

УДК 621.793.74:517.958

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ПОКРЫТИЙ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Д.В. МАРКОВНИК

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь*

*Поступила в редакцию 22 января 2007*

Представлена модель напряженно-деформированного состояния системы покрытие-основание, отличительной особенностью которой является учет всех возможных релаксационных процессов (пластичность, ползучесть, образование трещин). Для компьютерной реализации модели проведена адаптация комплекса MSC-MARC с разработкой оригинального препроцессора RelaxMe, позволяющего создавать конечно-элементную модель системы покрытие-основание, осуществлять описание начальных и граничных условий, использовать при моделировании базу данных температурно-зависимых свойств материалов покрытий и оснований. Проведен сравнительный анализ результатов моделирования.

*Ключевые слова:* плазменное нанесение покрытий, напряженно-деформированное состояние, моделирование, релаксация напряжений, трещинообразование.

### Введение

Плазменное напыление (атмосферное, вакуумное) в настоящее время широко применяется в различных отраслях техники для нанесения упрочняющих, износостойких, защитно-декоративных и других видов покрытий, значительно улучшающих эксплуатационные свойства изделий.

Вследствие наличия в системе покрытие–основание разнородных по теплофизическим свойствам материалов и градиента температуры по сечению в процессе нагрева и охлаждения в ней возникают механические напряжения. Кроме того, причинами появления напряжений являются примеси, инородные включения, границы кристаллитов и зерен, фазовые и структурные превращения, а также процессы, связанные с непрерывным наращиванием и постепенным изменением температур и нагрузок. После завершения напыления покрытие охлаждается до температуры окружающей среды, и деталь освобождают из закрепляющего приспособления. Тем самым на напряжения, существующие в некотором объеме, налагаются температурные напряжения, связанные с охлаждением системы, и напряжения, возникающие за счет устройства крепления детали, алгебраическая сумма которых и будет определять остаточные напряжения [1].

Исследование напряженно-деформированного состояния системы покрытие–основание является сложной экспериментальной задачей, требующей специального оборудования и значительных затрат времени. В этом отношении перспективным является применение для этих целей компьютерного моделирования, которое позволяет получить необходимые результаты при минимальных затратах времени и материальных средств [2]. Однако существующие

в настоящее время математические модели и программные средства являются достаточно упрощенными и чаще всего не учитывают релаксационные процессы, что не обеспечивает необходимую для практического применения точность результатов моделирования [3–5].

### Постановка задачи моделирования

Комплексный анализ процесса формирования напряженно-деформированного состояния системы покрытие–основание показывает, что в общем случае формализации требуют следующие основные задачи: задача теплопроводности, задача термоупругости, задача пластичности, задача ползучести, задача трещинообразования и роста покрытия (рис. 1) [2–6].

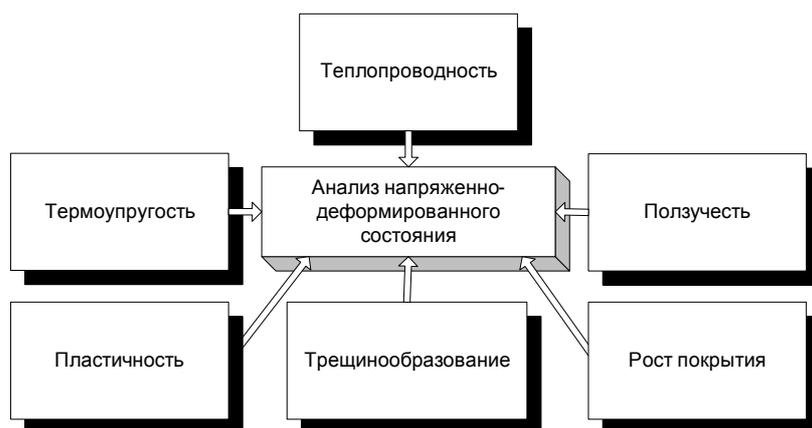


Рис. 1. Основные задачи, которые в общем случае требуют формализации при моделировании напряженно-деформированного состояния плазменных покрытий

Полная постановка задачи теплопроводности включает запись уравнения теплопроводности (уравнение Фурье), начального условия (распределения температуры в объеме тела в начальный момент времени) и граничных условий. При этом в задаче могут присутствовать граничные условия как всех родов, заданные на непересекающихся участках границы, покрывающих ее полностью, так и граничные условия одного рода на всей границе [6].

В задаче термоупругости на основании закона Гука, который носит линейный характер, необходимо при заданных механических и тепловых воздействиях определить шесть компонентов тензора напряжения  $\sigma_{ij}$ , шесть компонентов тензора деформации  $\epsilon_{ij}$  и три компонента вектора перемещения  $u_i$  [4].

Результирующее напряженно-деформированное состояние системы покрытие–основание в значительной степени определяется релаксационными процессами и, в частности, которые происходят за счет пластических деформаций, ползучести и образования трещин.

В задаче пластичности определение тензоров напряжений и деформаций носит нелинейный характер и определяется законом пластического течения [7]. Ползучесть (нестационарное неупругое поведение материала) может появиться при любом уровне напряжений (т.е. как ниже, так и выше предела текучести). Различают первичную, вторичную и третичную ползучесть. Существует довольно много теорий, производящих учет ползучести. Каждая из них описывает различные виды ползучести на различных ее стадиях [8].

Для учета релаксаций напряжений за счет образования трещин необходимо подключение в общую схему расчета напряженно-деформированного состояния моделей разрушения материалов [3]. В классической механике разрушений выделяется две основные задачи, решаемые совместно. Первая — прогнозирование места возникновения трещины и ее роста. Вторая задача включает в себя учет релаксации напряжений за счет образования и развития трещины. Следует отметить, что вторая задача может разбиваться на несколько подзадач: релаксацию напряжений из-за образования трещины, из-за ее роста, построение критериев роста или закрытия трещины, ее ветвления, неограниченного распространения и т.д.

Для задачи учета роста покрытия требуется определить, во-первых, дискретизацию покрытия, т.е. размеры участков покрытия, приходящих одновременно на основание, во-вторых, порядок прихода слоев покрытия, т.е. через какие промежутки времени и куда они приходят, в-третьих, изменения, которые они внесут в тепловое поле — чаще всего покрытие предполагается нагретым до определенной температуры. Также целесообразно учитывать тепловой поток со стороны плазменной струи.

### Задача теплопроводности

Температурные (термические) напряжения, как следует из названия, появляются в системах, которым присущи либо неоднородные нестационарные температурные поля, либо неоднородность свойств материалов, в частности, коэффициентов теплового расширения, либо обе причины вместе. Полная постановка задачи для нахождения термических напряжений включает в себя наряду с соотношениями, описывающими компоненты полей тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений, уравнение теплопроводности и соответствующее количество чисто термических граничных и начальных условий. В общем случае деформирование тела, т.е. изменение полей характеристик его механического состояния, может вызывать выделение или поглощение тепла, что приводит к изменению поля температур, однако данный эффект дает ощутимые изменения в термическом режиме лишь для достаточно малого круга материалов, поэтому в большинстве случаев им пренебрегают, что позволяет рассматривать задачу нахождения температурного поля обособленно от задачи нахождения напряжений [6].

Распределение температур в системе находится из краевой задачи для уравнения теплопроводности, известного также как уравнение Фурье. В общем случае оно имеет следующий вид [6]:

$$\frac{\partial(\rho(T)C(T)T)}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T)\text{grad}T) + Q \quad (1)$$

(где  $\rho(T)$  — плотность;  $C(T)$  — теплоемкость материала;  $Q$  — плотность внутренних источников/стоков тепла).

В данной постановке уравнение учитывает зависимость основных термических характеристик материала от температуры. Собственно, для случая анизотропности материала, т.е. зависимости характеристик материала от пространственных координат, равно как и от времени, вид уравнения (1) не изменится. Краевая задача, позволяющая однозначно определить поле температур, включает в себя граничные и начальные условия.

Выбор начальных условий обычно ограничен заданием распределения температуры в объеме тела в начальный момент, что определяется стандартной постановкой физического описания системы. Таким образом, обыкновенно начальное условие имеет вид

$$T(t_0, x, y, z) = T_0(x, y, z); \quad (x, y, z) \in V \cup \Gamma. \quad (2)$$

Граничные условия определяются в основном принятыми допущениями о взаимодействии тела с окружающей средой и для задачи теплопроводности бывают трех родов [6]. ГУ I рода задают распределение температуры по поверхности тела. Этот тип ГУ используется обычно при предположении идеальности контакта двух тел и является крайней степенью идеализации физических процессов, имеющих место вблизи поверхности тела. Такое ГУ имеет вид

$$T(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z); \quad t \in [t_0; t_1]; \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (3)$$

ГУ II рода задает величину теплового потока через границу тела в предположении его постоянства и имеет вид

$$-\lambda(T, x, y, z) \frac{dT(t, x, y, z)}{dn} = q(t, x, y, z); \quad t \in [t_0; t_1]; \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (4)$$

Под постоянством потока тепла через поверхность тела подразумевается независимость его от искомой температуры на поверхности. Это условие отражает предположение об идеальном подводе тепла к телу либо отводе его. ГУ III рода позволяет учитывать зависимость потока тепла через границу от самой температуры на границе и имеет вид

$$-\lambda(T, x, y, z) \frac{dT(t, x, y, z)}{dn} = q(T, t, x, y, z); \quad t \in [t_0; t_1]; (x, y, z) \in \Gamma. \quad (5)$$

Приведенный вид граничных условий пригоден, в частности, для описания теплообмена конвекцией, который является наиболее распространенным.

Таким образом, полная постановка задачи теплопроводности состоит из совокупности уравнения Фурье (1), начального условия (2) и граничных условий (3)–(5). При этом в задаче могут присутствовать ГУ как всех родов, заданные на непересекающихся участках границы, покрывающих ее полностью, так и ГУ одного рода на всей границе.

### Задача термоупругости

Напряженно-деформированное состояние системы покрытие-основание в процессе плазменного напыления описывается задачей термоупругости. В общем случае постановка задачи термоупругости заключается в следующем: необходимо при заданных механических и тепловых воздействиях определить 16 функций координат  $x_k$  и времени  $t$ : шесть компонентов тензора напряжения  $\sigma_{ij}$ , шесть компонентов тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$ , три компонента вектора перемещения  $u_i$  и температуру  $T$ , удовлетворяющих трем уравнениям движения [9]:

$$\sigma_{i,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (6)$$

(где  $F_i$  — объемные силы,  $\rho$  — плотность материала,  $\rho \ddot{u}_i$  — силы инерции — ими обыкновенно пренебрегают, так что в правой части равенства обыкновенно стоит ноль), шести соотношениям между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T] \delta_{ij} \quad (7)$$

(где  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе при изотермической деформации, соответствующей определенной температуре  $T=T_0$ ;  $\alpha$  — коэффициент термического расширения), шести соотношениям между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8)$$

и уравнению теплопроводности при определенных начальных и граничных условиях.

### Задача пластичности

Математическая формулировка задачи пластичности строится на основании теории пластического течения Мизеса [8]. Согласно этой теории, рассматриваются отдельно приращения упругой деформации и пластической деформации:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\}. \quad (9)$$

Упругая часть подчиняется закону Гука, а пластическая деформация определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= 3 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= 3 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= 3 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}\right) \tau_{zx}.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь  $\bar{\sigma}$  — интенсивность напряжений, определяется по формуле:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (11)$$

а  $\bar{\varepsilon}$  — интенсивность деформаций, определяется по формуле:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1,5(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (12)$$

Текущее состояние материала (упругое или пластическое), определяется по критерию Мизеса:

$$f = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - 2\sigma_T, \quad (13)$$

если  $f < 0$ , то материал ведет себя упруго, а если  $f = 0$ , то начинается пластическая деформация.

### Задача ползучести

Ползучесть (нестационарное неупругое поведение материала) может появиться при любом уровне напряжений (т.е. как ниже, так и выше предела текучести). В процессе термических деформаций ползучесть описывается уравнением [7]

$$\dot{\varepsilon} = f(\sigma, T), \quad (14)$$

где  $\dot{\varepsilon}$  — эквивалент скорости деформации за счет ползучести;  $\sigma$  — эквивалент напряжения ползучести;  $T$  — температура. Имеется множество теорий и подходов по представлению уравнения ползучести (1). После их анализа в настоящей работе принят следующий составной закон:

$$\dot{\varepsilon} = g(\sigma)h(T). \quad (15)$$

### Задача трещинообразования

Построить исчерпывающую теорию распространения трещин в твердых материалах физики пытаются уже давно [10]. Однако ряд важных эффектов, которые проявляются в экспериментах, постоянно ускользает от теоретического описания. Один из таких эффектов — изменение формы трещины в хрупком материале при увеличении скорости ее распространения. До некоторого предела трещина оказывается зеркально гладкой, но потом неожиданно становится шероховатой, а при дальнейшем росте скорости начинает ветвиться. Трудности вызваны тем, что большинство теорий основано на рассмотрении малых деформаций, что предполагает линейную связь между натяжением и сдвигом. Однако в реальных твердых веществах вблизи движущейся точки растрескивания деформации нельзя считать малыми, а связь между натяжением и сдвигом становится сильно нелинейной (рис. 2).

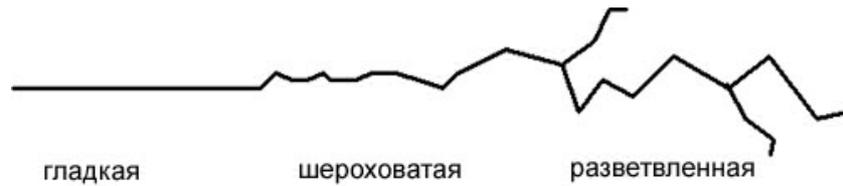


Рис. 2. Различные режимы раскрытия трещины в зависимости от скорости

Численное моделирование помогло внести уточнения в теорию распространения трещин, так что она стала описывать неустойчивости, которые приводят к изменению рельефа трещин. Например, такие материалы, как керамика, металл или кремний, становятся значительно пластичнее перед самым разрывом межатомных связей. Это приводит к локальному уменьшению скорости волн и замедлению подвода энергии к точке развития трещины. В результате уменьшается и скорость, при которой возникает неустойчивость в направлении распространения трещины [10].

Для решения задачи трещинообразования в системе покрытие–основание и его влияния на конечное напряженно-деформированное состояние системы может быть использован линейный упругий или упругопластический анализ. Процедура анализа включает два основных этапа:

- моделирование зоны разрушения;
- вычисление параметров разрушения.

Основными параметрами, которые используются в механике разрушения, являются [11]:

коэффициенты интенсивности напряжений ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ), связанные с тремя основными режимами разрушения;

$J$ -интеграл, независящий от пути интегрирования, который определяет интенсивность напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины;

скорость высвобождения энергии ( $G$ ), которая представляет собою объем работы, необходимой для открытия или закрытия трещины.

Выражение (16) [12] является представлением  $J$ -интеграла в его двумерной форме. Оно предполагает, что трещина находится в глобальной декартовой системе координат  $X$ – $Y$ , с осью  $X$ , параллельной трещине:

$$J = \int_r W dy - \int_r \left( t_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) ds, \quad (16)$$

где  $r$  — произвольная траектория вокруг вершины трещины;  $W$  — плотность энергии деформации, отнесенная к единице объема;  $t_x$  — вектор усилий вдоль оси  $X$ ,  $t_x = \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y$ ;  $t_y$  — вектор усилий вдоль оси  $Y$ ,  $t_y = \sigma_y n_y + \sigma_{xy} n_x$ ;  $\sigma$  — компонента напряжения;  $n$  — единичный вектор нормали к траектории  $r$ ;  $u$  — вектор перемещений;  $s$  — расстояние вдоль траектории  $r$ .

Как отмечалось выше, скорость высвобождения энергии — понятие, используемое для определения объема работы (изменения энергии), связанной с открытием или закрытием трещины. Один из методов для вычисления скорости высвобождения энергии — метод виртуального удлинения трещины [12]. Сущность метода заключается в том, что необходимо выполнить два анализа: первый — с трещиной длиной  $a$ , другой — с трещиной длиной  $a + \Delta a$ . При условии, что потенциальная энергия  $U$  (энергия деформации) различна для каждого из вариантов, скорость высвобождения энергии может быть вычислена по следующей формуле (17):

$$G = - \frac{U_{a+\Delta a} - U_a}{B \Delta a}, \quad (17)$$

где  $B$  — толщина модели разрушения.

## Особенности компьютерной реализации математических моделей

При использовании разработанной схемы (рис. 3) результаты моделирования нагрева и ускорения частиц порошка при помощи ПК Plasma 2002 [2] используются затем как входные данные следующего этапа моделирования — расчета характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) системы покрытие–основание, который осуществляется с помощью программного комплекса MARC [13].



Рис. 3. Схема моделирования при помощи программных комплексов Plasma 2002 и MARC

Для адаптации MARC к условиям решения задач моделирования системы покрытие–основание и обеспечения условий сквозного моделирования (обмен данными между Plasma 2002–MARC) создан препроцессор RelaxMe, результатом работы которого является задача, описанная на входном языке MARC. Она включает построение конечно-элементной модели системы покрытие–основание, ввод свойства материалов, списков активируемых элементов, изменения нагрузок и длительности интервалов между приходом отдельных ламелей или слоев.

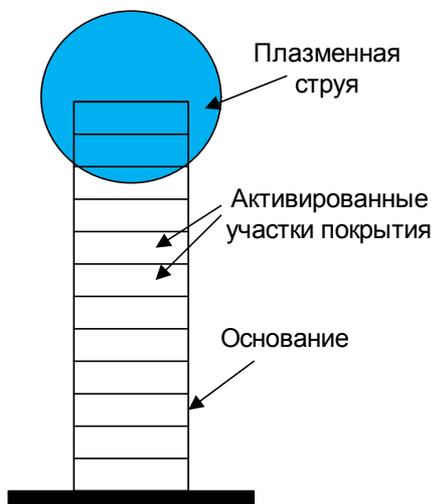


Рис. 4. Общий вид моделируемой системы

Для моделирования НДС в системе выбрана следующая геометрия системы: основание представлено как прямоугольная пластина  $120 \times 20 \times 2$  мм, толщина покрытия принята постоянной — 0,06 мм. Основание — сталь 45, покрытие — обогащенный оксид циркония. Основание жестко закреплено с одной стороны, активация ламелей происходит последовательно при движении плазменной струи вдоль пластины от незакрепленного конца к закрепленному.

## Результаты моделирования и их анализ

Процесс напыления состоит из следующих стадий: приход участков покрытия, их теплообмен с подложкой; остывание системы после окончания напыления. Перед началом напыления подложка считается равномерно нагретой до температуры 300 К, ламели предполагаются приходящими равномерно нагретыми до температуры плавления.

Для исследования изменения температуры в различных областях основания и покрытия были выбраны следующие точки: А — центральная точка основания; Б — точка на поверхности основания; В, Г, Д, Е — на каждом из четырех слоев (рис. 5,б).

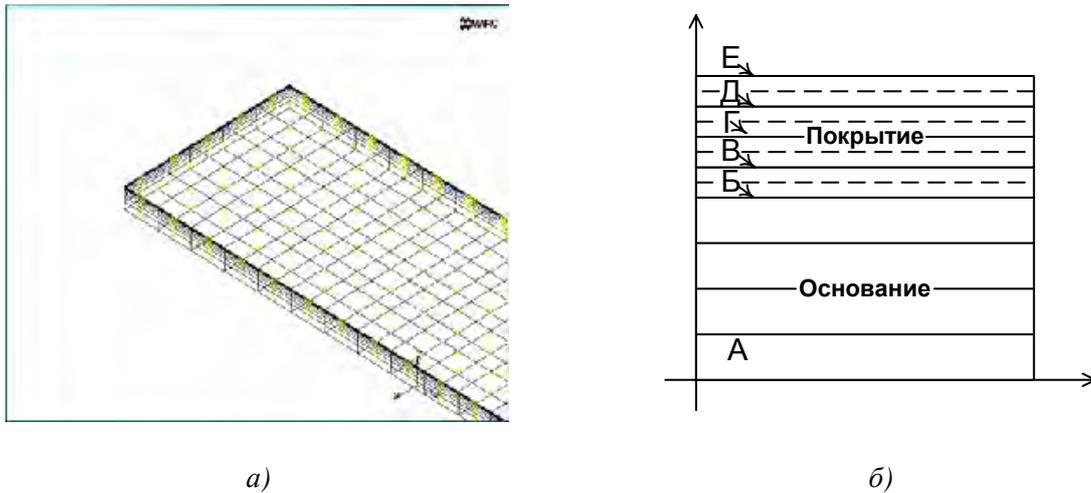


Рис. 5. Конечно-элементная модель системы (а) и ее схематичное представление (б) с указанием исследуемых областей (основание и четырехслойное покрытие)

Зависимости температуры от времени для перечисленных ранее точек представлены на рис. 5. Для большей иллюстративности начальный временной отрезок (0,006 с) показан в увеличенном масштабе по временной оси.

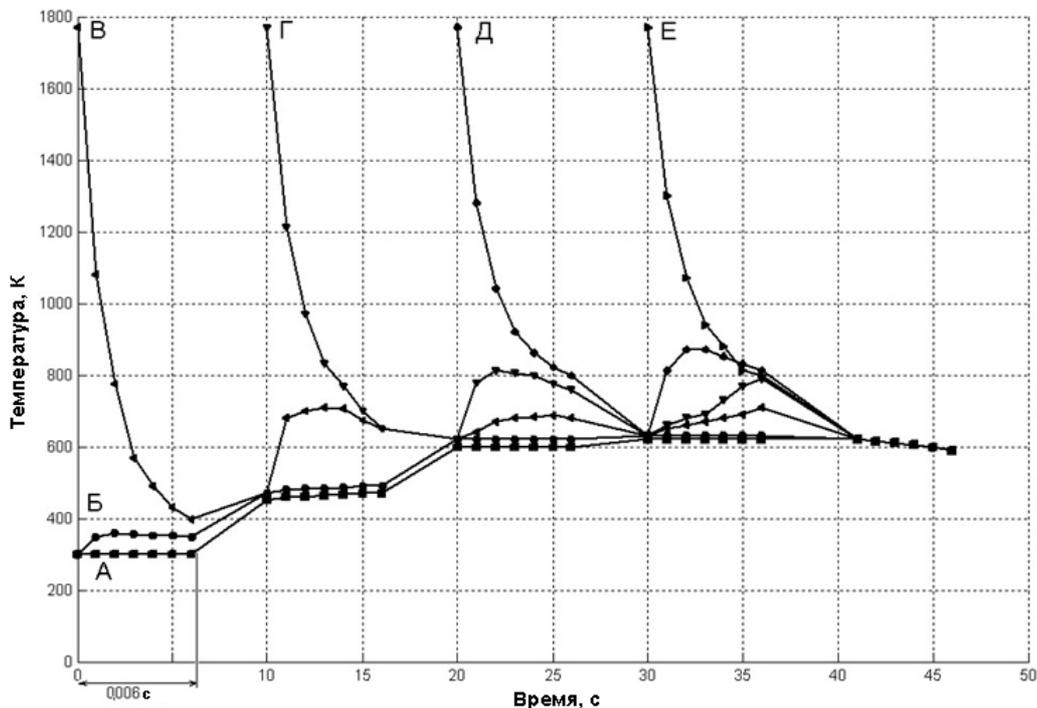


Рис. 6. Изменение температуры в различных точках системы в течение процесса напыления и остывания

Анализ зависимостей показывает, что температура основания (точки А и Б) плавно возрастает от начального значения 300 К и достигает своего максимума (600 К) на 20-й секунде процесса напыления. Для каждого из слоев характерно резкое уменьшение температуры (порядка 1000 К), следующее затем ее повышение связано с приходом нового слоя. На завершающем этапе, после напыления последнего слоя, температура во всех исследуемых

точках практически выравнивается и происходит естественное остывание всей системы до комнатной температуры.

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными [13, 14] показывает, что погрешность моделирования не превышает 10%, что позволяет использовать разработанную модель в дальнейших исследованиях для анализа напряжений и деформаций в системе покрытие–основание.

С применением разработанных моделей проведены сравнительные исследования напряженно-деформированного состояния системы покрытие–основание при использовании моделей, учитывающих только упругие свойства материалов и релаксации напряжений за счет пластических деформаций, ползучести и образования трещин. В результате проведенных исследований установлено, что наибольший вклад в релаксацию напряжений вносит процесс образования трещин в интерфейсном слое, что приводит к отслоению покрытия. За счет релаксации уровень напряжений уменьшается в 8–10 раз (рис. 7).

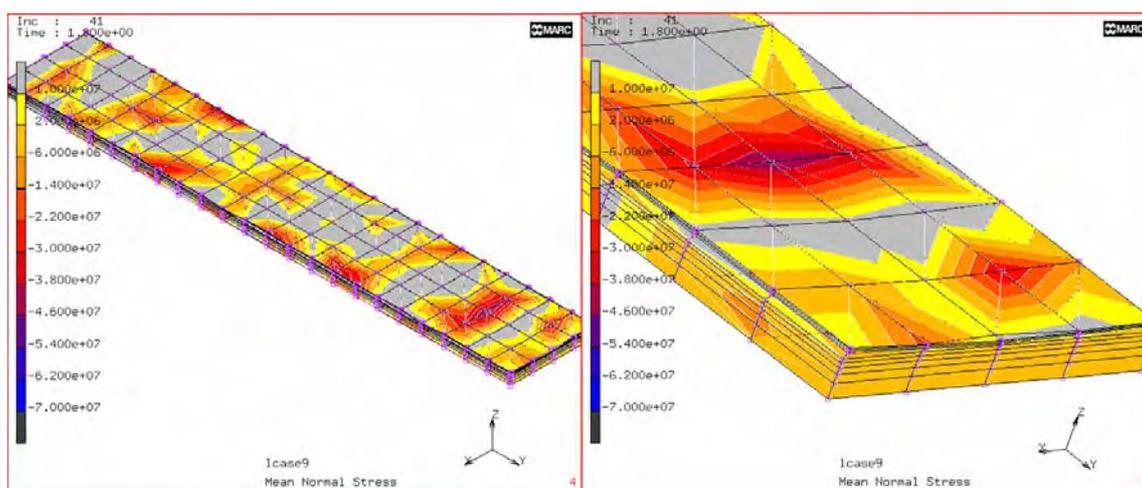


Рис. 7. Нормальные напряжения в конце напыления с учетом образования трещин

### Заключение

С применением метода конечных элементов разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния системы покрытие–основание, особенностью которой является учет релаксации напряжений за счет пластических деформаций, ползучести, образования трещин. Для компьютерной реализации разработанных моделей проведена адаптация комплекса MSC-MARC с разработкой оригинального препроцессора RelaxMe, позволяющего создавать конечно-элементную модель системы покрытие–основание, осуществлять описание начальных и граничных условий, использовать при моделировании базу данных температурно-зависимых свойств материалов покрытий и оснований. С применением разработанных моделей проведены сравнительные исследования напряженно-деформированного состояния системы покрытие–основание при использовании моделей, учитывающих только упругие свойства материалов и с учетом релаксации напряжений за счет пластических деформаций, ползучести и образования трещин. В результате проведенных исследований установлено, что наибольший вклад в релаксацию напряжений вносят процессы образования трещин в интерфейсном слое, что приводит к отслоению покрытия. За счет релаксации уровень напряжений уменьшается в 8–10 раз.

# COMPUTER SIMULATION STRESS-STRAINED STATE OF PLASMA COATINGS TAKING INTO ACCOUNT RELAXATION PROCESSES

D.V. MARKOVNIK

## Abstract

Mathematical model of the stress-strain state of the coating-substrate system taking into account all possible relaxation processes (plasticity, creep, crack formation) is presented. For computer realization of the developed models MSC-MARC complex is adopted, with development of original preprocessor RelaxMe, allowing to create the finite-element model of the "coating-substrate" system, to carry out description of initial and boundary conditions, use the data base of temperature-dependent properties of coatings and substrate materials for the simulation. The comparative analysis of simulation results is conducted.

## Литература

1. *Вирник А.М., Морозов И.А., Поздей А.В.* // Физика и химия обработки материалов. 1970. № 4. С. 53–58.
2. *Достанко А.П., Кундас С.П., Бордусов С.В. и др.* Плазменные процессы в производстве изделий электронной техники: В 3 т. Т. 1 / Под общ. ред. акад. НАН Беларуси А.П. Достанко. Минск, 2000.
3. *Барвинок В.А., Борисов Л.И., Фокин В.Г.* // Изв. вузов. Машиностроение. 1974. № 5. С. 115–119.
4. *Кудинов В.В., Пекшев П.Ю., Белащенко В.Е. и др.* Нанесение покрытий плазмой М., 1990.
5. *Кундас С.П., Марковник Д.В., Кашико Т.А.* // Изв. Белорус. инж. акад. 2004. № 1 (17)/1. С. 85–87.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966. С. 476–480.
7. *Уинксов Дж.* Теория пластической деформации металлов. М., 1983.
8. MARC Volume A: Theory and user information. MARC Analysis Research Corporation. Palo Alto, CA, USA, 1997.
9. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. М., 1963. 232 с.
10. *Морозов Н.Ф.* // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 8. С. 117–122.
11. *Lazarus V.* // International Journal of Fracture. 2003. Vol. 122 (1–2). P. 23–46.
12. *Hwang C.G., Wawrzyniek P.A., Tayebi A.K., Ingrafea A.R.* // Engineering Fracture Mechanics. 1998. Vol. 59, No. 4. P. 521–542.
13. *Кундас С.П., Марковник Д.В.* // Изв. Белорус. инж. акад. 2005. № 1 (20)/1. С. 83–85.
14. *Кундас С.П., Марковник Д.В.* // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Прикладные науки. 2005. № 10. С. 56–60.