

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

В. Ю. Скобцов, Н. В. Лапицкая, С. Н. Нестеренков

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ: ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 80 05 «Математическое и программное обеспечение
вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей»*

Минск БГУИР 2018

УДК 519.81(076)
ББК 22.18я73
С44

Рецензент:

кафедра компьютерных технологий и систем
Белорусского государственного университета
(протокол №15 от 02.02.2018);

заведующий лабораторией проблем защиты информации государственного
научного учреждения «Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси»
кандидат физико-математических наук В. А. Дмитриев

Скобцов, В. Ю.

С44 Интеллектуальный анализ данных: генетические алгоритмы: учеб.-
метод. пособие / В. Ю. Скобцов, Н. В. Лапицкая, С. Н. Нестеренков. –
Минск : БГУИР, 2018. – 92 с. : ил.
ISBN 978-985-543-415-4.

Предназначено для студентов II степени обучения. Содержит теоретический материал по первому разделу курса «Анализ и моделирование сложных систем» в рамках действующей программы этого курса. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов как очной, так и дистанционной форм обучения. Будет полезно студентам и других специальностей, а также всем, кто интересуется методами оптимизации.

УДК 519.81(076)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-543-415-4

© Скобцов В. Ю., Лапицкая Н. В., Нестеренков С. Н., 2018
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2018

Содержание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Введение	6
1 Определение и основные свойства генетических алгоритмов	8
1.1 Общая структура ГА. Основные операторы ГА	9
1.2 Простой генетический алгоритм.....	12
1.3 Представление вещественных решений в двоичной форме для ГА	19
1.4 Использование кода Грея в ГА	22
2 Теория схем ГА. Фундаментальная теорема ГА	26
2.1 Влияние репродукции	28
2.2 Влияние кроссинговера.....	29
2.3 Влияние мутации	31
2.4 Фундаментальная теорема ГА.....	31
3 Модификации и обобщения генетических алгоритмов.....	35
3.1 Создание исходной популяции	35
3.2 Отбор родителей (селекция).....	36
3.3 Операторы рекомбинации (скрещивания, кроссинговера)	46
3.4 Оператор мутации	52
3.5 Сокращение промежуточной популяции	57
4 Задачи комбинаторной оптимизации	61
4.1 Задача об укладке рюкзака	61
4.2 Задача о покрытии	66
4.3 Задача коммивояжера.....	66

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

<i>Лабораторная №1</i> Поиск экстремума функции одной переменной с помощью генетических алгоритмов с бинарным представлением особей.....	76
<i>Лабораторная №2</i> Поиск экстремума функции двух переменных с помощью генетических алгоритмов с представлением особей в форме вещественных чисел.....	80

<i>Лабораторная №3</i> Решение задач комбинаторной оптимизации на примере задачи коммивояжера с помощью генетического алгоритма	85
Список литературы	91

Библиотека БГУИР

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
ЧАСТЬ**

Библиотека БГУИР

Введение

В настоящее время развивается новое направление в теории и практике искусственного интеллекта – *эволюционные вычисления*. Этот термин обычно используется для общего описания алгоритмов поиска, оптимизации или обучения, основанных на некоторых формализованных принципах естественного эволюционного отбора. Особенности идей эволюции и самоорганизации заключаются в том, что они находят подтверждение не только для биологических систем, развивающихся много миллиардов лет. Эти идеи в настоящее время с успехом используются при разработке многих технических и в особенности программных систем. Эволюционные вычисления используют различные модели процесса эволюции. Среди них можно выделить следующие основные парадигмы:

- 1) генетические алгоритмы (ГА);
- 2) эволюционные стратегии (ЭС);
- 3) эволюционное прогнозирование (ЭП);
- 4) генетическое программирование (ГП).

Они отличаются друг от друга способами представления искомых решений и различным набором операторов, используемых в процессе моделирования эволюции.

Эволюционный поиск – это последовательное преобразование одного конечного множества промежуточных решений в другое. Основой для его возникновения считается модель биологической эволюции и методы случайного поиска. Эволюционный процесс представляется как способность лучших хромосом оказывать большее влияние на состав новой популяции на основе длительного выживания и более многочисленного потомства. Само преобразование можно назвать алгоритмом поиска, или алгоритмом эволюции. Выделяют три особенности алгоритма эволюции:

- 1) каждая новая популяция состоит только из «жизнеспособных» хромосом;

2) каждая новая популяция лучше (в смысле близости к решению поставленной задачи) предыдущей;

3) в процессе эволюции последующая популяция зависит только от предыдущей.

Библиотека БГУИР

1 Определение и основные свойства генетических алгоритмов

В конце 1960-х годов американский исследователь Д. Холланд предложил в качестве механизма комбинаторного перебора вариантов решения оптимизационных задач использовать методы и модели механизмов развития (эволюционирования) органического мира на Земле. Поскольку основные законы эволюции живых организмов были впервые исследованы и описаны генетикой, то и предложенный подход получил название *генетические алгоритмы*.

ГА есть случайно направленные поисковые алгоритмы, основанные на механизмах естественной селекции и натуральной генетики. Они реализуют принцип выживания сильнейших среди рассматриваемых структур, формируя и изменяя поисковый алгоритм на основе моделирования эволюции. Они основаны на следующих механизмах естественной эволюции:

1. Первый принцип основан на концепции выживания сильнейших и естественного отбора по Ч. Дарвину, который был сформулирован им в 1859 году в книге «Происхождение видов путем естественного отбора». Согласно Ч. Дарвину, особи, которые лучше способны решать задачи в своей среде, выживают и больше размножаются (репродуцируют). В генетических алгоритмах каждая особь представляет собой решение некоторой проблемы. По аналогии с этим принципом особи, лучшие в смысле решения поставленной задачи, имеют большие шансы выжить и репродуцировать. Формализацию этого принципа, как мы увидим далее, дает оператор репродукции (селекция и редукция).

2. Второй принцип обусловлен тем фактом, что хромосома потомка состоит из частей, полученных из хромосом родителей. Этот принцип был открыт в 1865 году Г. Менделем. Его формализация дает основу для оператора скрещивания.

3. Третий принцип основан на концепции мутации, открытой в 1900 году Х. де Фризом. Первоначально этот термин использовался для описания существенных (разных) изменений свойств потомков и приобретения ими свойств, отсутствующих у родителей. По аналогии с этим принципом генетические ал-

горитмы используют подобный механизм для изменения свойств потомков, тем самым повышая разнообразие (изменчивость) особей в популяции (множество решений).

Эти три принципа составляют ядро ГА. Используя их, популяция (множество решений данной проблемы) эволюционирует от поколения к поколению.

1.1 Общая структура ГА. Основные операторы ГА

В ГА из всего пространства поиска выделяется некоторое множество точек этого пространства (потенциальных решений), которое в терминах натуральной селекции и генетики называется *популяцией*. Каждая *особь* популяции, потенциальное решение задачи, представляется *хромосомой* – структурой элементов (*генов*). В свою очередь, произвольный ген хромосомы принимает значение – *аллель* – из некоторого алфавита, задающего кодовое представление точек пространства поиска решений. В простейшем случае особью может быть двоичная строка. ГА работает с кодированными структурами безотносительно их смысловой интерпретации. В этом случае сам код и его структура описываются понятием *генотип*, а его интерпретация с точки зрения решаемой задачи – понятием *фенотип*. На множестве решений определяется целевая (fitness) функция (ЦФ), которая позволяет оценить близость каждой особи к оптимальному решению – способность к выживанию. Генетический алгоритм поиска решения заключается в моделировании эволюционирования подобной искусственной популяции. Популяция развивается (эволюционирует) от одного поколения к другому. Создание новых особей в процессе работы алгоритма происходит на основе моделирования процесса размножения. При этом особи-решения, участвующие в процессе воспроизводства, называют родителями, а получившиеся в результате особи-решения – потомками. В каждом поколении множество особей-потомков создается с использованием частей особей-родителей и добавлением новых частей с хорошими свойствами.

Непосредственная генерация новых кодовых строк из двух выбранных происходит применением оператора кроссинговера (скрещивания). Моделирование процесса мутации новых особей осуществляется применением оператора мутации, который позволяет внести в фенотип потомка хорошие свойства путем некоторых изменений его генотипа. В основном вероятность применения оператора мутации имеет небольшое значение ($\ll 0,1$).

Являясь разновидностью методов случайного поиска, генетические алгоритмы позволяют найти хорошие (квазиоптимальные), но не оптимальные решения. Основное их преимущество состоит в том, что они позволяют найти более хорошие решения очень трудных задач за меньшее время, чем другие алгоритмы. Отрицательным свойством эволюционных, в том числе и генетических методов, является то, что они требуют адаптации к каждому конкретному классу задач путем выбора определенных характеристик и параметров. К таким параметрам относятся прежде всего: размер популяции, метод кодирования решения, набор генетических операторов, задействованных в каждом алгоритме и вероятности их использования, критерий останова процесса поиска.

Критерием останова может быть, во-первых, прохождение определенного числа поколений, во-вторых, достижение требуемого качества решений и, в-третьих, отсутствие улучшения качества решений из-за вырождения текущей популяции. Общая схема генетического алгоритма представлена на рисунке 1.1.

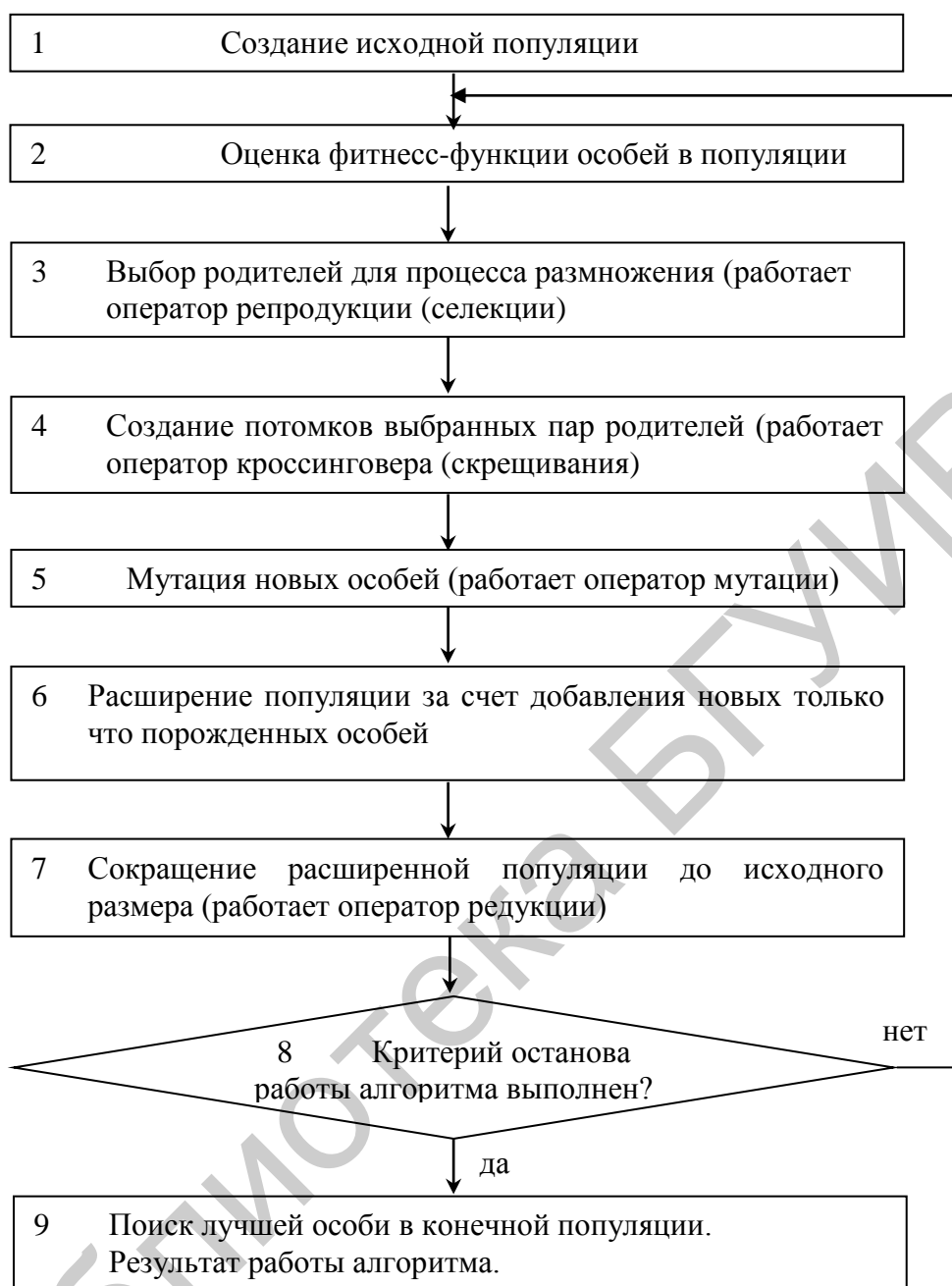


Рисунок 1.1 – Схема классического простого генетического алгоритма

ГА позволяют решать задачи прогнозирования, классификации, поиска оптимальных вариантов и совершенно незаменимы в тех случаях, когда в обычных условиях решение задачи основано на интуиции или опыте, а не на строгом (в математическом смысле) ее описании.

При разработке модели ГА исследователи преследуют двоякую цель:

1) абстрактно и формально объяснить процессы адаптации (приспособляемости) в естественных системах;

2) спроектировать искусственные программные и аппаратные системы, которые содержат механизмы естественных систем.

Основные отличия ГА от других оптимизационных и поисковых процедур заключаются в следующем:

1) поиск субоптимального решения основан на оптимизации случайного множества решений с различными оценками, а не одного решения;

2) в аспекте преобразования решение рассматривается как некоторая закодированная структура, а не как совокупность параметров. Это позволяет в некоторых случаях ускорить процесс обработки данных и, как следствие, поиск решения;

3) для оценки пригодности решения наряду с использованием целевой функции дополнительно моделируются правила выживания в исследуемом множестве. Эти правила повышают разнообразие множества решений, которое необходимо для выполнения пункта 1;

4) при инициализации, преобразовании и других видах обработки решения широко используются вероятностные правила, которые вносят в направленность генетического поиска элементы случайности. Тем самым решается проблема преодоления барьеров локальных оптимумов.

1.2 Простой генетический алгоритм

Простой ГА впервые был описан Д. Голдбергом [2] на основе работ Д. Холланда [3]. Предварительно простой ГА случайно генерирует популяцию последовательностей-стрингов (хромосом). Затем алгоритм генерирует новые популяции, используя как отправную точку начальную популяцию и применяя множество основных генетических операторов:

1) оператор репродукции (ОР);

2) оператор кроссинговера (ОК);

3) оператор мутации (ОМ).

Рассмотрим работу простого ГА на следующем примере, приводимом в известной монографии Д. Голдберга [2]. Нужно найти максимальное значение функции на множестве целочисленных (для простоты) аргументов из отрезка $[0,31]$ (рисунок 1.2). Для объяснения простого ГА построим таблицу 1.1.

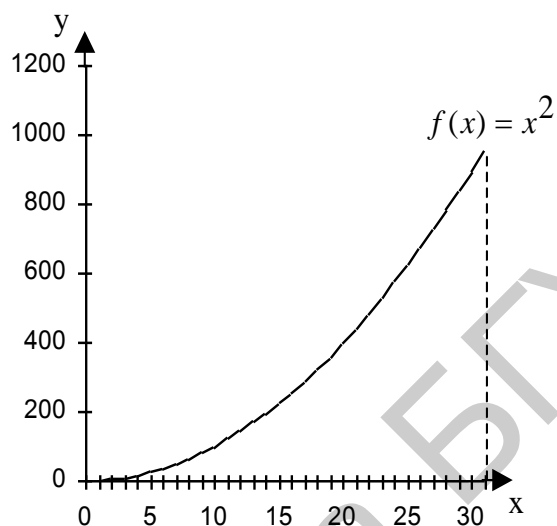


Рисунок 1.2 – График функции $f(x) = x^2$

Таблица 1.1 – Репродукция

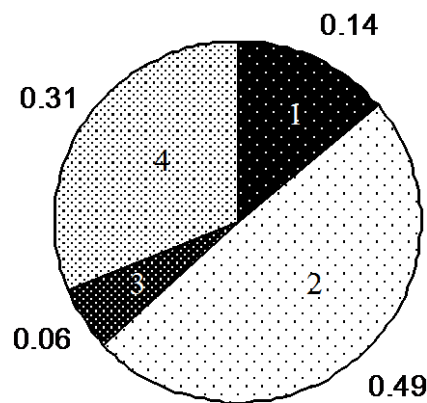
№ хромосомы	Начальная Популяция особей	Десятичное значение x	Значение ЦФ $f(x)$	Нормализованная величина $\frac{f(x_i)}{\sum f(x_j)}$	Ожидаемое количество копий хромосом после репродукции	Реальное число копий хромосом после репродукции
1	01101	13	169	0,14	0,56	1
2	11000	24	576	0,49	1,97	2
3	01000	8	64	0,06	0,22	0
4	10011	19	361	0,31	1,23	1
Суммарная ЦФ $f(x)$			1 170	1,00	4,00	4
Среднее значение ЦФ $\overline{f(x)}$			293	0,25	1,00	1
Максимальное значение ЦФ $f(x)$			576	0,49	1,97	2

Здесь хромосомы (решения) столбца 2 сгенерированы случайным образом. Суммарное значение ЦФ на четырех хромосомах этой таблицы равно 1 170. Значение ЦФ для каждой хромосомы определяется в соответствии с максимизируемой функцией $f(x) = x^2$ как возведенное в квадрат десятичное значение двоичного кода хромосом.

Репродукция – процесс, в котором хромосомы копируются согласно значениям их ЦФ. Биологи называют эту функцию fitness (функция годности, адекватности или соответствия). При этом в процессе копирования хромосомы с лучшим значением ЦФ имеют большую вероятность попадания одного или более потомков в следующее поколение. Очевидно, что ОР является искусственной версией натуральной селекции, выживания сильнейших по Ч. Дарвину. Этот оператор представляется в алгоритмической форме различными способами. Самый простой – построение асимметричного колеса рулетки, в котором каждая хромосома имеет поле, пропорциональное значению его ЦФ.

Для репродукции хромосом используем модель асимметричного взвешенного колеса рулетки (рисунок 1.3). На рисунке секторы колеса рулетки соответствуют значениям ЦФ в процентах по отношению к суммарному значению ЦФ (см. таблицу 1.1, столбец 5). Выбор хромосомы моделируется вращением колеса рулетки. После ее останова указатель определяет хромосому, выбранную для следующего оператора (в имитационном моделировании генерируется заданное дискретное вероятностное распределение).

Очевидно, что хромосома, которой соответствует больший сектор рулетки, имеет большую вероятность попасть в следующее поколение и породить большее количество потомков. В результате выполнения ОР формируется промежуточная популяция, хромосомы которой будут использованы для построения популяции следующего поколения с помощью ОК.



1 – нормализованная величина для первой хромосомы; 2 – нормализованная величина для второй хромосомы; 3 – нормализованная величина для третьей хромосомы; 4 – нормализованная величина для четверной хромосомы

Рисунок 1.3 – Модель ОР в виде асимметричного взвешенного колеса рулетки

Выбираем хромосомы для промежуточной популяции, вращая колесо рулетки четыре раза, что соответствует мощности начальной популяции. Для выполнения ОР используем значения столбцов 5–7 таблицы 1.1. Величину $f(x_i) / \sum f(x)$ называют вероятностью выбора копий (хромосом) при ОР и обозначают

$$P_i(\text{ОР}) = f(x_i) / \sum f(x). \quad (1.1)$$

Тогда ожидаемое число копий i -й хромосомы после ОР определяется так:

$$N_i = P_i(\text{ОР}) * n, \quad (1.2)$$

где n – число хромосом в популяции.

Число копий хромосомы, переходящих в следующее поколение, часто также определяют на основе выражения

$$\tilde{N}_i = f(x_i) / \bar{f}(x), \quad (1.3)$$

где $\bar{f}(x)$ – среднее значение ЦФ по текущей популяции.

Округленные данные приложения формулы (1.1) приведены в 5-м столбце, а формул (1.2), (1.3) – в 6-м столбце таблицы 1.1. Как видно из последнего (7-го) столбца, в результате хромосомы 1 и 4 получают одну копию, хромосома 2 – две копии, и хромосома 3 не получает копий. То есть лучшие хромосомы дали большее

число копий, средние – остаются, плохие – умирают после ОР. В результате выполнения ОР формируется промежуточная популяция (таблица 1.2, столбец 2).

Таблица 1.2 – Кроссинговер

№ хромосомы	Промежуточная популяция после репродукции	Пары хромосом (выбраны случайно)	Точки ОК (k)	Промежуточная популяция после скрещивания	Значение x	Значение $f(x)$
1	0 1 1 0 1	1–2	4	01100	12	144
2	1 1 0 0 0	1–2	4	11001	25	625
3	1 1 0 0 0	3–4	2	11011	27	729
4	1 0 0 1 1	3–4	2	10000	16	256
Sum $f(x)$				1754		
Среднее значение ЦФ $\overline{f(x)}$				439		
Максимальное значение ЦФ $f(x)$				729		

По Холланду [3], одноточечный или простой ОК выполняются в три этапа.

1-й этап. Две хромосомы выбираются случайно из промежуточной популяции, сформированной при помощи ОР:

$$A = a_1 a_2 \dots a_k \overset{\swarrow}{\underset{\searrow}{a_{k+1} \dots a_L}};$$

$$B = b_1 b_2 \dots b_k \overset{\swarrow}{\underset{\searrow}{b_{k+1} \dots b_L}}.$$

Иногда 1-й этап может выполняться и без ОР.

2-й этап. Случайно выбирается число $k \in [1, L - 1]$.

3-й этап. Две новые хромосомы формируются из A и B путем обмена подстроками:

$$A' = a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} \dots b_L;$$

$$B' = b_1 b_2 \dots b_k a_{k+1} \dots a_L.$$

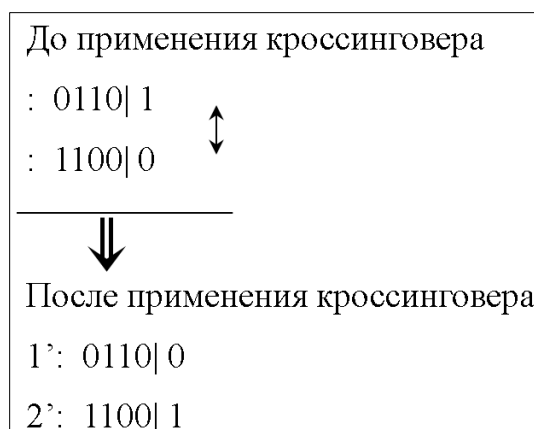


Рисунок 1.4 – Пример одноточечного кроссинговера

Рассмотрим кроссинговер хромосом 1 и 2 из промежуточной популяции из таблицы 1.2 (рисунок 1.4). Выбираем случайным образом число $1 \leq k \leq L-1=4$. Далее две новые хромосомы создаются, меняя местами части хромосом до или после точки кроссинговера. Пусть $K=4$, тогда имеем процесс на рисунке 1.4. Хромосомы (1,2) называют родителями, а (1',2') – потомками.

Механизм ОР и ОК исключительно прост. Он выполняет случайную генерацию чисел, копирование хромосом и частичный обмен подстрок хромосом. Таким образом, два простых оператора могут образовывать мощный поисковый механизм.

В примере для $f(x) = x^2$ получаем таблицу 1.2, где во 2-м столбце содержится промежуточная популяция, полученная в результате репродукции, а в 5-м – новая популяция, полученная в результате применения кроссинговера к парам хромосом 1–2 и 3–4 промежуточной популяции.

Сравнение таблиц 1.1 и 1.2 показывает, что после одной генерации улучшились все показатели популяции – среднее и максимальные значения ЦФ.

Далее, согласно схеме классического простого ГА, выполняется ОМ. Этот оператор играет вторичную роль в простом ГА. Обычно вероятность мутации P_M очень невелика.

Оператор мутации выполняется в 2 этапа.

1-й этап. В хромосоме $A = a_1 a_2 \dots a_L$ случайно выбирается позиция $1 \leq k \leq L$.

2-й этап. Производится инверсия значения гена в k -й позиции:

$$a'_k = \bar{a}_k.$$

Применим, например, ОМ к хромосоме 3 с ЦФ = 27 (таблица 1.3, столбец 2).

Выберем позицию 3 и после ОМ получим

$$3 : 11011 \Rightarrow 3' : 11111.$$

Таблица 1.3 – Мутация

№ хромосомы	Популяция после кроссинговера	Новая популяция после мутации	Значения x	Значения y
1	01100	01100	12	144
2	11001	11001	25	625
3	11011	11111 – мутация	27 31	961
4	10000	10000	16	256
Sum $f_i(x)$			1986	
Среднее значение ЦФ $f(x)$			496,5	
Максимальное значение ЦФ			961	

На рисунке 1.5 приведена процедура поиска решения в примере Д. Голдберга.

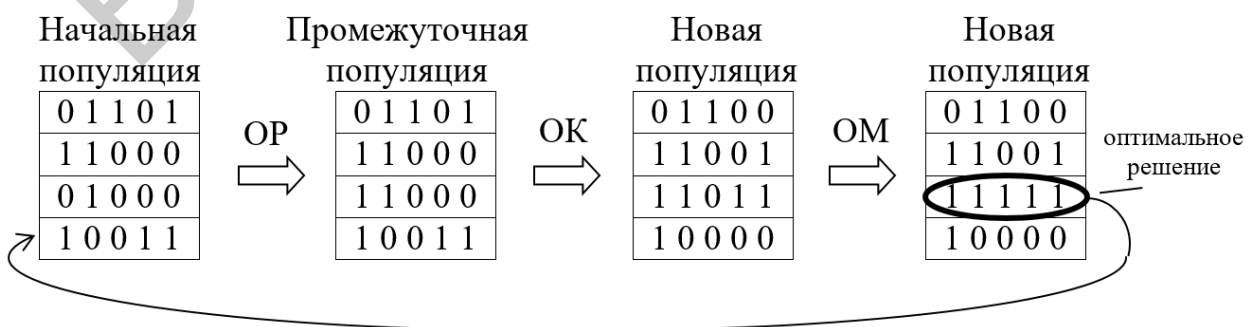


Рисунок 1.5 – Процесс поиска решения простым ГА в примере Д. Голдберга

В результате $x = 31$, а ЦФ $f(x) = 961$, т. е. мы нашли оптимальное решение на отрезке $[0,31]$.

1.3 Представление вещественных решений в двоичной форме для ГА

В предыдущем примере мы рассматривали только целочисленные решения. Обобщим ГА для вещественных чисел. Рассмотрим пример, в котором для функции $f(x) = (1,85 - x) \cdot \cos(3,5x - 0,5)$ необходимо найти вещественное $x \in [-10, +10]$, которое максимизирует f , т. е. такое x_0 , для которого $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in [-10, +10]$.

Решить эту задачу можно, построив ГА. Для представления вещественного решения (хромосомы) x будем использовать двоичный вектор, который применяется в классическом простом ГА. Его длина зависит от требуемой точности решения, которую в данном случае определим, как три знака после запятой.

Если $a = -10$, $c = 10$ (соответственно левая и правая границы области решения $x \in [a, c]$ и $x \in [a, c]$, а $k = 3$ – заданная точность решения), то для достижения заданной точности отрезок должен быть разбит на $\frac{c-a}{10^{-k}} = (c-a)10^k$ равных частей, т. е. в нашем случае на $(10 + 10) \cdot 10^3 = 20\,000$ равных частей.

В качестве двоичного представления используем двоичный код номера отрезка. Этот код позволяет определить соответствующее ему вещественное число, если известны границы области решения. Отсюда следует, что двоичный вектор для кодирования вещественного решения должен иметь 15 бит, поскольку

$$16\,384 = 2^{14} < 20\,000 \leq 2^{15} = 32\,768.$$

Отображение из двоичного представления $(b_{14}b_{13}\dots b_0)$ ($b_i \in \{0,1\}$) в вещественное число из отрезка $[-10, +10]$ выполняется в два шага:

1) перевод двоичного числа в десятичное:

$$\langle b_{14}b_{13}\dots b_0 \rangle_2 = \left(\sum_{i=0}^{14} b_i 2^i \right)_{10} = X';$$

2) вычисление соответствующего вещественного числа x :

$$x = a + x' \cdot \frac{(c - a)}{2^n - 1} = -10 + x' \cdot \frac{20}{2^{15} - 1},$$

где $a = -10$, $c = 10$ – соответственно левая и правая границы области решения.

Естественно, хромосомы (000000000000000) и (111111111111111) представляют границы отрезка -10 и $+10$ соответственно.

Очевидно, при данном двоичном представлении вещественных чисел можно использовать классический простой ГА. На рисунках 1.6–1.9 представлено расположение особей – потенциальных решений на различных этапах ГА в процессе поиска решения. На рисунке 1.6 показана начальная популяция потенциальных решений, которая равномерно покрывает область поиска решения. Далее явно видно, как постепенно (с увеличением номера поколения) особи «конденсируются» в окрестностях экстремумов, и в конечном счете находится лучшее решение.

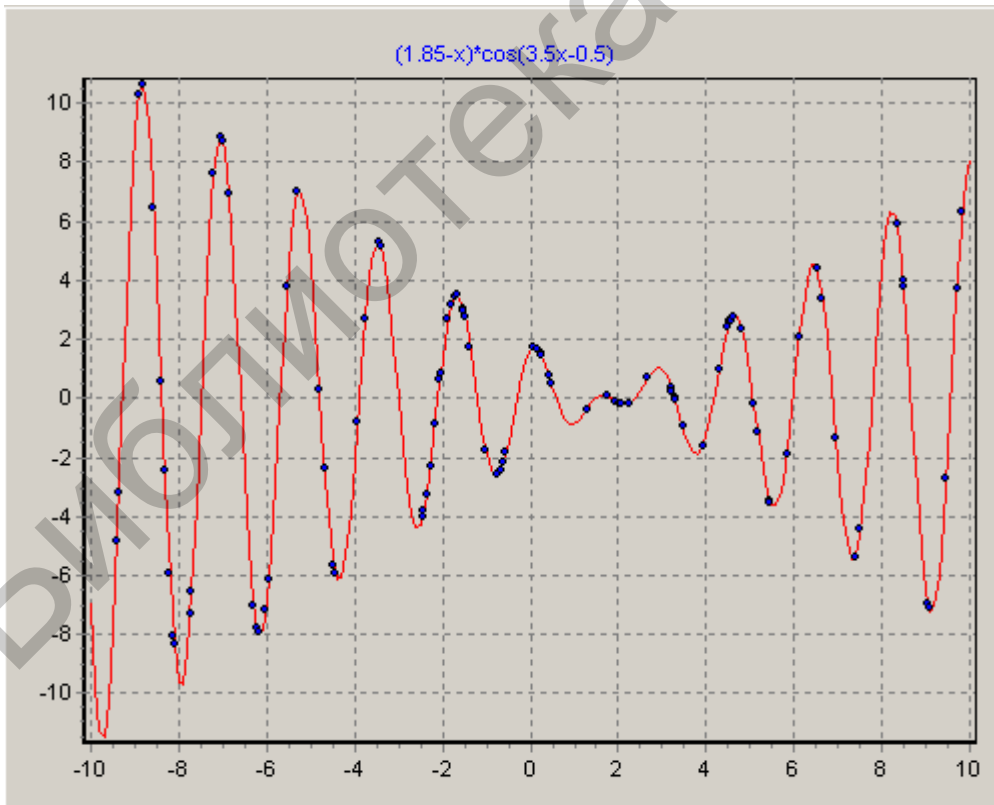


Рисунок 1.6 – Начальная популяция потенциальных решений

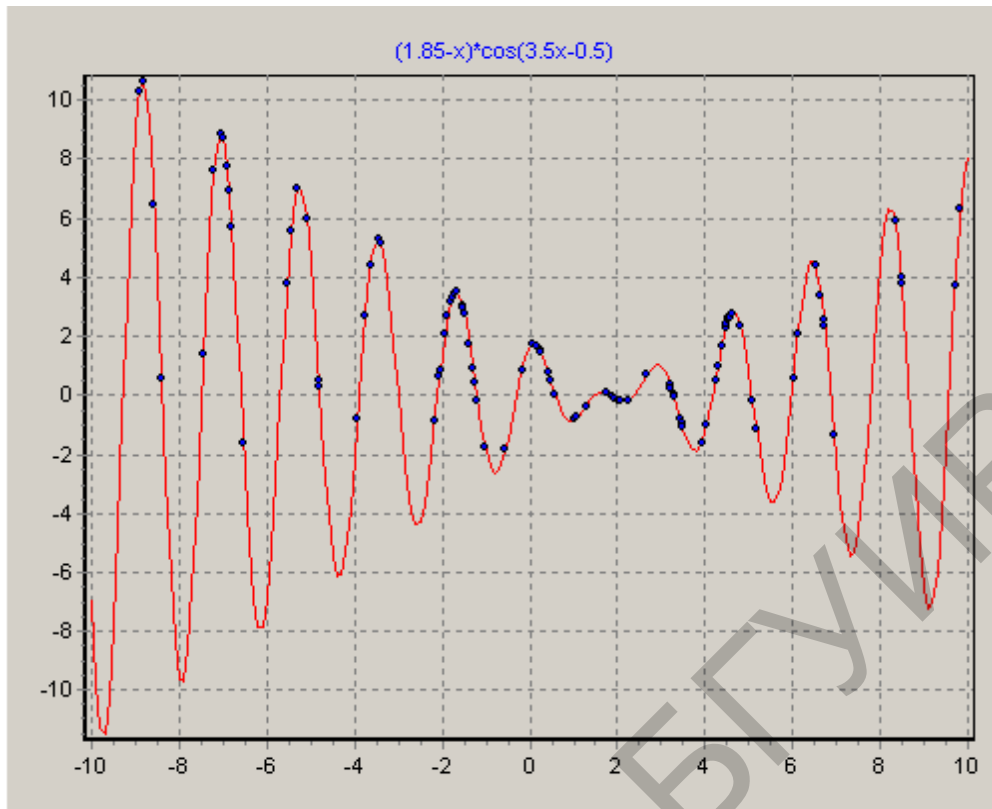


Рисунок 1.7 – Потенциальные решения в ходе работы ГА на начальном этапе

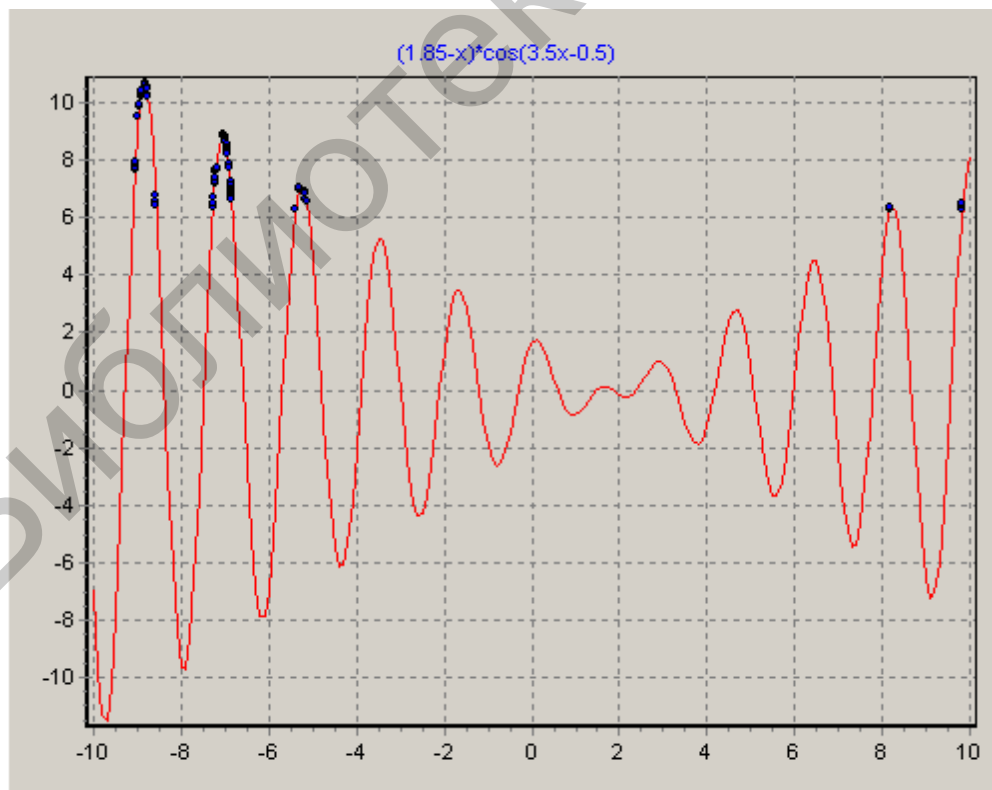


Рисунок 1.8 – Потенциальные решения в ходе работы ГА на завершающем этапе

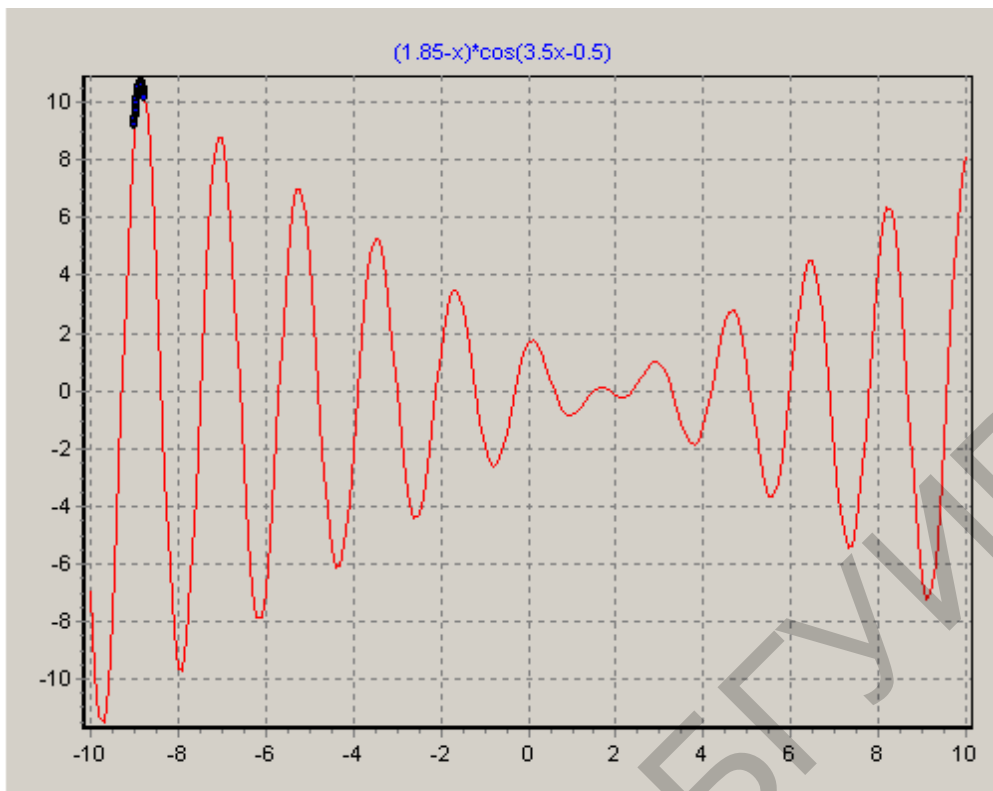


Рисунок 1.9 – Итоговый вариант решения по окончании работы ГА

В заключение отметим, что ГА характеризуется следующими особенностями:

- 1) работают не с параметрами, а с закодированным множеством параметров;
- 2) осуществляют поиск из популяции точек, а не из единственной точки;
- 3) используют целевую функцию непосредственно, а не ее непосредственное приращение;
- 4) используют не детерминированные, а вероятностные правила поиска решений;
- 5) каждая новая популяция состоит из жизнеспособных особей (хромосом);
- 6) каждая новая популяция лучше (в смысле целевой функции) предыдущей;
- 7) в процессе эволюции последующая популяция зависит только от предыдущей.

1.4 Использование кода Грея в ГА

Рассмотренное двоичное представление вещественного числа имеет существенный недостаток: расстояние между числами (на числовой оси) часто не

соответствует расстоянию (по Хеммингу) между их двоичными представлениями. Поэтому желательно получить двоичное представление, где близкие расстояния между хромосомами (двоичными представлениями) соответствовали бы близким расстояниям в проблемной области (в данном случае – расстоянию на числовой оси). Это можно сделать, например, с помощью кода Грея.

Код Грея – непозиционный код с одним набором символов (0 и 1) для каждого разряда. Таким образом, в отличие от римской системы счисления, число в коде Грея не является суммой цифр. Чтобы показать соответствие последовательности чисел коду Грея, можно воспользоваться таблицей, но есть и наглядное правило построения этой последовательности. Младший разряд в последовательности чисел в коде Грея принимает значения 0 и 1, затем следующий старший разряд становится единичным и младший разряд принимает свои значения уже в обратном порядке (1, 0). Этим и объясняется название кода – отраженный. Соответственно, два младших разряда принимают значения 00, 01, 11, 10, а затем при единичном следующем старшем разряде те же значения в обратном порядке (10, 11, 01, 00). Таблица 1.4 показывает первые восемь чисел в двоичном коде и в коде Грея.

Таблица 1.4 – Пример кода Грея для 4-битовых слов

Двоичный код	Код Грея
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101

1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

Заметим, что в коде Грея соседние двоичные слова отличаются на 1 бит (расстояние по Хеммингу равно 1).

Рассмотрим алгоритмы преобразования двоичного числа $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ в код Грея $\bar{g} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ и наоборот.

На рисунке 1.10 параметр m определяет разрядность двоичного числа.

```

Procedure Binary-to-Gray()
{
  g1=b1
  for k=2 to m do
    gk=bk-1 xor bk
}

Procedure Gray-to-Binary
{
  value=g1
  b1=value
  for k=2 to m do
    begin
      if gk=1 then value=NOTvalue
      bk=value
    }
}
end

```

Рисунок 1.10 – Алгоритм преобразования двоичного числа в код Грея

Существует и другая матричная (эквивалентная) процедура преобразования в код Грея. Например, для $m = 4$ матрицы, представленные на рисунке 1.11,

позволяют выполнять следующие преобразования: $\bar{g} = A \cdot \bar{b}$ и $\bar{b} = A^{-1} \bar{g}$, где умножение матриц выполняется по mod 2. Отметим, что код Грея прежде всего оправдывается при использовании операторов мутации.

$$A = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1100 \\ 0110 \\ 0011 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1100 \\ 1110 \\ 1111 \end{bmatrix}$$

Рисунок 1.11 – Пример матричной процедуры преобразования в код Грея

Библиотека БГУИР

2 Теория схем ГА. Фундаментальная теорема ГА

Теоретические основы ГА представляют двоичное строковое представление решений (хромосом) и понятие схемы (schema) или шаблона. Понятие «схема», согласно Д. Холланду [1], есть шаблон, описывающий подмножество строк, имеющих одинаковые значения в некоторых позициях. Для этого вводится новый троичный алфавит $\{0, 1, *\}$, где $*$ означает неопределенное значение (0 или 1, но неизвестно, что именно). Например, схема $(0*0001)$ соответствует двум строкам $\{000001, 010001\}$, а $(*0110*)$ описывает подмножество из четырех строк $\{00100, 101100, 001101, 101101\}$. Схема с m неопределенными позициями «*» представляет 2^m строк. Для строк длиной n , существует 3^n схем (возможны три символа $\{0, 1, *\}$ в каждой из n позиций).

Для геометрического представления возьмем куб в трехмерном пространстве (рисунок 2.1). Обозначим вершины этого куба трехразрядными бинарными строками так, чтобы метки соседних вершин отличались ровно на один разряд, причем вершина с меткой «000» находилась бы в начале координат.

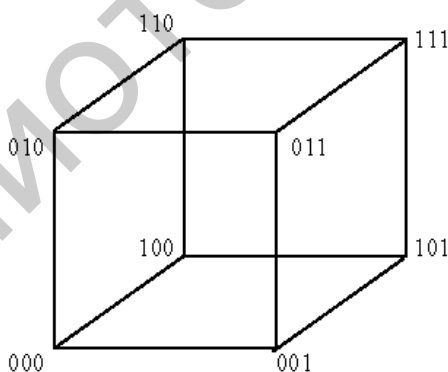


Рисунок 2.1 – Куб в трехмерном пространстве

Если взять схему вида «* * 0», то она опишет левую грань куба, а схема «*10» – верхнее ребро этой грани. Очевидно, что схема «* * *» соответствует всему пространству.

Если взять двоичные строки длиной четыре разряда, то разбиение пространства схемами можно изобразить на примере четырехмерного куба с поименованны-

ми вершинами (рисунок 2.2). Здесь схеме «* 1 * *» соответствует гиперплоскость, включающая задние грани внешнего и внутреннего куба, а схеме «* * 1 0» – гиперплоскость с верхними ребрами левых граней обоих кубов. Таким образом, термины «гиперплоскость» и «схема» взаимозаменяемы.

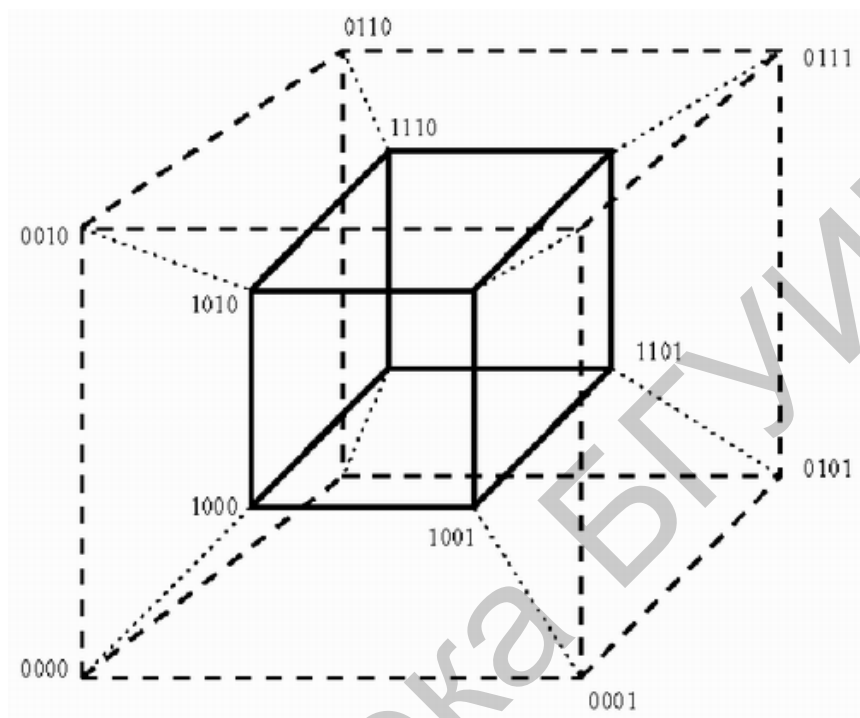


Рисунок 2.2 – Куб в четырехмерном пространстве

В простом ГА основная идея заключается в объединении хромосом со значениями ЦФ выше среднего. Например, пусть 1 в хромосоме соответствует наличию признака, способствующего выживанию (значение ЦФ больше среднего). Допустим, что имеются подстроки вида 11^{***} и $**111$. Тогда, применяя к ним ОК, можно получить хромосому 11111 с признаками, способствующим наилучшим значениям фитнес-функции. Рассмотрим также понятие строительного блока. Например, в шаблоне $****1$ строительным блоком будет элемент 1. В шаблоне 10^{***} строительным блоком будет составной элемент 10. Очевидно, вид строительных блоков должен выбираться из знаний о решаемой задаче и отражать полезные свойства, чтобы далее из строительных блоков, как из «кирпичиков», собрать «здание», т. е. решение с лучшей ЦФ. Желательно, чтобы в ГА выражались условия, которые разрешают разрыв строительных блоков только в крайних случаях, указанных пользователем.

Не все схемы являются одинаковыми. Некоторые более специфичны, чем другие. Для количественной оценки вводятся две характеристики:

1) порядок схемы $O(H)$, который определяется числом фиксированных позиций (не равных *). Например, для $H_1 = 0*1***$ ее порядок $O(H_1) = 2$;

2) определенная длина $L(H)$ – расстояние между первой и последней определенной (не равной *) позицией. Например, для шаблона $H_2 = 0111*1**$ $L(H_2) = 6 - 1 = 5$, а для $H_3 = 0****$ $O(H_3) = 1 - 1 = 0$.

Обозначим через $m(H,t)$ число строк, содержащихся в популяции $A(t)$ (t – шаг итерации, или время), которые отображаются (покрываются) схемой H .

Пусть $f(H)$ означает среднее значение ЦФ хромосом, покрываемых данной

схемой H , а $\bar{f}(x) = \frac{\sum_{j=1}^N f(x_j)}{N}$ – среднее значение ЦФ для всей популяции (N – размер популяции).

Рассмотрим, как ведет себя $m(H,t)$ при выполнении основных операторов ГА. Нижеприведенные результаты составляют фундаментальную теорему ГА – теорему схем [1].

2.1 Влияние репродукции

Напомним, что в процессе репродукции хромосомы копируются в промежуточную популяцию согласно их значениям ЦФ – хромосома x_i со значением $f(x_i)$ выбирается с вероятностью $P(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum f(x_j)}$. После селекции мы ожидаем на следующем шаге получить $m(H,t + 1)$ стрингов, отображаемых схемой H .

Известно, что

$$m(H,t + 1) = m(H,t) \cdot N \cdot f(H) / \sum f(x_j) . \quad (2.1)$$

Это обусловлено тем, что:

1) в среднем вероятность выбора строк, представляемых схемой H , определяется как $f(H) / \sum f(x_j)$;

2) число строк, представляемых H , равно $m(H,t)$;

3) число строк в популяции равно N .

Мы можем переписать эту формулу с учетом обозначения

$$\bar{f}(x) = \frac{\sum_{j=1}^N f(x_j)}{N}$$

и получить следующее выражение для числа особей, покрываемых схемой в промежуточной популяции:

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot f(H) / \bar{f}(x). \quad (2.2)$$

Другими словами, схемы «растут» как отношение среднего значения ЦФ схемы к среднему значению ЦФ популяции. Схема со значением ЦФ выше средней в популяции будет получать больше возможностей для копирования и наоборот.

Правило репродукции Д. Холланда гласит, что схема со значением ЦФ выше среднего живет и размножается, а со значением ЦФ ниже среднего умирает. Предположим, что схема H остается со значением выше среднего ЦФ на величину $c \cdot \bar{f}$, где c – константа. Тогда последнее выражение (2.2) можно модифицировать:

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot (\bar{f} + c \cdot \bar{f}) / \bar{f} = (1+c) m(H, t).$$

Начиная с $t = 0$ и предполагая, что c – величина постоянная, получаем следующее выражение числа особей промежуточной популяции, покрываемых схемой:

$$m(H, t) = m(H, 0) \cdot (1+c)^t.$$

Очевидно, что при $c > 0$ схема размножается, а при $c < 0$ – умирает. Далее рассмотрим влияние оператора кроссинговера на число особей в популяции, покрываемых схемой.

2.2 Влияние кроссинговера

Рассмотрим конкретную строку $A = 011|1000$ длиной $n = 7$ и две схемы, представляющие эту строку:

$$H1 = *1*|***0, H2 = ***|10**.$$

Здесь символ |, как обычно, обозначает точку кроссинговера ($k = 4$).

Схема $H1$ после ОК с точкой $k = 4$ скорее всего будет уничтожена, потому что «1» в позиции 2 и «0» в позиции 7 попадут в разные новые строки после кроссинговера. С другой стороны, ясно, что схема $H2$ будет выживать, так как «10» в позициях 4, 5 будут содержаться вместе в одной новой строке. Хотя мы взяли точку скрещивания ОК случайно, схема $H1$ менее приспособлена к выживанию, чем схема $H2$. Если точка скрещивания ОК выбирается случайно среди $n - 1 = 7 - 1 = 6$ возможных позиций, то схема $H1$ разрушается с вероятностью

$$P(d) = L(H1) / (L - 1) = 5/6.$$

Эта же схема выживает с вероятностью

$$P(S) = 1 - P(d) = 1/6.$$

Аналогично схема $H2$ имеет $L(H2) = 1$, и вероятность ее уничтожения $P(d) = 1/6$, а вероятность выживания схемы после применения ОК $P(S) = 5/6$. Нижняя граница вероятности выживания схемы после применения ОК может быть вычислена для любой схемы. Вероятность выживания для простого ОК определяется по формуле

$$P_s(\text{ОК}) = 1 - L(H)/(L - 1).$$

Если ОК выполняется посредством случайного выбора, например, с вероятностью $P_{\text{ОК}}$, то вероятность выживания схемы определяется так:

$$P(S) \geq 1 - P_{\text{ОК}} \cdot L(P)/(L - 1).$$

Очевидно, что это выражение уменьшается при $P_{\text{ОК}} \rightarrow 1$. Теперь мы можем асимптотически оценить эффект операторов репродукции и кроссинговера.

При независимости выполнения ОР и ОК можно получить следующее выражение:

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{f} [1 - P_{\text{ОК}} \frac{L(H)}{L - 1}].$$

Таким образом, число схем H в новой популяции зависит от двух факторов:

- 1) значение ЦФ схемы выше или ниже ЦФ популяции;
- 2) схема имеет «длинную» или «короткую» $L(H)$ (определенную длину).

Видно, что схемы со значением ЦФ выше средней и короткой длиной $L(H)$ имеют возможность экспоненциального роста в новой популяции. Далее рассмотрим влияние оператора мутации на число особей в популяции, покрываемых схемой.

2.3 Влияние мутации

Напомним, что оператор мутации есть случайное изменение элемента в строке с вероятностью P_{OM} . Для того чтобы схема H выжила, все определенные позиции должны выжить. Поскольку единственный ген выживает с вероятностью $(1 - P_{OM})$, то данная схема выживает в том случае, в котором и каждая из $O(H)$ фиксированных позиций схемы. Умножая вероятность выживания $1 - P_{OM}$ $O(H)$ раз, получим, что вероятность выживания при OM равна $(1 - P_{OM})^{O(H)}$. Для малых величин $P_{OM} \ll 1$ это выражение может быть аппроксимировано:

$$P_S(OM) = 1 - O(H) \cdot P_{OM}.$$

Поскольку вероятность выживания равна 1 (вероятности разрушения при ОК и OM), то схема H дает ожидаемое число особей в следующей популяции после выполнения всех генетических операторов ОР, ОК и OM согласно следующей формуле:

$$m(H, t + 1) > m(H, t) \cdot \frac{f(H)}{\bar{f}} [1 - P_{OK} \frac{L(H)}{1 - L} - O(H) \cdot P_{OM}]. \quad (2.3)$$

2.4 Фундаментальная теорема ГА

Таким образом, на основе вышеизложенного формулируем следующую теорему: для данной схемы H ожидаемое число особей в следующей популяции

после выполнения всех генетических операторов ОР, ОК и ОМ определяется согласно неравенству (2.3).

Этот важный результат известен как фундаментальная теорема ГА, или теорема схем. Теорема схем показывает, что строительные блоки растут по экспоненте, в то время как схемы с приспособленностью ниже средней распадаются с той же скоростью. Так, Д. Голдберг в своих исследованиях теоремы схем выдвигает гипотезу строительных блоков, которая состоит в том, что «строительные блоки объединяются, чтобы сформировать лучшие строки» [2]. То есть рекомбинация и экспоненциальный рост строительных блоков ведет к формированию лучших строительных блоков.

Вернемся к примеру Голдберга – определению $\max f(x) = x^2$. В дополнение к имеющимся таблицам 1.1–1.3 пусть имеется три конкретные схемы $H1 = 1****$, $H2 = *10**$ и $H3 = 1***0$, описанные в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Описание схем $H1$, $H2$, $H3$

Схема	Перед репродукцией	Представители стрингов	Средняя ЦФ схемы $f(H)$
$H1$	1****	2, 4	469
$H2$	*10**	2, 3	320
$H3$	1***0	2	576

Таблица 2.2 – Результат работы ОР

Схема	После репродукции			После всех операторов		
	Ожидаемое число строк	Действительное число строк	Представители строк	Ожидаемое число строк	Действительное число строк	Представители строк
$H1$	3,20	3	2, 3, 4	3,20	3	2, 3, 4
$H2$	2,18	2	2, 3	1,64	2	2, 3
$H3$	1,97	2	2, 3	0,0	1	4

Рассмотрим схему $H1$. При репродукции строки копируются с вероятностью, определенной согласно величине их ЦФ. Из таблицы 2.1 видно, что строки 2, 4 покрываются схемой $H1$. После ОР мы видим в таблице 2.2 (строка $H1$), что получены три копии, и строка 3 также вошла в популяцию. Проверим, соответствует ли это число фундаментальной теореме схем. Согласно теории мы ожидаем $m \cdot f(H) / \bar{f}$ копий. Вычисляя среднее значение ЦФ $f(H1)$, получаем $\bar{f}(H1) = (576 + 361) / 2 = 468,5$. Разделив это число на среднее значение ЦФ популяции $\bar{f} = 293$ и умножив на число строк, покрываемых $H1$ на шаге t $m(H1, t) = 2$, получаем ожидаемое число строк, покрываемых $H1$ на шаге $t + 1$, т. е.

$$m(H1, t + 1) = 2 \cdot 468,5 / 293 = 3,20.$$

Сравнивая это число с реальным числом копий 3, видим, что округление рассчитанного значения копий 3, 2 дает реальное их число 3. Дальнейший анализ показывает, что в данном случае ОК не оказывает влияние на число строк, покрываемых схемой, так как определенная длина $L(H1) = 0$ предотвращает разрыв схемы. Далее при мутации с вероятностью $P_{OM} = 0,001$ мы должны ожидать уменьшение числа стрингов на $m \cdot O(H1) \cdot P(OM) = 3 \cdot 1 \cdot 0,001 = 0,003$, что практически не оказывает влияния на окончательный результат. В итоге для схемы $H1$ получаем ожидаемое увеличение числа особей до 3, что соответствует формуле (2.2).

Рассмотрим теперь схемы $H2$ и $H3$ с двумя фиксированными позициями. Схема $H2$ имеет также два представителя в начальной популяции (2, 3) и две копии в следующей промежуточной популяции. Вычисляем $m(H2) = 2 \cdot 320 / 293 = 2,18$. Здесь $f(H2) = 320$ – среднее значение ЦФ схемы, а $\bar{f} = 293$ – среднее значение ЦФ популяции. Для $H3$ получаем только одно стринговое представление, и $m(H3) = 1 \cdot 576 / 293 = 1,97$. Здесь 576 – среднее значение ЦФ схемы.

Заметим, что для конкретной схемы $H2$ две копии – это хороший результат, и он может случиться только один раз из четырех возможных случаев ($L - 1 = 5 - 1 = 4$). Схема $H2 = *|1|0|*$ имеет реальную возможность

дать новую копию. В результате схема $H2$ выживает с высокой вероятностью. Действительно, число стрингов, покрываемых $H2$, равно $m(H2, t + 1) = 2,18 \cdot 0,75 = 1,64 \approx 2$.

Для схемы $H3$ при высокой определенной длине $L(H3) = 4$ оператор ОК обычно разрушает эту схему, поэтому ожидаемое число $m(H3, t + 1) = 0$ в соответствии с формулой (2.3).

Библиотека БГУИР

3 Модификации и обобщения генетических алгоритмов

Мы изучили в предыдущих разделах в основном классическую реализацию простого ГА. Далее рассмотрим различные модификации и обобщения для каждого функционального блока основной блок-схемы ГА (см. рисунок 1.1 в разделе 1).

3.1 Создание исходной популяции

Возможны три способа создания исходной популяции (начального множества решений).

1. *Стратегия «одеяла»* – формирование полной популяции, содержащей все возможные решения. Например, для n -разрядной хромосомы мы имеем всего 2^n вариантов решений, которые составляют полную популяцию.

2. *Стратегия «дробовика»* – генерация достаточно большого случайного подмножества решений.

3. *Стратегия фокусировки* – генерация множества решений, включающих разновидности одного решения.

Первый подход (стратегия «одеяла») практически не реализуем даже для задач средней размерности вследствие больших вычислительных затрат. Заметим, что при этом подходе начальная популяция не может развиваться, так как в ней уже содержатся *все* возможные решения.

Третий способ используется, когда есть предположение, что некоторое решение является вариацией известного значения. В этом случае время поиска оптимального решения существенно сокращается, так как алгоритм начинает работу в окрестности оптимума.

Чаще всего применяют второй способ. В этом случае в результате эволюции есть возможность перейти в другие подобласти поиска, и каждая из них имеет сравнительно небольшое пространство поиска.

В целом эффективность ГА, качество решения и дальнейшая эволюция в значительной степени определяются структурой и качеством начальной популяции.

На практике часто применяют комбинацию второго и третьего способов: сначала определяются особи с высокими значениями целевой функции, а затем случайно формируются начальные решения в этих подобластях.

3.2 Отбор родителей (селекция)

Оператор отбора S порождает промежуточную популяцию \tilde{P}^t из текущей популяции P^t путем отбора и генерации новых копий особей:

$$P^t \xrightarrow{S} \tilde{P}^t.$$

При отборе конкурентоспособных особей используют целевую (fitness) функцию как единственно доступный источник информации о качестве решения. Но различные методы отбора родителей по-разному используют эту информацию. Далее мы рассмотрим наиболее распространенные методы отбора родителей.

3.2.1 Пропорциональный отбор (метод «рулетки»)

Этот вид отбора чаще всего используется на практике. При этом особи (решения) отображаются в отрезке линии (или сектора рулетки) таким образом, что их размер пропорционален значению целевой функции для данной особи. Это показано в следующем примере, представленном в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Пример пропорционального отбора

Номер особи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение ЦФ	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	0,8	0,7	0,3	0,2	0,0
Вероятность выбора	0,18	0,16	0,15	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,03	0,02	0,00

На прямой строим отрезки, длины которых пропорциональны вероятностям выбора особей, как это показано на рисунке 3.1.

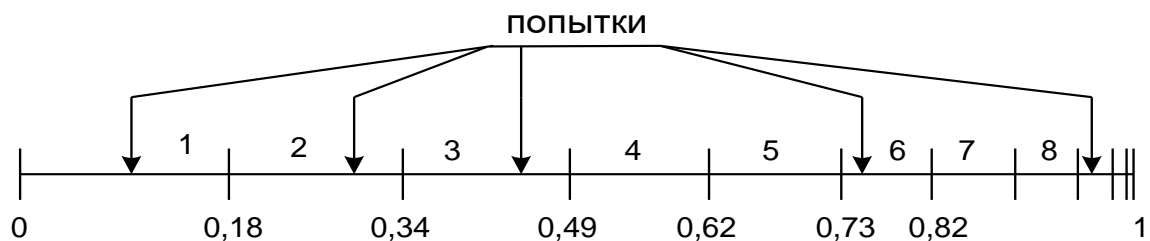


Рисунок 3.1 – Пропорциональные вероятности выбора особей

Далее случайно генерируются числа в интервале от 0,0 до 1,0, и в промежуточную популяцию выбираются те особи, в отрезок которых попадают эти случайные числа. Таким образом, каждая попытка представляет собой случайное число в интервале от 0 до 1, в результате чего выбирается та особь, в чей отрезок попадает это число. В данном примере в результате пяти попыток были выбраны в промежуточную популяцию особи 1, 2, 3, 6 и 9.

Данный метод, несмотря на частое применение, имеет следующие недостатки:

- зависимость от положительных значений целевой функции (целевая функция должна для всех особей принимать положительное значение);

- простое добавление очень большой константы к целевой функции может свести способ отбора к равновероятностному выбору. Так, добавляя к значению целевой функции в таблице 3.1 значение 1000, получаем равновероятностный выбор (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Равновероятностный выбор

Номер особи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение ЦФ	1002	1001,8	1001,6	1001,4	1001,2	1001	1000,8	1000,7	1000,3	1000,2	1000
Вероятность выбора	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

Для рассмотренного примера можно привести следующую гистограмму вероятностей выбора особей, представленную на рисунке 3.2. Отметим, что

здесь высота «ступенек» различна, в отличие от следующего метода выбора, для которого гистограмма представлена на рисунке 3.3.



Рисунок 3.2 – Сортировка особей в операторе селекции методом асимметричного колеса рулетки

Для устранения первых двух недостатков используют масштабирование оценок значений целевой функции:

а) сдвиг (в случае поиска минимума функции и оптимального маршрута):

$$F1(x_i) = \max_i F(x_i) - F(x_i);$$

б) линейное (для выделения лучших особей):

$$F1(x_i) = a + bF(x_i),$$

$$a = \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i)}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i) - \min_i F(x_i)}, \quad b = \frac{\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i) \right) \min_i F(x_i)}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i) - \min_i F(x_i)},$$

причем b, a , удовлетворяют трем условиям:

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F1(x_i) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i);$$

$$\frac{\max_i F1(x_i)}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F(x_i)} = 2;$$

$$\min_i F1(x_i) = 0,$$

где K – мощность популяции;

в) сигма-отсечение (для выделения лучших особей):

$$F1(x_i) = \max(0, F(x_i) + (m - c\sigma)),$$

где m и σ – математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение по популяции;

$c \in [1, 5]$ – натуральная константа;

г) степенное (для выделения лучших особей):

$$F1(x_i) = F^k(x_i),$$

где $k > 1$ – константа (обычно $k = 2$ или 3);

д) Больцмана, или «имитация отжига» (для выделения лучших особей):

$$F1(x_i) = \exp\left(\frac{F(x_i)}{T(n)}\right),$$

где $T(n)$ – температура на итерации n , например,

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ или}$$

$$T(n) = \beta T(n-1), 0 < \beta < 1, g(0) = T_0, T_0 > 0.$$

Затем особи упорядочиваются по фитнес-функции, и определяется вероятность выбора каждой i -й хромосомы в виде

$$P(x_i) = \frac{F1(x_i)}{\sum_{s=1}^K F1(x_s)}, i \in \overline{1, K}.$$

3.2.2 Ранжирование

При этом методе особи популяции сортируются (упорядочиваются) согласно значениям целевой функции. Отметим, что здесь вероятность отбора для каждой особи зависит только от ее позиции (номера) в этом упорядоченном множестве особей, а не от самого значения целевой функции. Этот метод отбора более устойчив, чем предыдущий. В основном применяют линейное ранжирование, где вероятность отбора определяют в соответствии с выражением

$$P_i(a_i) = \frac{1}{N} (a - (a - b) \frac{i-1}{N-1}),$$

где $1 \leq a \leq 2$ выбирается случайным образом;

$$b = 2 - a;$$

N – мощность популяции;

i – номер особи.

Для приведенного выше примера значения вероятностей выбора особей приведены в таблице 3.3, а соответствующая гистограмма представлена на рисунке 3.3. Отметим, что здесь высота «ступенек» одинакова, в отличие от предыдущего метода выбора. Небольшое отличие может присутствовать вследствие округления результата.

Таблица 3.3 – Линейное ранжирование

Номер особи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение ЦФ	2	1,8	1,6	1,4	1,2	1	0,8	0,7	0,3	0,2	0
Вероятность выбора	0,155	0,142	0,129	0,116	0,104	0,091	0,078	0,065	0,053	0,04	0,027

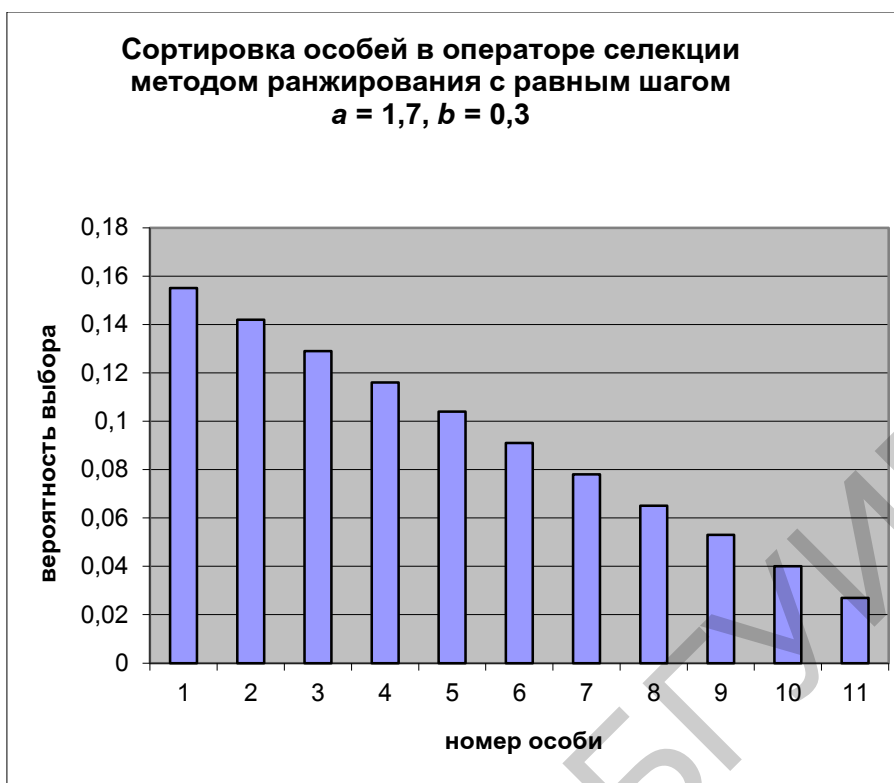


Рисунок 3.3 – Сортировка особей в операторе селекции методом ранжирования с равным шагом

Иногда применяют нелинейное ранжирование. При этом вероятность отбора также определяется номером позиции в упорядоченном множестве особей, но вид функции может быть сложнее.

3.2.3 Равномерное ранжирование (случайный выбор)

Здесь вероятность выбора особи определяется выражением

$$P_s(a_i) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \text{при } 1 \leq i \leq \mu, \\ 0 & \text{при } \mu < i \leq N, \end{cases}$$

где $\mu \leq N$ – параметр метода.

Для методов ранжирования и равномерного ранжирования на прямой также строим отрезки, длины которых пропорциональны вероятностям выбора особей, как это показано на рисунке 3.1.

Далее случайно генерируются числа в интервале от 0,0 до 1,0 и в промежуточную популяцию выбираются те особи, в отрезок которых попадают эти случайные числа. Таким образом, каждая попытка представляет собой случайное число в интервале от 0 до 1, в результате чего выбирается та особь, в чей отрезок попадает это число.

3.2.4 Локальный отбор

Производится среди особей, которые находятся в некоторой ограниченной среде, где определено отношение соседства. Ранее фактически в качестве соседей каждой особи рассматривалась вся популяция. При этом соседи рассматривались как множество партнеров для выполнения операции скрещивания.

Соседство можно определить по-разному. Далее рассмотрим типичные отношения соседства, используемые, как правило, при локальном отборе.

1. *Линейное соседство* представлено на рисунке 3.4.

На практике рассматривают полную окрестность (на рисунке 3.4 вверху показана полная окрестность выделенного элемента с расстоянием $d = 2$) и полуокрестность (в правом нижнем углу рисунка 3.4 показана полуокрестность с расстоянием $d = 1$).

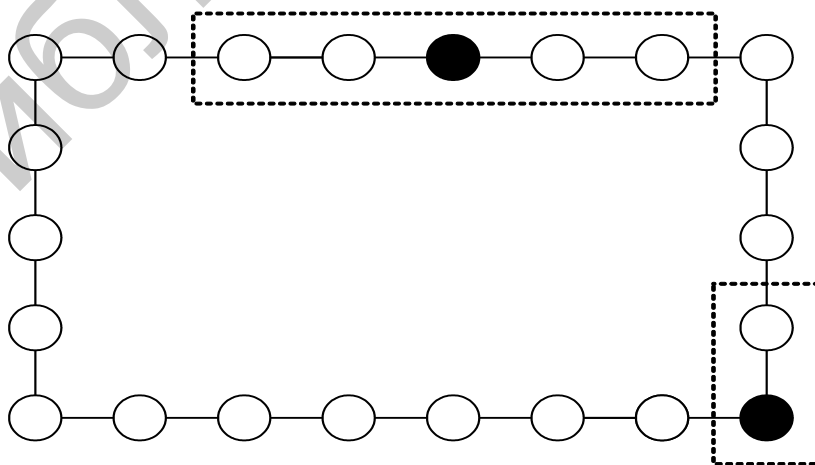


Рисунок 3.4 – Пример линейного соседства

2. Двумерное четырехсвязное соседство представлено на рисунке 3.5.

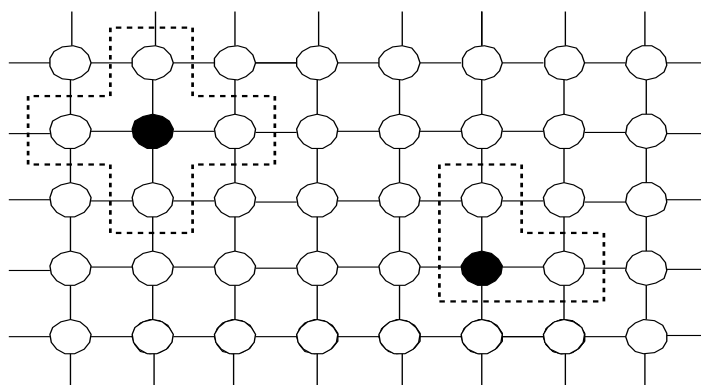


Рисунок 3.5 – Пример соседства с четырехсвязностью

В левом верхнем углу рисунка 3.5 показан полный «крест» выделенного элемента с расстоянием $d = 1$, справа «полукрест» также с расстоянием $d = 1$.

3. Двумерное восьмисвязное соседство представлено на рисунке 3.6.

В левом верхнем углу рисунка 3.6 показана полная «звезда» выделенного элемента с расстоянием $d = 1$, а справа – «полузвезда». Для определения отношения можно также использовать гексагональную решетку с шестисвязностью и даже трехмерные структуры.

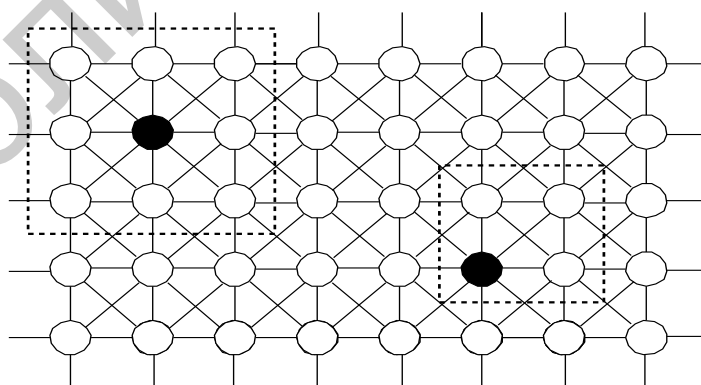


Рисунок 3.6 – Пример соседства с восьмисвязностью

При отборе родителей на первом шаге производится отбор особей случайным образом или одним из ранее рассмотренных способов. Далее для каждой отобранной особи определяется множество локальных соседей и среди них выбирается партнер для выполнения операции скрещивания.

При наличии отношения соседства между особями возникает «изоляция расстояния». Очевидно, что чем меньше соседство, тем больше «изоляция расстояния». Это ограничивает распространение новых решений в популяции.

Однако из-за перекрытия соседних областей распространение новых вариантов решений все же возможно. Мощность множества соседей определяет скорость распространения информации между особями популяции, способствуя либо быстрому распространению новых решений, либо сохранению имеющегося генофонда в популяции.

Часто при решении задачи требуется высокая изменчивость, которая поможет избежать преждевременной сходимости в районе локального оптимума. Обычно локальный отбор в малом окружении дает лучшие результаты, чем в большем окружении.

В малых и средних популяциях ($N < 100$) для локального отбора рекомендуется двумерная структура типа «полузвезда» с расстоянием $d = 1$.

При большом размере популяции ($N > 100$) лучше использовать большие расстояния $d > 1$ и двумерные структуры с соседством типа «звезда».

3.2.5 Отбор на основе усечения

Предыдущие методы отбора в какой-то степени заимствованы у эволюции естественных популяций (или имеют аналогию с ней). Этот метод не имеет аналогов в естественной эволюции и обычно используется для больших популяций ($N > 100$). При этом сначала отбираемые особи упорядочиваются согласно их значениям целевой функции. Затем в качестве родителей выбираются только лучшие особи. Далее с равной вероятностью среди них случайно выбирают пары, которые производят потомков.

При этом методе используется параметр – порог отсечения T (иногда используется термин интенсивность отбора), показывающий долю (часть популяции), которая отбирается в качестве родителей. Обычно $10\% \leq T \leq 50\%$.

3.2.6 Турнирный отбор

В этом случае из популяции случайно отбираются m особей, и лучшая из них выбирается в качестве родителя. Далее этот процесс повторяется, пока не сформируется промежуточная популяция, в которой случайно формируются пары родителей. Параметром этой процедуры является размер тура m , который принимает значения из диапазона $2 \leq m \leq N$.

3.2.7 Методы выбора пар для скрещивания

До сих пор мы в основном рассматривали методы отбора родителей в промежуточную популяцию. Далее из этой популяции необходимо выбрать пары особей для выполнения операции скрещивания. Основными методами выбора пар особей являются следующие.

Случайный выбор (панмиксия) родительской пары – метод, при котором оба родителя случайным образом выбираются из всей популяции. Если не используется имитация отжига, то этот кроссинговер над выбранными родителями происходит обычно с вероятностью 0,5. Для имитации отжига кроссинговер происходит с вероятностью

$$p_c = p_0 \exp(-1/T(n)), \quad T(n) = \beta T(n-1), \quad 0 < \beta < 1, \quad T(0) = T_0, \quad T_0 > 0,$$

где p_0 – начальная вероятность кроссинговера;

n – номер итерации.

Следует отметить, что при этом любая особь может входить в несколько пар. Этот метод является универсальным для решения различных задач, но достаточно критичен к численности популяции, поскольку его эффективность снижается с ростом мощности популяции N .

При *селективном выборе* родителями могут стать только те особи, значение целевой функции которых не меньше среднего значения по популяции при равной вероятности этих кандидатов составить брачную пару. Такой подход обеспечивает более быструю сходимость алгоритма, но неприемлем для мультимодальных задач (имеющих несколько экстремумов), для которых этот метод, как правило, быстро сходится к одному из решений. Это может привести к преждевременной сходимости к локальному экстремуму.

Если не используется имитация отжига, то этот кроссинговер над выбранными родителями происходит обычно с вероятностью 0,5. Для имитации отжига кроссинговер происходит с вероятностью

$$p_c = p_0 \exp(-1/T(n)), T(n) = \beta T(n-1), 0 < \beta < 1, T(0) = T_0, T_0 > 0,$$

где p_0 – начальная вероятность кроссинговера;

n – номер итерации.

Часто используются также два следующих подхода: *инбридинг* и *аутбридинг*. В них формирование пары происходит на основе близкого или дальнего родства соответственно. Под родством обычно понимается расстояние между особями популяции в пространстве параметров. В связи с этим различают генотипный и фенотипный инбридинг и аутбридинг.

При *инбридинге* первый член пары выбирается случайно, а вторым является максимально близкая к нему особь.

Аутбридинг формирует пары из максимально далеких особей.

Комбинация этих походов используется при решении многоэкстремальных задач.

3.3 Операторы рекомбинации (скрещивания, кроссинговера)

Различают операторы двоичной и вещественной рекомбинации (скрещивания). Рассмотрим сначала более привычную, применяемую в простом ГА двоичную рекомбинацию.

3.3.1 Двоичная рекомбинация

В *одноточечном кроссинговере*, который мы уже рассматривали в подразделе 1.1, случайно выбирается точка скрещивания с вероятностью $P \approx 0,5$ и производится обмен фрагментами хромосом после точки скрещивания (рисунок 3.7).

$$\begin{array}{r}
 \text{a:} \\
 \text{в:} \\
 \text{a':} \\
 \text{в':}
 \end{array}
 \begin{array}{cccc|cccc}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

Рисунок 3.7 – Одноточечный кроссинговер

В *многоточечном кроссинговере* случайно выбираются m позиций $k_i \in [1, 2, \dots, n - 1]$, и их номера сортируются по порядку. Затем родители обмениваются фрагментами, заключенными между соседними выбранными позициями и производят таким образом двух потомков. То есть обмен осуществляется секциями, при этом секции между первой позицией и первой точкой скрещивания не обмениваются, а далее обмен идет через одну секцию, как это показано на рисунке 3.8.

$$\begin{array}{r}
 \text{a:} \\
 \text{в:} \\
 \text{a':} \\
 \text{в':}
 \end{array}
 \begin{array}{cc|ccc|ccc|c}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Рисунок 3.8 – Многоточечный кроссинговер

Однородный кроссинговер радикально отличается от предыдущих видов скрещивания. В нем каждый ген потомка создается путем копирования соответ-

ствующего гена из первого или второго родителя, т. е. каждая позиция потенциально является точкой кроссинговера.

Для этого случайным образом генерируется двоичная маска кроссинговера той же длины (с тем же числом бит), что у хромосом родителей. Создать маску можно следующим образом: введем некоторую величину $0 < p_0 < 1$, и если случайное число больше p_0 , то на n -ю позицию маски ставим 1, иначе – 0. Таким образом, гены маски представляют собой случайные двоичные числа (0 или 1). Четность бита маски показывает родителя, из которого копируется ген потомка. Для определенности допустим, что 1 соответствует первому родителю, а 0 – второму. На рисунке 3.9 показана схема выполнения этого типа кроссинговера на конкретном примере. Каждый бит потомка копируется из 1-го или 2-го родителя в соответствии со значением этого бита маски. Таким образом, потомок содержит смесь генов из каждого родителя.

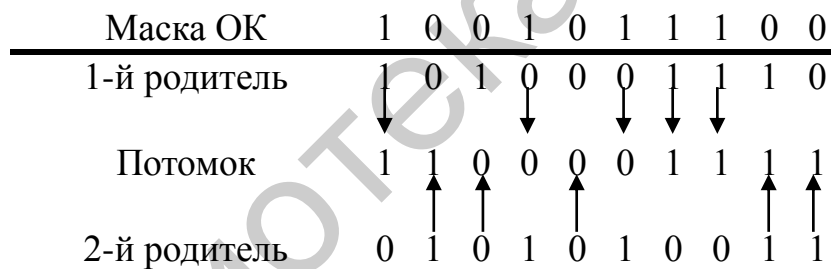


Рисунок 3.9 – Однородный кроссинговер

Однородный кроссинговер очень похож на многоточечный, но строка случайных битовых значений в нем длиннее. Это гарантирует, что в потомках будут чередоваться короткие строки особей-родителей.

Триадный кроссинговер отличается от однородного тем, что после отбора пары родителей из остальных членов популяции случайным образом выбирается особь, которая в дальнейшем используется в качестве маски. Далее 10 % генов маски мутируют. Затем гены первого родителя сравниваются с генами маски: если гены одинаковы, то они передаются первому потомку, в противном

случае на соответствующие позиции хромосомы потомка переходят гены второго родителя. Генотип второго потомка отличается от генотипа первого тем, что на тех позициях, где у первого потомка стоят гены первого родителя, у второго потомка стоят гены второго родителя и наоборот.

В *перетасовочном кроссинговере* отобранные особи случайным образом обмениваются генами. Затем выбирают точку для одноточечного кроссинговера и проводят обмен частями хромосом. После скрещивания созданные потомки вновь тасуются. Таким образом, при каждом кроссинговере создаются не только новые потомки, но и модифицируются родители (старые родители удаляются).

Кроссинговер с уменьшением замены, или ограниченный кроссинговер. Оператор уменьшения замены ограничивает кроссинговер, чтобы всегда, когда это возможно, создавать новые особи. Это осуществляется за счет ограничения на выбор точки разреза: точки разреза должны появляться только там, где гены различаются.

Как было показано выше, кроссинговер генерирует новое решение (в виде особи-потомка) на основе двух имеющихся, комбинируя их части. Поэтому число различных решений, которые могут быть получены кроссинговером при использовании одной и той же пары готовых решений, ограничено. Соответственно, пространство, которое ГА может покрыть, используя лишь кроссинговер, жестко зависит от генофонда популяции. Чем разнообразнее генотипы решений популяции, тем больше пространство покрытия.

При обнаружении локального оптимума соответствующий ему генотип будет стремиться занять все позиции в популяции, и алгоритм может сойтись к ложному оптимуму. Поэтому в генетическом алгоритме важную роль играют мутации. Существует несколько способов мутирования генов. Вопрос о выборе подходящего оператора мутации решается в рамках поставленной задачи.

3.3.2 Рекомбинация действительных значений

При рекомбинации действительных значений хромосома представляется действительным (вещественным) числом.

Дискретная рекомбинация определена над векторами, компонентами которых являются вещественные числа. Рассмотрим этот вид скрещивания на примере двух особей, соответствующие векторы которых имеют три целых значения. Для каждой переменной (позиции) значение переменной выбирается из первого или второго родителя с равной вероятностью. Пример выполнения этого оператора показан на рисунке 3.10.

Здесь образцы (маски) показывают принадлежность данной компоненты потомка определенному родителю. Отметим, что этот тип рекомбинации применим к значениям любого типа.

1-й родитель	12	25	5
2-й родитель	123	4	34
1-й образец (маска)	2	2	1
2-й образец (маска)	1	2	1
1-й потомок	123	4	5
2-й потомок	12	4	5

Рисунок 3.10 – Дискретная рекомбинация

Промежуточная рекомбинация применима для особей, представленных только вещественными значениями. Здесь значения потомков строятся в окрестности или между значениями родителей. Потомок формируется следующим образом:

$$Of = P_1 + \alpha \cdot (P_2 - P_1);$$

$$\alpha \in [-d, d + 1],$$

где P_1, P_2 – вещественные значения, представляющие первого и второго родителя;

Of – вещественное значение, представляющее потомка;

α – масштабирующий множитель, который выбирается случайно из отрезка $[-d, 1 + d]$.

Для обычной промежуточной рекомбинации $d = 0$ и $\alpha \in [0, 1]$.

Для обобщенной промежуточной рекомбинации $d > 0$, обычно принимают $d = 0,25$.

Значение каждой переменной, в том числе и для векторов, формируется по приведенному выражению. Отметим, что здесь используются уже чисто арифметические операции (сложение и умножение). Этот оператор совершенно не похож на классический кроссинговер. Фактически он заимствован из другого направления эволюционных вычислений – «эволюционные стратегии». На рисунке 3.11 показан пример выполнения этого оператора для тех же данных, которые использовались в предыдущем примере.

1-й родитель	12	25	5
2-й родитель	123	4	34
Случайно выбраны следующие значения коэффициента α			
1-й образец	0,5	1,1	0,1
2-й образец	0,1	0,8	0,5
1-й потомок	67,5	1,9	2,1
2-й потомок	23,1	8,2	19,5

Рисунок 3.11 – Промежуточная рекомбинация

Для примера подробно рассмотрим выполнение оператора для 1-й компоненты:

$$OF = P_1 + \alpha \cdot (P_2 - P_1) = 12 + 0,5 \cdot (123 - 12) = 67,5.$$

Линейная рекомбинация аналогична предыдущему виду оператора, за исключением того, что значение масштабирующего множителя α одинаково для

всех переменных (компонент) векторов. Пример выполнения этого оператора представлен на рисунке 3.12.

1-й родитель	12	25	5
2-й родитель	123	4	34
Случайно отобраны следующие значения коэффициента α			
1-й образец		$\alpha = 0,5$	
2-й образец		$\alpha = 0,1$	
1-й потомок	67,5	14,5	19,5
2-й потомок	23,1	22,9	7,9

Рисунок 3.12 – Линейная рекомбинация

3.4 Оператор мутации

После выполнения операторов рекомбинации (скрещивания) полученные потомки с вероятностью P_m подвергаются мутации, которая может быть выполнена различными способами.

3.4.1 Двоичная мутация

Классическую мутацию мы уже рассматривали в простом ГА. В этом случае для каждой особи случайно выбирается позиция и с малой вероятностью от $P_m = 0,01$ до $P_m = 0,001$ выполняется инвертирование значения переменной в выбранной позиции. Пример выполнения этого оператора представлен на рисунке 3.13.

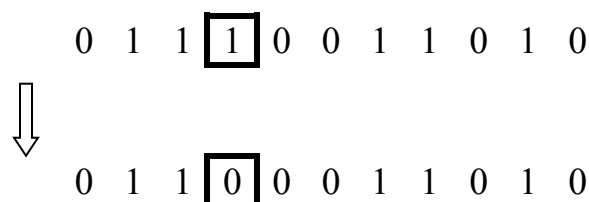


Рисунок 3.13 – Классическая мутация

Иногда используется следующий *оператор инверсии*, фактически являющийся разновидностью мутации. При этом случайным образом выбираются две позиции в особи и далее производится обмен значениями генов между ними. Пример выполнения этого оператора представлен на рисунке 3.14.

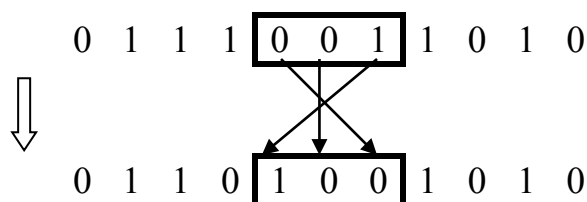


Рисунок 3.14 – Оператор инверсии

3.4.2 Мутация над вещественными числами

Мутация над вещественными потомками выполняется путем сложения особи с небольшим случайным значением, которое называется шагом мутации. Выбор размера шага мутации зависит от рассматриваемой проблемы, и шаг в общем случае может изменяться в процессе решения задачи. Маленький шаг дает большую точность, но ведет к большим временным затратам. Мутация с постоянным шагом и постоянной вероятностью называется однородной.

Оператор *однородной* мутации над вещественным числом выполняется следующим образом:

$$V_m = v \pm r \cdot \Delta,$$

где V , V_m – значения вещественной переменной до и после мутации;

знаки $+$ или $-$ выбираются с равной вероятностью;

$r = 0,5 \times \langle \text{модуль изменения переменной } V \rangle$.

Однородная мутация над вещественными числами выполняется по формуле

$$\Delta = \sum a(i) \cdot 2^{-i},$$

$$a(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } P_1 = \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{if } P_0 = 1 - \frac{1}{m} \end{cases},$$

где m – параметр.

Новая особь, получившаяся при такой мутации, в большинстве случаев немного отличается от предыдущей. Это связано с тем, что вероятность маленького шага мутации выше, чем вероятность большого шага. При $m = 20$ данный алгоритм мутации пригоден для локализации оптимума с точностью $r \cdot 2^{-19}$.

Часто для повышения эффективности поиска вероятность мутации и шаг изменяются в процессе решения задачи. Мутация с постоянной вероятностью может привести как к увеличению, так и к уменьшению значения целевой функции. На этапе сходимости ГА к оптимуму целесообразно уменьшать вероятность случайной мутации. Обычно на начальном этапе $P_m = 0,05 \dots 0,1$, а на конечном этапе вероятность мутации уменьшают. Для реализации этой процедуры иногда используют метод моделирования отжига (simulation annealing), который дает следующий закон изменения вероятности мутации:

$$P_m = P_m^0 \cdot e^{-\frac{1}{t}},$$

где t – номер поколения.

При *неоднородной* мутации изменяется шаг мутации, который в начале имеет достаточно большое значение и далее постепенно уменьшается. Рассмотрим этот тип оператора для векторного случая:

$$S_v^t = \langle V_1, V_2, \dots, V_k, \dots, V_m \rangle,$$

$$V_k \in [l_k, U_k].$$

В результате выполнения мутации получаем следующий вектор (особь популяции):

$$S_v^{t+1} = \langle V_1, V_2, \dots, V_k', \dots, V_m \rangle,$$

$$k \in [1, \dots, m],$$

где компонента вектора вычисляется следующим образом:

$$V_k' = \begin{cases} V_k + \Delta(t, U_k - V_k) & \text{при случайном числе} = 0, \\ V_k - \Delta(t, V_k - l_k) & \text{при случайном числе} = 1, \end{cases}$$

где $\Delta(t, y) \in [0, y]$ и определяет шаг мутации, который с увеличением номера поколения t уменьшается:

$$\Delta(t, y) \rightarrow 0,$$

$$t \rightarrow \infty.$$

Один из вариантов реализации функции, определяющей шаг $\Delta(t, y)$, следующий:

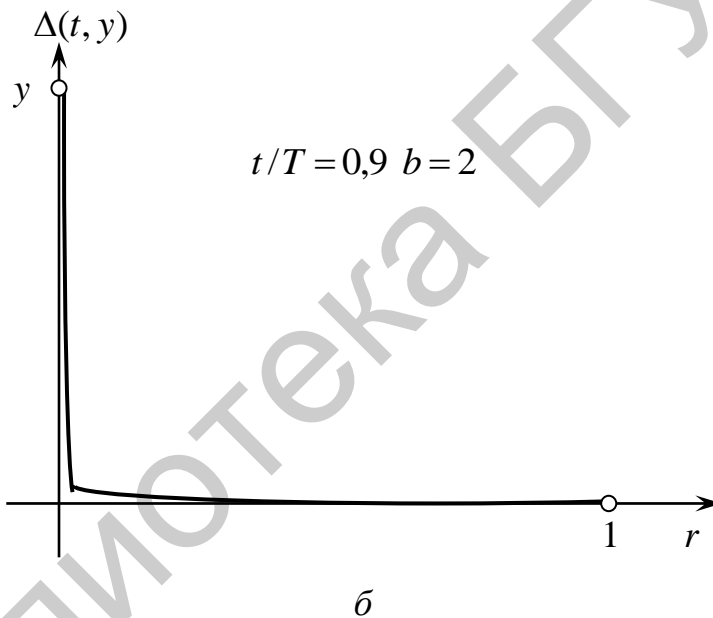
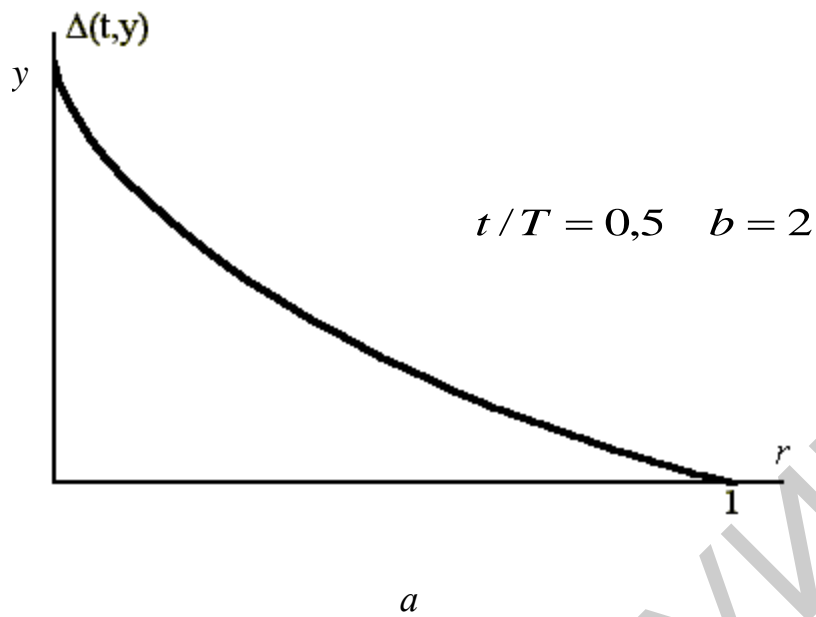
$$\Delta(t, y) = y \cdot \left(1 - r \left(1 - \frac{t}{T} \right)^b \right),$$

где $r \in \{0, 1\}$ (r – случайное число);

T – максимальное число поколений;

$b = 2$ – параметр, определяющий степень неоднородности.

На рисунке 3.15 показан для наглядности график изменения шага мутации, который в пределе стремится к нулю.



a – при $t/T = 0,5$; *б* – при $t/T = 0,9$

Рисунок 3.15 – График изменения шага мутации

3.4.3 Другие виды мутаций

1. Присоединение случайного гена из совокупности всевозможных значений генов к концу последовательности хромосомы.
2. Вставка случайного гена из совокупности всевозможных значений генов в случайно выбранную позицию в последовательности хромосомы.
3. Удаление случайно выбранного гена из последовательности хромосомы.

3.5 Сокращение промежуточной популяции

Необходимой компонентой является устранение плохих решений, полученных в процессе формирования новой популяции.

3.5.1 Глобальная редукция

Промежуточную популяцию (репродукционную группу) составляют все особи t -го поколения, особи, полученные в результате скрещивания и мутации. Тогда численность этой популяции можно определить следующим образом:

$$R^{t+1} = r^t + r_{cr}^t + r_m^t,$$

где r^t – число особей предыдущей популяции;

r_{cr}^t – численность особей, полученных путем скрещивания;

r_m^t – число «мутантов».

Обычно в стационарных ГА мощность популяции поддерживается постоянной $N = |P(t)|$. Поскольку $R^{t+1} > N$, необходимо устранить неудачные решения. Для этого существуют различные методы редукции.

3.5.1.1 Чистая замена

В простейшем случае с помощью скрещивания и мутации генерируется столько потомков, сколько было родителей. Далее родители устраняются, а потомки формируют следующее поколение $P(t + 1)$.

При этом каждая особь живет лишь одно поколение. Такая схема часто используется в простом ГА. Однако при этом есть вероятность, что некоторые очень хорошие решения могут быть заменены худшими, и лучшее решение будет потеряно.

3.5.1.2 Элитарная схема

Создается промежуточная популяция, которая включает в себя как родителей, так и их потомков. Члены этой популяции оцениваются, а затем из них выбираются N самых лучших (пригодных), которые и войдут в следующее поколение. Зачастую данный метод комбинируют с другими – выбирают в новую популяцию, например, 10 % «элитных» особей, а остальные 90 % – одним из традиционных методов селекции. Иногда эти 90 % особей создают случайно, как при создании начальной популяции перед запуском работы генетического алгоритма. Использование стратегии элитизма оказывается весьма полезным для эффективности ГА, так как не допускает потерю лучших решений. К примеру, если популяция сошлась в локальном максимуме, а мутация вывела одну из строк в область глобального, то при предыдущей стратегии весьма вероятно, что эта особь в результате скрещивания будет потеряна, и решение задачи не будет получено. Если же используется элитизм, то полученное хорошее решение будет оставаться в популяции до тех пор, пока не будет найдено лучшее.

3.5.1.3 Отбор вытеснением

В данном отборе выбор особи в новую популяцию зависит не только от величины ее пригодности, но и от того, есть ли в формируемой популяции особь с аналогичным хромосомным набором. Отбор проводится из числа родителей и их потомков. Из всех особей с одинаковой приспособленностью предпочтение сначала отдается особям с разными генотипами. Таким образом, достигаются две цели: во-первых, не теряются лучшие найденные решения, обладающие различными хромосомными наборами; во-вторых, в популяции постоянно поддерживается генетическое разнообразие. Вытеснение в данном случае формирует новую популяцию скорее из удаленных особей вместо особей, группирующихся около текущего найденного решения.

3.5.1.4 Метод Больцмана, или метод отжига (Boltzman selection)

В данном методе вероятность отбора в новую популяцию зависит от управляющего параметра – температуры T . Обычно вероятность попадания в новую популяцию вычисляется по следующей формуле:

$$p = \frac{1}{1 + \exp \frac{f(i) - f(j)}{T}},$$

где $f(i)$ и $f(j)$ – значения целевой функции i и j особей соответственно. Номера особей i и j выбираются случайно. Если значение p окажется больше случайного числа на интервале $(0;1)$, то в новую популяцию попадет особь $f(i)$, в ином случае – $f(j)$.

В данном методе первым поколениям соответствуют высокие температуры, и вероятность отбора особей велика (поддерживается многообразие в новой популяции). Постепенно с ростом количества поколений ГА температура снижается, вероятность отбора уменьшается, и в новую популяцию попадают те особи, приспособленность которых минимальна.

3.5.1.5 Равномерная случайная замена

При таком подходе потомков генерируется меньше, чем было родителей, далее случайно удаляется необходимое число родителей, которые заменяются новыми потомками.

В общем случае к репродукционной группе R^{t+1} может быть применен любой метод отбора родителей из тех, что были рассмотрены в подразделе 3.2.

3.5.2 Локальная замена

При локальном отборе особи выбираются из ограниченного окружения множества соседей. Замена особей потомками выполняется по такой же схеме. Таким образом сохраняется локальность информации. При этом используются те же структуры и отношения соседства, что и в подразделе 2.4.

Родитель особи определяется первым родителем из локального окружения (множества соседей). Для выбора удаляемых родителей и отбора потомков для замены применяются следующие схемы:

- ввести в новое поколение каждого потомка и заменить случайным образом особи из их окружения;

- ввести каждого потомка и заменить худшей особью соответственного окружения;

- ввести потомка более хорошего, чем худшая особь в окружении, и заменить худшие особи.

Библиотека БГУИР

4 Задачи комбинаторной оптимизации

До сих пор мы рассматривали применение ГА в основном при решении задачи численной оптимизации типа поиска экстремумов функции. Но в настоящее время ГА чаще используются для решения задач комбинаторной оптимизации, и в этой области публикуется подавляющая часть научных работ.

Базовой задачей комбинаторной оптимизации является задача коммивояжера. Однако сначала мы рассмотрим задачи об укладке рюкзака и о покрытии, которые допускают использование простого (классического) ГА.

4.1 Задача об укладке рюкзака

Эта задача имеет следующую неформальную простую постановку [4, 5]. Имеются рюкзак объемом C и n различных предметов. Каждый предмет i имеет известный объем W_i и стоимость P_i ($i = 1, \dots, n$). В рюкзак можно положить целое число различных предметов. Нужно упаковать рюкзак так, чтобы полная стоимость уложенных предметов была максимальной, а их общий объем не превышал заданный объем C . Форма предметов здесь не учитывается.

Формальная постановка задачи: для данного множества весов W_i , стоимостей P_i и объема C надо найти двоичный вектор:

$$X = (x_1, \dots, x_n), \text{ где } x_i = \begin{cases} 1, & \text{если предмет помещается в рюкзак,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при этом должно выполняться условие

$$V = \sum_{i=1}^n W_i x_i \leq C \quad \text{и} \quad \sum P_i x_i = \max .$$

Так как решение задачи можно представить двоичным вектором $X = (x_1, \dots, x_n)$, то, очевидно, при его поиске можно применить простой ГА со стандартными операторами скрещивания и мутации. Но при этом на каждом шаге итерации надо следить за тем, чтобы новые решения, полученные в результате скрещивания или мутации, удовлетворяли требуемому ограничению $v \leq C$.

В случае невыполнения ограничения неправильное потенциальное решение должно быть уничтожено, что ведет к сокращению популяции.

В качестве фитнес-функции в простейшем случае можно взять

$$P(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i, \text{ учитывая при этом, как указано выше, проблемы с неправильными решениями.}$$

Данная задача относится к классу задач с ограничениями, при решении которых применяются следующие подходы [1, 5, 7]:

- 1) введение в фитнес-функцию дополнительного штрафа;
- 2) использование алгоритмов «восстановления» некорректных решений.

В первом случае в фитнес-функцию вводится дополнительная штрафная функция, которая для неправильных решений дает большие отрицательные значения ЦФ. При этом задача с ограничениями трансформируется в задачу без ограничений путем назначения штрафа для некорректных решений. Фитнес-функция для каждой особи может быть определена следующим образом:

$$f(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i - Pen(X).$$

Разработано множество методов назначения штрафных значений, из которых ниже рассмотрено только три вида, когда рост значения штрафной функции относительно степени нарушения ограничения имеет логарифмический, линейный и квадратичный характер:

а) $Pen(X) = \log_2(1 + \rho \cdot (\sum_{i=1}^n x_i \cdot W_i - C));$

б) $Pen(X) = \rho \cdot (\sum_{i=1}^n x_i \cdot W_i - C);$

в) $Pen(X) = (\rho \cdot (\sum_{i=1}^n x_i \cdot W_i - C))^2.$

Здесь для всех трех случаев $\rho = \max_{i=1..n} \{P_i / w_i\}.$

Второй подход к решению задач с ограничениями основан на специальных алгоритмах «восстановления» некорректных решений. Следует отметить,

что многие алгоритмы восстановления требуют значительных вычислительных ресурсов, и полученные решения иногда требуют адаптации к конкретным практическим приложениям.

В этом случае в качестве фитнес-функции используется $f(X') = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot P_i$,

где вектор X' – восстановленная версия исходного вектора X . Здесь следует отметить по крайней мере два аспекта. Во-первых, при этом подходе можно использовать различные алгоритмы восстановления. Во-вторых, восстановленные особи могут замещать только некоторую часть исходных особей в популяции. Процент замещаемых особей может варьироваться от 0 до 100 %, и его значение является важнейшим параметром метода восстановления. В некоторых работах отмечается, что наилучшие результаты получаются при 5 %, что лучше, чем в двух крайних случаях – 0 % (без замещения) и 100 % (любая восстановленная особь заменяет исходную). Ниже приведен простой алгоритм восстановления:

Восстановление(X)

```
{
  переполнение_рюкзака=false;
  X'=X;
  if (  $f(X') = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot W_i > C$  )
    then переполнение_рюкзака=true;
  while(переполнение_рюкзака)
  {
    i=выбор предмета из рюкзака;
    // удаление выбранного предмета из рюкзака;
     $x'_i = 0$ ;
  }
  if (  $f(X') = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot W_i \leq C$  )
```

```

        then переполнение_рюкзака=false;
    }
}

```

При этом используются два основных способа выбора объекта:

а) случайный выбор объекта из рюкзака;

б) «жадное восстановление», при котором вначале все предметы сортируются в порядке убывания их стоимости P_i и на каждом шаге для удаления выбирается предмет минимальной стоимости (из имеющихся в рюкзаке).

Третий подход к решению задач с ограничениями использует специальное отображение (декодирование) особей, которое гарантирует генерацию допустимого решения (с учетом ограничений), или проблемно-ориентированные генетические операторы, сохраняющие корректность решения.

Рассмотрим один из возможных вариантов алгоритма декодирования, который основан на кодировании решения вектором целых чисел, так называемом «упорядоченном представлении» (ordinal representation), подробно описанном в пункте 4.3.2. Здесь каждая хромосома кодируется вектором e целых чисел, где i -я компонента вектора – есть целое число в диапазоне от 1 до $n - i + 1$. «Упорядоченное представление» использует для ссылок (базовый) список предметов L . Вектор e фактически содержит указатели на базовый список L . Декодирование вектора осуществляется путем выбора соответствующего предмета из текущего списка и удаления его из базового списка. Например, при базовом списке предметов $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ текущий вектор $e = (4, 3, 4, 1, 1, 1)$ декодируется в следующую последовательность предметов: 4, 3, 6, 1, 2, 5. Первым в рюкзак включается четвертый элемент списка $L - 4$, который устраняется из L . Далее в рюкзак включается третий элемент из текущего списка L . Затем включается предмет «б» – четвертый элемент текущего L и т. д. Подробнее описание этого представления и выполнение кроссинговера на нем описано в пункте 4.3.2. В данном методе хромосома может интерпретироваться как стра-

тегия (порядок) включения предметов в решение. Отметим, что основным достоинством данного кодирования хромосомы является то, что на нем работает одноточечный кроссинговер. То есть для двух допустимых решений-родителей кроссинговер порождает также допустимое решение-потомок. Оператор мутации при данном представлении выполняется путем замены i -го гена (целочисленной компоненты вектора) на случайное целое число из диапазона $[1, \dots, n - i + 1]$.

Алгоритм декодирования представлен ниже:

Декодирование(X)

```

{
  генерация списка предметов  $L$ ;
   $i=1$ ;
  Сумма_весов=0;
  Суммарная_стоимость=0;
  While( $i \leq n$ )
  {
     $j= x_i$ ;
    удаление  $j$ -го предмета из списка  $L$ ;
    if(сумма_весов+ $W_j \leq C$ ) then
    {
      Сумма_весов= Сумма_весов +  $W_j$ ;
      Суммарная_стоимость= Суммарная_стоимость +  $P_j$ ;
    }
     $i=i+1$ ;
  }
}

```

Очевидно, что представленный алгоритм зависит от способа генерации списка предметов L . Обычно используются два метода генерации этого списка:

а) список предметов L генерируется в том порядке, в котором предметы расположены во входном файле (как правило, случайно);

б) список предметов L генерируется в порядке убывания их стоимостей («жадный» алгоритм). Декодирование вектора X выполняется на основе отсортированного вектора. Например, x_{25} интерпретируется как 25-й предмет текущего списка L .

Задача об укладке рюкзака в различных вариантах имеет многочисленные практические приложения. Например, к ней можно свести оптимизацию загрузки транспорта и т. п.

4.2 Задача о покрытии

Есть множество элементов S и множество подмножеств $F(i)$, состоящих из элементов S . Необходимо найти минимальное число подмножеств из F , таких, что объединение этих подмножеств содержит все элементы множества S .

В этом случае решение можно представить двоичным вектором:

$$\bar{X} = (X(1) \dots X(n)),$$

где $X(i) = 1$, если $F(i)$ входит в покрытие;

$X(i) = 0$, если $F(i)$ не входит в покрытие;

При этом

$$\bigcup X(i)F(i) = S,$$

$$\sum X(i) = \min.$$

Очевидно, что для решения этой задачи можно также использовать простой ГА со стандартными операторами кроссинговера и мутации.

4.3 Задача коммивояжера

Напомним постановку этой классической комбинаторной оптимизационной задачи. Коммивояжер должен посетить каждый город на своем участке один раз и вернуться в исходную точку, как это показано, например, на рисунке 4.1.

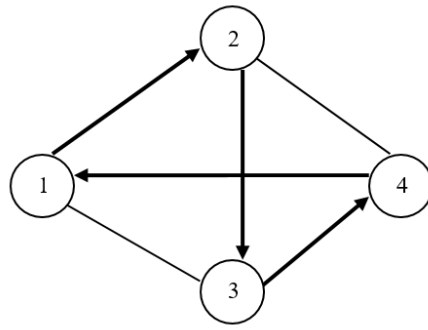


Рисунок 4.1 – Задача коммивояжера

Дана стоимость проезда между каждой парой городов, и необходимо выбрать оптимальный маршрут с минимальной стоимостью тура (обхода всех городов). Пространством поиска решений этой задачи является множество перестановок городов $n!$. Любая простая (одиночная) перестановка n городов дает решение, являющееся полным туром из n городов. Оптимальным решением является перестановка, которая дает минимальную стоимость тура. Известно, что эта задача является NP – полной, т. е. переборного типа. Она имеет многочисленные практические приложения, в которых число «городов» может быть достаточно большим. Например, при производстве плат проблема сверления переходных отверстий имеет ~ 1700 «городов», при производстве СБИС возникают задачи с числом «городов» $\sim 1,0$ млн и т. п. За последние десятилетия разработано достаточно много алгоритмов решения этой задачи, дающих субоптимальное решение. В последнее десятилетие эта задача является базовой для исследования ГА в области комбинаторной оптимизации.

Очевидно, что двоичное представление тура при решении задачи коммивояжера нецелесообразно. Действительно, если мы интересуемся оптимальной перестановкой городов, т. е. (i_1, i_2, \dots, i_n) и используем двоичное представление в виде одного бинарного вектора, то изменение даже в одном бите может дать двоичный вектор, не принадлежащий к области решения, т. е. не являющийся перестановкой n городов.

В последнее время в основном используется три способа представления тура при решении задачи коммивояжера с использованием ГА: 1) представление соседства; 2) представление порядка; 3) представление путей. Для каждого из этих представлений разработаны свои «генетические» операторы. Операторы мутации относительно легко определить на этих представлениях с помощью одиночной перестановки пары городов. Поэтому в дальнейшем мы в основном рассмотрим операторы кроссинговера.

4.3.1 Представление соседства

В этом случае тур представляется списком соседних городов в виде вектора целых чисел. Город j находится в позиции i , только если в туре после города i посещается город j , как это показано на рисунке 4.2.

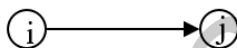


Рисунок 4.2 – Графическое представление тура

Например, вектор – список соседства (2 4 8 3 9 7 1 5 6) представляет следующий тур: 1-2-4-3-8-5-9-6-7.

Любой тур имеет единственное представление списком соседства. Однако некоторые списки соседства могут представлять неправильные туры. Например, список соседства (2 4 8 1 9 3 5 7 6) представляет частичный тур 1-2-4-1, который охватывает только три города. Следовательно, представление списком соседей не поддерживает классический оператор кроссинговера, так как при перестановке частей списков могут получиться неправильные, частичные, туры. Поэтому необходим некоторый алгоритм восстановления полного тура.

Для данного представления были предложены и исследованы три основных оператора кроссинговера: а) обмен ребер (дуг) графа; б) обмен подтуров; в) эвристический кроссинговер. Далее рассмотрим их более детально.

Обмен ребер строит потомка случайным выбором ребра (пары городов $i - j$) из первого родителя, затем выбирает соответствующее ребро из второго родителя и т. д. Оператор наращивает тур выбором ребер из различных родителей. Если новое ребро (одного из родителей) образует преждевременный (частичный) цикл в текущий (еще не полный) тур, то оператор случайным образом выбирает вместо этого ребра одно из оставшихся ребер, которое не дает преждевременного цикла.

Например, для двух родителей

$P_1 = (2\ 3\ 8\ 7\ 9\ 4\ 1\ 5\ 6)$	1-2-3-8-5-9-6-4-7-1
1-й обмен ↓	2-й обмен (неудачный) ↓
$P_2 = (7\ 5\ 1\ 6\ 9\ 2\ 8\ 4\ 3)$	1-7-8-4-6-2-5-9-3-1

Получаем случайным образом (выбрана 6 из оставшихся (6, 4, 3))

$\sigma_1 = (2\ 5\ 8\ 7\ 9\ 1\ 6\ 4\ 3)$ 1-2-5-9-3-8-4-7-6-1

Здесь выполнен (случайный) обмен $3 \rightarrow 5$ во второй позиции. Затем при попытке (случайного) обмена в 7-й позиции $8 \rightarrow 1$ получается преждевременный цикл и случайно выбирается 6 (одна из оставшихся 6, 4, 3).

Обмен подтуров строит потомка путем выбора (случайной длины) подтура из первого родителя, затем выбора подтура (случайной длины) из второго родителя и их обмена. Как и ранее, в случае преждевременного цикла оператор случайно выбирает другое ребро (город из оставшихся/не вошедших в построенный тур).

Эвристическое скрещивание строит потомка случайным выбором города в качестве начальной точки для формирования тура. Затем сравниваются два ребра, исходящие из этого города и имеющиеся в двух родителях, из них выбирается лучшее с меньшей стоимостью. Полученный город (в который входит выбранное ребро на предыдущем этапе) используется в качестве начальной точки при выборе следующего ребра и т. д. Как и ранее, в случае возникновения преждевременного цикла, следующий город выбирается случайно из городов, не вошедших в текущий тур.

Известна следующая модификация этого оператора.

Если оптимальное (с меньшей стоимостью) ребро дает цикл в потомках, то проверяется альтернативное ребро (с большей стоимостью) на генерацию преждевременного цикла. Если это ребро не генерирует цикл, то оно включается в тур, иначе выбирается \min из q (параметр) случайно выбранных из оставшихся городов.

Преимущество этого представления в том, что анализ схем (шаблонов) можно проводить по аналогии с двоичным случаем. Например, схема $(** * 3 * 7 * * *)$ представляет множество всех туров с ребрами $(4, 3)$ и $(6, 7)$. Однако основным недостатком этого представления заключается в весьма посредственных результатах тестовых задач для всех трех рассмотренных операторов. Кроссинговер обмена ребер часто разрывает хорошие туры при обмене ребер родителей. Кроссинговер обмена подтуров дает лучшие результаты, чем предыдущий, так как «отношение разрыва» здесь меньше. Эвристический оператор дает лучшие результаты, так как первые два оператора не учитывают стоимость ребер. С другой стороны, эвристический оператор выбирает лучшее ребро из двух возможных и поэтому дает лучшие результаты. Однако экспериментальные данные также не показывают выдающихся результатов.

4.3.2 Упорядоченное представление

Представляет тур как список из n городов, i -й элемент списка имеет номер от 1 до $n - i + 1$. При этом существует упорядоченный список городов c , который служит для ссылок из упорядоченного представления.

Рассмотрим конкретный пример тура 1-2-4-3-8-5-9-6-7, для которого упорядоченный список $c = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$. Тогда данный тур при этом упорядоченном списке представляется следующим списком ссылок $e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$, что интерпретируется следующим образом.

Первый номер из списка e равен 1, поэтому берем в тур 1-й город из списка c и удаляем его из c . Тогда

Тур 1 и $c = (2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$ $e = (1\ \downarrow 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$

Следующий номер списка e также равен 1, поэтому мы берем и удаляем 1-й город из текущего списка c , добавляем его в тур и передвигаем \downarrow по e . Имеем

$$\text{Тур 1-2 и } c = (3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad e = (1\ \uparrow 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$$

Следующий номер списка e равен 2, поэтому мы удаляем 2-й город из текущего списка c , добавляем его в тур и передвигаем \downarrow по e . Имеем

$$\text{Тур 1-2-4, } c = (3\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$$

Следующий номер в e равен 1, поэтому мы берем в тур и удаляем 1-й город из c текущего c :

$$\text{Тур 1-2-4-3 } \quad c = (5\ 6\ 7\ 8\ 9) \quad e = (1\ 1\ 2\ \uparrow 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$$

Следующий номер в e равен 4, поэтому берем 4-й номер из c :

$$\text{Тур 1-2-4-3-8 } \quad c = (5\ 6\ 7\ 9) \quad e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ \uparrow 3\ 1\ 1)$$

Далее берем 1-й номер из c :

$$\text{Тур 1-2-4-3-8-5 } \quad c = (6\ 7\ 9) \quad e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ \uparrow 3\ 1\ 1)$$

Далее берем 3-й номер из c :

$$\text{Тур 1-2-4-3-8-5-9 } \quad c = (6\ 7) \quad e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ \uparrow 1)$$

Аналогично берем 1-й номер из c и имеем

$$\text{Тур 1-2-4-3-8-5-9-6 } \quad c = (7) \quad e = (1\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 3\ 1\ \uparrow)$$

Последний номер равен 1; получаем в итоге тур 1-2-4-3-8-5-9-6-7.

Основное преимущество упорядоченного представления заключается в том, что классический кроссинговер работает.

Например, для родителей $P_1 = (1\ 1\ 2\ 1\ | \ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$ и $P_2 = (5\ 1\ 5\ 5\ | \ 5\ 3\ 3\ 2\ 1)$, которые соответствуют турам 1-2-4-3-8-5-9-6-7 и 5-1-7-8-9-4-6-3-2 имеем потомков при скрещивании $O_1 = (1\ 1\ 2\ 1\ 5\ 3\ 3\ 2\ 1)$ и $O_2 = (5\ 1\ 5\ 5\ 4\ 1\ 3\ 1\ 1)$, которые представляют туры 1-2-4-3-9-7-8-6-5 и 5-1-7-8-6-2-9-3-4.

Очевидно, что частичные туры слева от точки кроссинговера не изменяются, в то же время частичные туры справа от точки скрещивания рвутся случайным образом. Машинные эксперименты этого представления с использованием классического кроссинговера показывают удовлетворительные результаты.

4.3.3 Представление путей

Вероятно, этот вид представления тура самый рациональный. Например, тур 5-1-7-8-9-4-6-2-3 представляется просто упорядоченным списком городов, входящих в тур (5 1 7 8 9 4 6 2 3).

Совсем недавно для этого представления были определены и исследованы три типа кроссинговера:

- 1) частично соответствующий ОК (partially-mapped PMX);
- 2) упорядоченный ОК (order OX);
- 3) циклический ОК (cycle CX).

Частично соответствующий ОК (PMX) строит потомок путем выбора подпоследовательности тура из одного родителя и сохранения порядка и позиции городов из другого родителя, насколько это возможно. Подпоследовательность из тура выбирается случайно с помощью двух «секущих» точек, которые служат границами для операции обмена. Например, для родителей $P_1 = (1\ 2\ 3\ | \ 4\ 5\ 6\ 7\ | \ 8\ 9)$ и $P_2 = (4\ 5\ 2\ | \ 1\ 8\ 7\ 6\ | \ 9\ 3)$ потомок строится так. Производим обмен выделенными подтурами и получаем

$$T_1 = (X\ X\ X\ | \ 1\ 8\ 7\ 6\ | \ X\ X)$$

$$T_2 = (X\ X\ X\ | \ 4\ 5\ 6\ 7\ | \ X\ X)$$

Этот обмен определяет также отображение $1 \leftrightarrow 4, 8 \leftrightarrow 5, 7 \leftrightarrow 6, 6 \leftrightarrow 7$.

Затем заполняем (вместо X) города из исходных родителей, для которых нет конфликтов (не образуется преждевременный цикл):

$$T_1 = (X \ 2 \ 3 \ | \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ | \ X \ 9)$$

$$T_2 = (X \ X \ 2 \ | \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ 9 \ 3)$$

Далее первый X в O_1 – 1 заменяем на 4, так как имеется отображение $1 \leftrightarrow 4$. Аналогично второй X в потомке O_1 заменяется на 5, и в O_2 X и X заменяются на 1 и 8. В результате получаем

$$O_1 = (4 \ 2 \ 3 \ | \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ | \ 5 \ 9)$$

$$O_2 = (1 \ 8 \ 2 \ | \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ 9 \ 3)$$

Кроссинговер PMX использует подобие (схожесть) по значениям и порядку одновременно.

Упорядоченный ОК (OX) строит потомок выбором подтура из одного родителя с сохранением относительного порядка городов из другого родителя. Например, для родителей $P_1 = (1 \ 2 \ 3 \ | \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ 8 \ 9)$ и $P_2 = (4 \ 5 \ 2 \ | \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ | \ 9 \ 3)$ потомок строится так.

Сначала сегменты между двумя секущими точками копируются в потомки:

$$O_1 = (X \ X \ X \ | \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ | \ X \ X)$$

$$O_2 = (X \ X \ X \ | \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ | \ X \ X)$$

Далее, начиная со второй секущей точки одного родителя, города из другого родителя копируются в том же порядке, пропуская уже присутствующие в построенном подтуре. По достижении конца строки мы продолжаем этот процесс с первой позиции и до первой точки сечения (по кольцу).

После второй точки сечения во втором родителе мы имеем следующую последовательность:

$$9-3-4-5-2-1-8-7-6$$

Удалив из нее 4, 5, 6, 7, поскольку они уже есть в первом родителе, получаем последовательность 9-3-2-1-8. Ее мы помещаем в первый потомок, начиная со второй точки сечения (по кольцу), и получаем

$$T_1 = (2\ 1\ 8\ | 4\ 5\ 6\ 7\ | 9\ 3).$$

Аналогично получаем

$$T_2 = (3\ 4\ 5\ | 1\ 8\ 7\ 6\ | 9\ 2).$$

Оператор кроссинговера ОХ использует то условие, что при представлении тура путем прежде всего важен порядок, т. е., например, два тура 9-3-4-5-2-1-8-7-6 и 4-5-2-1-8-7-6-9-3 идентичны.

Циклический ОК (СХ) строит потомки таким образом, что каждый город вместе со своей позицией идет от одного из родителей. Например, для $P_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$ и $P_2 = (4\ 1\ 2\ 8\ 7\ 6\ 9\ 3\ 5)$ сначала получаем путем выбора первого города из родителя $O_1 = (1X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X)$. Выбор следующего города определяет текущая позиция второго родителя. В нашем примере это город 4, что дает $O_1 = (1\ X\ X\ 4\ X\ X\ X\ X\ X)$. Город 4 в свою очередь имплицитно задает город 8 (из второго родителя), что дает $O_1 = (1\ X\ X\ 4\ X\ X\ X\ 8\ X)$.

Аналогично получаем города 3, 2 в $O_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ X\ X\ X\ 8\ X)$. На этом этапе процесс прерывается, так как выбор $2 \rightarrow 1$ ведет к преждевременному циклу. Поэтому оставшиеся города берем из другого родителя P_2 (с сохранением порядка) и в результате получаем потомков $O_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 6\ 9\ 8\ 5)$ и $O_2 = (4\ 1\ 2\ 8\ 5\ 6\ 7\ 3\ 9)$. Таким образом, оператор ОК СХ сохраняет абсолютные позиции потомков и родителей.

**ЛАБОРАТОРНЫЙ
ПРАКТИКУМ**

Библиотека БГУИР

Лабораторная работа №1

Поиск экстремума функции одной переменной с помощью генетических алгоритмов с бинарным представлением особей

Цель задания

Знакомство с основными понятиями теории генетических алгоритмов. Изучение и реализация классического простого генетического алгоритма с использованием представления решений в форме бинарных строк. Классические генетические операторы, кроссинговер и мутация для бинарных особей.

Постановка задачи

Дана функция одной переменной $y = f(t)$. Найти экстремум данной функции на отрезке $t \in [t_0, t_1]$ с помощью генетического алгоритма с бинарным представлением особей. Иллюстрировать графически динамику поиска экстремума. Программную реализацию выполнить в системе Matlab в виде программного m -модуля.

Варианты задания

1. Найти максимум $f(t) = (1,5t + 0,9)\sin(\pi t + 1,1)$, $t \in [0,5]$.
2. Найти минимум $f(t) = (1,3t + 1,9)\cos(1,1\pi t - 1,5)$, $t \in [-6,6]$.
3. Найти максимум $f(t) = (t + 1,3)\sin(0,5\pi t + 1)$, $t \in [0,7]$.
4. Найти максимум $f(t) = (1,1t - 1,7)\cos(\pi t + 1,5)$, $t \in [-9,9]$.
5. Найти минимум $f(t) = (2,5t + 1,7)\sin(1,1\pi t + 0,7)$, $t \in [0,10]$.
6. Найти минимум $f(t) = (0,5t - 1,4)\cos(0,5\pi t + 1,1)$, $t \in [-9,9]$.
7. Найти максимум $f(t) = (1,7t + 1,5)\sin(0,7\pi t - 1,4)$, $t \in [0,8]$.
8. Найти максимум $f(t) = (0,7t - 1,7)\cos(0,5\pi t + 1,5)$, $t \in [-5,5]$.

Указания к выполнению задания

1. Изучить «Введение» разделы 1 и 3 теоретической части данного учебно-методического пособия.

2. Изучить программный код реализации классического генетического алгоритма на языке C, который находится в свободном доступе на ftp-сервере университета Северной Каролины по адресу <ftp.uncc.edu/coe/evil/prog.c>.

3. На основе изученного материала написать программу в виде *m*-модуля в системе Matlab, решающую поставленную задачу. Исходными данными для программы должны быть:

- размер популяции;
- максимальная размерность особи-решения (количество генов-бит в строке);
- вероятность оператора кроссинговера;
- вероятность оператора мутации;
- максимальное количество поколений.

В процессе поиска решения необходимо отобразить:

- график функции;
- динамику перемещения по нему особей текущей популяции;
- графики лучшего и среднего значений фитнес-функции популяции;
- вещественное значение особи с лучшей фитнес-функцией в текущей популяции;
- значение фитнес-функции для этой особи.

Пример интерфейса приведен на рисунке 1.1.

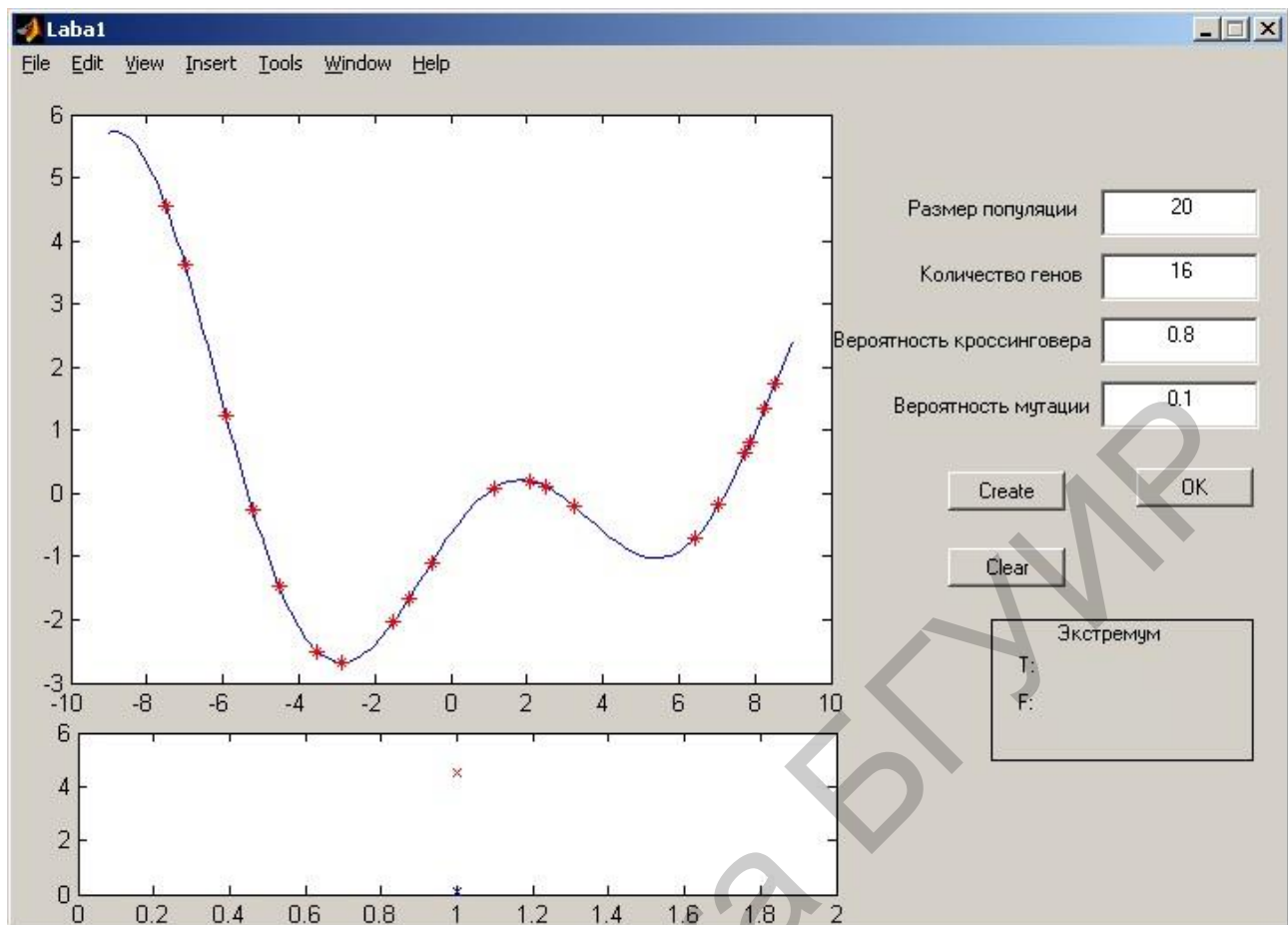


Рисунок 1.1 – Пример интерфейса программы

Контрольные вопросы

1. Поясните смысл понятия «эволюционные вычисления».
2. Перечислите основные парадигмы эволюционных вычислений.
3. Дайте определение понятия «эволюционный поиск». Охарактеризуйте основные особенности эволюционного поиска.
4. Поясните смысл понятия «генетические алгоритмы».
5. Выделите основные отличительные особенности ГА.
6. Охарактеризуйте классический простой ГА.
7. Назовите основные компоненты, которые нужно задать для определения ГА.
8. Поясните понятия «фитнесс-функция особи» и «фитнесс-функция популяции».

9. Опишите классический оператор кроссинговера.
10. Опишите классический оператор мутации.
11. Приведите пример использования простого ГА для поиска максимума функции $f(x) = (x - 2)^2 + 5$ на отрезке $[0,4]$ для целочисленных аргументов.
12. Приведите пример использования простого ГА для поиска минимума функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[0,5]$ для целочисленных аргументов.
13. Приведите пример работы оператора репродукции в простом ГА.
14. Приведите пример работы оператора кроссинговера в простом ГА.
15. Приведите пример работы оператора мутации в простом ГА.
16. Опишите способ представления вещественных решений в бинарной форме.
17. Поясните, в чем преимущество использования кода Грея по сравнению обычным бинарным кодированием особей.
18. Опишите алгоритм преобразования двоичного числа в код Грея.
19. Опишите алгоритм преобразования кода Грея в двоичное число.
20. Опишите матричный способ взаимного преобразования «двоичное число \leftrightarrow код Грея».
21. Опишите основные методы создания исходной популяции.
22. Опишите основные операторы отбора родителей (селекция).
23. Опишите основные бинарные операторы кроссинговера.
24. Опишите основные бинарные операторы мутации.
25. Опишите основные методы сокращения промежуточной популяции.

Лабораторная работа №2

Поиск экстремума функции двух переменных с помощью генетических алгоритмов с представлением особей в форме вещественных чисел

Цель задания

Модификация классического простого генетического алгоритма для задачи многомерного поиска экстремума с использованием представления решений в форме вещественных чисел. Изучение основных операторов вещественной рекомбинации, кроссинговера и мутации. Изучение основных методов селекции в промежуточную популяцию и ее сокращения. Знакомство с теоретическими основами ГА, фундаментальной теоремой ГА.

Постановка задачи

Дана функция $y = f(x_1, x_2)$. Найти экстремум данной функции для заданных $x_i \in [a, b]$ с помощью генетического алгоритма с использованием представления решений в форме вещественных чисел. Иллюстрировать графически динамику поиска точки экстремума (x_1^e, x_2^e) на плоскости $X_1 \times X_2$.

Варианты задания

В качестве вариантов заданий взяты функции из наборов тестовых задач (benchmarks), используемых для апробирования генетических алгоритмов, применяемых для численной оптимизации [2].

1. Найти минимум 2-й функции де Йонга $y = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$, где $x_i \in [-2,048; 2,048]$.

2. Найти минимум 6-й функции Шаффера $y = 0,5 + \frac{\sin^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0,5}{(1 + 0,001(x_1^2 + x_2^2))^2}$,

где $x_i \in [-100; 100]$.

3. Найти минимум 7-й функции Шаффера $y = (x_1^2 + x_2^2)^{0,25} (\sin^2(50(x_1^2 + x_2^2)^{0,1}) + 1)$, где $x_i \in [-100; 100]$.

4. Найти минимум функции Голштейна – Прайса $y = (1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)) \cdot (30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2))$, где $x_i \in [-2; 2]$.

5. Найти минимум функции Исома $y = -\cos(x_1)\cos(x_2)e^{-(x_1-\pi)^2-(x_2-\pi)^2}$, где $x_i \in [-100; 100]$.

6. Найти минимум 1-й функции Бохачевского $y = x_1^2 + 2x_2^2 - 0,3\cos(3\pi x_1) - 0,4\cos(4\pi x_2) + 0,7$, где $x_i \in [-50; 50]$.

7. Найти минимум 2-й функции Бохачевского $y = x_1^2 + 2x_2^2 - 0,3\cos(3\pi x_1)\cos(4\pi x_2) + 0,3$, где $x_i \in [-50; 50]$.

8. Найти минимум функции Растригина $y = 20 + \sum_{i=1}^2 (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i))$, где $x \in (-5, 12; 5, 12)$.

Указания к выполнению задания

1. Изучить раздел 2, подразделы 3.1, 3.2, 3.5 и пункты 3.3.2, 3.4.2 теоретической части учебно-методического пособия.

2. На основе материала, изученного в соответствии с пунктом 1 в данном учебно-методическом пособии, и ранее изученного материала модифицировать m -модуль, полученный в лабораторной работе №1, для решения поставленной задачи. Исходными данными для программы должны быть:

- размер популяции;
- вероятность оператора кроссинговера;

- вероятность оператора мутации;
- максимальное количество поколений.

В процессе поиска решения необходимо графически отображать:

- линии уровня функции на плоскости $X_1 \times X_2$;
- динамику перемещения по плоскости $X_1 \times X_2$ особей текущей популяции относительно линий уровня функции;
- графики лучшего и среднего значений фитнес-функции популяции;
- координаты точки, соответствующей особи с лучшей фитнес-функцией в текущей популяции;
- значение фитнес-функции для этой особи.

Пример интерфейса приведен на рисунке 2.1.

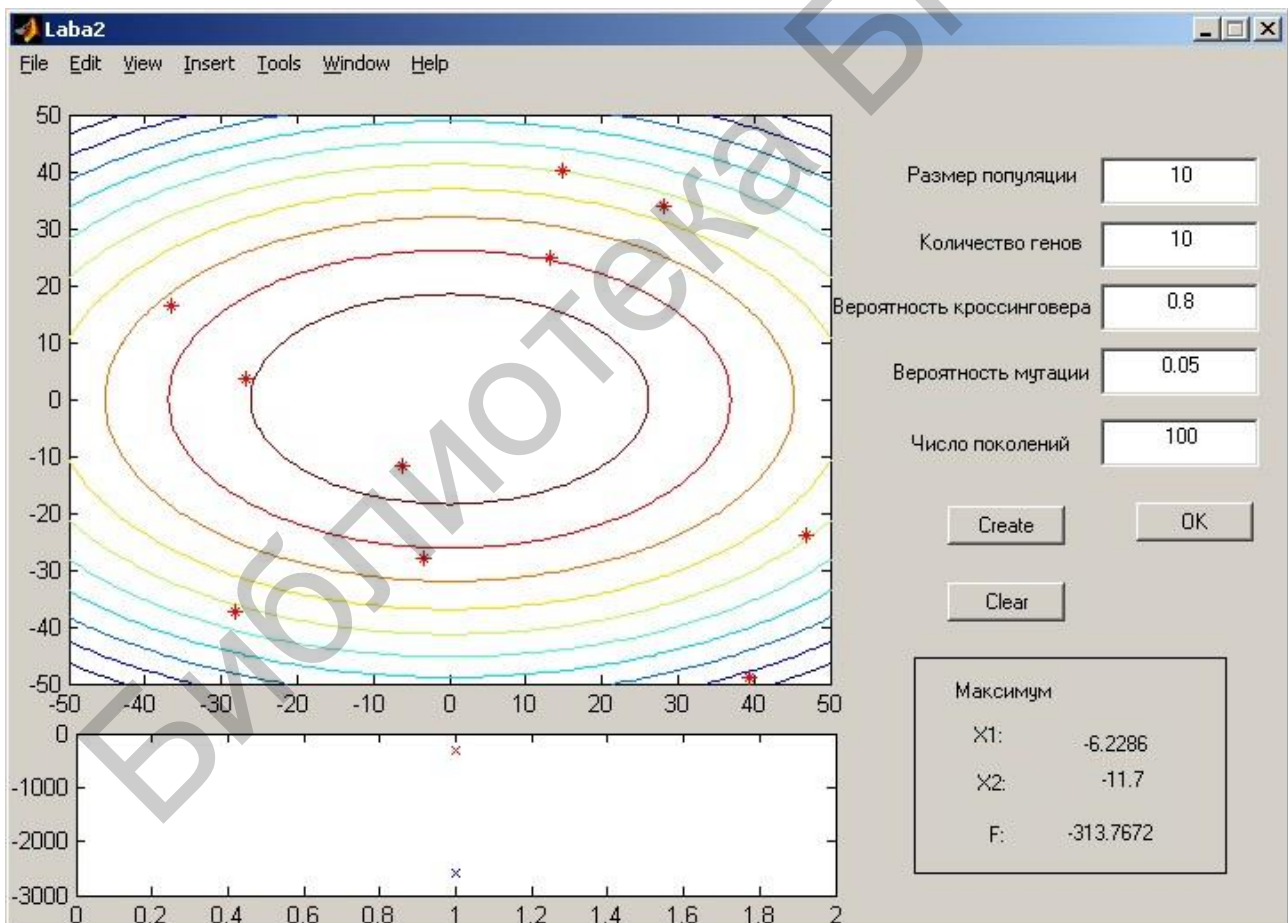


Рисунок 2.1 – Пример интерфейса программы

В качестве оператора кроссинговера использовать многоточечный или однородный кроссинговер, оператора мутации – оператор инверсии. В качестве оператора селекции использовать на выбор оператор ранжирования или турнирного отбора. Провести эксперименты с использованием различных методов сокращения промежуточной популяции.

Контрольные вопросы

1. Поясните понятие «схема» в ГА.
2. Сформулируйте фундаментальную теорему (ФТ) ГА.
3. Изложите часть ФТ для оператора репродукции.
4. Изложите часть ФТ для оператора кроссинговера.
5. Изложите часть ФТ для оператора мутации.
6. Укажите три основных способа создания исходной популяции.
7. Опишите селекцию методом пропорционального отбора (метод «асимметричного колеса рулетки»).
8. Опишите селекцию методом ранжирования.
9. Опишите селекцию методом локального отбора.
10. Опишите селекцию методом отбора на основе усечения.
11. Опишите селекцию методом турнирного отбора.
12. Опишите случайный выбор (панмиксия) пар для скрещивания.
13. Селективный выбор пар для скрещивания.
14. Поясните понятия инбридинга и аутбридинга.
15. Опишите операторы кроссинговера для вещественных особей.
16. Опишите операторы мутации для вещественных особей.
17. Опишите сокращение промежуточной популяции методом чистой замены.
18. Опишите сокращение промежуточной популяции по элитарной схеме.
19. Опишите сокращение промежуточной популяции методом равномерной случайной замены.

20. Опишите сокращение промежуточной популяции методом пропорциональной редукции.

21. Опишите сокращение промежуточной популяции методом локальной замены.

22. Опишите сокращение промежуточной популяции по селекционной схеме.

Библиотека БГУИР

Лабораторная работа №3

Решение задач комбинаторной оптимизации на примере задачи коммивояжера с помощью генетического алгоритма

Цель задания

Знакомство с базовыми задачами комбинаторной оптимизации, их постановками и особенностями решения с помощью ГА. Изучение метода решения задачи коммивояжера с помощью ГА. Изучение основных способов представления особей-туров и основных операторов рекомбинации для каждого представления. Реализация генетического алгоритма, решающего задачу коммивояжера.

Постановка задачи

Дано множество городов, заданных координатами (x_i, y_i) на плоскости. Стоимость перехода от одного города к другому определяется евклидовым расстоянием $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ между ними. Решить задачу коммивояжера, т. е. построить тур обхода всех городов минимальной стоимости, с помощью генетического алгоритма. При решении использовать представление путей, оператор кроссинговера и тестовый пример, указанный в варианте. Иллюстрировать графически поиск оптимального тура.

Варианты задания

1. Частично соответствующий ОК (PMX), файл berlin52.tsp.
2. Упорядоченный ОК (OX), файл eil51.tsp.
3. Циклический ОК (CX), файл eil76.tsp.
4. Частично соответствующий ОК (PMX), файл pr76.tsp.
5. Упорядоченный ОК (OX), файл st70.tsp.
6. Циклический ОК (CX), файл lin105.tsp.
7. Частично соответствующий ОК (PMX), файл kroA100.tsp.

Указания к выполнению задания

1. Изучить раздел 4 теоретической части данного учебно-методического пособия.

2. На основе материала, изученного к данной лабораторной работе, написать программу в Matlab, реализующую генетический поиск оптимального тура в задаче коммивояжера. Использовать *представление путей* тура, оператор кроссинговера и тестовый пример, указанный в варианте. Исходными данными для программы должны быть:

- размер популяции;
- вероятность оператора кроссинговера;
- вероятность оператора мутации;
- максимальное количество поколений;
- тестовый список городов из файла *.tsp.

В процессе поиска решения необходимо графически отображать:

- лучший тур текущей популяции в виде графа;
- лучший тур текущей популяции в виде списка;
- графики лучшего и среднего значений фитнес-функции популяции;
- значение фитнес-функции для этой особи.

Пример интерфейса приведен на рисунке 3.1.

Отладку программы проводить на заданных в файлах *.tsp списках городов. Сравнивать полученные решения с оптимальными, приведенными в файлах *.opt.tour. Демонстрацию программы выполнять на тестовом списке из файла, заданного в варианте. Данные списки городов входят в состав тестовых задач (benchmarks) для генетических алгоритмов, предназначенных для решения задач комбинаторной оптимизации, в нашем случае – задачи коммивояжера (TSP – travel salesman problem). Ниже приводится пример тестового файла.

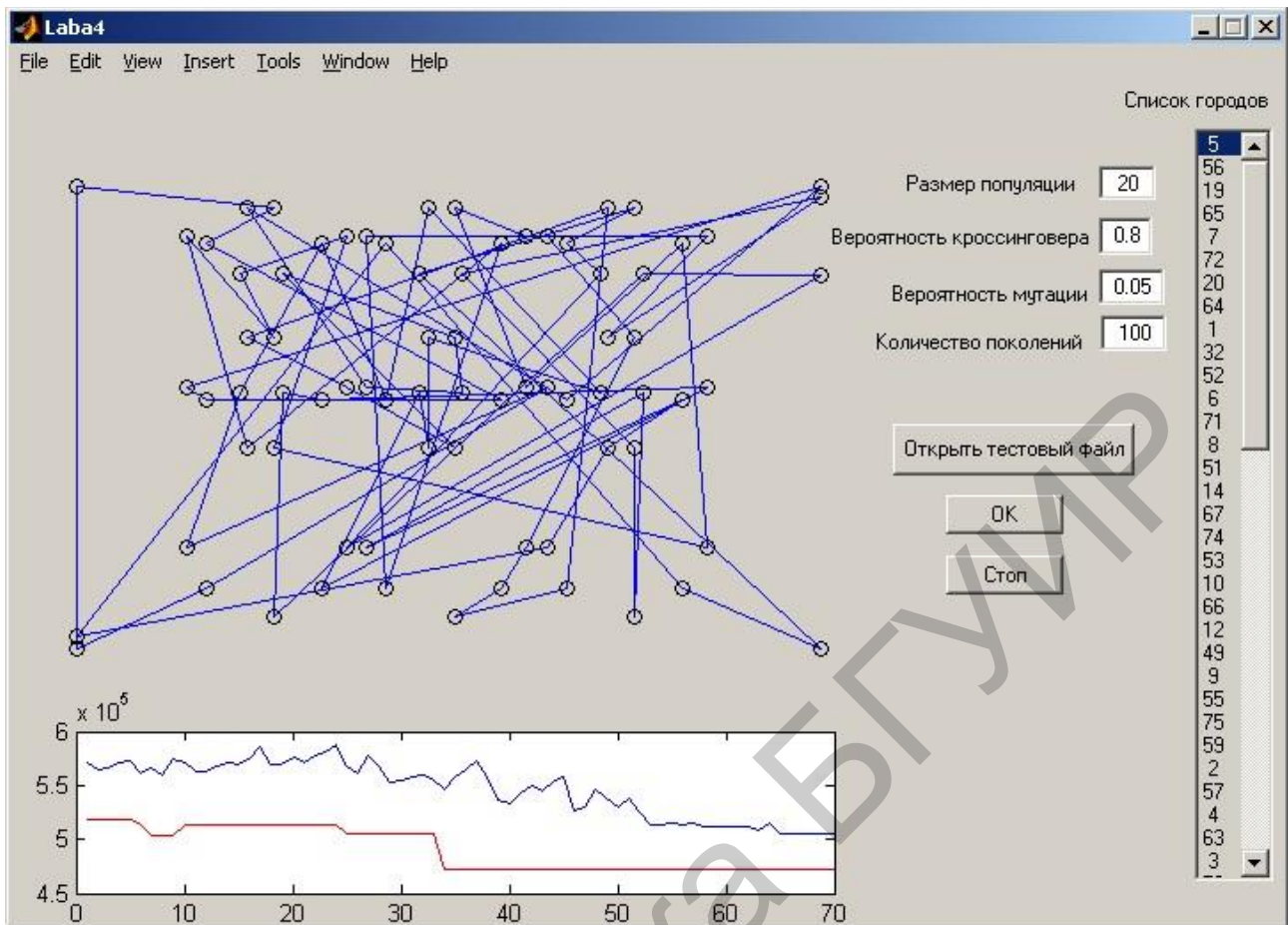


Рисунок 3.1 – Пример интерфейса программы

В поле NAME указывается имя файла; поле COMMENT – некоторые комментарии относительно данного тестового примера, имя города-источника; TYPE – тип проблемы, для которой предназначен тестовый пример, в нашем случае в этом поле во всех файлах будет указано TSP; DIMENSION – размерность примера, количество точек в туре; EDGE_WEIGHT_TYPE – метод оценки веса ребра в туре или расстояние между точками, в нашем случае применяется евклидово расстояние, поэтому во всех тестовых файлах указано EUC_2D; далее приводится раздел координат городов NODE_COORD_SECTION.

Таким образом, структура файла единообразна, проста и понятна:

NAME : eil51

COMMENT : 51-city problem (Christofides/Eilon)

TYPE : TSP

DIMENSION : 51

EDGE_WEIGHT_TYPE : EUC_2D

NODE_COORD_SECTION

1 37 52

2 49 49

3 52 64

4 20 26

5 40 30

6 21 47

7 17 63

8 31 62

9 52 33

10 51 21

11 42 41

12 31 32

13 5 25

14 12 42

15 36 16

16 52 41

17 27 23

18 17 33

19 13 13

20 57 58

21 62 42

22 42 57

23 16 57

24 8 52

25 7 38

26 27 68

27 30 48
28 43 67
29 58 48
30 58 27
31 37 69
32 38 46
33 46 10
34 61 33
35 62 63
36 63 69
37 32 22
38 45 35
39 59 15
40 5 6
41 10 17
42 21 10
43 5 64
44 30 15
45 39 10
46 32 39
47 25 32
48 25 55
49 48 28
50 56 37
51 30 40
EOF

Библиотека БГУИР

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу об укладке рюкзака и ее математическую постановку для решения с помощью ГА.
2. Сформулируйте задачу о покрытии и ее математическую постановку для решения с помощью ГА.
3. Сформулируйте задачу о коммивояжере и ее математическую постановку для решения с помощью ГА.
4. Приведите основные способы представления тура в ГА и их особенности.
5. Опишите представления соседства.
6. Опишите оператор кроссинговера для представления соседства «обмен ребер». Приведите пример.
7. Опишите оператор кроссинговера для представления соседства «обмен подтуров». Приведите пример.
8. Опишите оператор кроссинговера для представления соседства «эвристическое скрещивание». Приведите пример.
9. Опишите упорядоченное представления тура. Какой оператор кроссинговера применим для него? Приведите пример.
10. Опишите представление путей. Приведите частично соответствующий оператор кроссинговера (PMX).
11. Опишите представление путей. Приведите упорядоченный оператор кроссинговера (OX).
12. Опишите представление путей. Приведите циклический оператор кроссинговера (CX).

Список литературы

1. Michalevich, Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs / Z. Michalevich. – Third, revised and extended edition. – Berlin : Springer-Verlag, 1999. – 387 p.
2. Goldberg, D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning / D. E. Goldberg. – MA : Addison-Wesley, 1989. – 215 p.
3. Holland, J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence / J. H. Holland. – MI : University of Michigan Press, 1975. – 210 p.
4. Курейчик, В. М. Генетические алгоритмы и их применение / В. М. Курейчик. – 2-е изд., доп. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2002. – 242 с.
5. Скобцов, Ю. А. Основы эволюционных вычислений / Ю. А. Скобцов. – Донецк : ДонНТУ, 2008. – 326 с.
6. Скобцов, Ю. А. Эволюционные вычисления: учеб. пособие / Ю. А. Скобцов, Д. В. Сперанский. – М. : Нац. открытый ун-т «ИНТУИТ», 2015. – 331 с.

Учебное издание

Скобцов Вадим Юрьевич
Лапицкая Наталья Владимировна
Нестеренков Сергей Николаевич

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ:
ГЕНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *А. К. Мяделко*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *О. И. Толкач*

Подписано в печать 14.06.2018. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,46. Уч.-изд. л. 5,1. Тираж 40 экз. Заказ 70.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
ЛП №02330/264 от 14.04.2014.
220013, Минск, П. Бровки, 6