УДК 681.511.4

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

М.П. БАТУРА, А.П. КУЗНЕЦОВ, Н.А. КАПАНОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 14 января 2003

Материалы данной статьи посвящены вопросам статистического анализа нелинейных импульсных систем. Статья содержит три раздела. Первый раздел посвящен общим вопросам статистического анализа нелинейных систем приближенными методами, за основу авторами взят метод Галеркина приближенного расчета апостериорной функции распределения вероятностей. Второй раздел посвящен описанию математической модели системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты, работающей на кратных частотах. Данная модель взята в качестве объекта анализа в силу того, что уравнения, описывающие динамику системы, в отличие от уравнений, описывающих динамику систем импульсно-фазовой автоподстройки частоты с триггерным фазосравнивающим устройством или с устройством, работающим по принципу выборки-запоминания, не являются трансцендентными, т.е. их анализ несколько упрощен. Третий раздел посвящен вычислению статистических характеристик методом Галеркина для системы, математическая модель которой описана во втором разделе, а также приведены результаты численного расчета коэффициентов разложения в ряд функции ПРВ. Данные результаты могут также характеризовать скорость сходимости ряда.

Ключевые слова: статистический анализ, метод Галеркина, импульсно-фазовая автоподстройка частоты.

1. Метод Галеркина для приближенного расчета функции распределения вероятностей

Рассмотрим приближенный способ вычисления функции плотности распределения вероятностей (ПРВ) $W(x)$ на основе метода Галеркина.

Пусть $W(x)\approx W_N(x)$. Функция $W_N(x)$ определяется в следующем виде:

$$W_N(x)=\sum_{n=0}^{N}c_n(N)\varphi_n(x), \tag{1.1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$, n=0,1, …, — полная система ортогональных на интервале $(-\pi,\pi)$ функций.

Функция $W_N(x)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма, поэтому должно быть справедливо равенство:

$$W_N(x)-\int_{-\pi}^{\pi}q_1(x/z)\,W_n(x)\,dz\,, \tag{1.2}$$

где $x\in(-\pi,\pi)$, $q_1(x/z)=\sum_{-\infty}^{\infty}q(x+2\pi n/z)$ — переходная ПРВ, приведенная к интервалу $(-\pi,\pi)$.

Для произвольной функции $f(x)$ на этом основании можно записать соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[W_N(x)-\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,W_N(x)\,dz\right]dx=0. \tag{1.3}$$

По условию система $\{\varphi_n(x)\}$ – полная, поэтому справедливо разложение:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m\,\varphi_m(x). \tag{1.4}$$

Подставив этот ряд в (1.3), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\left[W_N(x)-\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,W_N(x)\,dz\right]dx=0. \tag{1.5}$$

Отсюда следует

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[W_N(x)-\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,W_N(x)\,dz\right]\varphi_m(x)\,dx=0\ ,\ \text{m=0,1,…} \tag{1.6}$$

Выберем коэффициенты $c_n(N)$ так, чтобы были равны нулю первые из интегралов (1.6). Такой подход соответствует нулевой проекции ортогональности невязки:

$$e_N(x)=W_N(x)-\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,W_N(x)dz=0 \tag{1.7}$$

на подпространство первых $(N+1)$ функций $\varphi_m(x)$.

Запишем (1.6) в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_N(z)\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,\varphi_m(x)\,dx\,dz=\int_{-\pi}^{\pi} w_N(x)\,\varphi_m(x)\,dx\ ,\ \text{m=0,1,…} \tag{1.8}$$

С учетом ортогональности функций $\varphi_m(x)$ в правой части (1.8) имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_N(x)\,\varphi_m(x)\,dx=\sum_{n=0}^{N} c_n(N)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx=\gamma_m c_m(N), \tag{1.9}$$

где $\gamma_m=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_m^2(x)\,dx$.

Обозначим интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} q(x/z)\,\varphi_m(x)\,dx=l_m(z)=\left(q(z),\varphi_m\right)$, где $(q,\ \varphi_m)$ — скалярное произведение функций $q(x/z)$ и $\varphi_m(x)$.

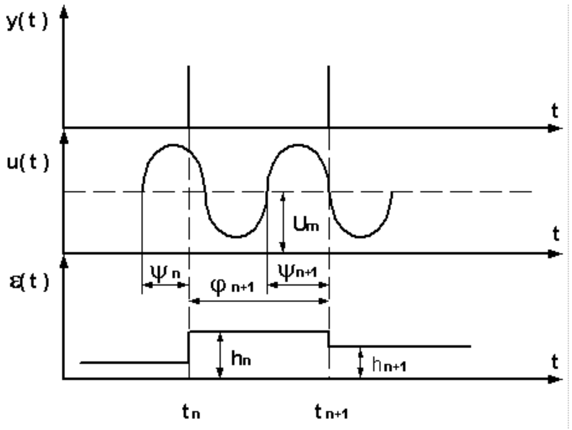
В результате слева в (1.8) получим сумму $\sum_{m=0}^{N} a_{mn}c_n(N)$, где $a_{mn}=\left(l_m(z),\varphi_m(z)\right)$.

Таким образом, коэффициенты $c_m(N)$, m=1,2,…,N должны определяться из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_{mn}}{\gamma_m}\right)c_n(N)=c_m(N), m=0,1,...,N\ . \qquad (1.10)$$

2. Математическая модель системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты, работающая на кратных частотах

Рассмотрим систему импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ) при K_2=1 (делитель в цепи обратной связи отсутствует). Синхронизация системы производится на частотах, кратных входной, причем коэффициент кратности выбирается либо внешними устройствами (например, дополнительный канал установки частоты), либо в силу собственных характеристик системы. Такое построение системы ИФАПЧ позволяет упростить схему, так как делитель цепи обратной связи является сложным цифровым устройством, а так же избавиться от шумов, вносимых делителем.



Временные диаграммы работы системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты: t_n — момент появления n-го импульса сигнала $y(t)$ опорного генератора, h_n— амплитуда выборки на n-ном периоде дискретизации, U_m — амплитуда синусоиды, Ψ_n — начальный сдвиг фаз для n-го периода

На рисунке представлены временные диаграммы работы такой системы

Пусть непрерывная линейная часть системы (НЛЧ) описывается уравнениями состояния вида

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=A\,x(t)+B\,\varepsilon(t),\\ z(t)=C\,x(t)+D\,\varepsilon(t).\end{cases}$$

Изменение вектора состояния $x(t)$ на интервале времени $t \in [t_n, t_{n+1}]$ имеет вид

$$x(t)=\Phi(t-t_n)\,x_n+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Phi(t-u)\,B\,h_n\,du, \qquad (2.2)$$

где $\Phi(t)=e^{At}$ — фундаментальная матрица состояния (матричный экспоненциал), $x_n=x(t_n)$ — вектор состояния в момент времени t_n .

Полагая в (2.2) $t=t_{n+1}$ и проведя операцию интегрирования, получаем разностное уравнение непрерывной линейной части системы:

$$x_{n+1}=\Phi(T)\,x_n+A^{-1}(\Phi(T)-E)\,B\,h_n, \qquad (2.3)$$

где E— единичная диагональная матрица, A^{-1} — обратная матрица.

Набег фазы выходного сигнала $\omega(t)=z(t)+g(t)$, где $g(t)$ — частота расстройки управляемого генератора, на интервале $[t_n , t_{n+1}]$ будет определяться следующим выражением:

$$\varphi_n=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\omega(t)\,dt\ . \qquad (2.4)$$

С учетом (2.1) и (2.3), выражение (2.4) принимает следующий вид:

$$\varphi_n=CA^{-1}(\Phi(T)-E)\ -CA^{-1}TBh_n+CA^{-2}(\Phi(T)-E)\,B\,h_n+Dh_nT+g_nT\ . \qquad (2.4)$$

Определим сдвиг фаз Ψ_{n+1} как

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \varphi_n - 2\pi j, \tag{2.5}$$

где j — отношение выходной частоты к входной в установившемся режиме.

Уравнение импульсного модулятора имеет вид

$$h_{n+1} = U_m\left(\sin\Psi_{n+1} + 1\right). \tag{2.6}$$

Предположим, что подстраиваемый генератор представляет собой линейный безынерционный элемент, с коэффициентом передачи K. Тогда значения выходной частоты для бесфильтровой ИФАПЧ в дискретные моменты времени определяются следующим выражением:

$$z_n = Kh_n + g_n \tag{2.7}$$

Набег фазы выходного сигнала ω (t) на интервале [t_n , t_{n+1}] будет определяться, как $\varphi_n = Kh_nT + gT$. Тогда математическая модель, описывающая динамику системы при g=const, с учетом действия шума и (2.6) имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - T_0 \sin x_n + T_0\beta + n_n, \tag{2.8}$$

где $T_0 = -KTU_m$, $\beta = -\dfrac{2\pi j}{KTU_m} + \dfrac{g}{KU_m} + 1$, $x_n = \Psi_n$, n_n — центрированный дискретный гауссовский шум с дисперсией $D = \sigma^2$.

3. Вычисление статистических характеристик систем фазового управления приближенным методом

Рассмотрим импульсную систему с фазовым управлением, работающую на кратных частотах. Математическая модель такой системы получена в разделе 2 и для бесфильтровой системы с учетом действия шума имеет вид (2.8).

Определим ПРВ сигнала рассогласования x_n. Из выражения (2.8) следует, что сигнал рассогласования x_n является марковским случайным процессом. Следовательно, его ПРВ удовлетворяет уравнению (1.2) и

$$q_1(z) = q(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x - z + T_0 \sin z - T_0\beta)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.1}$$

для $z \in [-\pi, \pi]$ в случае гауссова шума.

Возьмем в качестве системы ортогональных функций $\{\varphi_m(x)\}$ систему тригонометрических функций {1, sinx, cosx, sin2x, cos2x,…}. В этом случае

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \cos mx, i = 2k, k = \overline{1,\infty}, \\ \sin mx, i = 2k+1, k = \overline{1,\infty}; \end{cases} \quad m = \begin{cases} \dfrac{i}{2}, i = 2k, k = \overline{1,\infty}, \\ \dfrac{(i+1)}{2}, i = 2k+1, k = \overline{1,\infty}; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\gamma_m = \begin{cases} 2\pi, m = 0, \\ \pi, m \neq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Вычислим скалярное произведение $l_m(z) = (q(z), \Psi_m)$ на всей числовой оси значений $x \in (-\infty, \infty)$, т.е.

$$l_m(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x/z)\,\Psi_m(x)\,dx\,. \tag{3.4}$$

Тогда получим [2]

$$l_m=\begin{cases} e^{\frac{-m^2\sigma^2}{2}}\cos m\left[z-T_0(\sin z-\beta)\right], i=2k, k=\overline{1,\infty}\,; \\ e^{\frac{-m^2\sigma^2}{2}}\sin m\left[z-T_0(\sin z-\beta)\right], i=2k+1, k=\overline{1,\infty}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Далее вычислим коэффициенты α_{ij}. Воспользуемся соотношениями из [55]:

$$\int\limits_0^{\pi}\sin(z\sin x)\sin nx\,dx=\left[1-(-1)^n\right]\frac{\pi}{2}J_n\,, \tag{3.6}$$

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(z\sin x)\cos nx\,dx=\left[1+(-1)^n\right]\frac{\pi}{2}J_n\,. \tag{3.7}$$

Тогда имеем

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} \pi A\left[J_{m-n}(mT_0)+J_{m+n}(mT_0)\right], i=2k+1\,, j=2k, k=\overline{1,\infty}, \\ \pi A\left[J_{m-n}(mT_0)-J_{m+n}(mT_0)\right], i,j=2k+1, k=\overline{1,\infty}, \\ \pi B\left[J_{m-n}(mT_0)+J_{m+n}(mT_0)\right], i,j=2k, k=\overline{1,\infty}, \\ -\pi B\left[J_{m-n}(mT_0)-J_{m+n}(mT_0)\right], i=2k,\ j=2k+1, k=\overline{1,\infty}, \end{cases} \tag{3.8}$$

где $A=e^{-m^2\sigma^2/2}\cos mT_0\beta$; $B=e^{-m^2\sigma^2/2}\sin mT_0\beta$; J_k — функция Бесселя первого рода порядка $к$.

Очевидно, что

$$\alpha_{0n}=\begin{cases} 0\,, n\neq 0, \\ 2\pi\,, n=0; \end{cases}\quad \alpha_{m0}=\begin{cases} 2\pi A J_m(mT_0)\,, i=2k+1, k=\overline{1,\infty}\,, \\ 2\pi A J_m(mT_0),\ i=2k, k=\overline{1,\infty}\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

Из условия нормировки ПРВ определяем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}W_N(x)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}c_0(N)\,dx=2\pi c_0(N)=1\,. \tag{3.10}$$

Отсюда следует $c_0(N)=1/2\pi$.

Запишем m–ю строку системы (1.10) в форме

Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования. (3.11)

где $m=0,1,\ldots,N$. При m=0 приходим к тождеству. Поэтому система уравнений содержит N строк (m=1,2,…,N) и может быть представлена в матричном виде:

$$\left[E-A\right]c_N^*=\beta_N^*\,, \tag{3.12}$$

где E —единичная матрица размером $N\times N$, A —матрица с элементами $\alpha_{mn}/\gamma_m=\alpha_{mn}/\pi$, m, $n=\overline{1,N}$;
$c_N^* = [c_1(N),...,c_N(N)]^T$, $\beta_N^* = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N]^T$,

$\beta_m = (\alpha_{m0}/\gamma_m)\, c_0(N) = \alpha_{m0}/2\pi^2$,

Точное значение ПРВ находится в форме предельного соотношения

$$W(x) = \lim_{N\to\infty} W_N(x). \tag{3.13}$$

Тогда

$$W(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n\, \Psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx, \tag{3.14}$$

где $c_n = \lim_{N\to\infty} c_n(N)$.

Быстрота сходимости характеризуется табл. 3.1–3.2. Расчет A_n выполнялся при β=0 (B=0), $A=e^{-m^2\sigma^2/2}$, $\sigma^2=T_0(2-T_0)/\rho$, $\rho=1$, $T_0=0$, $c_n=A_n$ (табл. 3.1) и

T_0=var (табл. 3.2).

При расчете функций Бесселя $J_n(x)$ использовалось соотношение из [3]

$$J_n = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!\,(n+k)!}. \tag{3.15}$$

Таблица 1. **Расчетные значения масштабированных коэффициентов A_n при числе слагаемых**

A_n	n						
	1	2	3	4	5	6	7
$10A_1$	1,5753	1,4113	1,4163	1,4163	1,4163	1,4163	1,4163
10^2A_2	–	3,3144	3,2246	3,2246	3,2260	3,2260	3,2260
10^3A_3	–	–	4,7645	4,7131	4,7136	4,7136	4,7136
10^4A_4	–	–	–	4,8976	4,8773	4,8775	4,8775
10^5A_5	–	–	–	–	3,7758	3,7703	3,7703
10^6A_6	–	–	–	–	–	2,2486	2,2476
10^7A_7	–	–	–	–	–	–	1,0545

Таблица 2. **Расчетные значения масштабированных коэффициентов A_n на интервале дискретизации**

A_n	T_0					
	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0001
$10A_1$	1,4527	1,4163	1,4179	1,4202	1,4208	1,4209
10^2A_2	2,7539	3,2260	3,3173	3,3935	3,4410	3,4127
10^3A_3	2,4445	4,7136	5,1368	5,4855	5,5647	5,5726
10^4A_4	1,0351	4,8775	5,8433	6,6699	6,8603	6,8795
10^5A_5	0,2092	3,7703	5,1787	6,4807	6,7903	6,8216

STOCHASTIC ANALYSIS OF THE IMPULSE PHASE-LOCK LOOPS SYSTEMS

M.P. BATURA, A.P. KUZNETSOV, N.A. KAPANOV

Abstract

The materials of given paper are devoted to questions of the statistical analysis of nonlinear pulse systems. The paper contains three units. The first unit is devoted to common questions of the statistical analysis of nonlinear systems via approached methods. As a basis authors take a Galerkin's method of approached account of distribution-function of probabilities. The second unit is devoted to the description of mathematical model of system of phase-impulse auto tuning of frequency working on multiple frequencies. The given model is taken as the object of the analysis as the equations which describe dynamics of system against the equations of systems, describing dynamics of system of phase-impulse auto tuning of frequency with trigger phase-comparison element or with an element working on selection and memorization principle are not transcendental , i.e. their analysis is a little simplified. The third unit is devoted to calculation of the statistical characteristics via Galerkin's method for a system, which mathematical model is described in the second unit, and also the results of numerical account of factors of series expansion of distribution-function of probabilities. The results can also characterize speed of convergence of series.

Литература

1. *Кузнецов А.П., Батура М.П., Шилин Л.Ю.* Анализ и параметрический синтез импульсных систем с фазовым управлением. Мн., 1993.
2. *Шахтарин Б.И., Курочка Б.Я.* Статистическая динамика нелинейных систем радиоавтоматики. Часть I. Анализ непрерывных и дискретных систем первого порядка. М., 1992.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.