

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь
Фам М.Т.

Беленкевич Н.И. - старший преподаватель

В настоящее время в изучении СТК (систем телекоммуникаций) используют различные методы описания сигналов: во временной и частотной областях, а также на комплексной плоскости. Тенденции указывают, что все чаще распространен именно метод описание сигналов на комплексной плоскости с помощью преобразования Лапласа. Это характерно не только для теоретического исследования, но и для программного обеспечения, отвечающего за моделирование.[1]

Преобразование Лапласа - интегральное преобразование, которое связывает функцию комплексного переменного (изображения) с функцией вещественного переменного (оригиналом). Главной из особенностей данного преобразования является то, что большим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют наиболее простые соотношения над их изображениями.[2]

Для преобразования по Лапласу комплекснозначная функция $f(t)$ должна удовлетворять условию Гельдера, возрастать не быстрее показательной функции и существовать на положительной временной полуоси. Такую функцию называют функцией-оригиналом.

Прямое преобразование Лапласа ставит в соответствие оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

которое является функцией комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$.

Обратный переход осуществляется с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

При моделировании сигналов на основе преобразования Лапласа в основном применяются следующие свойства [1]:

- 1) свойство линейности: $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(p)$, $(i = \overline{1, N})$, то $f(t) = \sum_{i=1}^N A_i f_i(t) \Leftrightarrow F(p) = \sum_{i=1}^N A_i F_i(p)$, где A_i - постоянные коэффициенты;
- 2) теорема смещения: $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(t)e^{p_0 t} \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p - p_0)$;
- 3) теорема подобия: $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1(nt) \Leftrightarrow F_2(p) = \frac{1}{n} F_1(\frac{p}{n})$;
- 4) дифференцирование оригинала: $f(t), t \in (0, \infty)$ - дифференцируема и $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = f_1^{(n)}(t) \Leftrightarrow F_2(p) = p^n F_1(p) - p^{n-1} f_1(0) - p^{n-2} f_1'(0) - \dots - f_1^{(n-1)}(0)$, где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$;
- 5) дифференцирование изображения: $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то $F_2(p) = F_1^{(n)}(p) \Leftrightarrow f_2(t) = (-1)^n t^n f_1(t)$;
- 6) интегрирование оригинала: $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, то $f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) d\tau \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p)/p$;
- 7) интегрирование изображения: $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$, то $F_2(p) = \int_p^{\infty} F_1(z) dz \Leftrightarrow f_2(t) = f_1(t)/t$;
- 8) теорема умножения изображений: $F_1(p) \Leftrightarrow f_1(t)$ и $F_2(p) \Leftrightarrow f_2(t)$,
 $F(p) = F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$;
- 9) теорема умножения оригиналов: $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p)$, то $f(t) = f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F_1(z)F_2(p-z) dz$;
- 10) теорема запаздывания: $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$, $t_0 \geq 0$, $f_2(t) = f_1(t - t_0) \Leftrightarrow F_2(p) = F_1(p)e^{-pt_0}$;
- 11) предельные соотношения: $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ - оригиналы и $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t) = f(0)$, $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$.

Нахождение изображения периодического сигнала на комплексной плоскости является примером эффективного применения свойств преобразования Лапласа, что позволяет намного упростить операции моделирования и обработки инфокоммуникационных сигналов.

Список использованных источников:

1. Ильинков, В.А. Моделирование линейных свойств звеньев и сигналов в телекоммуникационных системах : учеб. пособие по дисциплине "Моделирование систем телекоммуникаций" для студентов специальностей "Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения", "Многоканальные системы телекоммуникаций" всех форм обучения / В.А. Ильинков, Н.И. Беленкевич, В.Е. Романов. — Мн. : БГУИР, 2005. - 102 с.
2. Труфанова Т.В. Интегральное преобразование Лапласа и Фурье: Учебное пособие / Т.В. Труфанова, Е.М. Салмашова. - Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2006.