Власов, И. Б. Глобальные навигационные спутниковые системы / И. Б. Власов. – М : Изд-во «Рудомино», 2010. – 200 с.
- 11 Волковец, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика : конспект лекций / А. И. Волковец, А. Б. Гуринович. – Минск : БГУИР, 2003. – 82 с.
- 12 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие. / В. Е. Гмурман. – 5-е изд.– М. : Высш. шк., 2005. – 400 с.
- 13 ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Термины и определения. – М. : Изд-во стандартов, 1989. – 37 с.
- 14 ГОСТ 15467-79. Управление качеством продукции. Термины и определения – М. : Изд-во стандартов, 2009. – 26 с.
- 15 Надежность сложных технических систем : учебник / А. Н. Дорохов [и др.]. – СПб : Лань, 2011. – 352 с.
- 16 Калинин, В. М. Надежность военной техники связи : учеб. пособие / В. М. Калинин. – Минск : Воен. Акад. Респ. Беларусь, 2007. – 112 с.
- 17 Карташов, Г. Д. Форсированные испытания аппаратуры / Сб. статей «Методы оптимизации качества, надежности и эффективности процессов со-

здания и освоения новой продукции» / Г. Д. Карташов. – М. : Знание, 1986. – с. 51–107.

18 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ: учеб. пособие / В. И. Кириллов. – 2-е изд. – Минск : Новое знание ; М. : Инфра-М, 2012. – 440 с.

19 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2009. – 72 с.

20 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2009. – 46 с.

21 Кириллов, В. И. Применение методов квалиметрии для обоснования принимаемых решений в условиях неопределенности и риска / В. И. Кириллов, Н. Б. Аношенко // Доклады БГУИР, 2007. – №3(20). – С. 150–155.

22 Кириллов, В. И. Квалиметрическая поддержка многоцелевых задач принятия решений в условиях многофакторности, неопределенности и риска / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение, 2008. – №1. – С. 24–31.

23 Кириллов, В. И. Формализованный выбор альтернатив в условиях неопределенности и риска по совокупности критериев предпочтения / В. И. Кириллов, В. М. Калинин // Метрология и приборостроение. – 2009. – №4. – С. 15–21.

24 Кириллов, В. И. Оптимизация показателей надежности технической системы по результатам форсированных испытаний / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение. – 2012. – №1. – С. 9–15.

25 Кириллов, В. И. Прогнозирование эксплуатационных показателей безотказной работы технической системы по результатам испытаний / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение. – 2012. – №3. – С. 21–27.

26 Кириллов, В. И. Прогнозирование показателей надежности технической системы по результатам испытаний : учеб.-метод. пособие / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2012. – 54 с.

27 Кириллов, В. И. Прогнозные оценки надежности технической системы по результатам испытаний / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение. – 2013. – №2. – С. 16–22.

28 Кириллов, В. И. Оптимальное описание надежностных испытаний техники суммой двух однопараметрических вероятностных законов / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение. – 2014. – №3. – С. 26–31.

29 Кириллов, В. И. Применение составного вероятностного закона для оптимального прогноза характеристик и показателей надежности технической системы по результатам форсированных и укороченных испытаний / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение. – 2015. – №1. – С. 29–33.

30 Кириллов, В. И. Метрологическое обеспечение технических систем : учеб. пособие / В. И. Кириллов. – Минск : Новое знание ; М. : Инфра – М, 2013. – 700 с.

31 Математические методы в конструировании и технологии радиоэлектронных средств : метод. пособие / С. М. Боровиков [и др.] ; под ред. С. М. Боровикова. – Минск : БГУИР, 2011. – 80 с.

32 Муха, В. С. Статистические методы обработки данных : учеб. пособие / В. С. Муха. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 183 с.

33 Надежность и эффективность в технике : справочник. В 10 т. Т. 2 : Математические методы в теории надежности и эффективности / ред. совет : В. С. Авдуевский (пред.) [и др.]. – М. : Машиностроение, 1987. – 375 с.

34 Надежность и эффективность в технике : справочник. В 10 т. Т. 6 : Экспериментальная отработка и испытания / ред. совет : В. С. Авдуевский (пред.) [и др.]. – М. : Машиностроение, 1989. – 375 с.

35 Павлов, И. В. Статистические методы оценки надежности сложных систем по результатам испытаний / И. В. Павлов. – М. : Радио и связь, 1982. – 168 с.

36 Прохоренко, В. А. Учет априорной информации при оценке надежности / В. А. Прохоренко, В. Ф. Голиков. – Минск : Наука и техника, 1979.

37 Половко, А. М. Основы теории надежности : учебник / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб : БХВ – Петербург, 2006. – 704 с.

38 Половко, А. М., Основы теории надежности. Практикум / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб : БХВ – Петербург, 2006. – 560 с.

39 Скрипник, В. М., Основы теории надежности : монография / В. М. Скрипник, И. П. Кавриго. – Минск : Воен. акад. Респ. Беларусь, 2012. – 500 с.

40 Соколов, Г. А. Справочное пособие по теории вероятностей и математической статистике (законы распределения) : учеб. пособие / Г. А. Соколов, Н. А. Чистякова. – М. : Высш. шк., 2007. – 248 с.

41 СТБ ИСО 9000-2006. Системы менеджмента качества. Основные положения и словарь. – Введ. 01.06.2012. – Минск : Госстандарт : БелГИСС, 2006. – 22 с.

42 СТБ ГОСТ Р 50779.10-2001 (ИСО 3534.1-93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. – Минск : 2001. – 45 с.

43 Статистический анализ на компьютере / Ю. Н. Тюрин [и др.]. – М. : Инфра-М, 1998. – 528 с.

44 Практикум на ЭВМ по математической статистике : учеб. пособие / Ю. С. Харин [и др.]. – Минск : Университет, 1987. – 304 с.

45 Шишмарев, В. Ю. Надежность технических систем : учебник / В. Ю. Шишмарев. – М. : Изд. центр «Академия», 2010. – 304 с.

46 Шурыгин, А. М. Математические модели прогнозирования : учеб. пособие / А. М. Шурыгин. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 180 с.

47 Шурыгин, А. М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз / А. М. Шурыгин. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

Учебное издание

Кириллов Владимир Иванович

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
НАДЕЖНОСТИ
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *А. К. Мяделко*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная верстка *М. В. Касабуцкий*

Подписано в печать 09.02.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 9,77. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 100 экз. Заказ 53.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6