Доклады БГУИР
2005 АПРЕЛЬ–ИЮНЬ № 2

УДК 512.942:513.88.531

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА В КОЛЬЦАХ R_3 И $\widetilde{R}_3$ — ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА КОМПОЗИТЫ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Э.Д. ПОДЛОЗНЫЙ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П.Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 10 марта 2005

В статье рассматривается кольцо трехмерных векторов R3 и его расширение на одно измерение $\widetilde{R}_3$ (R4), разложения колец, типы факторизаций, разрешимость и формулы решений одночленных однопроекторных уравнений второго порядка с одним и двумя коэффициентами. Разработанный аппарат был применен к исследованию парных и тройных векторных уравнений для расчета задач механики при воздействии на композиты силовых полей.

Ключевые слова: кольцо, факторизация, проектор, парные и тройные векторные уравнения, механика.

Введение

В настоящее время принцип факторизации становится универсальным [1]. В работах Г.С. Полетаева была обнаружена с кольцевой точки зрения общность интегральных, векторных и других уравнений в кольцах с факторизованными парами [2].

Векторные уравнения — простейший пример уравнения в неассоциативных кольцах, связанных с проекторами и факторизационными парами.

Известно, что кольцо R_3 является антикоммутативным и неассоциативным, без мультипликативной единицы.

Проведя процедуру расширения кольца R_3 путем присоединения формальной мультипликативной единицы δ аналогично [3], получим кольцо $\widetilde{R}_3$ (R_4), в котором обобщенный вектор

$$\widetilde{x} = \alpha\delta + \overline{x}\,,\ \alpha \in R_1,\ \overline{x} \in R_3\,. \tag{1}$$

Введены в $\widetilde{R}_3$ (R_4) операции сложения и умножения (векторного произведения) обобщенных векторов [4].

Кольцо $\widetilde{R}_3$ (R_4) можно рассматривать как расширение пространства R_3 на одно измерение. В $\widetilde{R}_3$ указан способ умножения четырехмерных (обобщенных) векторов.

Таким образом, с учетов сложения и умножения векторов на вещественные числа $\widetilde{R}_3$ будет кольцом.

Заметим, что кольцо $\widetilde{R}_3$ не совпадает с кольцом кватернионов, так как произведение элементов в них введено разными способами.

Так, в R_3 и $\widetilde{R}_3$ векторное произведение орт i, j, k имеет вид, например,

$$\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = \underline{0}\,. \qquad (2)$$

В то же время, в кватернионах для этих же векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеет место

$$\bar{i}\circ\bar{i} = \bar{j}\circ\bar{j} = \bar{k}\circ\bar{k} = \underline{-1}\,. \qquad (2')$$

Отметим, что в настоящее время техника применения кватернионов усиленно развивается в физике и механике [5].

Даны формулы разложения кольца R и понятия факторизационных пар (левой, правой, правильной, нормированной, двухсторонней). Показана единственность факторизации по факторизационной паре подколец. Поставлена задача разрешимости решений одночленных однопроекторных уравнений второго порядка с одним коэффициентом а:

$$(ax^{+})^{+} = b^{+}, \qquad (3)$$

$$(y^{-}a)^{-} = c^{-},$$

где $x^{+}\in R^{+}$, $y^{-}\in R^{-}$ — неизвестные, a — известный обратимый в R, правые части b^{+}, c^{-} заданы.

Сформулированы и доказаны шесть теорем для решения данных уравнений и системы.

Дано понятие обратимости обобщенных векторов в кольце $\widetilde{R}_3$, доказана теорема об обобщенном векторе $\tilde{a}'$, определяемом по формуле

$$\tilde{a}' = \alpha^{-1}\delta - \alpha^{-2}\bar{a}\,. \qquad (4)$$

Доказаны две теоремы о разрешимости одночленных однопроекторных уравнений второго порядка с двумя коэффициентами a_1, a_2:

$$[a_1x^{+}a_2]^{+} = b^{+}, \qquad (5)$$

$$[a_2y^{-}a_1]^{-} = c^{-}.$$

Дана постановка простейших задач механики, которые приводят к векторным уравнениям (системам) в ряде случаев с дополнительными условиями.

Задачи механики с позиций уравнений в кольцах с факторизационными парами с неизвестными векторами $\bar{x}$ и др. в R_3 моделируются парными

$$\bar{a}_1\times\bar{x} = \bar{b}_1\,, \qquad (6)$$

$$\bar{a}_2\times\bar{x} = \bar{b}_2\,.$$

и тройными векторными уравнениями:

$$[\bar{a}_1\times\bar{x}]^{-} = \bar{b}_1^{-},$$

$$[\bar{a}_2\times\bar{x}]^{\Delta} = b_2^{\Delta}, \qquad (7)$$

$$[\bar{a}_3\times\bar{x}]^{+} = b_3^{+}.$$

Аналогично будем иметь и в $\widetilde{R}_3$.

В уравнениях (3), (5)–(7) символы ±, Δ указывают на применение соответствующих проекторов или принадлежность подмножествам.

Получены формулы решения $\overline{x} \in R_3$ уравнения (6) (при выполнении ряда условий) в виде

$$\overline{x} = \frac{[\overline{b}_1\overline{b}_2]}{(\overline{a}_1\overline{b}_2)} = \frac{[\overline{b}_2\overline{b}_1]}{(\overline{a}_1\overline{b}_2)}, \tag{8}$$

если $(\overline{a}_1\overline{b}_2) = -(\overline{a}_2\overline{b}_1) \neq 0$,

$$\overline{x} = \frac{[(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1)\overline{a}_2 - (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_2)\overline{a}_1]}{[\overline{a}_1\overline{a}_2]^2}, \tag{9}$$

если $(\overline{a}_1\overline{b}_2) = -(\overline{a}_2\overline{b}_1) = 0$.

Аппарат разрешимости одночленных однопроекторных уравнений второго порядка с одним и двумя коэффициентами был применен к исследованию парных и тройных векторных уравнений для расчета сил (усилий) воздействия силовых полей ряда задач механики (задача квазистатического взаимодействия двух тел, реакции взаимодействия гибкой нити в процессе навивки и сил моментов при винтовом перемещении стержня в сплошную среду) [4].

На основе разработанной теории парных векторных уравнений подана заявка на изобретение РБ № 20010126 [6], отражающая исследование по "структурно-реактивному" методу пенетрации стержней с винтовым наконечником в сплошную среду.

VECTOR ALGEBRA IN RINGS R_3 AND $\widetilde{R}_3$ IS THE THEORETICAL BASE OF MODELING ACTION OF FORCE FIELDS

E.D. PODLOZNY

Abstract

The paper considers three-dimensional vector rings R_3 and expansion to one dimension part $\widetilde{R}_3$ (R_4), resolution of rings, tips of factorization, solvability and formulas of solution of term single-projector of two-order with one and two coefficients. A body of mathematics has been used for investigation to pair and three vector's equation for computation of mechanics problems by action on composites of force fields.

Литература

1. *Зайцев В.Ф.* // Вестн. Гродн. гос. ун-та. 2001. Сер. 2. С. 20–24.

2. *Полетаев Г.С.* Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами (Препринт / АН УССР. Ин-т математики). Киев. 1998.

3. *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца. М., 1960.

4. *Подлозный Э.Д., Полетаев Г.С.* Задачи и уравнения в кольцах R_3, $\widetilde{R}_3$ с векторным произведением и примеры их применения в механике (Препринт / Белорус. нац. техн. ун-т). Мн., 2003.

5. *Ханукаев Ю.И.* О кватернионах I. Конечные перемещения твердого тела и точки // Электрон. журн. "Исследовано в России" / http://zhurnal.ape.relarn.ru//aticles/2002/033.pdf, С. 338–347.

6. Заявка на изобретение РБ, № 20010126, МКИ E21B, E02D. Способ погружения винтовых свай и устройство для его осуществления. Подлозный Э.Д., Бухаров А.В. // Афіцыйны бюл., Мн., 2002. № 3. (30.09.2002). С. 45.