КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.37

ФОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТИПОВЫХ ФУНКЦИЙ

А.С. КНЯЗЕВ

Военная академия Республики Беларусь
ул. Гуртьева, 1, Минск, 220057, Беларусь

Поступила в редакцию 16 января 2007

В статье рассматривается методика использования специальных функций для создания структурной схемы формирующего фильтра, преобразующего исходную типовую функцию в точечный процесс, характеризующий случайный поток заявок, поступающих в систему массового обслуживания.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, теория управления, формирующий фильтр, статистические испытания, вероятностные характеристики.

Введение

Спроектированная система управления должна поддерживать заданное качество управления при наличии различных возмущений, которые действуют на систему в условиях реального функционирования. Весь класс возмущений $\omega(t)$, которые встречаются в реальных системах, можно разделить на две категории: возмущения типа шума и возмущения волновой структуры. Реализация шумовых возмущений носит ярко выраженный хаотический характер. Для описания шумовых процессов используются такие характеристики, как математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция и другие, дающие информацию о среднем значении, величине и скорости изменения процесса. Исследования в области теории фильтрации и управления в основном опираются на возмущения типа шума [1]. Реализация возмущений, имеющих волнообразную структуру, носит кусочно-детерминированный характер, который может изменяться в случайные моменты времени. Вид информации при волновом представлении случайных процессов отличается от информации, содержащейся в традиционных статистических характеристиках, основанных на длиннопериодических осреднениях.

Представление волновых процессов в соответствии с работой Джонсона [2] позволяет использовать их в качестве возмущений для системы массового обслуживания, состояние которой скачкообразно изменяется в случайные моменты времени под воздействием входного потока заявок.

Цель статьи — синтез формирующего фильтра задающего воздействия для системы массового обслуживания (СМО) на основе теории автоматического управления и регулирования.

Модель формирующего фильтра случайных процессов волновой структуры

Волновое представление случайных процессов предполагает их описание с помощью базовых функций $f_i(t)$ в виде

$$\omega(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t), \tag{1}$$

где c_i — неизвестные весовые коэффициенты, изменяющие время от времени скачком свои значения.

Примером такого процесса волновой структуры является процесс, состоящий из взвешенных линейных комбинаций ступенек, амплитуды c_i которых изменяются в случайные моменты времени t_i кусочно-постоянным образом, как показано на рис. 1.

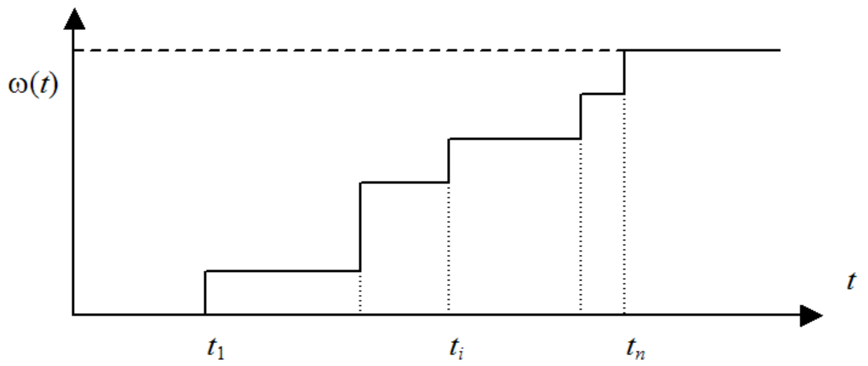

Рис. 1. Характер изменения случайного процесса

Для данного процесса в качестве базовой можно выбрать единичную функцию, т.е. $f(t)=1(t)$. Тогда процесс $\omega(t)$ запишем в виде

$$\omega(t) = c_1 1(t-t_1) + c_2 1(t-t_2) + \ldots + c_n 1(t-t_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i 1(t-t_i). \tag{2}$$

Представление случайного процесса с помощью базовых функций позволяет судить о его характере в различные интервалы времени [3]. Поэтому выбор системы базовых функций имеет важное значение для описания случайного процесса. В то же время величина возмущения остается неизвестной, так как она определяется по величине неизвестных коэффициентов c_i, изменяющихся кусочно-постоянным образом.

Однако для проектирования систем удобнее использовать описание возмущений в виде модели состояния, составленной по уравнению процесса $\omega(t)$.

Так, применив преобразование Лапласа к базовым функциям $f_i(t)$, получим операторное уравнение [4]:

$$\omega(p) = c_1 f_1(p) + c_2 f_2(p) + \ldots + c_n f_n(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \tag{3}$$

где полином $P(p)$ включает коэффициенты c_i, а полином $Q(p)$ является наименьшим общим знаменателем полученного выражения.

Для рассматриваемого примера на основании уравнения (2) получим:

$$\omega(p) = \frac{c_1}{p} e^{-pt_1} + \frac{c_2}{p} e^{-pt_2} + \ldots + \frac{c_n}{p} e^{-pt_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-pt_i}}{p}. \tag{4}$$

Процесс $\omega(t)$ можно представить как выходную переменную фиктивной линейной динамической системы с передаточной функцией

$$K(p)=\frac{1}{Q(p)}\tag{5}$$

при начальных условиях $\omega(0),\dot{\omega}(0),\ldots,$ которые при использовании преобразования Лапласа дают полином $P(p)$.

Считая, что полином $Q(p)$ можно представить в виде

$$Q(p)=p^i+r_i p^{i-1}+\ldots+r_1,\tag{6}$$

составим дифференциальное уравнение

$$\overset{(i)}{\omega}(t)+r_i\overset{(i-1)}{\omega}(t)+\ldots+r_1\omega(t)=0,\quad \text{где } \overset{(i)}{\omega}(t)=d^i\omega(t)/dt^i.\tag{7}$$

В этом уравнении коэффициенты r_i являются известными и определяются структурой преобразования Лапласа от базовых функций.

Чтобы учесть скачкообразные изменения коэффициентов c_i, добавим к однородному уравнению (7) внешнюю вынуждающую функцию $\delta_T(t)$, состоящую из последовательности неизвестных случайно появляющихся единичных импульсов (дельта-функций) случайной интенсивности (одинарной, двойной и т. д. функций Дирака).

Отсюда модель состояния $\omega(t)$ примет вид

$$\overset{(i)}{\omega}(t)+r_i\overset{(i-1)}{\omega}(t)+\ldots+r_1\omega(t)=\delta_T(t),\tag{8}$$

Уравнение состояния (8) можно представить в нормальной форме записи:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\delta_1(t),\\ \dot{x}_2&=x_3+\delta_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_i&=-r_1x_1-r_2x_2-\cdots-r_ix_i+\delta_i(t),\end{aligned}\tag{9}$$

где $x_1=\omega(t)$; $\delta_i(t)$ — последовательность случайно возникающих единичных импульсов (дельта-функций) случайной интенсивности.

Для рассматриваемого примера на основании (4) изобразим схему модели состояния, как показано на рис 2.

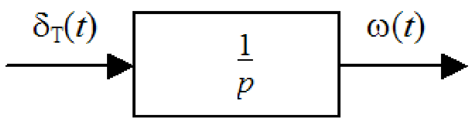

Рис. 2. Схема модели состояния

Отсюда процесс $\omega(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{\omega}(t)=\delta_T(t).\tag{10}$$

Из уравнения (2) можно получить, что воздействие

$$\delta_T(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\delta(t-t_i)\tag{11}$$

представляет собой последовательность единичных импульсов случайной амплитуды c_i.

Пусть, например, процесс $\omega(t)$ состоит из нескольких базовых функций, так что характер его изменения можно описать в виде

$$\omega(t) = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2. \qquad (12)$$

Уравнение состояния процесса запишем следующим образом:

$$\ddot{\omega}(t) = \delta_a(t) \qquad (13)$$

или в переменных состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \delta_1(t), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \delta_2(t), \\ \dot{x}_3 &= \delta_3(t), \end{aligned} \qquad (14)$$

где $x_1 = \omega(t),\ \delta_1(t) = a_0\delta(t),\ \delta_2(t) = a_1\delta(t),\ \delta_3(t) = a_2\delta(t).$

При проектировании цифровых алгоритмов, оценивая функцию $\omega(t)$, удобно представить в виде разностного уравнения состояния.

Так на основании дифференциального уравнения (10) запишем разностное уравнение состояния:

$$\omega_i = \omega_{i-1}\delta_{i-1}^0, \qquad (15)$$

где δ_{i-1}^0 — дискретный аналог последовательности единичных импульсов.

Вид последовательности дискретных импульсов зависит от характера случайного процесса.

Волновое представление может быть использовано для описания пуассоновских и близких к ним процессов.

Пусть $\omega(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i 1(t - t_i), \omega(0) = 0$, целочисленный пуассоновский процесс, который описывает поток заявок, поступающих в СМО [5]. В систему поступает ограниченное число заявок $N_з$, первоначально находящихся в неком накопителе. Интенсивность $\lambda_к$ поступления заявок для линейного процесса является линейной функцией состояния накопителя:

$$\lambda_k = k\lambda,\ \lambda > 0, \qquad (16)$$

где k — количество заявок в накопителе в данном состоянии; λ — интенсивность выхода каждой заявки из накопителя.

Изменение состояния накопителя можно описать с помощью уравнения

$$\omega_1(t) = N_з - \omega(t),\ \omega_1(0) = N_з. \qquad (17)$$

Используя волновое представление случайных процессов, запишем уравнение состояния накопителя в виде

$$\dot{\omega}_1(t) = \delta_H(t), \qquad (18)$$

где $\delta_H(t) = c_0\delta(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i\delta(t - t_i)$ — последовательность единичных импульсов; $c_0 = N_ц$ — коэффициент, характеризующий начальное состояние накопителя; c_i — коэффициенты, определяющие количество заявок, выходящих в моменты времени t_i из накопителя.

Модель состояния накопителя в соответствии с уравнением (18) можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 3.

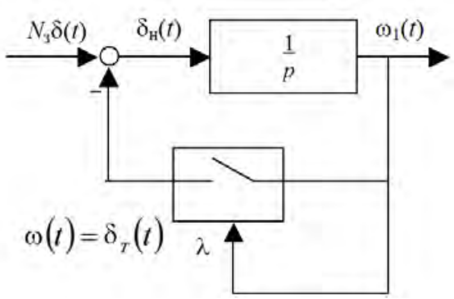

Рис. 3. Математическая модель накопителя

Начальное состояние модели определяется импульсом $N_з\delta(t)$, действующим в момент времени t=0. Поток заявок, выходящих из накопителя можно, сформировать с помощью ключа, моменты замыкания t_i которого соответствуют моментам поступления заявок в систему массового обслуживания с интенсивностью $\lambda_к$.

Вид импульсного процесса на входе дискретного интегратора и выходного процесса $\omega_{1(t)}$, характеризующего текущее состояние накопителя, представлены на рис. 4.

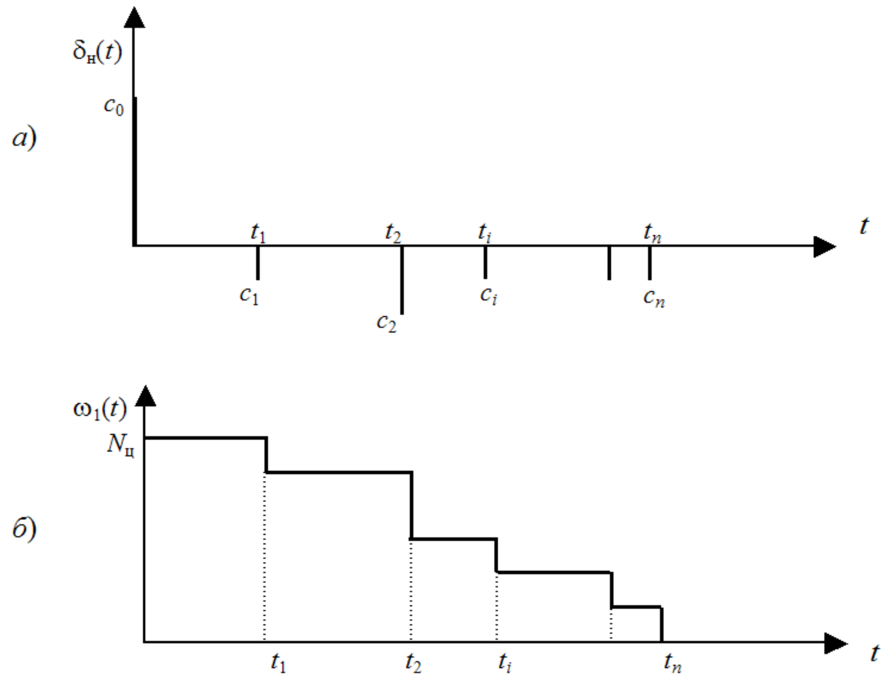

Рис. 4. Процессы в накопителе: *а* — импульсная последовательность; *б* — закон изменения состояния накопителя

При моделировании потока заявок с помощью ЭВМ в качестве ключа, интенсивность работы которого зависит от состояния накопителя, можно использовать датчик случайных чисел (ДСЧ). Тогда схему модели потока можно представить в виде, изображенном на рис. 5.

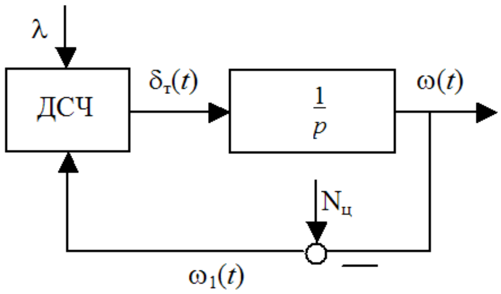

Рис. 5. Модель налета

Полагая величину λ постоянной, уравнение модели потока заявок можно записать следующим образом:

$$\dot{\omega}(t) = (N_з - \omega)\sum_{i=1}^{n}\delta(t - t_i). \tag{19}$$

Основными характеристиками потоков событий, связанных в данном случае с поступлением заявок на обслуживание, являются вероятности появления событий и распределение временных интервалов между соседними событиями или интенсивности их появления.

ДСЧ, генерирующий случайные числа, распределенные по равномерному закону в диапазоне [0, 1], позволяет смоделировать факт появления события с требуемой вероятностью $P_{ТР}$ [6].

Для этого необходимо в диапазоне [0, 1] выбрать два любых числа, разность которых дает число, равное $P_{ТР}$. Если выданное датчиком число лежит между выбранными числами, то событие имеет место, в противном случае событие отсутствует. При большом числе опытов частота событий стремится к вероятности.

Для реализации потока событий во времени необходимо задать плотность распределения $f(t)$ временных интервалов t между событиями.

С этой целью можно воспользоваться ДСЧ, равномерно распределенных в диапазоне [0, 1], и произвести над выданными числами η нелинейное преобразование t=φ(η). Вид нелинейной функции φ(η) зависит от типа распределения $f(t)$. Если функция φ монотонная, то можно составить очевидное соотношение для вероятностей:

$$p\{t < x\} = p\{\eta < \psi(x)\}, \tag{20}$$

С учетом равномерного закона распределения равенство (20) можно записать в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\psi(x)} d\eta = \psi(x), \tag{21}$$

где $F(x)$ — интегральный закон распределения t.

Полученное соотношение показывает, что нелинейное преобразование φ(η) должно быть обратным интегральному закону распределения t:

$$\eta = \psi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx. \tag{22}$$

Для пуассоновского потока, у которого закон распределения интервалов между событиями является показательным, можем записать:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \\
&\eta = 1 - e^{-\lambda t}, \\
&t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\eta).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Выданное датчиком число η необходимо подставить в приведенную формулу и рассчитать реализацию t.

Заключение

Таким образом, предложенный подход позволяет создать формирующий фильтр случайного потока заявок для СМО, использование которого необходимо при моделировании и анализе работы СМО методами теории управления.

Применение формирующего фильтра случайного точечного процесса позволяет провести серию статистических испытаний с целью оценки эффективности и получения вероятностных характеристик СМО [7].

FORMING RANDOM PROCESSES ON THE BASIS OF TYPICAL FUNCTIONS

A.S. KNYAZEV

Abstract

A method of the use of special functions for creation of structural scheme of a forming filter, converting initial typical function to the discrete-point process, is analyzed.

Литература

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. М., 1973.
2. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. Леондаса. М, 1980.
3. *Дефуссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. М., 1970.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М., 1972.
5. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М., 1979.
6. *Кун А.А., Лукьянов В.Ф., Шабан С.А.* Системотехника ЗРК. Минск, 2003.
7. *Демьянович Ю.Н., Князев А.С.* // Вестн. ВА РБ. 2006. № 3 (12).