УДК 519.1

ПОКРЫТИЕ ГРАФА НЕСМЕЖНЫМИ ЦЕПЯМИ ФИКСИРОВАННОГО ПОРЯДКА

О.И. Дугинов, А.Б. Жиркевич
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Рассматривается NP-полная задача покрытия графа вершинно-непересекающимися цепями порядка k, $k \geq 3$. Установлена NP-полнота задачи в специальных классах графов. Найдены классы графов, для которых задача решается за полиномиальное время. Полученные результаты уточняют границу между NP-полными и полиномиально разрешимыми случаями задачи.

Введение

Задача H-Разбиение, в которой требуется определить существует ли в заданном графе G набор несмежных (т.е. вершинно-непересекающихся) подграфов, изоморфных фиксированному графу H и покрывающих все вершины графа G, широко изучается в области теории графов [1 – 5], начиная с 80-х годов XX века [4]. Хорошо известно, что задача является NP-полной для любого связного графа H, порядок которого не меньше 3 [4].

В работе рассматриваются вопросы вычислительной сложности для частного случая указанной задачи, в котором предполагается, что фиксированный граф H изоморфен простой цепи P_k порядка k (задача $\mathrm{P_K}$-Разбиение). Если $k = 2$, то задача $\mathrm{P_K}$-Разбиение представляет собой классическую задачу распознавания наличия в заданном графе совершенного паросочетания. Задача $\mathrm{P_K}$-Разбиение для случая $k = 3$, с точки зрения вычислительной сложности, хорошо изучена [6 – 10]. В отличии от случая $k \geq 4$, который остаётся малоизученным и является основным объектом исследований в данной работе.

Постановка задачи и обзор известных результатов

Рассматриваются неориентированные конечные графы $G = (V, E)$ без кратных рёбер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством рёбер $E = E(G)$. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [14, 15].

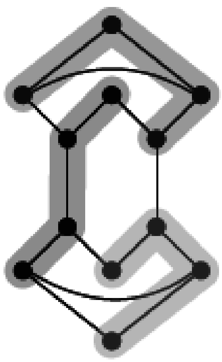
Пусть k – произвольное натуральное число, $k \geq 3$ и $G = (V, E)$ – граф с числом вершин, кратным k. Тогда *P_k-разбиением* графа G называется такое разбиение множества вершин $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{|V|/k}$ графа, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, |V|/k\}$ выполняются следующие два условия:

(a) $|V_i| = k$;

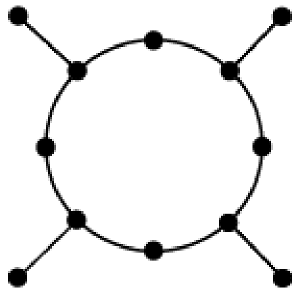
(b) подграф графа G, порождённый множеством вершин V_i, содержит подграф, изоморфный простой цепи P_k.

Будем говорить, что P_k-разбиение графа является *порождённым*, если для каждого множества V_i ($i \in \{1, 2, \ldots, |V|/k\}$) подграф графа G, порождённый множеством V_i, изоморфен простой цепи P_k.

На рис. 1 приведен пример графа, для которого существует P_4-разбиение (подмножества вершин, образующие соответствующее разбиение множества вершин графа, выделены серым цветом) и пример графа, для которого не существует P_4-разбиения вершин. Нетрудно указать бесконечное семейство графов, для которых существует P_k-разбиение (например, гамильтоновы графы с числом вершин, кратным k); бесконечное семейство графов, для которых существует порождённое P_k-разбиение (например, простые цепи и простые циклы, порядки которых кратны k) и, наконец, бесконечное семейство графов, для которых нет ни P_k-разбиения, ни порождённого P_k-разбиения (например, звёзды $K_{1,t\cdot k-1}$).



а)



б)

Рис. 1. Примеры графов: *а*) граф, для которого существует P_4-разбиение; *б*) граф, для которого нет P_4-разбиения

Рассматривается задача P$_\text{K}$-Разбиение и её «порождённый» вариант:

(Порожденное) P$_\text{K}$-Разбиение

Условие: задан граф $G = (V, E)$ с числом вершин, кратным k;

Вопрос: существует ли (порождённое) P_k-разбиение графа G?

Обе задачи изучаются в литературе и находят практическое применение в области телекоммуникационных технологий [8].

Отметим, что задача Порождённое P$_\text{K}$-Разбиение представляет собой частный случай известной задачи Разбиение на Изоморфные

Графы [11] и является NP-полной в классе двудольных планарных графов [12]. Более того задача остаётся NP-полной даже в классе двудольных графов с максимальной степенью вершин 3 (для любого фиксированного $k \geq 3$) [8] и в классе двудольных планарных графов с максимальной степенью вершин 3 (для k = 3) [8]. В таблице 1 приведён сложностной статус задачи P_K-Разбиение в различных классах графов.

Таблица 1

Сложностной статус задачи P_K-Разбиение в различных классах графов (знаком вопроса отмечены ситуации, в которых сложность решения задачи неизвестна)

Класс графов	$k = 3$	$k \geq 4$
Класс всех графов	NP-полная [4]	NP-полная [4]
Двудольные планарные графы	NP-полная [12]	NP-полная [12]
Хордальные графы	NP-полная [10]	?
Расщепляемые графы	Полиномиально разрешима [10]	?
Двудольные графы с максимальной степенью вершин 3	NP-полная [8]	NP-полная [8]
Двудольные планарные графы с максимальной степенью вершин 3	NP-полная [8]	?
Графы решётки с максимальной степенью вершин 3	NP-полная [10]	?
Интервальные графы	Полиномиально разрешима [10]	?
Связные графы решётки, в которых каждое ребро содержится в некотором цикле C_4	Полиномиально разрешима [13]	?
Кографы	Полиномиально разрешима [10]	?
Деревья	Полиномиально разрешима [6]	Полиномиально разрешима [8]

Полученные результаты

В работе [8] Монно и Тулуз установили NP-полноту задачи P_K-Разбиение для k = 3 в классе двудольных планарных графов с максимальной степенью вершин 3 и поставили следующий вопрос: какова сложность решения задачи в этом классе графов для фиксированного $k \geq 4$? Мы даём ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Для любых фиксированных натуральных чисел* $k \geq 3$, $\ell \geq 1$ *и* $g \geq 3$ *задача* P_K-Разбиение *в классе двудольных планарных* $(H_1, H_2, \ldots, H_\ell)$*-свободных графов с максимальной степенью вершин 3 и* *обхватом не меньше g является NP-полной, где H_i – это граф, который получается из двух копий простой цепи P_3 путём соединения центральных вершин простой цепью длины i* (*рис*. 2).

Рис. 2. Граф H_i

Аналогичное утверждение справедливо для задачи ПОРОЖДЁННОЕ P_K-РАЗБИЕНИЕ. Доказательство теоремы основывается на применении техники локальных преобразований графа, уменьшающих степени вершин [16]. Сведение строится от задачи P_K-РАЗБИЕНИЕ, ограниченной классом двудольных планарных графов (рис. 3).

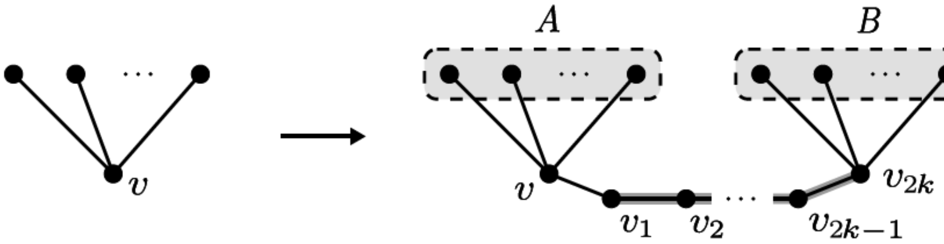


Рис. 3. Фрагмент сведения (здесь $N(v) = A \cup B$)

Теорема 2. *Для любого фиксированного натурального числа* $k \geq 4$ *задача* P_K-РАЗБИЕНИЕ *в классе расщепляемых графов является NP-полной*.

Сведение строится от NP-полной задачи ТРЁХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ [11].

Следствие 1. *Для любого фиксированного натурального числа* $k \geq 4$ *задача* P_K-РАЗБИЕНИЕ *в классе хордальных графов является NP-полной*.

Теорема 3. *Для любого фиксированного натурального числа* $k \geq 3$ *задача* P_K-РАЗБИЕНИЕ *в классе графов с диаметром не более 2 является NP-полной*.

Теорема 4. *Для любого фиксированного натурального числа* $k \geq 3$ *задача* ПОРОЖДЁННОЕ P_K-РАЗБИЕНИЕ *в классе графов с диаметром не более 2 является NP-полной*.

Доказательство этой теоремы основывается на свойствах порождённого P_k-разбиения графа, имеющего точку сочленения.

Теорема 5. *Для любого фиксированного натурального числа* $k \geq 3$ *задача* P_k-РАЗБИЕНИЕ *в классе графов пересечений единичных интервалов решается за полиномиальное время*.

Список литературы

1. Yuster, R. Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition / R. Yuster // Computer Science Review. – 2007. – Vol. 1. – P. 12-26.

2. Loebl, M. Subgraph packing — a survey / M. Loebl and S. Poljak // Topics in Combinatorics and Graph Theory: Essays in Honour of Gerhard Ringel, editors: R. Bodendiek, R. Henn. – 1990. – P. 491-503.

3. Akiyama, J. Factors and factorizations of graphs – a survey / J. Akiyama, M. Kano // Journal of Graph Theory. – 1985. – Vol. 9, № 1. – P. 1-42.

4. Hell, P. On the complexity of general graph factor problems / P. Hell, D. Kirkpatrick // SIAM Journal on Computing. – 1983. – Vol. 12. – P. 601-609.

5. Cameron, K. Independent packings in structured graphs / K. Cameron, P. Hell // Mathematical Programming. – Vol. 105. – P. 201-213.

6. Masuyama, S. Chain packing in graphs / S. Masuyama, T. Ibaraki // Algorithmica. – 1991. – Vol. 6. – P. 826–839.

7. Akiyama, J. Packing paths perfectly / J. Akiyama, V. Chvàtal. // Discrete Mathematics. – 1990. – Vol. 85, № 3. – P. 247-255.

8. Monnot, J. The path partition problem and related problems in bipartite graphs / J. Monnot, S. Toulouse // Operations Research Letters. – 2007. – Vol. 35, № 5. – P.677-684.

9. Akiyama, J. Factors and Factorizations of Graphs: Proof Techniques in Factor Theory / J. Akiyama, M. Kano. – Springer-Verlag, Berlin, 2011. – P. 368.

10. Partitioning perfect graphs into stars / R. van Bevern et. al // Journal of Graph Theory. – 2017. – Vol. 85, № 2. – P. 297-335.

11. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – С. 412.

12. Dyer, M. On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs / M. Dyer, A. Frieze // Discrete Applied Mathematics. – 1985. –Vol. 10. – P.139-153.

13. Akiyama, J. Path factors of a graph / J. Akiyama, M. Kano // Graphs and applications. – 1985. – P. 1-21.

14. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев и др. – М.: Либроком, 2015. – С. 390.

15. Brandstädt, A. Graph Classes: A Survey / A. Brandstädt, V. B. Le, J. Spinrad. – SIAM, 1999. – P. 295.
16. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs / V.E. Alekseev [et al.] // Theoretical Computer Science. – 2007. – Vol. 389. – P. 219-236.