

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

---

Кафедра радиотехнических устройств

**В. А. Чердынцев, В. В. Дубровский**

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие  
для студентов специальности I-39 01 03  
«Радиоинформатика»

Минск 2005

УДК 621.396.9 (075.8)  
ББК 32.841 я73  
Ч 45

Рецензент: главный конструктор ООО «Демерес», д-р техн. наук, доцент  
С. Р. Гейстер

Чердынцев В. А.

Ч 45 **Оптимизация информационных систем:** Учебное пособие для студентов специальности I-39 01 03 «Радиоинформатика» / В. А. Чердынцев, В. В. Дубровский. – Мн.: БГУИР, 2005. – 182 с.: ил.

ISBN 985-444-856-8

В учебном пособии с единых позиций рассмотрены методы статистического синтеза и оптимизации радиоэлектронных информационных систем.

Изложены общие сведения об информационных системах, основы статистической радиотехники, информационные критерии при синтезе оптимальных систем. Определены алгоритмы обнаружения, различения, оценки, фильтрации и разрешения информационных сообщений на фоне некоррелированных гауссовских и негауссовских помех.

Дана методика оценки помехоустойчивости приема, приведены характеристики качества основных информационных систем.

УДК 621.396.9 (075.8)  
ББК 32.841 я73

ISBN 985-444-856-8

© В. А. Чердынцев, В. В. Дубровский, 2005  
© БГУИР, 2005

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Программой подготовки инженеров по специальности «Радиоинформатика» предусмотрено изучение дисциплины «Методы оптимизации информационных систем» (МОИС), целью которой является освещение методологии методологии и приобретение навыков структурно-функционального синтеза и анализа алгоритмов оптимальной обработки сигналов в радиоэлектронных информационных системах с учетом действующих помех. Дисциплина обеспечивает системный подход к проектированию систем извлечения и передачи информации, позволяет проводить обоснованный выбор сигналов и структурно-функциональных схем их обработки.

Учебное пособие включает все разделы программы дисциплины «Методы оптимизации информационных систем», в том числе общие сведения о радиоэлектронных информационных системах, методы оптимального обнаружения и различения, оценки и фильтрации информационных параметров сигнала. В пособие включены вопросы пространственно-временной обработки сигналов, разрешения сигналов, а также основные понятия теории информации и ее приложения к задачам оптимизации сигналов и систем.

Пособие требует от читателя знаний основ теории вероятностей и случайных процессов в объеме базовых дисциплин, предусмотренных учебным планом специальности «Радиоинформатика». Каждая глава пособия завершается контрольными вопросами и заданиями.

Основу материала пособия положен первый раздел книги «Радиотехнические системы» [3]. Дополнительно рассмотрены вопросы обнаружения и различения сигналов на фоне коррелированных и негауссовских помех; несколько расширена глава «Информационные критерии в задачах синтеза сигналов и систем». Существенно переработан и дополнен иллюстративный материал. С использованием мощной системы компьютерной математики MATLAB промоделированы основные алгоритмы формирования и обработки сигналов в информационных системах. Параметры моделей максимально приближены к натурным испытаниям, что, на взгляд авторов, позволит читателю глубже уяснить особенности функционирования той или иной оптимальной схемы обработки. Результаты моделирования приведены в пособии в виде осциллограмм. В соответствии с приведенными формулами рассчитаны характеристики обнаружения и различения, тела и сечения функций неопределенности реальных сигналов.

Пособие будет полезно студентам, магистрантам и аспирантам смежных с радиоинформатикой специальностей: радиотехники, радиоэлектронных систем, радиоэлектронной защиты информации.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

А	– антенна
АИМ	– амплитудно-импульсная модуляция
АКФ	– автокорреляционная функция
АМ	– амплитудная модуляция
АМн	– амплитудная манипуляция
АРУ	– автоматическая регулировка усиления
АЦП	– аналого-цифровой преобразователь
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
БВК	– блок весовых коэффициентов
БМ	– балансная модуляция
ВИМ	– времяимпульсная модуляция
ВЧ	– высокие частоты
Г	– генератор (гетеродин)
ГМК	– генератор модулирующего колебания
ГН	– генератор несущей
ГОН	– генератор опорного напряжения
ГОС	– генератор опорного сигнала
ГС	– генератор сигнала
ГСЧ	– генератор сетки частот
ГТИ	– генератор тактовых импульсов
ГТЧ	– генератор тактовой частоты
ГУН	– генератор, управляемый напряжением
Д	– дискриминатор (детектор)
ДМ	– демодулятор
ДН	– диаграмма направленности
ДО	– детектор огибающей
ДХ	– дискриминационная характеристика
ДЧМ	– дискретная частотная манипуляция
ЗГ	– задающий генератор
И	– источник
ИКМ	– импульсно-кодовая модуляция
Инт	– интегратор
ИС	– источник сообщения
К	– коммутатор
Кв	– квадратор
КВЧ	– крайне высокие частоты
КМ	– канальный модулятор
Кор	– коррелятор
ЛЗ	– линия задержки
ЛФ	– линейный фильтр
ЛЧМ	– линейная частотная модуляция
М	– модулятор
НЧ	– низкие частоты
НЭ	– нелинейный элемент
ОБП	– одна боковая полоса
Огр	– ограничитель
ОН	– опорное напряжение
ОСДП	– обратная связь по дискретному параметру
ОСФ	– окончательный согласованный фильтр

ОУ	– оконечное устройство
ОФМ	– относительная фазовая манипуляция
ПГ	– подстраиваемый генератор
ПСП	– псевдослучайная последовательность
ПСС	– псевдослучайный сигнал
ПУ	– пороговое устройство
ПФ	– полосовой фильтр
РПДУ	– радиопередающее устройство
РПрУ	– радиоприемное устройство
РСОС	– регистр сдвига с обратными связями
РЭС	– радиоэлектронная информационная система
РЭС ПИ	– радиоэлектронная информационная система передачи информации
РУ	– решающее устройство
РФ	– режекторный фильтр
РЭА	– радиоэлектронная аппаратура
СВЧ	– сверхвысокие частоты
СД	– синхронный демодулятор (детектор)
ССЗ	– схема слежения за задержкой
СУ	– синхронизирующее устройство
СФ	– согласованный фильтр
ТЧ	– тональная частота
У	– усилитель
УВЧ	– ультравысокие частоты
УГ	– управляемый генератор (гетеродин)
УЛЗ	– управляемая линия задержки
УМ	– усилитель мощности
УО	– усилитель-ограничитель
УПР	– устройство принятия решения
УПЧ	– усилитель промежуточной частоты
УС	– устройство синхронизации
УУ	– устройство управления
УЭ	– управляющий элемент
Ф	– фильтр
ФАП	– фазовая автоподстройка
ФАПЧ	– фазовая автоподстройка частоты
ФАР	– фазированная антенная решетка
ФД	– фазовый дискриминатор (детектор)
ФИМ	– фазоимпульсная модуляция
ФМ	– фазовая модуляция
ФМн	– фазовая манипуляция
ФНЧ	– фильтр нижних частот
ФЧХ	– фазочастотная характеристика
ЦАП	– цифроаналоговый преобразователь
ЧАП	– частотная автоподстройка
ЧД	– частотный дискриминатор
ЧИМ	– частотно-импульсная модуляция
ЧМ	– частотная модуляция
ЧМн	– частотная манипуляция
ЧРК	– частотное разделение каналов
ШПС	– шумоподобный сигнал
ЭМС	– электромагнитная совместимость

# ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Радиоэлектронной информационной системой (РЭИС)** называют организованную совокупность устройств, предназначенных для передачи, извлечения, обработки и накопления определенной информации с использованием радиоволн.

**Информация** отражает сведения (сообщения) о свойствах различных объектов, изменении их состояния, процессах, происходящих в природе, производстве, обществе. **Сообщение** – это материальная форма воплощения информации. Переносчиками сообщений в радиоэлектронных информационных системах служат электромагнитные колебания, образующие радиосигнал. Совместное использование нескольких РЭИС приводят к образованию радиоэлектронного информационного комплекса, или «большой» РЭИС.

РЭИС, как и любые другие технические системы, строятся по определенным системным принципам. Перечислим эти принципы.

1. **Целостность (единство)** – наличие у системы общей цели, общего назначения. Совокупность компонентов системы создает качественно новое образование, свойства которого не являются простой суммой свойств составляющих систему частей. Из свойств частей нельзя вывести свойства системы.

2. **Структурность** – возможность описания системы посредством установления ее структуры, обусловленность поведения системы поведением ее отдельных частей и свойствами ее структуры.

3. **Иерархичность**, позволяющая рассматривать каждую часть системы как систему, а изучаемую систему представлять как одну из частей более сложной системы.

4. **Сложность** поведения системы – наличие сложных взаимосвязей между переменными системами, при которых изменение одной переменной обуславливает изменение многих других.

5. **Множественность описания системы**, обусловленная ее сложностью и требующая построения множества различных моделей, которые описывают определенные свойства системы.

6. **Большое число составных частей, выполняемых функций, входов, высокая стоимость системы.**

7. **Нерегулярность и случайность возмущений**, исключающих точное предсказание выходного эффекта системы.

8. **Использование средств автоматизации**, вычислительной техники, микропроцессоров, позволяющих обеспечить гибкое, оперативное и автоматизированное управление системой.

В соответствии с системным подходом, при котором объекты изучения, изготовления и эксплуатации рассматриваются как системы, в РЭИС можно выделить ряд подсистем: подсистему, характеризующую принцип действия; подсистему технических средств; подсистему эксплуатации. Подсистема принципа действия определяется принципом использования радиоволн в данной РЭИС для выдачи определенной информации (передачи, извлечения, обработки и накопления) с учетом специфики распространения радиоволн, действия помех. Подсистема технических средств РЭИС (радиоэлектронная аппаратура – РЭА) включает электрическую схему, конструкцию, технологию и производство с учетом действия на РЭА различных дестабилизирующих факторов (температуры, механических нагрузок). Подсистема эксплуатации включает как техническое обслуживание, так и организацию взаимосвязи между большой системой и РЭИС.

Подсистемы связаны с этапами **жизненного цикла РЭИС**. Выделяют следующие этапы: 1) замысел; 2) исследование; 3) проектирование; 4) производство; 5) эксплуатация; 6) модернизация; 7) утилизация. На первом этапе определяются потребности в создании РЭИС, принципы ее действия, технико-экономические возможности реализации на данном этапе развития схемотехники, конструирования и технологии, производства и эксплуатации, формируется задание на проектирование РЭИС. На втором этапе проводятся теоретические и экспериментальные исследования проблем, связанных с использованием радиоволн для выдачи информации в условиях действия помех, учитываются новые направления в схемотехнике, конструировании и технологии, производстве и эксплуатации. Третий этап связан с разработкой принципа действия системы, созданием схем, конструкций и технологии производства аппаратуры. Проектирование включает последовательность работ, обеспечивающих проведение исследований, принятие решений и создание конструкторской, технологической и эксплуатационной документации. На этапе производства создают необходимые изделия РЭА, входящие в состав РЭИС. Основной при этом является документация, выработанная в процессе проектирования, кроме того, необходим определенный уровень технологии. Содержание этапа эксплуатации РЭИС – подготовка и применение РЭИС по назначению, техническое обслуживание аппаратуры, хранение и транспортировка. С целью увеличения продолжительности жизненного цикла могут быть подвергнуты модернизации отдельные части РЭИС или РЭИС в целом. После прекращения действия системы принимается решение о дальнейшем использовании ее отдельных устройств.

Указанные этапы жизненного цикла, особенности и содержание решаемых задач зависят от конкретной РЭИС, а также от уровня развития радиотехники в целом.

## 1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

В основу классификации РЭИС могут быть положены различные признаки, главными из которых являются содержание информации, вид и назначение системы, характер сообщений, диапазон используемых частот и т.д. На основе информационного признака выделяют следующие РЭИС: передачи информации; извлечения информации; управления движением и разрушения информации.

Особенностью РЭИС передачи информации (РЭИС ПИ) является наличие в ней отправителя и получателя информации. Сообщения, заключенные в радиосигнале, передаются по радиоканалу из пункта излучения в пункт приема. Структурная схема РЭИС ПИ, независимо от ее конкретного вида и назначения, включает следующие элементы (рис. 1.1): источники сообщений (ИС), выдающие первичные сигналы; формирователь группового сигнала (ФГС), который объединяет несколько сообщений, подлежащих передаче; модулятор (М); радиопередающее устройство (РПДУ); антенну (А); среду, в которой распространяются радиоволны и действуют помехи  $n(t)$ ; радиоприемное устройство (РПРУ) в пункте приема, осуществляющее усиление и преобразование радиосигнала; демодулятор (ДМ), выделяющий групповой сигнал; устройство разделения сигналов (УРС), обеспечивающее выделение соответствующих сообщений, которые поступают к получателям сообщений (ПС).

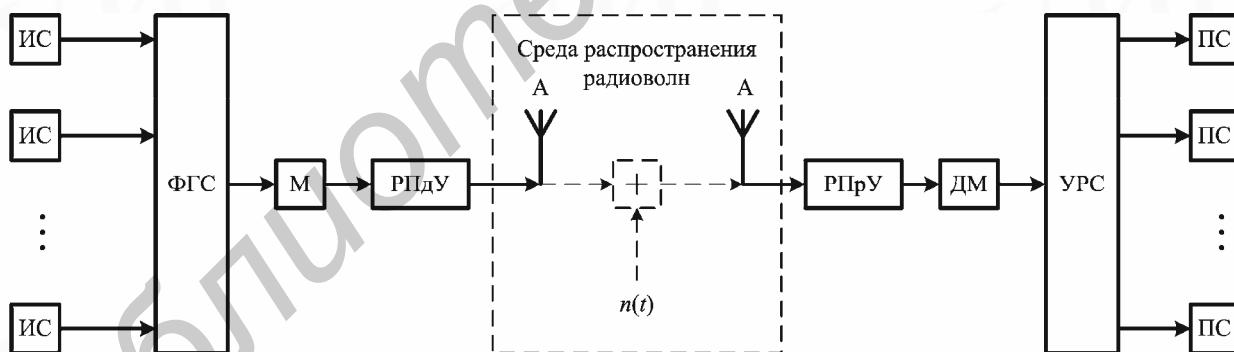


Рис. 1.1. Структурная схема РЭИС ПИ

По виду и назначению различают следующие РЭИС ПИ: малокабельной связи между подвижными объектами; радиорелейной связи; радиовещания и телевидения; передачи команд; связи через искусственные спутники Земли (ИСЗ) и др.

Для РЭИС извлечения информации характерным является отображение информации в радиосигнале в процессе его распространения и отражения радиоволн или при независимом от рассматриваемой РЭИС формировании и излучении радиоволн (естественные излучения объектов, радиосредств противника). Таким образом, отправитель сообщений в данном случае отсутствует. РЭИС извлечения информации, использующая прием и обработку от-



раженных сигналов (рис. 1.2), включает радиопередающее устройство (РПДУ), изучающее в направлении исследуемого объекта (цели – Ц) зондирующий сигнал, радиоприемное устройство (РПрУ), которое принимает и обрабатывает отраженный от объекта сигнал. При обработке используется образец зондирующего сигнала, поступающий из РПДУ в РПрУ. Потребитель информации (получатель сообщений – ПС) на основе сравнения зондирующего и отраженного сигналов получает сведения о наличии объекта и его характеристиках.

По виду и назначению РЭИС извлечения информации подразделяются на системы радиолокации, которые предназначены для обнаружения и классификации целей, определения их координат и параметров движения; системы радионавигации для определения местоположения объектов в пространстве; системы радиоразведки ископаемых и состояния поверхности Земли; радиоастрономические системы; системы радиоразведки радиотехнических средств противника.

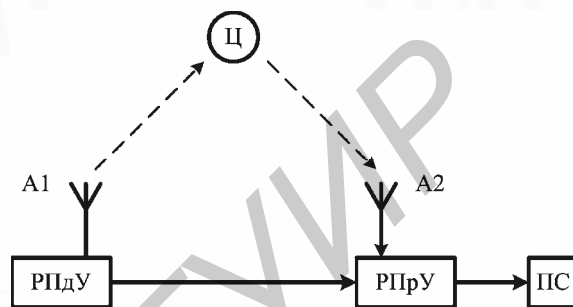


Рис. 1.2. Структурная схема РЭИС ИИ

Структурная схема радиолокационной системы импульсного типа приведена на рис. 1.3. В радиопередающем устройстве (РПДУ) с помощью модулятора (М) формируется последовательность зондирующих импульсных радиосигналов, которые через антенный переключатель (АПк) и антенну (А) излучаются в направлении на объект (цель – Ц). Отраженные радиосигналы содержат в своих параметрах (задержке, частоте, направлении прихода) информацию о положении и движении цели. Принятые антенной радиосигналы через АПк поступают в радиоприемное устройство (РПрУ) и после преобразования и усиления – на демодулятор (ДМ). Извлечение информации о цели осуществляется в измерительно-индикаторном устройстве (ИИУ). Сюда, помимо отраженного сигнала, поступают синхросигналы из синхронизатора (С), обеспечивающего также определенные временные характеристики последовательности зондирующих радиоимпульсов. Извлечение информации происходит в условиях действия внутрисистемных помех и помех, обусловленных работой сторонних радиосредств. Структурная схема радиолокационной системы меняется в зависимости от назначения и вида используемого сигнала.

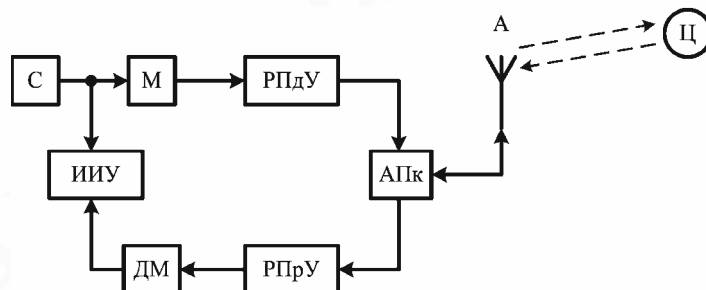


Рис. 1.3. Структурная схема РЛС

В системах радиоправления информация, передаваемая с помощью радиосигналов, непосредственно используется для управления подвижными объектами, в частности ракетами, ИСЗ, космическими аппаратами (КА). В системы радиоправления иногда включаются радионавигационные системы, обеспечивающие управление самолетами, кораблями и беспилотными объектами. Особенности РЭИС управления движением являются органическая связь с управляемым объектом и зависимость выделяемой информации от выходных эффектов системы. В структуре системы радиоправления передача, выделение, обработка и накопление информации с использованием радиоволн осуществляются в радиозвене (рис. 1.4).

Радиозвено (РЗ) связано с другими звеньями, которые отображают свойства объекта управления (в частности, ракеты) и особенности задачи управления. Основными звеньями являются: автопилот (АП), воспринимающий команды управления из РЗ и управляющий рулями; динамическое звено (ДЗ), отображающее реакцию ракеты на управляющие воздействия; кинематическое звено (КЗ), определяющее связи положения и движения ракеты в пространстве с изменениями ее положения и движения относительно цели (Ц). Информация о цели  $I_{ц}$  и о ракете  $I_{р}$  подвергается обработке в радиозвене. Таким образом, система радиоправления движением является замкнутой. На эту систему действуют сторонние помехи  $n(t)$ .

**РЭИС разрушения информации** предназначены для противодействия радиотехническим средствам противника. В зависимости от типа подавляемого радиосредства формируется соответствующий радиосигнал и определяется режим функционирования системы. РЭИС разрушения информации создают помехи нормальной работе конкурирующей системы путем излучения мешающего сигнала (МС) (рис. 1.5, а) или приема, умышленного искажения в

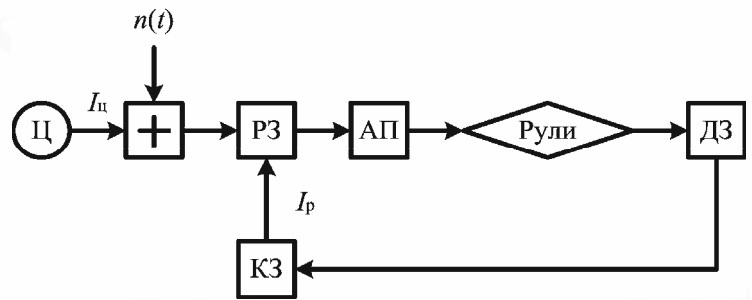
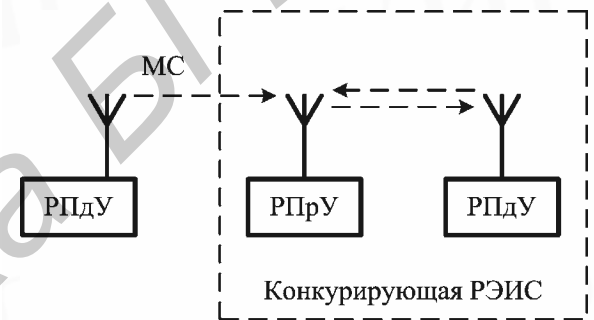
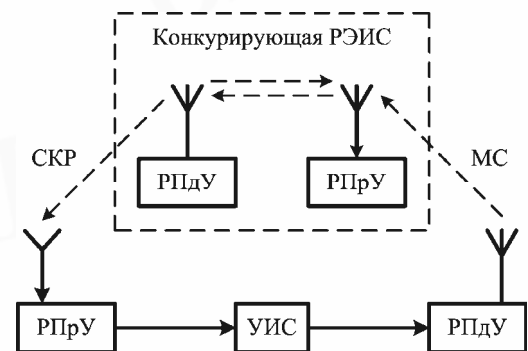


Рис. 1.4. Структурная схема системы радиоправления



(а)



(б)

Рис. 1.5. Структурные схемы РЭИС разрушения информации

специальном устройстве искажения сигнала (УИС) и переизлучения сигнала конкурирующей радиосистемы (СКР) (рис. 1.5, б).

Реальные РЭИС сочетают функции рассмотренных классов систем. Так, например, в системы радиоуправления включают системы извлечения информации (радиолокационные и радионавигационные) и системы передачи информации (передачи телеметрии и команд управления). Сочетание различных функций типично и для систем управления космическими аппаратами, воздушными объектами.

По характеру сообщений и используемых в РЭИС сигналов различают непрерывные, импульсные и цифровые системы. В **непрерывных РЭИС** на основных этапах преобразования сообщения имеют непрерывный характер и отображаются в непрерывных случайных изменениях параметров радиосигнала, также непрерывного во времени. К непрерывным РЭИС относятся системы радиовещания, телевидения, навигационные фазовые системы, пленгационные системы непрерывных излучений. В **импульсных РЭИС** информация содержится в изменениях параметров импульсных радиосигналов. Примерами импульсных РЭИС могут служить импульсные радиолокаторы (см. рис. 1.3), системы передачи информации с временной модуляцией импульсного потока, импульсные радионавигационные системы. В **цифровых (дискретных) РЭИС** полезная информация содержится в изменениях сочетания определенного набора элементов сигнала. Так, в двоичных системах факт наличия или отсутствия сигнала отражает передаваемое цифровое сообщение. Цифровое кодирование сообщений и цифровая обработка широко используются в РЭИС ПИ, что позволяет существенно повысить их устойчивость к воздействию дестабилизирующих факторов. Цифровая обработка сигналов находит применение в системах радиолокации и радионавигации, управления движением.

РЭИС могут работать на радиочастотах в диапазоне от 2 кГц до 300 ГГц. Средняя частота спектра (длина волны) радиосигнала существенно влияет на особенности распространения радиоволн, на их отражение и рассеяние. Длина волны определяет вид антенн, используемых для излучения и приема. Весь диапазон радиоволн разделен на участки или диапазоны (табл. 1.1).

Наиболее широкое применение в РЭИС имеют очень высокие, ультра-высокие и сверхвысокие частоты, поскольку радиоволны указанных диапазонов частот интенсивно отражаются от объектов, антенны компактны и обеспечивают высокую направленность излучения и приема. Особенности распространения этих радиоволн влияют на области применения РЭИС различного назначения.

РЭИС извлечения информации иногда классифицируют по информационному параметру радиосигнала на амплитудные, фазовые и частотные. РЭИС ПИ в зависимости от вида модуляции радиосигнала разделяют на системы с амплитудной (АМ), частотной (ЧМ), фазовой (ФМ) модуляцией, а

импульсные РЭИС ПИ – на системы с широтно-импульсной (ШИМ), время-импульсной (ВИМ), амплитудно-импульсной (АИМ) модуляцией.

Применяемые виды классификации позволяют выявить особенности построения РЭИС и учесть их при проектировании, производстве и эксплуатации.

**Таблица 1.1**  
Распределение частот в диапазоне радиоволн

<i>Название диапазона частот</i>	<i>Аббревиатура</i>	<i>Частота</i>	<i>Название диапазона длин волн</i>	<i>Длина волны</i>	<i>Международное название</i>	<i>Аббревиатура</i>
Очень низкие частоты	ОНЧ	3...30 кГц	мирааметровые	10...100 км	very low frequencies	VLF
Низкие частоты	НЧ	30...300 кГц	километровые	1...10 км	low frequencies	LF
Средние частоты	СЧ	0,3...3 МГц	гектометровые	100...1000 м	medium frequencies	MF
Высокие частоты	ВЧ	3...30 МГц	декаметровые	10...100 м	high frequencies	HF
Очень высокие частоты	ОВЧ	30...300 МГц	метровые	1...10 м	very high frequencies	VHF
Ультравысокие частоты	УВЧ	0,3...3 ГГц	дециметровые	10...100 см	ultra-high frequencies	UHF
Сверхвысокие частоты	СВЧ	3...30 ГГц	сантиметровые	1...10 см	super-high frequencies	SHF
Крайне высокие частоты	КВЧ	30...300 ГГц	миллиметровые	1...10 мм	extremely high frequencies	EHF

### 1.3. ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ РЭИС

Обычно рассматриваются следующие параметры и характеристики РЭИС.

**Назначение** – выдаваемая информация, многофункциональность, информационные характеристики, количество и скорость выдачи информации, пропускная способность РЭИС.

**Точность** – степень искажения информации при определенных характеристиках сообщений, дальностях, помеховой обстановке, условиях эксплуатации.

**Разрешающая способность** – свойство РЭИС разделять и независимо воспринимать информацию при сдвиге радиосигналов по частоте, задержке, направлению прихода радиоволн.

**Дальность действия и направленность** при заданной точности.

**Помехоустойчивость** – способность РЭИС обеспечивать дальность действия и точность при действии различных помех.

**Диапазон частот**, занимаемых РЭИС.

**Электромагнитная совместимость (ЭМС)** – возможность совместного функционирования с другими радиосредствами и РЭИС.

**Устойчивость** против внешних воздействий (температуры, вибраций и т. п.) и надежность аппаратуры.

**Стоимость** – сложность, затраты на проектирование, изготовление и эксплуатацию.

**Масса, габариты, удобство** размещения и развертывания аппаратуры, **потребляемая мощность**.

**Скрытность действия** – способность РЭИС функционировать, не обнаруживая себя.

**Функциональная надежность** – вероятность обеспечения основных показателей качества при заданных условиях функционирования и использования.

**Перспективность** – способность к удовлетворению потребности общества в течение длительного времени.

Большинство перечисленных параметров и характеристик являются одновременно показателями качества РЭИС. Параметры и характеристики РЭИС регламентируются тактико-техническим заданием на проектирование, которое согласовывается между заказчиком и проектировщиком. Показатели качества РЭИС могут быть удовлетворены при определенных ограничениях на диапазон частот, интенсивность помех, количество и размещение сторонних радиосредств и др. Многие параметры и характеристики РЭИС противоречивы, поэтому цель проектирования состоит в поиске такого сочетания показателей качества, при котором достигается оптимум по какому либо конкретному показателю (например, минимум стоимости, минимум массы бортовой РЭА и т. п.).

Количественная мера соответствия системы ее функциональному назначению определяет эффективность РЭИС. При оценке эффективности учитывают как экономические, так и технические показатели, которые взаимосвязаны. Экономическая эффективность РЭИС характеризуется отношением стоимостного выражения выходного эффекта к затратам на его организацию. Анализ и оптимизация экономической эффективности РЭИС – сложная задача, требующая сведений о РЭИС, затратах на проектирование, производство и эксплуатацию и выявления зависимости этих затрат от показателей качества системы, а также о сведениями тех условиях, в которых предполагается использовать РЭИС для выдачи информации. Внедрение РЭИС в производство и эксплуатацию определяется в первую очередь существенным экономическим или социальным эффектом.

В данном пособии основное внимание уделяется принципам построения РЭИС передачи и извлечения информации. В меньшей степени затронуты вопросы построения РЭИС управления движением. Достаточно подробно

рассматриваются методы оптимизации алгоритмов функционирования РЭИС, т. е. методы обеспечения наиболее эффективного выделения требуемой информации из радиосигнала в условиях действия помех. Оптимизация алгоритмов функционирования РЭИС – один из путей повышения их эффективности при проектировании. Другие пути связаны с оптимизацией схем, конструкций, уменьшением затрат на изготовление РЭА и др. Подготовка специалистов, владеющих современными методами проектирования РЭИС и РЭА, способствует прогрессу науки и техники,

#### 1.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ В РЭИС

Радиосигнал в РЭИС представляет узкополосный процесс, который можно выразить в виде квазигармонического колебания

$$s(t) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)], \quad (1.1)$$

где  $S_0(t)$ ,  $\psi(t)$  – медленно меняющиеся по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  функции времени, характеризующие амплитудную и угловую модуляции несущего колебания. Несущая частота  $\omega_0$  определяет положение спектра сигнала на оси частот. Сообщение может содержаться в любом из параметров радиосигнала: в амплитуде, фазе, отклонении частоты от несущей.

В электрических цепях передатчика и приемника РЭИС радиосигналы действуют в виде токов и напряжений. В пространстве распространяются электромагнитные волны, которые характеризуются векторами электрического  $\mathbf{E}_\Pi$  и магнитного  $\mathbf{H}_\Pi$  полей и вектором  $\mathbf{\Pi}$  (рис. 1.6), определяющим направление распространения радиоволны и ее мощность, приходящуюся на единицу площади. Кроме того, характеристиками являются поляризация и частота или длина волны. Мгновенные значения электрической и магнитной составляющих для непрерывной радиоволны определяются выражениями:

$$\begin{aligned} e(t, R) &= E_\Pi(R) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \omega_0 R/c); \\ h(t, R) &= H_\Pi(R) \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \omega_0 R/c), \end{aligned}$$

где  $R$  – расстояние, пройденное волной в направлении вектора  $\mathbf{\Pi}$ ;  $\omega_0$  – частота, определяющая длину волны  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ ;  $c$  – скорость распространения радиоволны;  $\varphi_0$  – начальная фаза.

Для антенны (А) с плоским раскрывом (рис. 1.7) излученное поле в удаленной точке  $p$  с координатами  $R_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  представляет собой суперпозицию волн, излученных каждой точкой раскрыва:

$$e(t, R) = \iint_A \operatorname{Re} E_\Pi(t, R) A(x, y) \exp[j(\mathbf{k}\mathbf{R})] \exp[-j(\omega_0 t + \psi(t))] dx dy. \quad (1.2)$$

Здесь  $E_\Pi(t, R)$  – изменяющаяся во времени функция, определяемая амплитудной модуляцией;  $\psi(t)$  – функция, характеризующая фазовую (частотную) модуляцию; скалярное произведение  $(\mathbf{k}\mathbf{R})$  определяется волновым вектором  $\mathbf{k}$  и радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  точки наблюдения  $p$ ; модуль волнового вектора

$k = \omega_0/c$ , а направление совпадает с направлением распространения волны; координаты  $(x, y)$  определяют положение излучающей точки в плоскости раскрытия антенны; радиус-вектор  $\mathbf{R}$  проведен из этой точки; если  $\mathbf{R}_0$  – радиус-вектор точки  $p$  из центра  $O$  антенны, то  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} + \vec{\rho}$ , где  $\vec{\rho}$  – радиус-вектор точки  $(x, y)$  в плоскости раскрытия антенны);  $A(x, y)$  – функция, характеризующая распределение тока (поля) в раскрытии (весовая функция антенны). Эта функция связана с характеристикой направленности антенны  $G_a(\alpha, \beta)$  соотношением, следующим из выражения (1.2):

$$G_a(\alpha, \beta) = G_{a0} \iint_A A(x, y) \exp[j(\mathbf{kR})] dx dy,$$

где  $G_{a0}$  – коэффициент направленного действия антенны.

Сообщения могут содержаться в любом из указанных параметров радиоволны, включая поляризацию. Заметим, что в выражении (1.2) предполагается согласование антенны с заданной поляризацией, поэтому в нем не учитывается векторный характер электромагнитного поля.

Принятая приемной антенной радиоволна создает радиосигнал, из которого выделяется сообщение. В РЭИС извлечения информации параметры принимаемой радиоволны зависят от углов  $\alpha, \beta$  и пространственного запаздывания  $\tau = 2R/c$ , где  $R$  – расстояние до цели. Оценивая эти параметры, можно определить местоположение цели в пространстве.

Рассмотрим характеристики радиосигнала, описываемого функцией времени (1.1). Если в параметрах радиосигнала содержатся сообщения, которые представляют реализации случайных процессов, то радиосигнал  $s(t)$  – также случайный процесс. Его реализация на интервале времени  $[0, T]$  характеризуется энергией

$$E_c = \int_0^T |s(t)|^2 dt.$$

**База сигнала  $B$**  – это произведение его продолжительности  $T$  на ширину спектра  $F$ . Произведение базы  $B$  на среднюю мощность  $P_c = E/T$  определя-

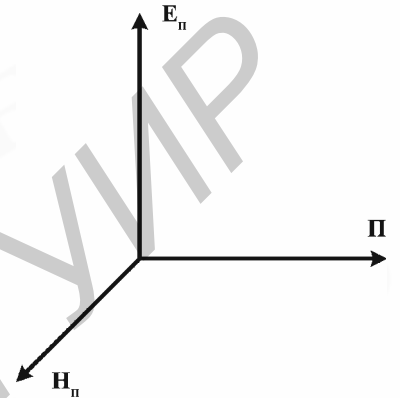


Рис. 1.6. Векторное представление электромагнитной волны

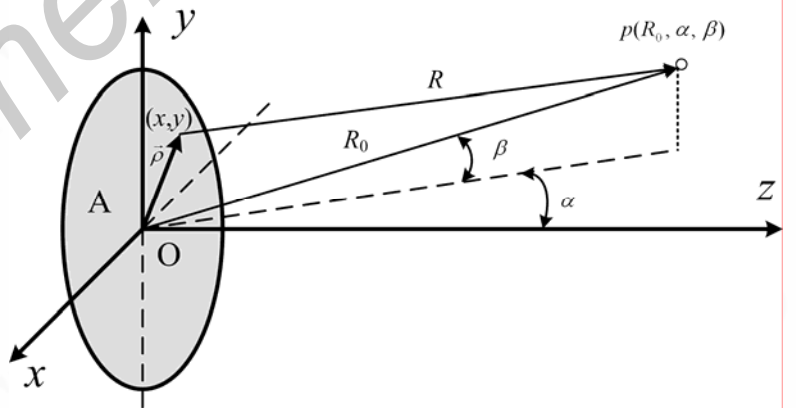


Рис. 1.7. Анализ напряженности поля

ет объем сигнала. Различают **простые** сигналы, у которых  $B \approx 1$ , и **сложные** (широкополосные, шумоподобные), у которых  $B = FT \gg 1$ . Расширение спектра сигнала при сохранении его продолжительности  $T$  (периода, если сигнал периодический) позволяет снизить спектральную плотность мощности, что существенно для повышения скрытности РЭИС. Расширение спектра достигается за счет введения угловой модуляции несущей. Обычно используют дискретную фазовую или частотную модуляцию. При этом длительность элемента модулирующей последовательности определяет ширину спектра сигнала. При фазовой манипуляции  $B = T/\tau_s = N$ , где  $N$  – число элементов модулирующей (манипулирующей) последовательности, укладываемых в пределах периода сигнала.

Нормированная **автокорреляционная функция** (АКФ) сигнала определяется выражением

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{E_c} \int_0^T s(t)\hat{s}(t-\tau)dt,$$

где  $\hat{s}(t)$  – комплексно-сопряженная функция, соответствующая сигналу  $s(t)$ . Для сигналов с большой базой АКФ имеет выброс, локализованный в окрестности  $\tau_{\text{кор}} = 0$ , и время корреляции, определяемое формулой

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} |\rho_c(\tau)| d\tau.$$

Сложные сигналы с фазовой манипуляцией имеют время корреляции, равное длительности элемента  $\tau_s$ .

Наряду с непрерывными сигналами в РЭИС используются и импульсные. Импульсные сигналы характеризуются скважностью  $Q = T_{\text{п}}/\tau_{\text{и}}$ , где  $T_{\text{п}}$  – период повторения импульсов;  $\tau_{\text{и}}$  – длительность импульса. Сообщения, передаваемые в импульсных РЭИС ПИ, отражаются в изменениях параметров импульсного потока, в импульсных радиолокационных системах – в изменениях временного положения импульсной последовательности отраженных от цели сигналов.

Функционирование РЭИС сопровождается действием помех. Наиболее существенное влияние на выдачу информации в РЭИС оказывают следующие помехи: флуктуационные, обусловленные тепловыми и другими шумами РЭА, электромагнитными процессами в атмосфере, космическими источниками; непреднамеренные, обусловленные наличием в пространстве радиоволн, излучаемых передатчиками других (сторонних) радиосредств; преднамеренные, или организованные, создаваемые другими системами; промышленные и т. п. Указанные помехи входят в смесь с сигналом в качестве независимого слагаемого и называются **аддитивными**. Существуют также **мультипликативные** помехи, которые изменяют параметры сигнала и порождаются нестационарными явлениями в радиоканалах.



В зависимости от полосы частот, занимаемой спектром, различают **узкополосные** и **широкополосные** помехи. Узкополосные помехи можно представить квазигармоническим колебанием, аналогичным выражению (1.1). Широкополосные помехи имеют полосу спектра, значительно превышающую полосу полезного сигнала РЭИС. По характеру действия различают непрерывные и импульсные помехи. Хаотические импульсные помехи (ХИП) имеют случайные амплитуду, длительность, период следования импульсов.

Для помех используют статистическое описание, включающее многомерные законы распределения. Часто достаточным является знание АКФ помехи  $R_{\Pi}(t)$  или спектральной плотности мощности  $G_{\Pi}(\omega)$ , которые связаны преобразованием Фурье:

$$G_{\Pi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\Pi}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (1.3)$$

Соотношение относится к помехам, представляющим стационарные случайные процессы.

Для флуктуационных помех (шумов) распределение мгновенных значений  $n(t) \equiv n$  подчиняется гауссовскому закону:

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Pi}} \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_{\Pi}^2}\right],$$

где  $\sigma_{\Pi}^2$  – дисперсия помехи, равная средней мощности. При постоянной спектральной плотности шума  $N_0$  в пределах полосы от 0 до  $F$  дисперсия  $\sigma_{\Pi}^2 = N_0 F$ .

**Шум**, представляющий квазигармонический процесс с гауссовским законом распределения мгновенных значений, имеет равномерный закон распределения начальных фаз на интервале  $[-\pi, \pi]$ , а огибающая  $U_{\Pi}(t)$  для фиксированного момента  $t$  подчиняется закону распределения Релея:

$$W(U_{\Pi}) = \frac{U_{\Pi}}{\sigma_{\Pi}^2} \exp\left[-\frac{U_{\Pi}^2}{\sigma_{\Pi}^2}\right], \quad U_{\Pi} \geq 0. \quad (1.4)$$

Требуемое статистическое описание помехи зависит от конкретной задачи.

## 1.5. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ РЭИС

Сложность задач, решаемых современными РЭИС, разнообразие помеховой обстановки требуют разработки достаточно совершенных систем. Основой разработки таких систем могут служить методы оптимизации (синтеза), базирующиеся на последних достижениях статистической теории. В общем случае выделяют следующие этапы (уровни) синтеза: **структурный, ло-**

**гический, схемотехнический, конструкторский и технологический.** На каждом этапе формулируется основное противоречие, которое необходимо разрешить с учетом специфики этапа. Применительно к РЭИС основное противоречие формулируется следующим образом: *создать систему, реализующую заданную совокупность функций при определенных показателях качества с учетом ограничений времени на разработку, производство и освоение системы, на уровень установленных затрат.* Этап структурного синтеза – наиболее важный, конечной целью его является разработка структурной схемы РЭИС, определение основных параметров устройств. Этот этап в настоящее время наименее формализован. Этапы логического и конструкторско-технологического проектирования РЭА доведены до формирования систем автоматизированного проектирования (САПР).

*Общая задача синтеза РЭИС предусматривает выбор сигналов, обеспечивающих достижение требуемого результата, и оптимизацию устройств обработки (приема) сигналов.* Выбор сигналов имеет принципиальное значение, поскольку от их формы зависят многие показатели качества РЭИС. Для правильного выбора сигнала необходимо уметь его математически описывать. Полнота математического описания, т. е. набор параметров, характеризующих наиболее существенные свойства сигнала, зависит от конкретной задачи, решаемой в процессе проектирования РЭИС. Исходными параметрами сигнала, которые необходимо знать разработчику РЭИС, являются: длительность (период)  $T$ ; полоса частот  $F$ , занимаемых спектром; энергия  $E$ . Выбор наилучшего сигнала, обеспечивающего выполнение радиосистемой заданных функций, может осуществляться методом перебора. Это требует больших затрат времени. Вместе с тем регулярные методы синтеза сигналов разработаны еще недостаточно полно и сводятся к определению наилучшей АКФ сигнала (к минимизации боковых остатков АКФ). В ряде случаев можно оптимизировать пару сигнал-фильтр. Отсутствие конструктивных критериев оптимизации затрудняет решение задачи синтеза РЭИС в целом, включая совместный синтез сигнала (передатчика) и приемника при заданных ограничениях и помеховых условиях.

*Задача приема сигналов состоит в наилучшем воспроизведении информации, заключенной в сигнале, искаженном помехами.* Оптимизация приема сводится к следующему. По заранее известным (априорным) некоторым характеристикам передаваемого сигнала, канала и помех, зная их функциональное взаимодействие, необходимо получить оптимальное приемное или решающее устройство, наилучшим образом воспроизводящее переданное сообщение. Точность и простота решения задачи зависят от объема априорных сведений. При малом их объеме используют методы адаптивного приема. Исходными при синтезе оптимального приемника являются критерий оптимальности, выбираемый в соответствии с целевым содержанием задачи РЭИС, и математическая формулировка задачи оптимизации, учитывающая все априорные сведения и позволяющая решить ее в соответствии с принятым критерием. *Конечная цель решения задачи синтеза: структура*

оптимального приемника (структурный синтез), вытекающая из полученного алгоритма обработка принятого колебания; количественные оценки качества работы приемника (количественный синтез), получаемые в соответствии с принятым критерием; чувствительность алгоритмов к отклонениям от априорных данных (условий приема); практическая реализуемость приемника на современной элементной базе.

**Оптимальным** или **идеальным** называют приемник, для которого вызванные помехами искажения сообщения в определенном смысле минимальны. Критерии искажения зависят от назначения РЭИС. Оптимальный приемник обеспечивает минимальные искажения при заданных условиях приема и выбранном критерии. Минимальный уровень искажений при этом характеризует **потенциальную помехоустойчивость**. Из сравнения помехоустойчивости реальных приемников с оптимальными выясняют степень технического совершенства и резервы улучшения реальных РЭИС. Сравнение помехоустойчивости приема для различных видов сигналов позволяет осуществить выбор наилучших сигналов, которые обеспечивают наибольшую помехоустойчивость для данной РЭИС.

Основные задачи, решаемые при приеме сигналов в РЭИС, заключаются в следующем: оптимальное обнаружение и различение сигналов на фоне помех; оценка неизвестных параметров сигнала, действующего в смеси с помехой; разрешение нескольких сигналов; оптимальная фильтрация сообщений, содержащихся в принимаемых сигналах.

В задаче **обнаружения сигнала** неизвестен сам факт наличия или отсутствия сигнала  $s(t, \lambda)$  в принятом колебании  $r(t)$ . Сигнал представляет известную функцию времени и параметров  $\lambda$ . Колебание  $r(t)$  представляется в виде

$$r(t) = \theta s(t, \lambda) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.5)$$

где  $\theta$  – параметр обнаружения, случайная величина, принимающая одно из двух значений:  $\theta = 0$  (сигнал отсутствует),  $\theta = 1$  (сигнал присутствует). По принятой реализации  $r(t)$  на интервале  $[0, T]$  требуется наилучшим образом выработать решение о наличии или отсутствии сигнала в смеси  $r(t)$ . На основе выбранного критерия (о критериях будет сказано подробно далее, в § 2.1) должно быть определено **оптимальное правило** (алгоритм) обнаружения, построена структурная схема и оценены качественные показатели обнаружения.

В простейшей задаче **различения сигналов** предполагается наличие в смеси  $r(t)$  одного из двух сигналов  $s_1(t, \lambda_1)$  или  $s_2(t, \lambda_2)$ :

$$r(t) = \theta s_1(t, \lambda_1) + (1 - \theta) s_2(t, \lambda_2) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

Случайная величина  $\theta$  принимает два значения: при  $\theta = 1$  с вероятностью  $p_1$  в смеси присутствует сигнал  $s_1(t, \lambda_1)$ ; при  $\theta = 0$  с вероятностью  $p_2 = 1 - p_1$  в смеси присутствует сигнал  $s_2(t, \lambda_2)$ . По принятой на интервале  $[0, T]$  реализации  $r(t)$  необходимо выработать оптимальное правило (алгоритм) решения о присутствии сигнала  $s_1(t, \lambda_1)$  или сигнала  $s_2(t, \lambda_2)$ . В частном

случае, при  $s_2(t, \lambda_2) = 0$  задача сводится к обнаружению сигнала  $s_1(t, \lambda_1)$ . Различение двух сигналов – типичная задача для РЭИС ПИ. В более общем случае смесь  $r(t)$  представляет сумму помехи  $n(t)$  и одного из  $m$  сигналов:  $s_1(t, \lambda_1), \dots, s_m(t, \lambda_m)$ . При этом задача различения заключается в принятии решения о том, какой из  $m$  сигналов находится в смеси  $r(t)$ , наблюдаемой на интервале  $[0, T]$ .

В задаче **оценки параметров** сигнала считается, что один из параметров  $\lambda_i$  сигнала  $s(t, \lambda)$  является случайной величиной, априорная плотность вероятности  $W_{\text{пр}}(\lambda_i)$  которого известна. Параметр представляет один из компонентов вектора  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n\}$ . Задача оценки заключается в определении с минимальной погрешностью значения параметра  $\lambda_i$  по принятой на интервале  $[0, T]$  реализации смеси  $r(t)$ . При зависимости сигнала от нескольких случайных информационных параметров может возникнуть задача совместного их оценивания. Подобные задачи типичны для систем радиолокации и радионавигации. На основе выработанных алгоритмов необходимо построить структурную схему оптимального измерителя параметров сигнала, определить точность оценивания.

Задача **фильтрации сообщений** возникает в случае, если сигнал  $s(t, \lambda)$  зависит от некоторого информационного параметра  $\lambda_i$ , представляющего случайную функцию времени  $\lambda_i(t)$  с известными статистическими характеристиками. На основании статистических характеристик помехи  $n(t)$  необходимо из принятой смеси  $r(t)$  выделить наилучшим образом функцию  $\lambda_i(t)$ , т. е. получить оценку  $\lambda_i^*(t)$  реализации информационного параметра. При малом изменении процесса  $\lambda_i(t)$  за время  $T$  задача фильтрации может быть сведена к задаче оценки параметра. Задачи фильтрации типичны для большинства РЭИС, где необходимо выделение непрерывных сообщений или измерение меняющихся во времени параметров сигнала.

В простейших задачах **разрешения сигналов** предполагается, что смесь  $r(t)$  представляет сумму помехи  $n(t)$  и двух налагающихся, возможно, сигналов  $s_1(t, \lambda_1, \lambda_2)$  и  $s_2(t, \lambda_1, \lambda_2)$ , зависящих, например, от двух параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$r(t) = \theta_1 s_1(t, \lambda_1, \lambda_2) + \theta_2 s_2(t, \lambda_1, \lambda_2) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.7)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – независимые случайные величины, которые могут принимать значения 0 и 1; параметр  $\lambda_1$  считается случайным. При возможности одновременного наличия в смеси двух сигналов ставится задача из раздельного обнаружения или раздельного обнаружения с оценкой значений параметра  $\lambda_1$  в обоих сигналах. Первый сигнал считается разрешенным в смысле обнаружения (оценки параметра  $\lambda_1$ ), если показатели обнаружения (оценки параметра  $\lambda_1$ ) первого сигнала остаются выше допустимых в присутствии случайного второго сигнала. Если при этом разрешается и второй сигнал при наличии первого, то говорят о взаимном разрешении в смысле обнаружения (оценки параметра  $\lambda_1$ ).

Рассмотренные типовые задачи оптимального приема сигналов могут решаться в РЭИС отдельно и совместно. Подробно эти задачи обсуждаются в последующих главах.

При решении отдельных задач оптимального приема используют следующие модели радиосигналов.

**Сигнал с полностью известными параметрами**

$$s(t, \lambda_0) \equiv s(t) = S_0(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi_0], \quad t \in [0, T], \quad (1.8)$$

где  $\lambda_0$  – вектор параметров сигнала; индекс нуль означает, что эти параметры известны и функции  $S_0(t)$  и  $\psi(t)$ , определяющие форму сигнала, также известны. Указанная модель применяется в задаче обнаружения, когда неизвестен лишь факт наличия или отсутствия сигнала в смеси с шумом.

**Сигнал со случайной начальной фазой**

$$s(t, \lambda_0) \equiv s(t, \varphi) = S_0(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi], \quad t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

Здесь считается неизвестной начальная фаза  $\varphi$ , которая представляет случайную величину, равномерно распределенную на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

**Сигнал со случайными амплитудой и начальной фазой**

$$s(t, \lambda) \equiv s(t, A_1, \varphi) = A_1 S_0(t - \tau_0) \cos[\omega_0 t + \psi(t - \tau_0) + \varphi], \quad t \in [0, T]. \quad (1.10)$$

Величины  $A_1$  и  $\varphi$  статистически независимы, причем случайная величина  $A_1$  распределена по закону Релея [см., например, формулу (1.4)], а начальная фаза  $\varphi$  равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Различают **нефлуктуирующие некогерентные пачки** радиоимпульсов с независимыми начальными фазами каждого импульса пачки:

$$s(t, \lambda) = s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_k) = \sum_{i=1}^k S_{0i}(t) \cos[\omega_0 t + \psi_i(t) + \varphi_i] \quad (1.11)$$

и флуктуирующие пачки

$$s(t, \lambda) = s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_k; A_1, \dots, A_k) = \sum_{i=1}^k A_i S_{0i}(t) \cos[\omega_0 t + \psi_i(t) + \varphi_i]. \quad (1.12)$$

При  $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$  имеем случай дружно флуктуирующей пачки.

При синтезе непрерывных РЭИС ПИ и РЭИС измерения параметров движения целей применяют **марковские модели сигналов**  $s(t, \lambda)$ , у которых параметры  $\lambda = \lambda(t)$  представляют многокомпонентный марковский процесс, описание которого будет дано при решении конкретных задач оптимизации.

Для упрощения решения задач синтеза и анализа РЭИС в качестве модели флуктуационной помехи используют **белый шум**. Спектральная плотность белого шума постоянна в неограниченной полосе частот и равна  $N_0/2$ . Односторонняя спектральная плотность в полосе частот от 0 до  $\infty$  равна  $N_0$ . Белый шум имеет автокорреляционную функцию

$$R_{\Pi}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (1.13)$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция, равная нулю при  $\tau \neq 0$  и обращающаяся в бесконечность при  $\tau = 0$ . Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1; \quad (1.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t), \quad (1.15)$$

где  $h(t)$  – любая непрерывная функция. На основании свойства (1.14) нетрудно показать, что корреляционной функции (1.13) соответствует спектральная плотность шума  $G_{\Pi}(\omega) = N_0/2$ . Для этого можно воспользоваться преобразованием Фурье (1.3).

Таким образом, при решении задач синтеза будем предполагать, что полезный сигнал  $s(t, \lambda)$  принимается на фоне аддитивного белого шума  $n(t)$  со следующими характеристиками:

$$\langle n(t) \rangle = 0; \quad R_{\bar{n}}(t_1, t_2) = \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2), \quad (1.16)$$

где угловые скобки означают операцию статистического усреднения (вычисления математического ожидания).

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Распределите по классам в соответствии с информационными признаками следующие радиотехнические системы: радиолокационный обнаружитель воздушных целей; радиорелейная линия связи; самолетный радиодальномер; радиолокационная головка самонаведения космического аппарата.
2. Какие виды модуляции радиосигналов используются в радиотехнических системах локации и передачи информации?
3. Какие показатели радиосистем связаны с воздействием различного рода помех?
4. Сравните корреляционные и спектральные характеристики следующих радиосигналов: одиночного радиоимпульса, периодической последовательности радиоимпульсов, пачки радиоимпульсов.
5. Докажите, что плотность вероятности огибающей гауссовского узкополосного случайного процесса подчиняется распределению Релея.
6. Докажите, что спектральная плотность белого шума представляет постоянную величину.
7. Сравните модели наблюдаемых колебаний в задачах обнаружения, различения, оценки и фильтрации параметров сигналов.
8. Приведите примеры моделей сигналов, используемых при решении задач оптимального приема.
9. Приведите примеры помех с негауссовскими законами распределения мгновенных значений.

## ГЛАВА 2. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

### 2.1. КАЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

В результате процесса обнаружения должно быть принято решение о наличии или отсутствии сигнала (цели). Решение может быть принято при двух взаимно исключающих условиях: условие  $A_1$  – сигнал есть; условие  $A_2$  – сигнала нет.

При выработке решения эти условия неизвестны. Из-за действия помех каждому из условий может соответствовать одно из двух решений: решение  $A_1^*$  – сигнал есть; решение  $A_2^*$  – сигнала нет.

Говорят о **правильном обнаружении**, если при условии  $A_1$  выдается решение  $A_2^*$ , и о **пропуске сигнала**, если при условии  $A_1$  за счет действия помех выдается решение  $A_2^*$ . Указанные условные решения можно охарактеризовать качественными показателями – соответствующими условными вероятностями правильного обнаружения  $D = P(A_1^* | A_1)$  и пропуска сигнала  $\hat{D} = P(A_2^* | A_1)$ . Решения  $A_1^*$  и  $A_2^*$  соответствуют одному и тому же условию наличия сигнала  $A_1$  и являются взаимоисключающими, поэтому  $D + \hat{D} = 1$ .

При условии отсутствия сигнала  $A_2$  возможно принятие правильного решения  $A_2^*$  – сигнала нет, что соответствует **правильному необнаружению**. Если за счет действия помехи принимается решение  $A_1^*$  – сигнал есть, то говорят о **ложной тревоге**. Качественными показателями решений при отсутствии сигнала являются условные вероятности ложной тревоги  $F = P(A_1^* | A_2)$  и правильного необнаружения  $\hat{F} = P(A_2^* | A_2)$ . Для взаимоисключающих событий  $A_1^*$  и  $A_2^*$  при одном и том же условии  $A_2$  справедливо соотношение  $F + \hat{F} = 1$ .

В реальных обнаружителях обычно требуется обеспечить достаточно высокую вероятность правильного обнаружения  $D = 0,9 \dots 0,999$ . Вероятность ложной тревоги стремятся свести к величине порядка  $10^{-3}$  и менее, поскольку ложная информация загружает систему обработки и может привести к нежелательным последствиям.

Если считать, что условие  $A_1$  соответствует наличию сигнала  $s_1(t)$ , а условие  $A_2$  – сигнала  $s_2(t)$ , то при различении сигналов можно говорить о при-



нятии соответствующих решений  $A_1^*$  и  $A_2^*$ . Качественными показателями различения двух сигналов являются вероятность правильного приема сигнала  $s_1$  при условии  $A_1$  и вероятность ошибочного приема сигнала  $s_2$  при условии  $A_1$ , т. е.  $P(A_1^* | A_1) = P(s_1 | s_1)$  и  $P(A_2^* | A_1) = P(s_2 | s_1)$ . Условная вероятность  $P(s_2 | s_1)$  характеризует ошибочную ситуацию. Очевидно, что

$$P(s_1 | s_1) + P(s_2 | s_1) = 1. \quad (2.1)$$

Условную вероятность ошибочного приема  $P(s_2 | s_1)$  обозначают через  $P_{e1}$ .

При условии  $A_2$  (наличие сигнала  $s_2$ ) может быть принято либо правильное решение  $A_2^*$ , либо ошибочное решение  $A_1^*$  которые характеризуются соответствующими условными вероятностями  $P(A_2^* | A_2) = P(s_2 | s_2)$  и  $P(A_1^* | A_2) = P(s_1 | s_2)$ . Условная вероятность ошибочного приема в данном случае обозначается через  $P_{e2}$ . Для вероятностей  $P(s_2 | s_2)$  и  $P(s_1 | s_2)$  справедливо соотношение, аналогичное (2.1).

В системах передачи информации вероятности  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$  используют для оценки качества приема дискретных символов. Как правило, требования к качеству приема сигналов  $s_1$  и  $s_2$  одинаковы и стремятся снизить обе вероятности:  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$ . Обычно в РЭИС ПИ стараются обеспечить  $P_{e1} = P_{e2} = 10^{-3}$  и меньше.

Система выдачи информации должна удовлетворять противоречивым требованиям. Например, при обнаружении в условиях действия помех необходимо обеспечить минимальную вероятность пропуска сигнала. Снижение этой вероятности сопряжено с возрастанием вероятности ложной тревоги. Чтобы обеспечить разумный компромисс, выбирают такое правило решения, при котором для совокупности всех возможных ситуаций приема обеспечивались бы наилучшие результаты, т. е. правило решения должно быть оптимальным в среднем, статистически. Для характеристики подобных противоречивых ситуаций вводят понятие среднего риска.

Рассмотрим возможные ситуации при различении или обнаружении сигналов:

- 1)  $(A_1^*, A_1)$  – правильный прием сигнала  $s_1$  (правильное обнаружение);
- 2)  $(A_2^*, A_1)$  – ошибочный прием сигнала  $s_1$  (пропуск сигнала);
- 3)  $(A_1^*, A_2)$  – ошибочный прием сигнала  $s_2$  (ложная тревога);
- 4)  $(A_2^*, A_2)$  – правильный прием сигнала  $s_2$  (правильное необнаружение).

Каждая из ситуаций характеризуется своей вероятностью  $P_i$ , причем  $\sum P_i = 1$ . Поставим в соответствие каждой возможной ситуации некоторую

плату за ошибку, или риск  $R_i$ . Для ошибочных ситуаций этот риск больше, а для безошибочных – меньше или равен нулю. В силу случайного характера ситуаций плата за ошибку является случайной. **Средний риск (средняя плата)  $\langle R \rangle$**  представляет математическое ожидание случайной величины  $R$ :

$$\langle R \rangle = \sum R_i P_i, \quad (2.2)$$

где  $R_i$  – риск (плата) за  $i$ -ю ситуацию;  $P_i$  – вероятность  $i$ -й ситуации.

Обозначим значения риска за ошибочные ситуации  $R_F = R(A_1^* | A_2)$  и  $R_{\hat{D}} = R(A_2^* | A_1)$  и будем считать нулевой плату за безошибочные ситуации.

Тогда средний риск можно записать в виде

$$\langle R \rangle = R_F P(A_1^*, A_2) + R_{\hat{D}} P(A_2^*, A_1). \quad (2.3)$$

Вероятности, входящие в выражение (2.3), согласно теореме умножения вероятностей, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} P(A_1^*, A_2) &= P(A_2) P(A_1^* | A_2) = P(A_2) P_{e2}; \\ P(A_2^*, A_1) &= P(A_1) P(A_2^* | A_1) = P(A_1) P_{e1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В задачах обнаружения указанные вероятности определяются через  $F$  и  $\hat{D}$ :

$$\begin{aligned} P(A_1^*, A_2) &= P(A_2) F; \\ P(A_2^*, A_1) &= P(A_1) \hat{D}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом соотношений (2.3) и (2.5) запишем средний риск:

$$\langle R \rangle = R_F P(A_2) F + R_{\hat{D}} P(A_1) \hat{D}. \quad (2.6)$$

Из всех систем обнаружения наилучшей следует считать ту, которая обеспечивает наименьший средний риск. Таким образом, можно говорить об обнаружителе, оптимальном по критерию **минимума среднего риска**.

Для РЭИС ПИ плата за ошибки  $R_F$  и  $R_{\hat{D}}$  обычно одинакова. Если положить  $R_F = R_{\hat{D}} = 1$ , то из выражения (2.3) с учетом соотношений (2.4) следует

$$\langle R \rangle = P(A_1) P_{e1} + P(A_2) P_{e2} = P_e. \quad (2.7)$$

Здесь  $P_e$  – полная вероятность ошибочного приема сигналов (вероятность полной ошибки), а критерий минимума среднего риска сводится к критерию минимума вероятности полной ошибки. Этот критерий носит название **критерия идеального наблюдателя**. При равных априорных вероятностях появления сигналов  $s_1$  и  $s_2$ , т. е.  $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$ , средний риск становится

полной вероятностью ошибочного приема для симметричной системы передачи двоичных сообщений:

Рассмотрим другие частные критерии, следующие из минимизаций среднего риска (2.6). Положив  $D = 1 - \hat{D}$ , можно записать:

$$\langle R \rangle = R_{\hat{D}} P(A_1) [1 - (D - l_0 F)], \quad (2.8)$$

где  $l_0 = R_F P(A_2) / [R_{\hat{D}} P(A_1)]$ .

Поскольку  $R_{\hat{D}} P(A_1) > 0$ , критерий минимума среднего риска (2.8) сводится к максимизации разности

$$D - l_0 F = \max. \quad (2.9)$$

Это **весовой критерий**. Согласно этому критерию, необходимо стремиться к увеличению взвешенной разности за счет повышения условной вероятности правильного обнаружения и снижения условной вероятности ложной тревоги. Множитель  $l_0$  называют **весовым**, он зависит от соотношения плат за ошибки и от априорных вероятностей наличия или отсутствия цели (сигнала).

Сравним две системы, одна из которых является оптимальной по критерию (2.9). Тогда  $D_{\text{opt}} - l_0 F_{\text{opt}} \geq D' - l_0 F'$ , или  $D_{\text{opt}} \geq D' + l_0 (F_{\text{opt}} - F')$ . Отсюда при  $F' = F_{\text{opt}}$

$$D_{\text{opt}} \geq D'. \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) остается в силе и в случае, если  $F' \leq F_{\text{opt}}$ . Это означает, что оптимальная система обеспечивает наибольшую вероятность правильного обнаружения (наименьшую вероятность пропуска) из всех систем, у которых вероятность ложной тревоги не больше, чем у оптимальной системы. Указанные условия составляют содержание **критерия Неймана – Пирсона**. Как и критерий идеального наблюдателя, он является следствием критерия минимума среднего риска. Достоинством его можно считать независимость от априорных вероятностей наличия или отсутствия цели (сигнала), что существенно при решении задач радиолокационного обнаружения.

## 2.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 2.2.1. Постановка задачи

На интервале  $[0, T]$  наблюдается аддитивная смесь  $r(t)$  сигнала и шума (1.5). Сигнал представляет детерминированную функцию времени и известных параметров (1.8). Статистические свойства помехи  $n(t)$ , представляющей гауссовский белый шум, считаются известными и определяются соотноше-

ниями (1.16). Задача оптимального обнаружения сводится к определению правила оценивания параметра обнаружения  $\theta$  (т. е. к нахождению оценки  $\theta^* = \theta^*(r(t))$ , обеспечивающего минимум среднего риска (или максимума весового критерия). Алгоритм оптимального обнаружения должен определить математические операции, по которым для каждой принятой реализации  $r(t)$  можно найти наиболее рациональный ответ о наличии или отсутствии сигнала. Далее необходимо определить качественные показатели обнаружителя, т. е. условные вероятности  $D$  и  $F$ , и выяснить пути реализации оптимального обнаружителя.

### 2.2.2. Методика решения задачи обнаружения

Для решения задачи оптимального обнаружения воспользуемся критерием (2.9). Чтобы определить оптимальное решающее правило  $\theta^* = \theta^*(r(t))$ , необходимо записать развернутое выражение вероятностей  $D$  и  $F$ . Эти вероятности характеризуются условными плотностями вероятности реализации  $r(t)$  при наличии и отсутствии сигнала в смеси. Чтобы определить плотности вероятности, рассмотрим простейший метод дискретного наблюдения, при котором берутся отсчеты функции  $r(t)$  через равные отрезки времени  $\Delta t$ . При этом интервал наблюдения разбивается на  $m$  равных элементарных интервалов, где  $m = T/(\Delta t)$ . Введем осредненные за элементарный интервал  $\Delta t$  значения колебания  $r(t)$ , сигнала  $s(t)$  и шума  $n(t)$ :

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} r(t) dt; \\ s_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} s(t) dt; \\ n_i &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} n(t) dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Очевидно, что

$$n_i = r_i - s_i. \tag{2.12}$$

Таким образом, рассматриваются системы случайных величин, которые полностью характеризуются многомерными ( $m$ -мерными) плотностями вероятности. В дальнейшем нас будет интересовать предельный случай, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Запишем совместную плотность вероятности для случайных величин  $n_i$ ,  $i = 1, m$ . Случайные величины  $n_i$  с учетом условий (1.16) и (2.11) являются гауссовскими и имеют характеристики:  $\langle n_i \rangle = 0$ ;  $\sigma_{n_i}^2 = \langle n_i^2 \rangle = N_0 / (2\Delta t)$ ;

$\langle n_i n_j \rangle = 0$  при  $i \neq j$ . Тогда совместная плотность вероятности на основании независимости случайных величин  $n_i$ , входящих в совокупность, примет вид

$$W(n_1, n_2, \dots, n_m) = W(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^m W(n_i) = \left( \frac{\pi N_0}{\Delta t} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m n_i^2 \Delta t \right]. \quad (2.13)$$

Здесь и в дальнейшем для сокращения записей вектором обозначены совокупности значений:  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_m\}$ .

При отсутствии сигнала в смеси  $r_i = n_i$ , поэтому условная плотность вероятности совокупности значений реализации совпадает с плотностью вероятности помехи (2.13), куда вместо  $n_i$  следует подставить  $r_i$ .

При условии действия суммы сигнала и шума, подставив значения  $n_i$  из выражения (2.12), можно записать условную плотность вероятности совокупности значений реализации  $r$  в следующем виде:

$$W_{с.п}(\mathbf{r}) = W_{п}(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \left( \frac{\pi N_0}{\Delta t} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m (r_i - s_i)^2 \Delta t \right]. \quad (2.14)$$

При рассмотрении реализации  $r$  в виде совокупности случайных величин решающее правило представляет функцию этой системы случайных величин  $\theta^*(\mathbf{r}) = \theta^*(r_1, r_2, \dots, r_m)$ . По условию, решающая функция может принимать только два значения: 0 и 1. Вероятность  $D$  определяется при действии в смеси  $r(t)$  и сигнала, и шума, т.е. плотностью вероятности  $W_{с.п}(\mathbf{r})$ . В случае произвольной решающей функции  $\theta^*(\mathbf{r})$  условная вероятность  $D$  принятия решения  $\theta^* = 1$  определяется выражением

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{с.п}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Аналогично при действии одной помехи и произвольной решающей функции  $\theta^*(\mathbf{r})$  условная вероятность  $F$  принятия решения  $\theta^* = 1$  определяется выражением

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{п}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Используя приведенные выражения, запишем взвешенную разность, входящую в формулу (2.9):

$$D - l_0 F = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^*(\mathbf{r}) W_{п}(r) (l(\mathbf{r}) - l_0) d\mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Здесь введено обозначение

$$l(\mathbf{r}) = \frac{W_{\text{с.п}}(\mathbf{r})}{W_{\Pi}(\mathbf{r})}, \quad (2.16)$$

которое называется **отношением правдоподобия**.

Согласно критерию (2.9), оптимальной считается та система, которая обеспечивает наибольшее значение взвешенной разности (2.15). Поэтому необходимо отыскать такую решающую функцию  $\theta^*(\mathbf{r})$ , которая максимизирует подынтегральное выражение при всех сочетаниях значений  $r_1, r_2, \dots, r_m$ . Можно убедиться в том, что оптимальная решающая функция имеет вид

$$\theta_{\text{opt}}^*(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(\mathbf{r}) > l_0; \\ 0, & \text{если } l(\mathbf{r}) < l_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

т. е. будет принято решение о наличии цели (сигнала), если отношение правдоподобия превышает порог  $l_0$ , и принимается решение об отсутствии цели (сигнала), если отношение правдоподобия оказывается меньше порога  $l_0$ . Таким образом, оптимальный обнаружитель действует по следующему алгоритму: по принятым значениям  $r_1, r_2, \dots, r_m$  вычисляется отношение правдоподобия и производится его сравнение с порогом.

Отношение правдоподобия (2.16) с учетом выражений (2.13) и (2.14) можно представить в виде

$$l(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m s_i^2 \Delta t \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^m r_i s_i \Delta t \right]. \quad (2.18)$$

Чтобы осуществить переход к непрерывному наблюдению  $r(t)$ , необходимо в выражении (2.18) перейти к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . При этом отношение правдоподобия (функция переменных  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ) перейдет в **функционал отношения правдоподобия**:

$$l(r(t)) = \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right] \exp \left[ \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s(t) dt \right]. \quad (2.19)$$

Оптимальное решающее правило (2.17) для непрерывного наблюдения записывается следующим образом:

$$\theta_{\text{opt}}^*(r(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } l(r(t)) > l_0; \\ 0, & \text{если } l(r(t)) < l_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

*Правило сохраняется при переходе к монотонным функциям от  $l(r(t))$ .* В частности, применив логарифмическую функцию, получим

$$\ln l(r(t)) = -\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} z(r(t)),$$

где  $E = \int_0^T s^2(t) dt$  – энергия сигнала;

$$z(r(t)) = z(T) = \int_0^T r(t)s(t)dt \quad (2.21)$$

есть корреляционный интеграл. С учетом этих соотношений оптимальное решающее правило принимает следующий вид:

$$\theta_{\text{opt}}^*(r(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } z(T) > z_{\text{п}}; \\ 0, & \text{если } z(T) < z_{\text{п}}, \end{cases} \quad (2.22)$$

где порог  $z_{\text{п}} = \frac{N_0}{2} \left( \ln l_0 + \frac{E}{N_0} \right)$ .

### 2.2.3. Корреляционный оптимальный обнаружитель

В соответствии с алгоритмом обнаружения (2.21) и (2.22) структурная схема оптимального обнаружителя может быть представлена в виде корреляционного приемника с пороговым устройством (рис. 2.1). В пороговом устройстве (ПУ) производится сравнение значения корреляционного интеграла в момент ожидаемого окончания действия сигнала  $T$  с порогом  $z_{\text{п}}$  и принимается решение о наличии или отсутствии цели (сигнала). Начало интегрирования и его окончание совпадают по времени с началом и окончанием ожидаемого сигнала  $s(t)$ , что обеспечивается устройством синхронизации (УС). Это же устройство синхронизирует работу генератора опорного сигнала (ГОС) для коррелятора.

Работа корреляционного обнаружителя поясняется временными диаграммами (рис. 2.2,  $a - \varepsilon$ ). Диаграмма на рис. 2.2,  $a$  есть смесь  $r(t)$ , соответствующая сумме сигнала (рис. 2.2,  $a$ ) и шума (рис. 2.2,  $b$ ). Сравнение напряжения, вырабатываемого на выходе интегратора (рис. 2.2,  $\varepsilon$ ), с порогом производится в момент  $t = T$ , при этом величина  $z(T)$  является случайной и зависит от реализации шума на интервале  $[0, T]$ .

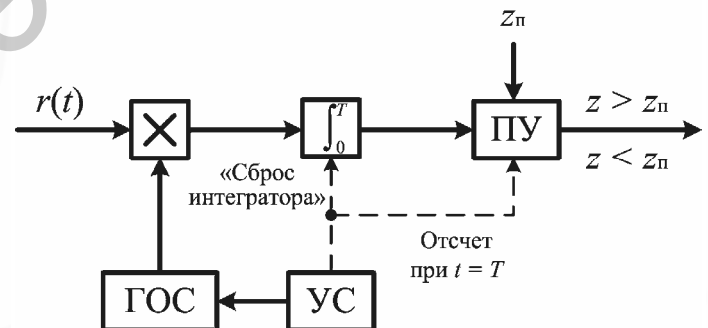


Рис. 2.1. Структурная схема корреляционного приемника

При наличии в смеси  $r(t)$  сигнала и шума величину  $z(T)$  можно представить в виде суммы:

$$z(T) = \int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T n(t)s(t)dt = E + z_{\text{сл}}.$$

Второе слагаемое  $z_{\text{сл}}$  представляет случайную величину. Ее среднее значение равно нулю. Действительно, с учетом условия (1.16) имеем

$$\langle z_{\text{сл}} \rangle = \left\langle \int_0^T n(t)s(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle n(t) \rangle s(t) dt = 0. \quad (2.23)$$

Дисперсия случайной величины  $z_{\text{сл}}$  определяется выражением

$$\langle z_{\text{сл}}^2 \rangle = \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1)n(t_2) \rangle s(t_1)s(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t_1 - t_2) s(t_1)s(t_2) dt_1 dt_2.$$

Здесь учтено, что автокорреляционная функция белого шума определяется  $\delta$ -функцией [см. условие (1.16)]. Применяя свойство  $\delta$ -функции (1.15), получаем

$$\langle z_{\text{сл}}^2 \rangle = \frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t_1) dt_1 = \frac{N_0 E}{2}. \quad (2.24)$$

Введем **отношение сигнал/шум**  $q$  как отношение квадрата максимального значения сигнальной составляющей напряжения на выходе интегратора к среднему квадрату случайной составляющей:  $q = \frac{E^2}{N_0 E / 2} = \frac{2E}{N_0}$ . Заметим,

что отношение сигнал/шум на выходе коррелятора определяется энергией сигнала и спектральной плотностью шума. Оно не зависит от формы обнаруживаемого сигнала, если шум белый.

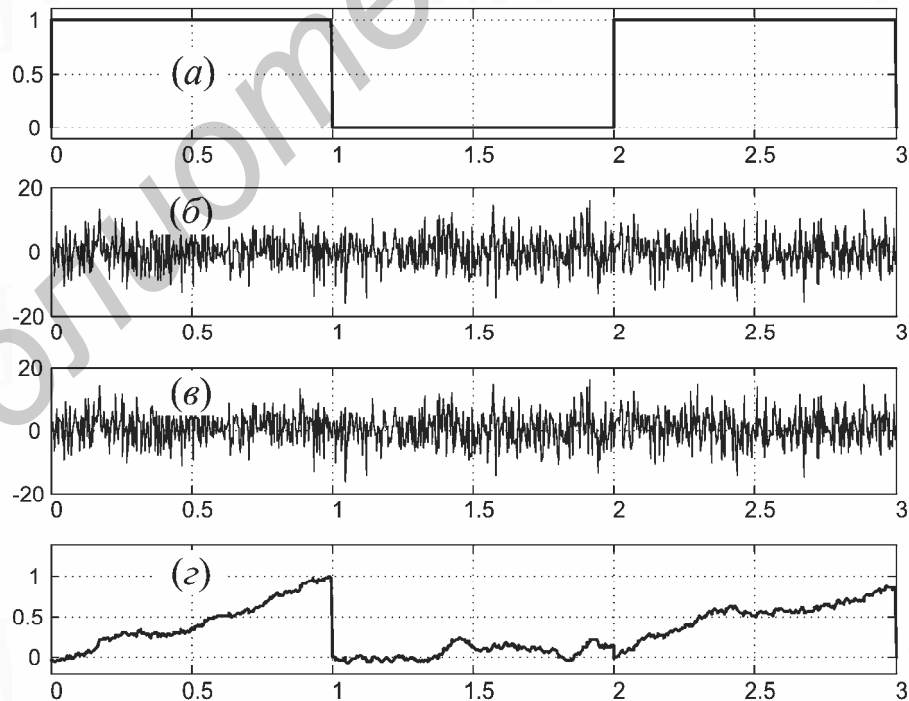


Рис. 2.2. Работа коррелятора



### 2.2.4. Качественные показатели оптимального обнаружителя

Определим вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги. Для этого необходимо знать условные плотности вероятности напряжения  $z(T)$ , вырабатываемого интегратором при наличии и отсутствии сигнала в смеси  $r(t)$ .

Поскольку шум  $n(t)$  гауссовский, то случайная величина  $z(t)$  также имеет гауссовскую плотность вероятности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_z^2 = \langle z_{сн}^2 \rangle$ :

$$W(z_{сн}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{z_{сн}^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (2.25)$$

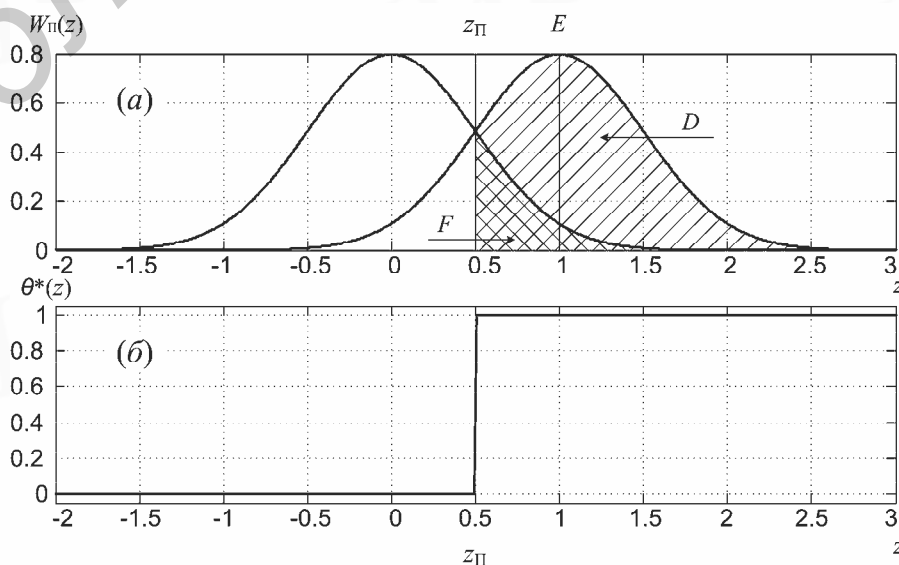
При отсутствии сигнала в смеси  $r(t)$  условная плотность вероятности  $W_{п}(z)$  совпадает с выражением (2.25), куда вместо  $z_{сн}$  следует подставить  $z(T) \equiv z$ . При действии в смеси сигнала и шума случайная величина  $z(T)$  имеет гауссовскую плотность вероятности с математическим ожиданием  $\langle z \rangle = E$  и дисперсией  $\sigma_z^2$ :

$$W_{с.п}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(z(T) - E)^2}{2\sigma_z^2}\right]. \quad (2.26)$$

В соответствии с правилом обнаружения (2.22) условную вероятность ложной тревоги определим как вероятность превышения порога  $z_{п}$  случайной величиной  $z$ , если на входе обнаружителя действует только шум:

$$F = \int_{z_{п}}^{\infty} W_{п}(z) dz. \quad (2.27)$$

Условная вероятность правильного обнаружения определяется вероятностью превышения порога  $z_{п}$  случайной величиной  $z$ , если на входе обнаружителя действуют сигнал и шум:



**Рис. 2.3.** Условные ПРВ процесса на входе устройства обнаружения (а) и оптимальная решающая функция (б)

$$D = \int_{z_{\Pi}}^{\infty} W_{c.\Pi}(z) dz. \quad (2.28)$$

На рис. 2.3, *a* приведены кривые условных плотностей вероятности  $W_{\Pi}(z)$  и  $W_{c.\Pi}(z)$ , а на рис. 2.3, *б* функция  $\theta^*(z)$ , соответствующая оптимальному решающему правилу (*б*). Заштрихованные площади под кривыми численно равны вероятностям  $D$  и  $F$ . Для вычисления вероятности  $F$  воспользуемся формулой (2.27) и, подставив в нее выражение  $W_{\Pi}(z)$ , после замены переменной  $t = z/\sigma_z$  получим

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right] dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_{\Pi}/\sigma_z}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}}{\sigma_z}\right), \quad (2.29)$$

где  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = \Phi(x)$  есть интеграл вероятности. Вид функции  $\Phi(x)$

показан на рис. 2.4.

Вероятность правильного обнаружения вычисляется аналогично после подстановки в формулу (2.28) выражения (2.26) и замены переменной  $t = (z - E)/\sigma_z$ :

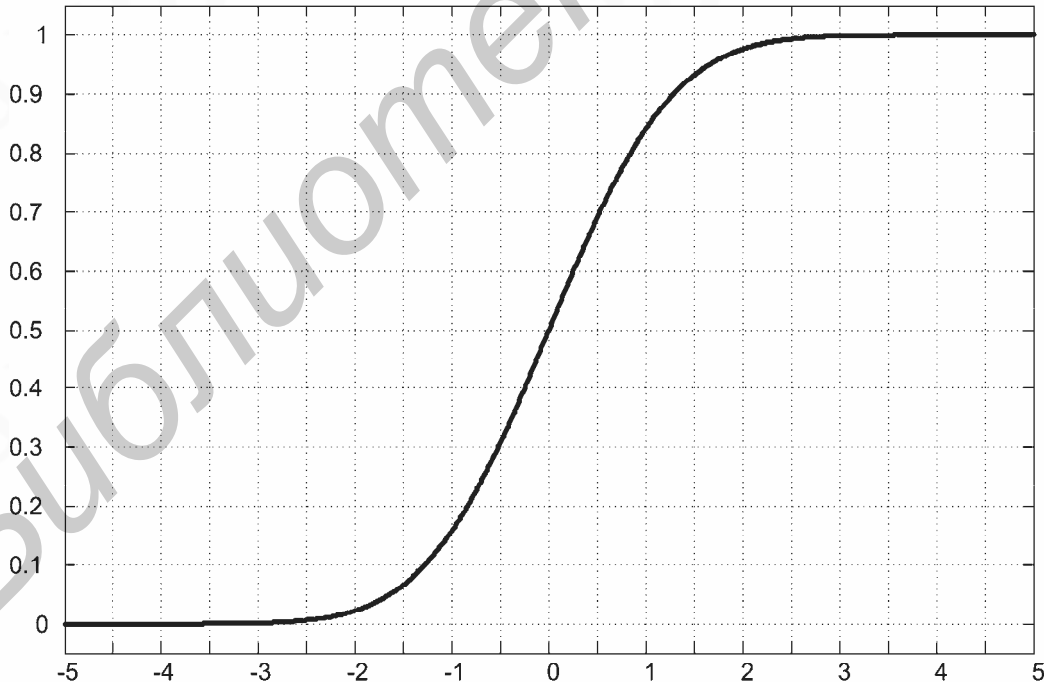


Рис. 2.4. График интеграла вероятности

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{z_{\Pi}}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z-E)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(z_{\Pi}-E)/\sigma_z}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = 1 - \Phi\left(\frac{z_{\Pi}-E}{\sigma_z}\right).$$
(2.30)

Учитывая выражение для  $\sigma_z^2$  [см. формулу (2.24)], можно в аргумент функции  $\Phi$  в соотношении (2.30) ввести отношение сигнал/шум  $q$ . Обозначим через  $h_{\Pi} = z_{\Pi}/\sigma_z$  относительное значение порога. Тогда условные вероятности  $F$  и  $D$  можно записать в следующем виде:

$$F = 1 - \Phi(h_{\Pi}), \quad (2.31)$$

$$D = 1 - \Phi(h_{\Pi} - \sqrt{q}). \quad (2.32)$$

Семейство зависимостей вероятности правильного обнаружения  $D$  от отношения сигнал/шум при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги  $F$  называют **характеристиками обнаружения**.

Кривые обнаружения детерминированного сигнала приведены на рис. 2.5. По этим кривым можно определить **пороговый сигнал** (пороговое отношение сигнал/шум) — сигнал, который при заданной вероятности ложной тревоги можно обнаружить с требуемой вероятностью правильного обнаружения.

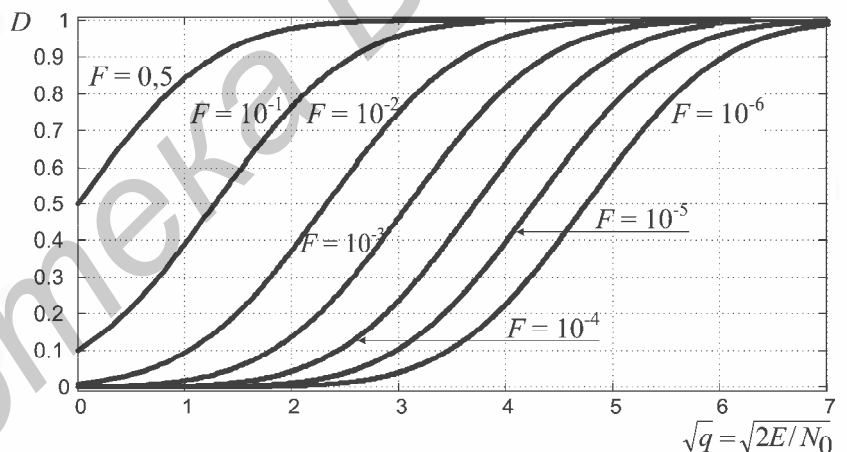


Рис. 2.5. Характеристики обнаружения

Пороговый сигнал в оптимальном приемнике характеризуется энергией и не зависит от формы сигнала. На практике порог устанавливается по величине дисперсии шума на выходе коррелятора  $\sigma_z^2$ . По таблицам интеграла вероятности определяют значение аргумента  $h_{\Pi}$  (относительного порога) при заданной вероятности ложной тревоги [см. формулу (2.31)]. При известной дисперсии  $\sigma_z^2$  определяют порог  $z_{\Pi} = h_{\Pi}\sigma_z^2$ .

На практике прием детерминированных сигналов, как правило, не встречается, поэтому приведенные результаты следует рассматривать как потенциальный предел, достижимый при обнаружении сигнала в белом шуме.

### 2.2.5. Согласованные фильтры в оптимальных обнаружителях

Значение  $z(T)$  может быть получено не только с помощью корреляционного приемника, но также с помощью линейного фильтра, который называют **согласованным (оптимальным) фильтром**.

Потребуем, чтобы линейный фильтр обеспечивал на своем выходе напряжение, пропорциональное значению корреляционного интеграла  $z(t_3)$  при произвольном времени  $t_3$  прихода сигнала  $s(t - t_3)$ . Запишем корреляционный интеграл в виде

$$z(t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)s(t - t_3)dt. \quad (2.33)$$

Выражение (2.33) представляет интеграл свертки, которую осуществляет линейный фильтр. Если импульсная реакция линейного фильтра (реакция на  $\delta$ -функцию) описывается функцией  $g(t)$ , то реакция фильтра на произвольное воздействие  $r(t)$  выражается следующим образом:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)r(\tau)d\tau. \quad (2.34)$$

Здесь необходимо учитывать, что для физически реализуемого фильтра при  $t < 0$  импульсная реакция тождественно равна нулю:  $g(t) \equiv 0$ . Для определения импульсной реакции согласованного фильтра потребуем, чтобы напряжение на его выходе в момент времени  $t = t_3 + t_0$  ( $t_0$  – некоторая постоянная величина) с точностью до вещественного множителя равнялось величине корреляционного интеграла:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t_3 + t_0) = Cz(t_3). \quad (2.35)$$

Это равенство означает, что на выходе согласованного фильтра должны последовательно во времени воспроизводиться текущие значения корреляционного интеграла с некоторой постоянной задержкой  $t_0$ . В соответствии с соотношениями (2.33) – (2.35) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t_3 + t_0 - \tau)r(\tau)d\tau = C \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - t_3)r(\tau)d\tau.$$

Это равенство тождественно выполняется в случае, если  $g(t_3 + t_0 + \tau) = Cs(\tau - t_3)$ . Введем новую переменную  $t = t_3 + t_0 + \tau$  и получим выражение для импульсной реакции согласованного (оптимального) фильтра:

$$g(t) = g_{\text{opt}}(t) = Cs(t_0 - t), \quad (2.36)$$

где  $C, t_0$  – постоянные величины.

*В момент времени  $t_3 + t_0$  согласованный фильтр обеспечивает на выходе напряжение, пропорциональное величине корреляционного интеграла  $z(t_3)$ . Следовательно, такой фильтр можно использовать при оптимальном обнаружении сигналов.*

Импульсная реакция согласованного фильтра в соответствии с выражением (2.36) представляет функцию  $s(t)$ , в которой аргумент  $t$  заменен на  $(t_0 - t)$ . Это означает зеркальное отображение функции  $s(t)$  (сигнала) относительно прямой  $t = t_0/2$ . Действительно, введя переменную  $t = t_0/2 + \varepsilon$ , из выражения (2.36) получим

$$g_{\text{opt}}(t_0/2 + \varepsilon) = Cs(t_0/2 - \varepsilon).$$

Рис. 2.6, а иллюстрирует операцию зеркального отображения сигнала и рис. 2.6, б образование функции  $g_{\text{opt}}(t)$ . Постоянные  $C$  и  $t_0$  позволяют учесть требования, которые необходимо выполнять для оптимального приема сигнала. Величина  $C$  выбирается из условия обеспечения требуемого уровня сигнала на выходе фильтра. При выборе  $C$  необходимо соответствующим образом устанавливать порог обнаружения, чтобы обеспечить требуемую вероятность ложной тревоги. Величина  $t_0$  определяется из условия физической реализуемости фильтра.

Поскольку при  $t < 0$   $g_{\text{opt}}(t) = 0$ , необходимо, чтобы

$$t_0 \geq T, \tag{2.37}$$

где  $T$  – продолжительность сигнала. При невыполнении условия (2.37) импульсная реакция фильтра опережает входное воздействие  $\delta$ -функции [см. рис. 2.6, б, что противоречит условию физической реализуемости фильтра.

Можно убедиться в том, что на выходе согласованного фильтра в момент времени

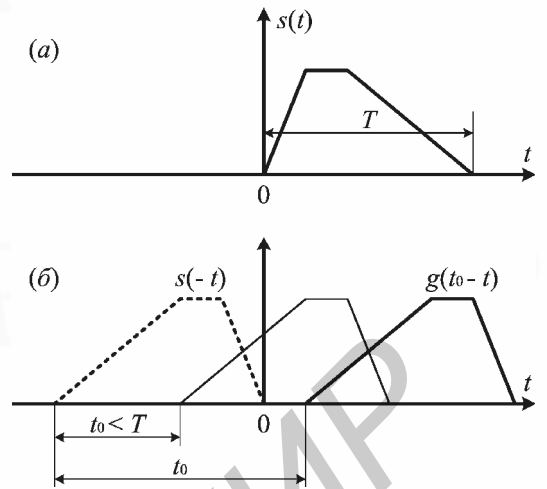


Рис. 2.6. Формирование оптимальной импульсной реакции фильтра

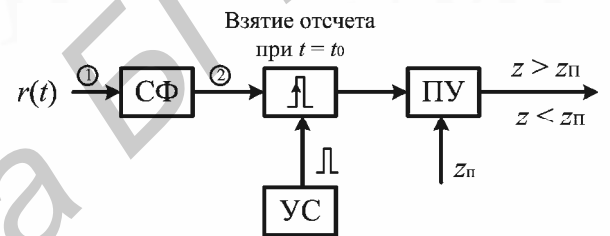


Рис. 2.7. Оптимальный обнаружитель

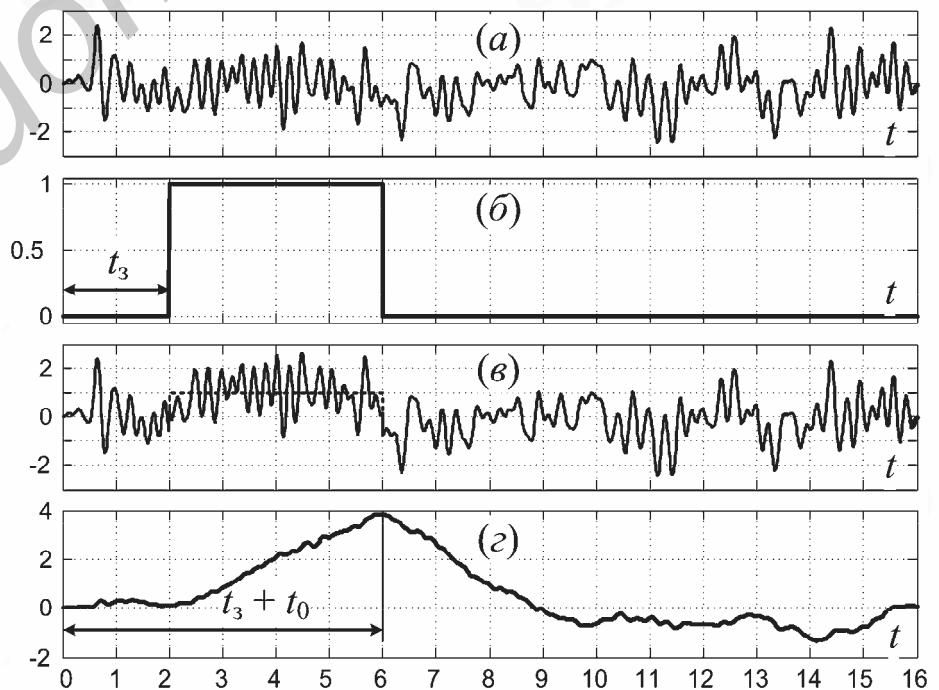


Рис. 2.8. Процесс обнаружения прямоугольного импульса в согласованном фильтре

$t = t_3 + t_0$  обеспечивается отношение сигнал/шум  $q = 2E/N_0$ , т. е. такое же, как и на выходе коррелятора. Следовательно, характеристики обнаружения при использовании согласованных фильтров будут определяться соотношениями (2.31) и (2.32). Структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 2.7. Временные диаграммы, поясняющие работу согласованного фильтра, показаны на рис. 2.8: график *a* соответствует шуму в канале связи; на графике *б* показан обнаруживаемый сигнал; график *в* соответствует смеси сигнала и помехи, т. е. определяет сигнал в точке 1 рис. 2.7; график *г* есть напряжение на выходе собственно СФ (точка 2 рис. 2.7).

Определим частотную характеристику согласованного фильтра. Комплексный коэффициент передачи фильтра связан с импульсной реакцией преобразованием Фурье:

$$W(A) = 2A \exp[-A^2]. \quad (2.38)$$

Подставив в формулу (2.38) выражение (2.36) для импульсной реакции и произведя замену переменной  $\tau = t_0 - t$ , получим

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = C \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - t) \exp[-j\omega t] dt = C \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp[j\omega \tau] \exp[-j\omega t_0] d\tau. \quad (2.39)$$

Введем спектральную функцию сигнала  $s(t)$ :

$$S_S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau, \quad (2.40)$$

тогда  $\hat{S}_S(j\omega) \equiv S_S(-j\omega)$  – комплексно-сопряженная спектральная функция сигнала. С учетом формулы (2.40) выражение (2.39) примет вид

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = C \hat{S}_S(j\omega) \exp(-j\omega t_0). \quad (2.41)$$

Модуль комплексного коэффициента передачи определяет амплитудно-частотную характеристику согласованного фильтра:

$$|K_{\text{opt}}(j\omega)| = C |S_S(j\omega)|. \quad (2.42)$$

Здесь учтено, что модули комплексно-сопряженных спектральных функций  $S_S(j\omega)$  и  $\hat{S}_S(j\omega)$  равны.

Из выражения (2.42) следует, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с амплитудно-частотным спектром сигнала. В этом проявляется свойство согласованности оптимального фильтра: он подчеркивает наиболее интенсивные составляющие спектра сигнала и подавляет вместе с шумом наименее интенсивные составляющие спектра.

Аргумент комплексного коэффициента передачи определяется выражением  $\arg K_{\text{opt}}(j\omega) = -\arg S_S(j\omega) - \omega t_0$ , т. е. состоит из аргумента спектральной функции ожидаемого сигнала, взятого с обратным знаком, и аргу-

мента задержки  $-\omega t_0$ . Фазочастотная характеристика согласованного фильтра обеспечивает компенсацию фазовых сдвигов спектральных составляющих сигнала, что приводит к их одновременному наложению в момент времени  $t = t_3 + t_0$  и достижению максимума напряжения сигнала на выходе фильтра. Действительно, приняв  $t_3 = 0$ , получим

$$\begin{aligned} u_{c.ф}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{opt}(j\omega) S_S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_S(j\omega)|^2 \exp[j\omega(t-t_0)] d\omega \end{aligned}$$

Квадрат модуля  $|S_S(j\omega)|^2$  представляет четную функцию частоты. Представив  $\exp[j\omega(t-t_0)]$  по формуле Эйлера, получим в правой части выражения для  $u_{c.ф}(t)$  сумму двух интегралов. С учетом равенства нулю интеграла от нечетной функции будем иметь

$$u_{c.ф}(t) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_S(j\omega)|^2 \cos[j\omega(t-t_0)] d\omega.$$

При  $t = t_0$  получаем наибольшее значение интеграла

$$u_{c.ф}(t_0) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_S(j\omega)|^2 d\omega = CE.$$

Здесь учтено равенство Парсеваля, в соответствии с которым энергия сигнала определяется интегралом от квадрата модуля спектральной функции.

Величина  $u_{c.ф}(t_0)$  соответствует максимальному значению сигнала на выходе согласованного фильтра.

### 2.2.6. Реализация согласованных фильтров

Рассмотрим некоторые виды сигналов и соответствующие им согласованные фильтры.

Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса определяется следующими характеристиками. Сигнал имеет вид

$$s(t) = \text{rect}\left[\frac{t}{\tau_{и}}\right] = \begin{cases} A, & t \in [0, \tau_{и}]; \\ 0, & t \notin [0, \tau_{и}]. \end{cases} \quad (2.43)$$

Спектральная функция такого сигнала

$$S_S(j\omega) = A \int_0^{\tau_{и}} \exp(-j\omega t) dt = \frac{A}{j\omega} [1 - \exp(j\omega\tau_{и})].$$

Наложим условие  $t_0 = \tau_{\text{и}}$  и найдем комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра по формуле (2.41):

$$K_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{CA}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega\tau_{\text{и}})].$$

Функциональная схема фильтра приведена на рис. 2.9, а. Фильтр содержит идеальный усилитель с коэффициентом усиления  $k_0 = CA$ , интегратор, линию задержки на время  $\tau_{\text{и}}$  и вычитающее устройство. Реакция согласованного фильтра на сигнал показана на рис. 2.9, б. Форма напряжения соответствует автокорреляционной функции прямоугольного импульса:

$$u_{\text{с.ф}}(t) = CE \left[ 1 - \frac{|t - \tau_{\text{и}}|}{\tau_{\text{и}}} \right], \quad t \in [0, 2\tau_{\text{и}}].$$

Максимум напряжения  $u_{\text{с.ф}}(t)$  достигается при  $t = \tau_{\text{и}}$ .

В случае согласованного фильтра для последовательности знакопеременных импульсов (псевдослучайной последовательности – ПСП) сигнал задан в виде

$$s(t) = \sum_{\mu=0}^{N-1} v_{\mu} \text{rect} \left[ \frac{t - \mu\tau_{\text{э}}}{\tau_{\text{э}}} \right],$$

где  $v_{\mu}$  принимает значения  $\pm 1$  в соответствии с законом формирования ПСП;  $\tau_{\text{э}}$  – длительность элемента ПСП. Пример чередования знаков в ПСП показан на рис. 2.10, а.

Соответствующая последовательности импульсная реакция согласованного фильтра приведена на рис. 2.10, б. Фильтр в данном случае может быть реализован с помощью многоотводной линии задержки (ЛЗ) и блока весовых коэффициентов (БВК), на выходах которого формируются напряжения, подаваемые на входы сумматора (рис. 2.10, в). На выходе сумматора включен окончательный согласованный фильтр (ОСФ). Фильтр согласован с элементом ПСП – прямоугольным импульсом, имеющим длительность  $\tau_{\text{э}}$ .

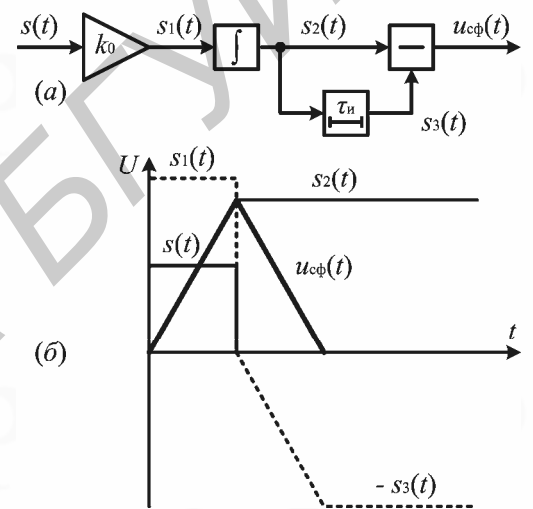


Рис. 2.9. Функциональная схема СФ

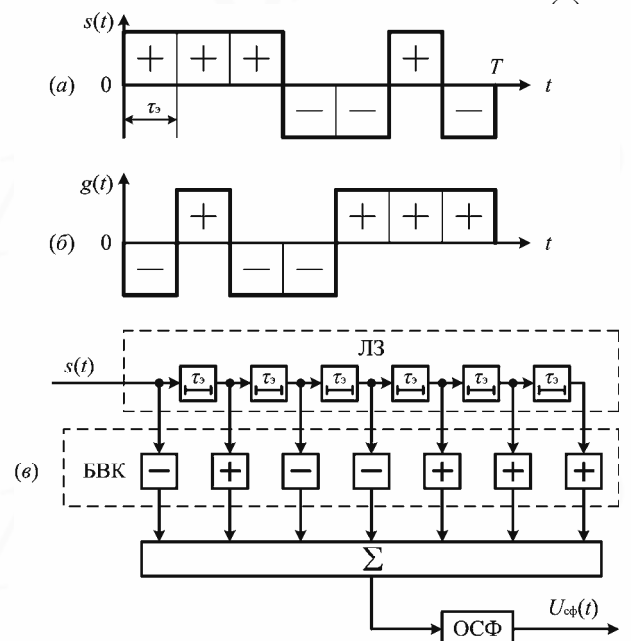


Рис. 2.10. ПСП (а); импульсная реакция СФ (б); функциональная схема СФ (в)



Процесс формирования выходной реакции согласованного фильтра для ПСП показан на рис. 2.11, а. Для шумоподобного сигнала, каким является ПСП, наблюдается эффект сжатия сигнала (рис. 2.11, б), проявляющийся в сокращении эффективной продолжительности сложного сигнала в результате согласованной фильтрации. Коэффициент сжатия (на уровне 0,5 максимального значения выходного напряжения) определяется базой сигнала и в рассматриваемом случае равен  $N = T/\tau_3$ , где  $T$  – продолжительность ПСП. Таким образом, ширина спектра выходного сигнала согласованного фильтра остается такой же, как и у входного сигнала.

Отметим, что согласованный фильтр, обеспечивая максимальное отношение сигнал/шум на выходе, существенно изменяет форму сигнала.

Использование линий задержки и весового суммирования возможно не только для дискретных сигналов. Такое использование основано на приближенном представлении импульсной реакции  $g_{opt}(t)$  в виде ступенчатой функции (рис. 2.12):

$$g_{opt}(t) \cong \sum_{k=0}^{M-1} g_{opt}(k\Delta t) \text{rect}\left(\frac{t - k\Delta t}{\Delta t}\right). \quad (2.44)$$

(а)

№ отвода ЛЗ	Вес	Сигналы на выходах БВК													
		← Время →													
1	–	–	–	–	+	+	–	+							
2	+		+	+	+	–	–	+	–	–					
3	–			–	–	–	+	+	–	+					
4	–				–	–	–	+	+	–	+				
5	+					+	+	+	–	–	+	–			
6	+						+	+	+	–	–	+	–		
7	+							+	+	+	–	–	+	–	
		0	–1	0	–1	0	–1	0	+	7	0	–1	0	–1	0

(б)

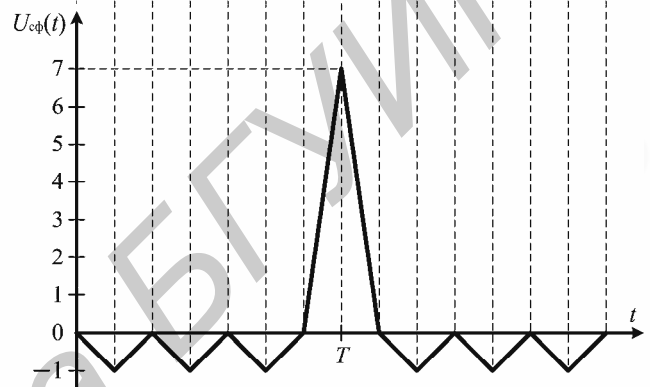


Рис. 2.11. Формирование отклика СФ для ПСП

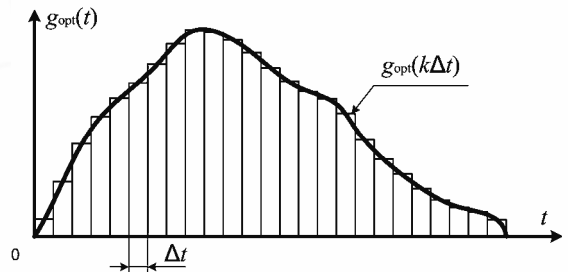


Рис. 2.12. Аппроксимация импульсной реакции СФ для произвольного сигнала

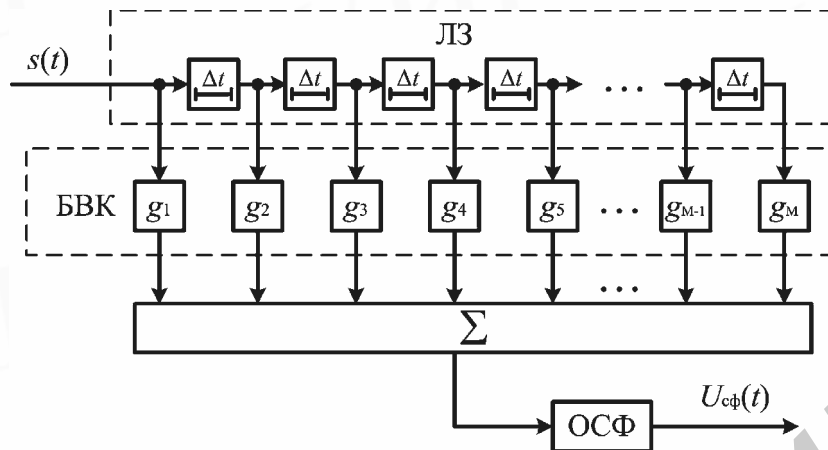


Рис. 2.13. Функциональная схема СФ для произвольного сигнала

Интервал  $\Delta t$  выбирается из условия обеспечения требуемой точности аппроксимации импульсной реакции. Если эффективная ширина спектра функции  $g_{\text{opt}}(t)$  ограничена частотой  $F_{\text{в}}$ , то, по теореме Котельникова, необходимый интервал  $\Delta t$  должен быть не более  $1/(2F_{\text{в}})$ . Коэффициенты в блоке весовых коэффициентов выбираются в соответствии с величинами  $g_k \equiv \overline{g_{\text{opt}}(k\Delta t)}$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Структурная схема согласованного фильтра на линии задержки показана на рис. 2.13. Оконечный согласованный фильтр согласован с прямоугольным импульсом, имеющим длительность  $\Delta t$ .

## 2.3. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 2.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала, зависящего от случайных неизмеряемых параметров. Примерами такого рода сигналов являются сигнал со случайной начальной фазой, модель которого дается выражением (1.9), сигнал со случайными начальной фазой и амплитудой (1.10), некогерентные пачки радиоимпульсов (1.11) и (1.12).

В общем случае при наличии в сигнале случайных параметров наблюдаемую при обнаружении смесь  $r(t)$  можно представить в виде  $r(t) = \theta s(t, \boldsymbol{\beta}) + n(t)$ , где  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор случайных параметров сигнала; плотность вероятности  $W(\boldsymbol{\beta})$  предполагается известной. Для определения алгоритма оптимального обнаружения необходимо вычислить отношение правдоподобия и, воспользовавшись решающим правилом (2.9), выявить структуру оптимального обнаружителя и его качественные показатели.

### 2.3.2. Отношение правдоподобия при наличии случайных параметров сигнала

Рассмотрим вначале совместную плотность вероятности дискретных значений  $r_k$  принимаемого колебания и случайных неизмеряемых параметров

$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ . Согласно теореме умножения вероятностей, можно записать:

$$W(\mathbf{r}, \beta) = W(\mathbf{r})W(\beta|\mathbf{r})W(\beta)W(\mathbf{r}|\beta). \quad (2.45)$$

Поскольку по условию нормировки интегрирование условной плотности вероятности в бесконечных пределах всегда дает единицу, после интегрирования левой и правой частей выражения (2.45) по всем значениям получим

$$W(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\beta)W(\mathbf{r}|\beta)d\beta. \quad (2.46)$$

По условию  $W(\mathbf{r}) = W_{\text{с.п}}(\mathbf{r})$  – плотность вероятности реализации величин  $r_1, \dots, r_m$  при наличии суммы сигнала и помехи. Разделив обе части равенства (2.46) на плотность вероятности реализации этих величин при условии действия одной помехи  $W_{\text{п}}(\mathbf{r})$ , получим, согласно формуле (2.16), следующее выражение для отношения правдоподобия:

$$l(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\beta) \frac{W(\mathbf{r}|\beta)}{W_{\text{п}}(\mathbf{r})} d\beta.$$

Отношение плотностей вероятности под знаком интеграла можно рассматривать как **условное (частное) отношение правдоподобия** при фиксированных значениях параметров  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . При этом сигнал становится полностью известным, и для условного отношения правдоподобия справедливы выражения (2.18) и (2.19).

Чтобы получить искомое отношение правдоподобия, входящее в оптимальное решающее правило (2.20), необходимо усреднить частное отношение правдоподобия по всем значениям случайных неизмеряемых параметров с учетом их плотности вероятности:

$$l(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\beta)l(\mathbf{r}|\beta)d\beta$$

или

$$l[r(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\beta)l[r(t)|\beta]d\beta.$$

Условное отношение правдоподобия в соответствии с выражением (2.19) можно представить в виде

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E(\beta)}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2}{N_0}z(r(t)|\beta)\right],$$

где

$$E(\boldsymbol{\beta}) = \int_0^T s^2(t, \boldsymbol{\beta}) dt; \quad (2.47)$$

$$z(r(t)|\boldsymbol{\beta}) = \int_0^T r(t)s(t, \boldsymbol{\beta}) dt. \quad (2.48)$$

Окончательное выражение для отношения правдоподобия при произвольной плотности вероятности случайных параметров сигнала принимает вид

$$l[r(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\boldsymbol{\beta}) \exp\left[-\frac{E(\boldsymbol{\beta})}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} z(r(t)|\boldsymbol{\beta})\right] d\boldsymbol{\beta}. \quad (2.49)$$

Это выражение можно конкретизировать для определенных моделей сигналов.

### 2.3.3. Отношение правдоподобия для сигнала со случайной начальной фазой

Пусть обнаруживаемый сигнал задан в виде (1.9). Примем здесь  $\tau_0 = 0$  и будем считать фазу  $\varphi \equiv \beta$  равномерно распределенной на интервале  $[-\pi, \pi]$  с плотностью вероятности  $W(\beta) = 1/(2\pi)$ .

Для того чтобы воспользоваться общей формулой (2.59), вычислим предварительно энергию (2.49) и корреляционный интеграл (2.48) при фиксированном значении параметра  $\beta$ .

По формуле косинуса суммы сигнал  $s(t, \beta)$  (см. выражение (1.9)) представим в виде

$$s(t, \beta) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] \cos \beta - S_0 \sin[\omega_0 t + \psi(t)] \sin \beta.$$

Обозначим:

$$s_1(t) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)];$$

$$s_2(t) = -S_0(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t)]$$

и запишем сигнал  $s(t, \beta)$  с учетом введенных обозначений:

$$s(t, \beta) = s_1(t) \cos \beta + s_2(t) \sin \beta \quad (2.50)$$

На основании этого выражения условное значение корреляционного интеграла можно записать следующим образом:

$$z[r(t)|\beta] = \int_0^T r(t)s(t, \beta) dt = z_1 \cos \beta + z_2 \sin \beta.$$

Здесь

$$z_i = \int_0^T r(t) s(t, \beta) dt = z_i[r(t)], \quad i=1, 2. \quad (2.51)$$

Введем величины  $Z$  и  $Q$ , определив их соотношениями:

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}; \quad (2.52)$$

$$\cos Q = z_1/Z; \quad \sin Q = z_2/Z. \quad (2.53)$$

С учетом этих величин условное значение корреляционного интеграла приводится к виду

$$z[r(t) | \beta] = Z[\cos \beta \cos Q + \sin \beta \sin Q] = Z \cos(\beta - Q). \quad (2.54)$$

Найдем условное значение энергии  $E(\beta)$  сигнала. При малом изменении амплитуды  $S_0(t)$  и фазы  $\psi(t)$  за период колебаний высокой частоты энергия практически не зависит от начальной фазы  $\beta$ , т. е.

$$E(\beta) = \int_0^T S_0^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \psi(t) + \beta] dt \cong \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt = E. \quad (2.55)$$

Подставив полученные выражения для корреляционного интеграла (2.54) и энергии (2.55) в формулу (2.49) и учитывая плотность вероятности  $W(\beta)$ , найдем выражение для безусловного отношения правдоподобия:

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2Z}{N_0} \cos(\beta - Q)\right] d\beta.$$

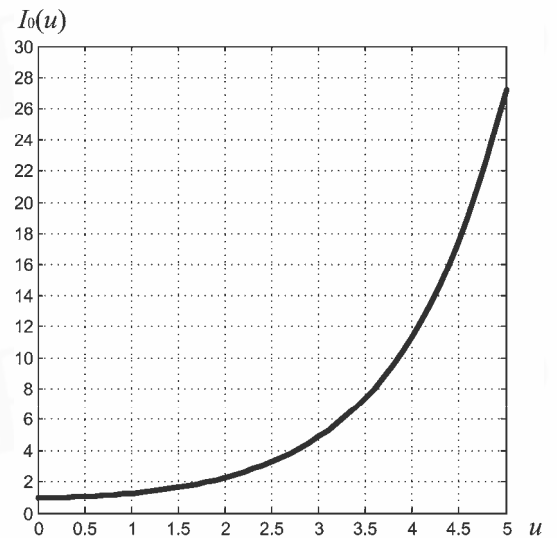
Известно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[u \cos(\beta - Q)] d\beta = I_0(u) \quad (2.56)$$

есть модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Это четная функция своего аргумента, причем  $I_0(0) = 1$  (рис. 2.14). Имея в виду выражение (2.56), запишем отношение правдоподобия для сигнала со случайной начальной фазой в окончательном виде:

$$l[r(t)] = \exp\left[-\frac{E}{N_0}\right] I_0\left[\frac{2Z}{N_0}\right], \quad (2.57)$$

где  $Z$  определяется из соотношений (2.51) и (2.52).



**Рис. 2.14.** Модифицированная функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка

### 2.3.4. Отношение правдоподобия для сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой

Предположим, что обнаруживаемый сигнал задан выражением (1.10), в котором  $\tau_0 = 0$ . Пусть начальная фаза ( $\varphi \equiv \beta$ ) равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ , а амплитудный коэффициент  $A$  представляет случайную величину с плотностью вероятности Релея при среднеквадратическом значении, равном единице. Для независимых величин  $A$  и  $\beta$  совместная плотность вероятности определяется следующим образом:

$$W(\beta, A) = \frac{1}{2\pi} 2A \exp[-A^2], \quad A \geq 0; \quad \beta \in [-\pi, \pi].$$

Вычислим корреляционный интеграл  $z[r(t) | \beta, A]$  и энергию  $E(\beta, A)$  для фиксированных значений параметров  $\beta$  и  $A$ . По аналогии с п. 2.3.3 можно получить:

$$z[r(t) | \beta, A] = AZ \cos(\beta - Q);$$

$$E(\beta, A) = A^2 E,$$

где выражения для  $Z, Q, E$  совпадают с аналогичными в п. 2.3.3. В отличие от рассмотренного случая сигнала со случайной начальной фазой энергия  $E(\beta, A)$  зависит от случайного амплитудного множителя  $A$ . Среднее значение энергии определяется следующим образом:

$$E_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} dA \int_0^{2\pi} E(\beta, A) W(\beta, A) d\beta = E \int_0^{\infty} 2A^3 \exp[-A^2] dA = E,$$

т. е. среднее значение равно энергии сигнала при частном значении  $A = 1$ .

Используя общую формулу (2.49), получим выражение для отношения правдоподобия в виде

$$l[r(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dA \int_0^{2\pi} A \exp[-A^2] \exp\left[-\frac{A^2 E}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2AZ}{N_0} \cos(\beta - Q)\right] d\beta.$$

Применив формулу (2.56), а также табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} I_0(\mu x) \exp(-\nu x^2) x dx = \frac{1}{2\nu} \exp\left[\frac{\mu^2}{2\nu}\right], \quad (2.58)$$

получим окончательное выражение отношения правдоподобия для сигнала со случайными начальной фазой и амплитудой:

$$l[r(t)] = \frac{N_0}{E + N_0} \exp\left[\frac{1}{N_0} \frac{Z^2}{E + N_0}\right], \quad (2.59)$$

где величина  $Z$  определяется по формулам (2.51), (2.52).

### 2.3.5. Структурные схемы оптимальных обнаружителей сигналов со случайными параметрами

Алгоритмы оптимального обнаружения рассматриваемых сигналов реализуются на основании полученных выражений для отношения правдоподобия (2.57) и (2.59) и правила (2.20). Решающее правило можно преобразовать, имея в виду, что сравнение с порогом остается в силе для любой монотонной функции отношения правдоподобия. На этом основании запишем оптимальное решающее правило:

$$\theta_{\text{opt}}^*[r(t)] = \begin{cases} 1, & \text{если } Z > Z_0; \\ 0, & \text{если } Z < Z_0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Используя выражение (2.60), а также соотношения, определяющие величину  $Z$ , структурную схему обнаружителя можно представить в виде, изображенном на рис. 2.15. Такую схему называют **квадратурным приемником**.

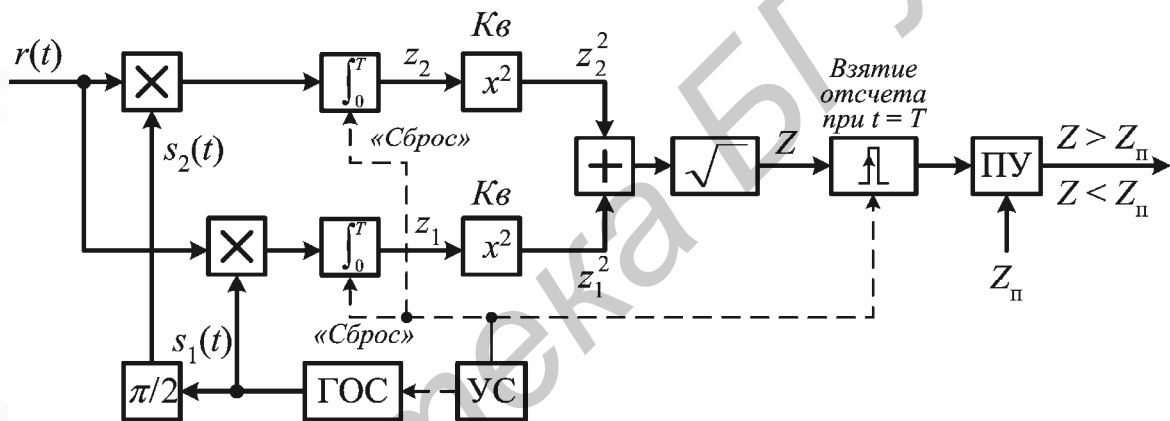


Рис. 2.15. Квадратурный приемник для обнаружения сигналов со случайными параметрами

Квадратурные каналы организуют за счет включения фазовращателя в цепь опорного сигнала одного из умножителей. Квадраторы ( $Kв$ ), сумматор ( $\Sigma$ ), вычислитель квадратного корня ( $\sqrt{\quad}$ ) обеспечивают формирование на входе ПУ в момент времени  $t = T$  значения  $Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ . Наличие двух каналов исключает возможность потери полезного сигнала вследствие незнания его начальной фазы. При отсутствии приращения корреляционного интеграла, например в первом канале, второй канал обеспечивает приращение за счет сдвига фазы опорного сигнала на  $\pi/2$ . Схема, представленная на рис. 2.15, как и схема, изображенная на рис. 2.1, требует знания временного положения ожидаемого сигнала. Если время запаздывания сигнала неизвестно, оптимальный обнаружитель усложняется. При разбиении интервала неопределенности времени запаздывания на элементарные участки, длительность каждого из которых определяется требуемой разрешающей способностью, можно построить многоканальный обнаружитель. Каждый канал его

настраивается на сигнал с соответствующим ожидаемым запаздыванием. Решение об обнаружении сигнала принимается одновременно с оценкой времени запаздывания.

Вместо схемы с квадратурными каналами используют схему с согласованным фильтром. Возможность использования согласованных фильтров в обнаружителях сигналов, имеющих случайные параметры, основывается на следующих рассуждениях. Из соотношений (2.60) и (2.51) следует необходимость формирования квадратурных компонентов сигнала.

Представим эти компоненты в следующем виде:

$$s_1(t) = \operatorname{Re}[\bar{S}_0(t)\exp(j\omega_0 t)] = \operatorname{Re}[\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t)];$$

$$s_2(t) = -\operatorname{Im}[\bar{S}_0(t)\exp(j\omega_0 t)] = \operatorname{Im}[\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t)],$$

где комплексная огибающая  $\bar{S}_0(t) = S_0(t)\exp[i\psi(t)]$ . Знак “\*” означает комплексно-сопряженную функцию. В соответствии с соотношениями (2.51) и приведенными выражениями запишем:

$$z_1 = \operatorname{Re} \left[ \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right];$$

$$z_2 = \operatorname{Im} \left[ \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right].$$

Величина  $Z$  представляет модуль комплексного числа:

$$Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \left| \int_0^T r(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j\omega_0 t) dt \right|. \quad (2.61)$$

Используем очевидное равенство

$$r(t) = R(t)\cos[\omega_0 t + \psi_R(t)] = \frac{1}{2}[\bar{R}(t)e^{j\omega_0 t} + \bar{R}^*(t)e^{-j\omega_0 t}].$$

При этом подынтегральное выражение в формуле (2.61) представим в виде суммы:

$$0,5[\bar{R}(t)\bar{S}_0^*(t) + \bar{R}^*(t)\bar{S}_0^*(t)\exp(-j2\omega_0 t)],$$

в которой второе слагаемое представляет быстро осциллирующую функцию с частотой  $2\omega_0$ . Интеграл от такой функции можно считать приближенно равным нулю. Поэтому



$$Z \cong \frac{1}{2} \left| \int_0^T \bar{R}(t) \bar{S}_0^*(t) dt \right|. \quad (2.62)$$

Полученному выражению ставится в соответствие схема, содержащая согласованный фильтр (СФ) с импульсной реакцией  $\bar{S}_0^*(t)$  и включенный после СФ линейный детектор огибающей (ДО), который реализует операцию взятия модуля.

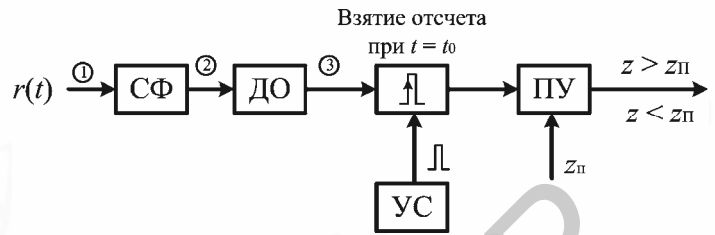


Рис. 2.16. Оптимальный обнаружитель на согласованном фильтре

Структурная схема обнаружителя сигнала со случайной фазой или со случайными фазой и амплитудой представлена на рис. 2.16. Временные диаграммы, поясняющие работу схемы, – на рис. 2.17: *a* – шум в канале; *b* – радиоимпульс; *в* – соответствует точке 1 рис. 2.16 и является смесью полезного сигнала и шума; *г* – соответствует точке 2 рис. 2.16 и является сигналом на выходе СФ; графики *д* и *е* поясняют работу ДО (*д* – взятие модуля от сигнала *г*; *е* – отфильтрованная огибающая, соответствующая точке 3).

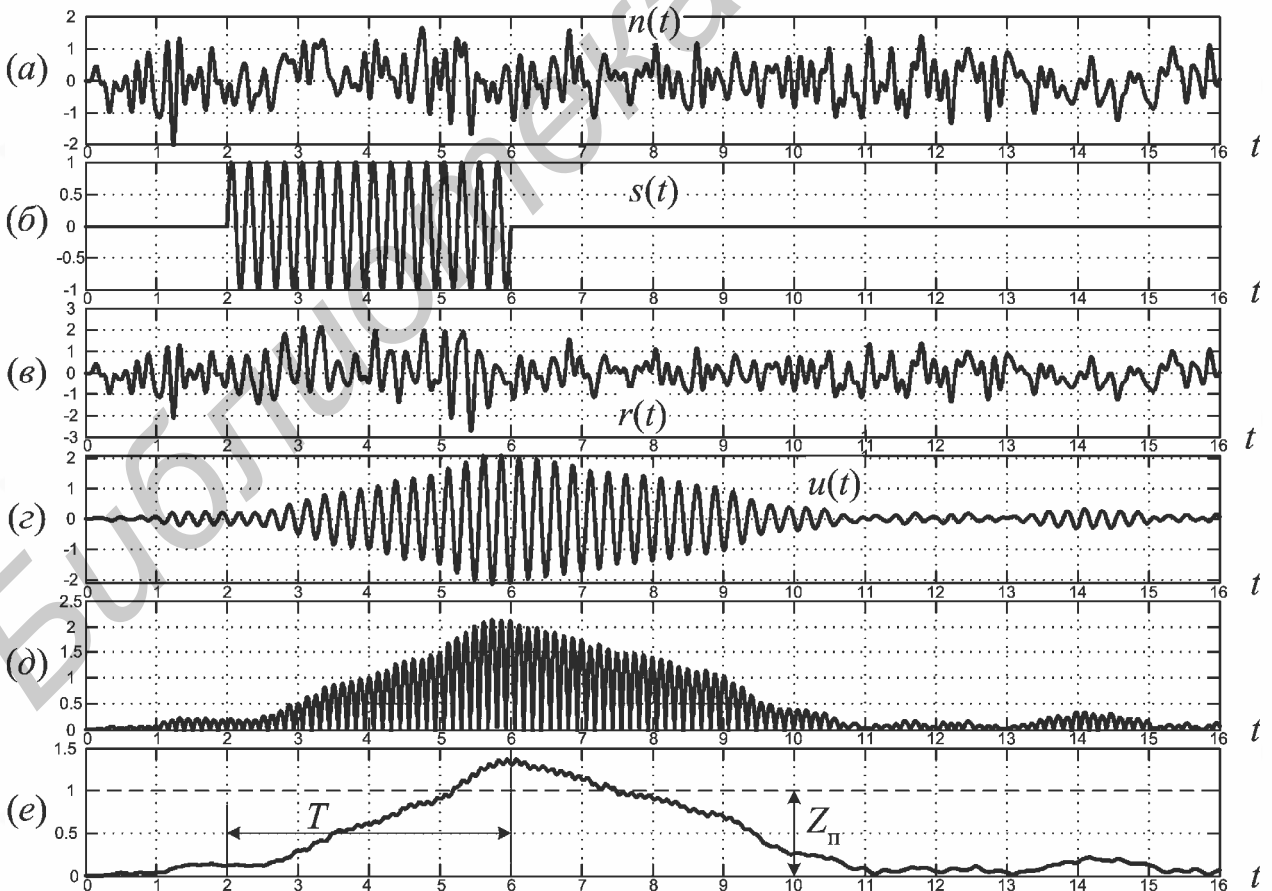


Рис. 2.17. Работа оптимального обнаружителя радиоимпульса

### 2.3.6. Качественные показатели обнаружения сигналов со случайными параметрами

Для определения характеристик обнаружения сигналов со случайными параметрами необходимо знать условные плотности вероятности случайной величины  $Z$  при наличии и отсутствии сигнала в наблюдаемой смеси. Плотность вероятности  $W(Z)$  можно определить из выражения для совместной плотности вероятности  $W(Z, Q)$ , проинтегрировав ее по всем возможным значениям  $Q$ . Совместная плотность вероятности  $W(Z, Q)$  вычисляется на основании совместной плотности вероятности  $W(z_1, z_2)$  путем перехода к новым переменным с учетом якобиана преобразования.

Рассмотрим обнаружитель сигнала, содержащего случайную фазу  $\beta$  и случайную амплитуду  $A$ , подчиняющуюся распределению Релея. При известной амплитуде сигнала плотность вероятности  $W(A) = \delta(A - 1)$ , т. е. принимается  $A = 1$ . При отсутствии сигнала  $W(A) = \delta(A)$ , т. е. принимается  $A = 0$ .

Можно показать по аналогии с соотношениями (2.23) и (2.24), что для любого фиксированного значения  $A$  средние значения случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  и их дисперсии определяются выражениями:

$$\langle z_{1,2} \rangle = A \int_0^T s(t, \beta) s_{1,2}(t) dt = \begin{cases} AE \cos \beta ; \\ AE \sin \beta ; \end{cases}$$

$$\sigma_{z_{1,2}}^2 \equiv \sigma_z^2 = \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s_{1,2}(t_1) s_{1,2}(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0 E}{2}.$$

Случайные величины  $z_1$  и  $z_2$  некоррелированы и подчиняются гауссовскому закону распределения. Следовательно, эти величины статистически независимы. Некоррелированность вытекает из приближенного равенства нулю смешанного центрального момента  $\langle (z_1 - \langle z_1 \rangle)(z_2 - \langle z_2 \rangle) \rangle$ . Действительно этот момент сводится к интегралу от произведения двух колебаний  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , при этом интеграл практически равен нулю.

Совместная условная плотность вероятности случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  с учетом их независимости определяется выражением

$$W(z_1, z_2 | \beta, A) = W(z_1 | \beta, A) = W(z_2 | \beta, A) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_z^2} \exp \left[ -\frac{(z_1 - \langle z_1 \rangle)^2 + (z_2 - \langle z_2 \rangle)^2}{2\sigma_z^2} \right].$$

Полагая, что на основании выражения (2.53)  $z_1 = Z \cos Q$ ,  $z_2 = Z \sin Q$ , перейдем к новым переменным двухмерной плотности вероятности

$$W(Z, Q | \beta, A) = W(z_1, z_2 | \beta, A) \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(Z, Q)},$$

где

$$\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(Z, Q)} = \begin{vmatrix} \cos Q & \sin Q \\ -Z \sin Q & Z \cos Q \end{vmatrix} = Z$$

есть якобиан преобразования. После преобразований получим

$$W(Z, Q | \beta, A) = \frac{Z}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_Z^2}(Z^2 + A^2E^2 - 2AEZ \cos(\beta - Q))\right].$$

Одномерная условная плотность вероятности  $W(Z | \beta, A)$  вычисляется путем интегрирования правой части полученного выражения по  $Q$ :

$$W(Z | \beta, A) = \int_0^{2\pi} W(Z, Q | \beta, A) dQ = \frac{Z}{\sigma_Z^2} I_0\left(\frac{AEZ}{\sigma_Z^2}\right) \exp\left[-\frac{Z^2 + A^2E^2}{2\sigma_Z^2}\right].$$

Производя усреднение по параметрам  $\beta$  и  $A$  с учетом плотности вероятности  $W(\beta, A)$ , найдем искомую плотность вероятности величины  $Z$ :

$$W(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\infty} W(Z | \beta, A) W(A) dA.$$

Вид этой плотности вероятности меняется в зависимости от заданной плотности вероятности  $W(A)$ , поэтому целесообразно рассмотреть частные случаи:

1) при  $W(A) = \delta(A - 1)$  (сигнал со случайной начальной фазой и известной амплитудой)

$$W_{с.п.}(Z) = \frac{Z}{\sigma_Z^2} \exp\left[-\frac{Z^2 + E^2}{2\sigma_Z^2}\right] I_0\left(\frac{ZE}{\sigma_Z^2}\right), \quad Z > 0; \quad (2.63)$$

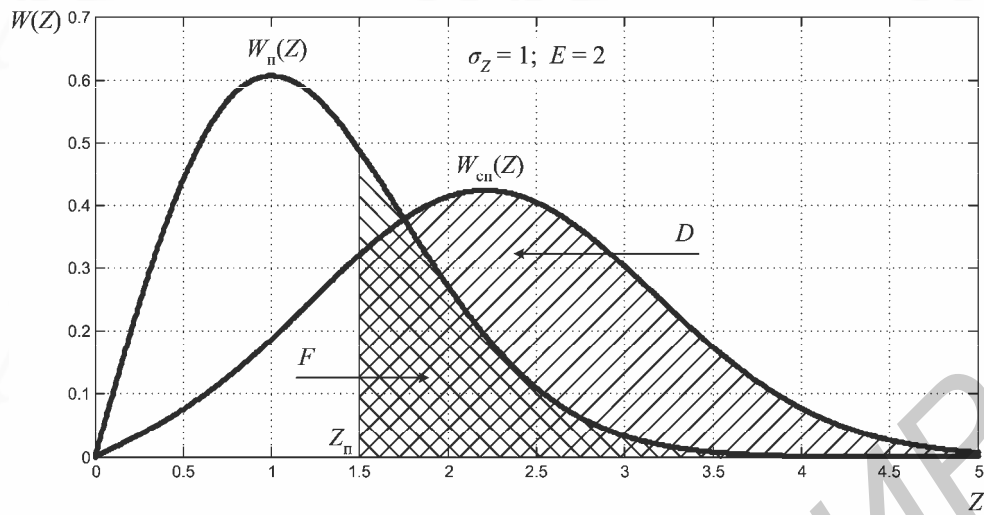
2) при  $W(A) = 2A \exp[-A^2]$  – релеевском распределении (сигнал со случайными амплитудой и начальной фазой)

$$W_{с.п.}(Z) = \frac{2Z}{2\sigma_Z^2 + E^2} \exp\left[-\frac{Z^2}{2\sigma_Z^2 + E^2}\right], \quad Z > 0;$$

3) при  $W(A) = \delta(A)$  (сигнал отсутствует)

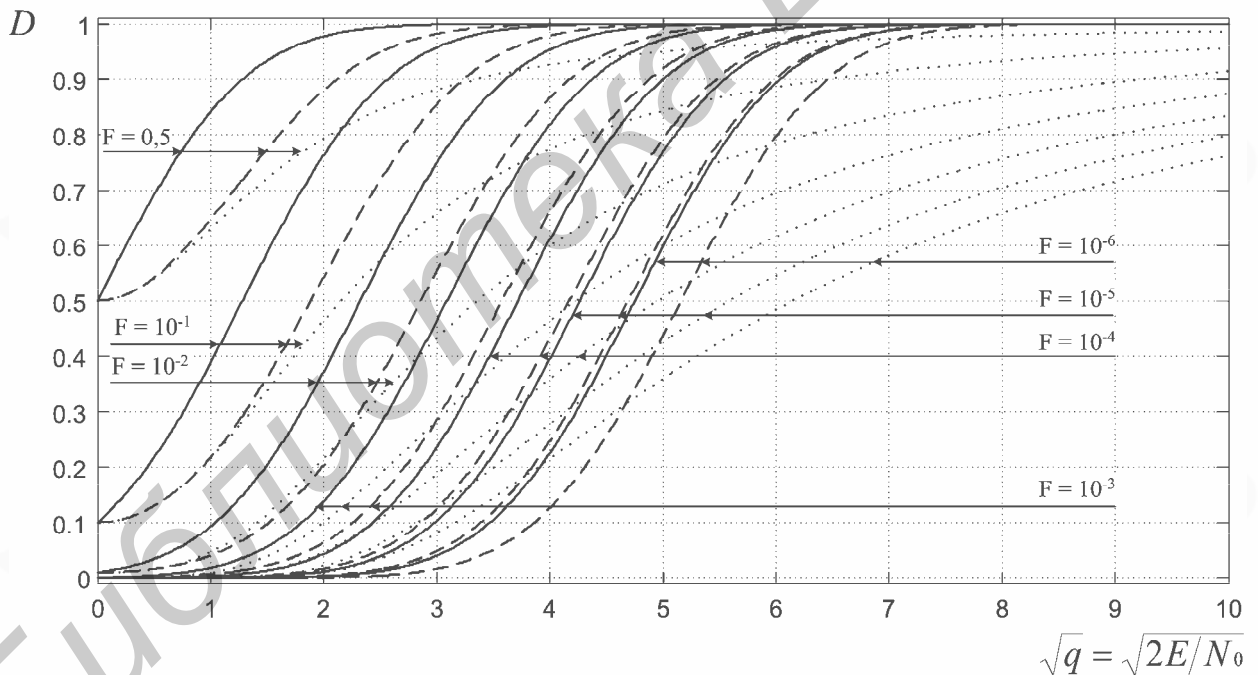
$$W_{п.}(Z) = \frac{Z}{\sigma_Z^2} \exp\left[-\frac{Z^2}{2\sigma_Z^2}\right], \quad Z > 0.$$

Здесь при интегрировании использована табличная формула (2.58). Кривые условных плотностей вероятности  $W_{п.}(Z)$  и  $W_{с.п.}(Z)$  при обнаружении сигнала со случайной начальной фазой приведены на рис. 2.18. Заштрихованные площади под кривыми справа от прямой, проходящей через пороговое значение  $Z_{п.}$ , соответствуют вероятностям ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ .



**Рис. 2.18.** Графики условных плотностей вероятности корреляционных интегралов при наличии и отсутствии сигнала в смеси (сигнал со случайной начальной фазой и известной амплитудой)

Введем переменную  $\nu = Z/\sigma_z$  и относительный порог  $h = Z_{\text{п}}/\sigma_z$ . Тогда с учетом параметра обнаружения  $q = 2E/N_0$  (отношения сигнал/шум) получим:



**Рис. 2.19.** Характеристики обнаружения полностью известного сигнала (сплошные линии), сигнала с неизвестной начальной фазой (штриховые линии), сигнала с неизвестной начальной фазой и неизвестной амплитудой (точечные линии)

$$D = \int_{h_{\text{п}}}^{\infty} \nu I_0(\sqrt{q}\nu) \exp\left[-\frac{q + \nu^2}{2}\right] d\nu;$$

$$F = \int_{h_{\text{п}}}^{\infty} \nu \exp\left[-\frac{\nu^2}{2}\right] d\nu = \exp\left[-\frac{h_{\text{п}}^2}{2}\right].$$

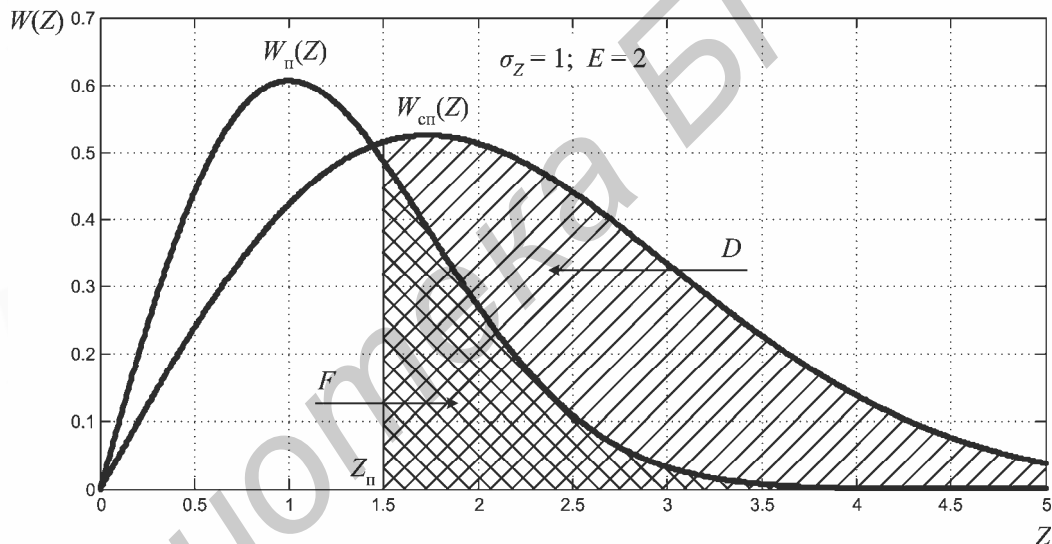
Приведенные соотношения определяют семейство характеристик обнаружения, показанных на рис. 2.19 (штриховые линии).

При сигнале со случайными амплитудой и начальной фазой условные вероятности  $D$  и  $F$  определяются площадями, заштрихованными под кривыми  $W_{с.п.}(Z)$  и  $W_{п.}(Z)$  на рис. 2.20. Эти вероятности вычисляются по следующим формулам:

$$D = \int_{h_{п.}}^{\infty} W_{с.п.}(Z) dZ = \exp\left[-\frac{h_{п.}^2/2}{1+q/2}\right]; \quad (2.64)$$

$$F = \int_{h_{п.}}^{\infty} W_{п.}(Z) dZ = \exp\left[-\frac{h_{п.}^2}{2}\right]. \quad (2.65)$$

Исключив величину  $h_{п.}$  из соотношений (2.64) и (2.65), получим



**Рис. 2.20.** Графики условных плотностей вероятности корреляционных интегралов при наличии и отсутствии сигнала в смеси (сигнал со случайными начальной фазой и амплитудой)

$$D = F^{(1+q/2)^{-1}}.$$

Кривые обнаружения, соответствующие данному случаю, приведены на рис. 2.19 (точечные). Для сравнения на этом же рисунке показаны кривые обнаружения сигнала с полностью известными параметрами (сплошные). Из анализа кривых можно сделать вывод о том, что для обнаружения сигнала со случайными параметрами требуется большая энергия, чем для обнаружения полностью известного сигнала при условии одинаковых качественных показателей обнаружения. Кривые обнаружения для сигнала со случайной амплитудой при больших значениях вероятности  $D$  смещаются вправо особенно сильно, что объясняется возможностью значительных замираний сигнала в канале распространения и снижением качества обнаружения. Вместе с тем

при малых значениях  $D$  (менее 0,2) из-за случайного характера амплитуды возможно некоторое улучшение качества обнаружения по сравнению с сигналом, имеющим известную амплитуду и случайную начальную фазу.

## 2.4. ОБНАРУЖЕНИЕ ПАЧЕК ИМПУЛЬСОВ

### 2.4.1. Отношения правдоподобия для сигналов в виде флуктуирующей и нефлуктуирующей пачек радиоимпульсов со случайными начальными фазами

Модель сигнала в виде некогерентной пачки радиоимпульсов задана выражением (1.11). Начальные фазы радиоимпульсов  $\varphi_i \equiv \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k$  – число импульсов в пачке), считаем независимыми случайными величинами, каждая из которых равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ , т. е.  $W(\beta_i) = 1/(2\pi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Совместная плотность вероятности совокупности независимых случайных величин  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$  определяется выражением

$$W(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^k W(\beta_i) \quad (2.66)$$

Как и в п. 2.3.3, по формуле косинуса суммы приводим выражение (1.11) к следующему виду:

$$s(t, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^k [s_{1i}(t) \cos \beta_i + s_{2i}(t) \sin \beta_i], \quad (2.67)$$

где

$$\begin{aligned} s_{1i}(t) &= S_{0i}(t) \cos[\omega_0 t + \psi_i(t)], \\ s_{2i}(t) &= -S_{0i}(t) \sin[\omega_0 t + \psi_i(t)]. \end{aligned}$$

Условное значение корреляционного интеграла можно записать на основе выражения (2.67):

$$z(r(t) | \boldsymbol{\beta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) s(t, \boldsymbol{\beta}) dt = \sum_{i=1}^k [z_{1i} \cos \beta_i + z_{2i} \sin \beta_i], \quad (2.68)$$

где интегралы взяты без конкретизации пределов и принято

$$z_{ji} = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) s_{ji}(t) dt, \quad j = 1, 2; \quad i = \overline{1, k}.$$

Обозначив

$$\sqrt{z_{1i}^2 + z_{2i}^2} = Z_i,$$

приведем выражение (2.68) к виду

$$z[r(t) | \boldsymbol{\beta}] = \sum_{i=1}^k Z_i \cos(\beta_i - Q_i). \quad (2.69)$$

Если пачка состоит из неперекрывающихся импульсов, то энергия пачки определяется суммой энергий импульсов. При малом изменении амплитуды и фазы  $\psi_i(t)$  в пределах импульса за время периода колебаний высокой частоты можно записать:

$$E(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^k E_i(\beta_i) \cong \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{0i}^2(t) dt = \sum_{i=1}^k E_i, \quad (2.70)$$

где энергия  $i$ -го импульса  $E_i$  не зависит от случайной начальной фазы  $\beta_i$ . Используя общую формулу (2.49), с учетом выражений (2.66), (2.69), (2.70) представим отношение правдоподобия в виде

$$l[r(t)] = \prod_{i=1}^k \exp\left[-\frac{E_i}{N_0}\right] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{2Z_i}{N_0} \cos(\beta_i - Q_i)\right] d\beta_i.$$

На основе формулы (2.56) после интегрирования из полученного выражения следует

$$l[r(t)] = \prod_{i=1}^k \exp\left[-\frac{E_i}{N_0}\right] I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right). \quad (2.71)$$

Выражение (2.71) показывает, что *отношение правдоподобия для пачки неперекрывающихся импульсов со случайными независимыми начальными фазами определяется произведением отношений правдоподобия для каждого импульса пачки.*

Вычислим отношение правдоподобия для сигналов в виде пачек флуктуирующих радиоимпульсов со случайными начальными фазами. Ограничимся рассмотрением случая независимых флуктуаций, когда модель сигнала имеет вид (1.12). При независимых флуктуациях случайные величины  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , независимы и совместная плотность вероятности

$$W(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}) = W(\boldsymbol{\beta}) \prod_{i=1}^k W(A_i) = \prod_{i=1}^k W(\beta_i) W(A_i).$$

Считаем случайные величины  $A_i$ , распределенными по закону Релея:

$$W(A_i) = 2A_i \exp\left[-A_i^2\right], \quad A_i > 0.$$

При указанных условиях, используя известную методику, получим:

$$z[r(t) | \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}] = \sum_{i=1}^k A_i Z_i \cos(\beta_i - Q_i); \quad (2.72)$$

$$E(\mathbf{\beta}, \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^k A_i^2 E_i, \quad (2.73)$$

где  $E_i$  – средняя энергия  $i$ -го импульса пачки. После подстановки выражений для условных значений корреляционного интеграла (2.72) и энергии (2.73) в общую формулу (2.49) получим отношение правдоподобия в следующем виде:

$$l[r(t)] = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dA_i \int_0^{2\pi} A_i \exp[-A_i^2] \times \\ \times \exp\left[-\frac{A_i^2 E_i}{N_0}\right] \exp\left[\frac{2A_i Z_i}{N_0} \cos(\beta_i - Q_i)\right] d\beta_i.$$

Каждый из сомножителей в этом выражении может быть подвергнут преобразованию с учетом соотношений (2.58) [по аналогии с выводом формулы (2.59)]. В итоге получим выражение для отношения правдоподобия:

$$l[r(t)] = \prod_{i=1}^k \frac{N_0}{E_i + N_0} \exp\left[\frac{1}{N_0} \frac{Z_i^2}{E_i + N_0}\right]. \quad (2.74)$$

Формула (2.74) справедлива не только для случая неперекрывающихся импульсов пачки. Она остается в силе при независимых флуктуациях и неперекрывающихся спектрах сигналов, если даже эти сигналы накладываются друг на друга. Такие многочастотные сигналы используют для борьбы с замираниями.

#### 2.4.2. Структурные схемы обнаружителей пачек импульсов

Упростим алгоритм обнаружения пачек, используя монотонную функцию от отношения правдоподобия. Решающее правило при этом не меняется. Прологарифмировав выражения (2.71) и (2.74), получим:

$$\ln l[r(t)] = \sum_{i=1}^k \ln I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right) - \sum_{i=1}^k \frac{E_i}{N_0}; \\ \ln l[r(t)] = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \frac{Z_i^2}{E_i + N_0} + \sum_{i=1}^k \ln \frac{N_0}{E_i + N_0}.$$

При логарифмировании операции умножения были заменены операциями сложения, которые реализуются проще.

Оптимальные решающие правила обнаружения пачек импульсов сводятся к сравнению с порогом следующих величин:

- 1) при обработке нефлуктуирующей пачки



$$\sum_{i=1}^k \ln I_0 \left( \frac{2Z_i}{N_0} \right);$$

2) при обработке некогерентной пачки с независимыми флуктуациями импульсов

$$\sum_{i=1}^k \frac{Z_i^2}{E_i + N_0}. \quad (2.75)$$

В оптимальном обнаружителе необходимо для каждого импульса вычислять величину

$$Z_i = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}(t) \bar{S}_{0i}^*(t) dt \right|, \quad (2.76)$$

где  $\bar{S}_{0i}^*(t) = S_{0i} \exp[-j\psi(t)]$  – полностью известная функция, определяемая параметрами  $i$ -го импульса.

Введем амплитудные множители  $s_i$ , которые характеризуют форму неискаженной пачки. Примем для наибольшего импульса пачки  $s = 1$ . Тогда можно записать:

$$Z_i = s_i Z_{0i}, \quad (2.77)$$

где величины  $Z_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , соответствуют нормированным по амплитуде импульсам  $\bar{s}_{iH}(t)$  и могут быть получены с помощью схемы, состоящей из согласованного фильтра и детектора огибающей. После детектора огибающей, согласно формуле (2.77), необходимо добавить **схему ввода весовых множителей**. Таким образом, в обнаружителе требуется вычислять значения  $\ln I_0(2s_i Z_{0i}/N_0)$ ,  $i = \overline{1, k}$ , и суммировать их (для нефлуктуирующей пачки).

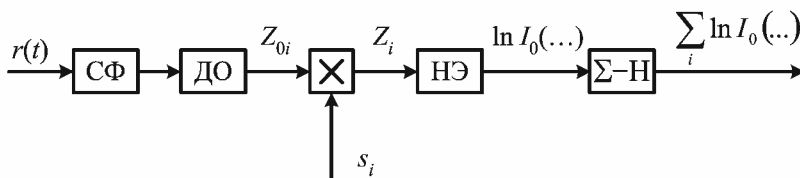


Схема обнаружителя приведена на рис. 2.21. **Рис. 2.21.** Обнаружитель некогерентной пачки импульсов. Согласованный фильтр (СФ) на входе предусмотрен для оптимальной фильтрации одиночных импульсов  $\bar{s}_{iH}(t)$ . Линейный детектор обеспечивает выполнение операции модуля. После детектора огибающей (ДО) вводятся весовые множители и осуществляется нелинейное преобразование в нелинейном элементе (НЭ) с характеристикой  $\ln I_0(u)$ . Сумматор-накопитель ( $\Sigma$ -Н) обеспечивает **некогерентное суммирование** (накопление) импульсов.

Схема может быть упрощена для случаев слабых и сильных сигналов. При малых значениях аргумента ( $u \ll 1$ )  $\ln I_0(u) \approx u^2/4$ , т. е. характеристика нелинейного элемента может быть представлена квадратичной параболой.

При сильных сигналах ( $u \gg 1$ ) справедливо асимптотическое выражение  $\ln I_0(u) \approx u$ , позволяющее аппроксимировать характеристику НЭ линейной функцией.

Таким образом, для пачки импульсов с малыми амплитудами (по сравнению с шумом) имеем

$$\sum_{i=1}^k \ln I_0 \left( \frac{2s_i Z_{0i}}{N_0} \right) \approx \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2 Z_{0i}^2}{N_0}; \quad (2.78)$$

при больших амплитудах

$$\sum_{i=1}^k \ln I_0 \left( \frac{2s_i Z_{0i}}{N_0} \right) \approx \sum_{i=1}^k \frac{2s_i^2 Z_{0i}}{N_0}. \quad (2.79)$$

Здесь суммирование логарифмов заменяется суммированием квадратичных и линейных функций величин  $Z_{0i}$ . Суммирование является **взвешенным** и может быть осуществлено с помощью специального фильтра. Такой фильтр последетекторной обработки (ФПО) показан на рис. 2.22, где представлена упрощенная схема обработки некогерентной пачки импульсов. В случае большой амплитуды импульсов ДО является линейным, в случае малой амплитуды – квадратичным.



**Рис. 2.22.** Обнаружитель некогерентной пачки импульсов (случай сильных либо слабых сигналов)

Прием пачки импульсов с независимыми флуктуациями амплитуд осуществляется в соответствии с операциями, определяемыми выражением (2.75):

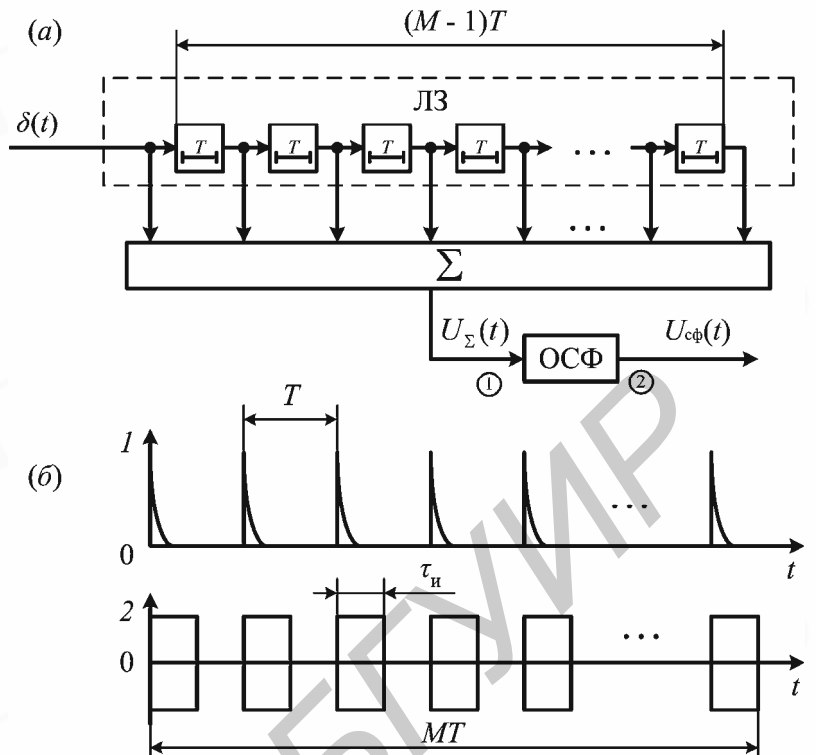
$$\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^k \frac{s_i^2 Z_{0i}^2}{s_i^2 + N_0/E_0},$$

где  $E_0 = E_i/s_i^2$  – средняя энергия наибольшего импульса неискаженной пачки. Квадратичное детектирование после СФ в данном случае является оптимальным при всех отношениях сигнал/шум, а весовые множители пропорциональны величинам  $s_i^2/(s_i^2 + N_0/E_0)$ . В случае прямоугольной огибающей пачки весовые коэффициенты равны и взвешенное суммирование равносильно невзвешенному.

### 2.4.3. Накопители импульсных сигналов

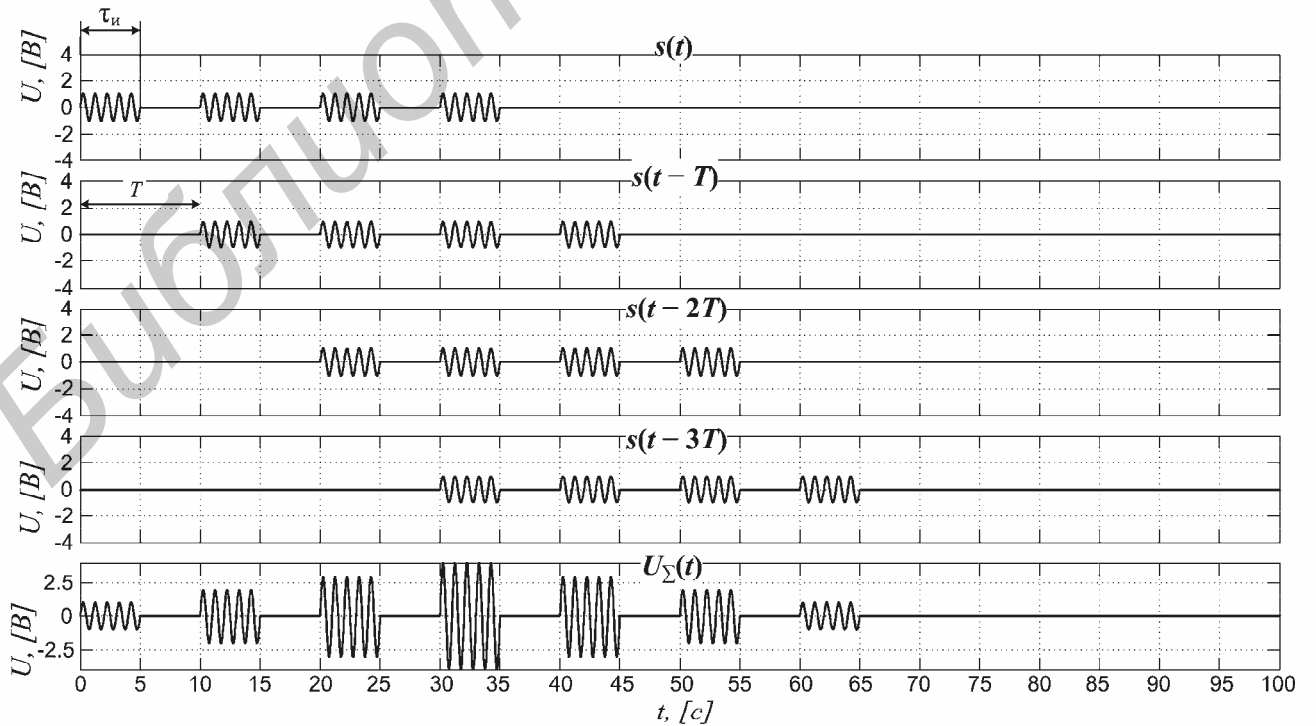
Различают когерентное и некогерентное накопление (суммирование) импульсов. **Когерентное накопление** может быть реализовано, если ожидаемый сигнал представляет пачку когерентных радиоимпульсов, фазы которых жестко связаны между собой. **Некогерентное накопление** заключается в суммировании импульсов после детектора, т. е. при обработке сигнала в виде пачки радиоимпульсов с независимыми начальными фазами.

Рассмотрим вначале когерентный накопитель, считая начальные фазы всех импульсов пачки одинаковыми. Примем период повторения импульсов равным  $T$ , а длительность пачки  $T_n = MT$ , где  $M$  – число импульсов в пачке. Оптимальный фильтр для пачки радиоимпульсов имеет импульсную реакцию, которую можно реализовать в соответствии с соотношением (2.44) с помощью линии задержки (ЛЗ) (с  $M$  отводами через  $T$ ) и сумматора. К выходу сумматора подключается оконечный фильтр, согласованный с одиночным радиоимпульсом (ОСФ).



**Рис. 2.23.** Согласованный с когерентной пачкой импульсов фильтр (а) и построение его импульсной характеристики (б)

Оптимальный фильтр для пачки радиоимпульсов имеет импульсную реакцию, которую можно реализовать в соответствии с соотношением (2.44) с помощью линии задержки (ЛЗ) (с  $M$  отводами через  $T$ ) и сумматора. К выходу сумматора подключается оконечный фильтр, согласованный с одиночным радиоимпульсом (ОСФ). На рис. 2.23, а приведена схема накопителя, на рис. 2.23, б показаны диаграммы в точках 1 и 2, поясняющие формирование импульсной реакции (радиоимпульсы изображены условно). Результат воздействия на когерентный накопитель ожидаемой когерент-



**Рис. 2.24.** Осциллограммы, поясняющие принцип работы когерентного накопителя

ной пачки иллюстрирует рис. 2.24. На первых четырех осциллограммах показаны сигналы на входе сумматора. Последняя осциллограмма соответствует сигналу на выходе сумматора. Реакция оптимального когерентного накопителя на когерентную пачку импульсов имеет форму автокорреляционной функции пачки радиоимпульсов, максимум этой функции соответствует времени окончания действия пачки на входе  $t_3 + T_{\text{п}}$ . Когерентное суммирование радиоимпульсов приводит к увеличению отношения сигнал/шум на выходе накопителя по сравнению с входным. Это можно пояснить, рассмотрев частотную характеристику когерентного суммирования. Действие ОСФ можно пока не учитывать.

Сигнал на выходе окончательного согласованного фильтра показан на рис. 2.25.

Частотная характеристика схемы оптимального суммирования определяется соотношением

$$K_0(j\omega) = \frac{u_{\text{ВЫХ}}(t)}{u_{\text{ВХ}}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^k u_{\text{ВХ}}(t - iT)}{u_{\text{ВХ}}(t)}, \quad u_{\text{ВХ}}(t) = e^{j\omega t}.$$

Произведя суммирование геометрической прогрессии в числителе, на основании формулы Эйлера получим

$$K_0(j\omega) = \frac{\sin(\omega MT/2)}{\sin(\omega T/2)} \exp[-j\omega(M-1)T/2]. \quad (2.80)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяется модулем выражения (2.80). Она приведена на рис. 2.26. Такую характеристику называют **гребенчатой**, а фильтры, реализующие эту характеристику, — **гребенчатые**. Совместно с ОСФ когерентный сумматор имеет

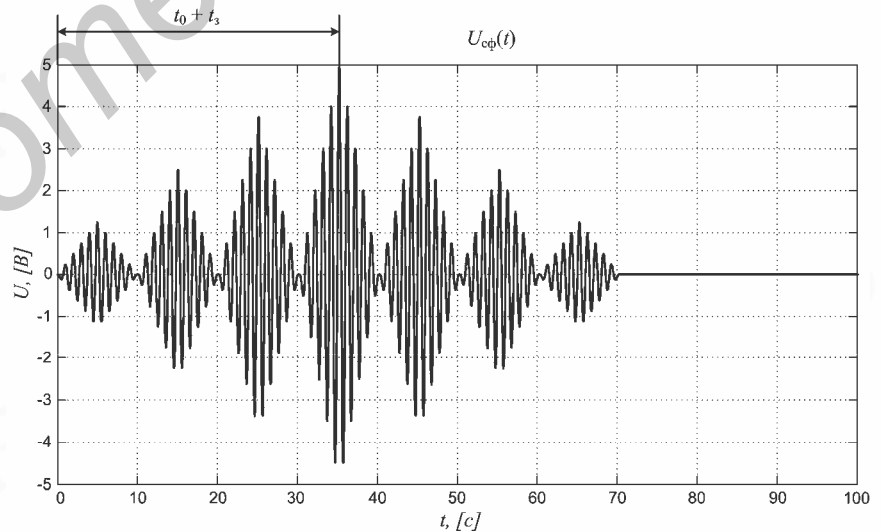
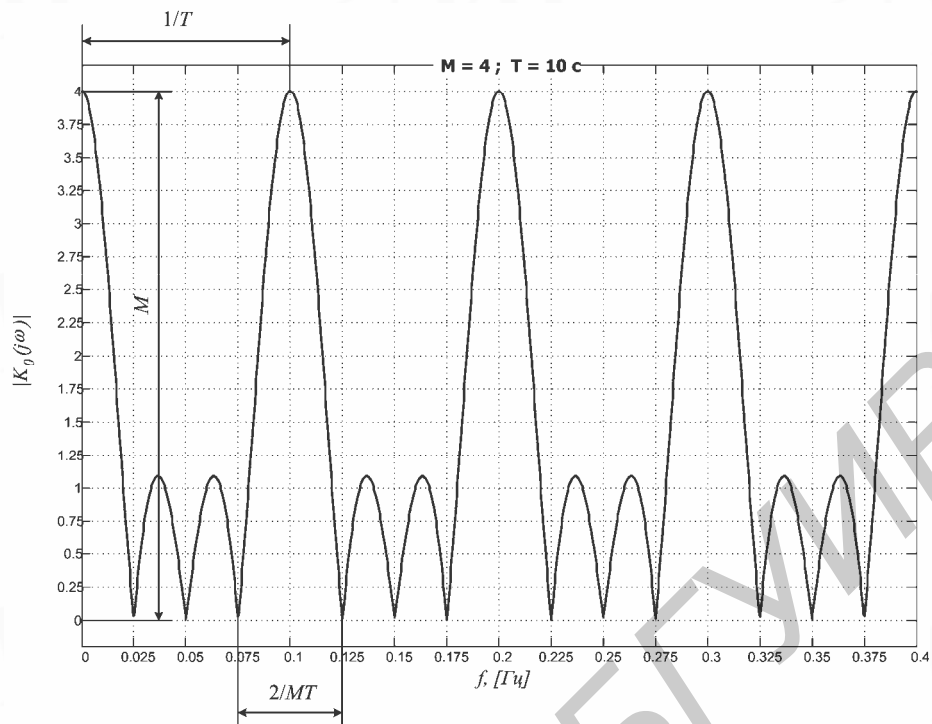


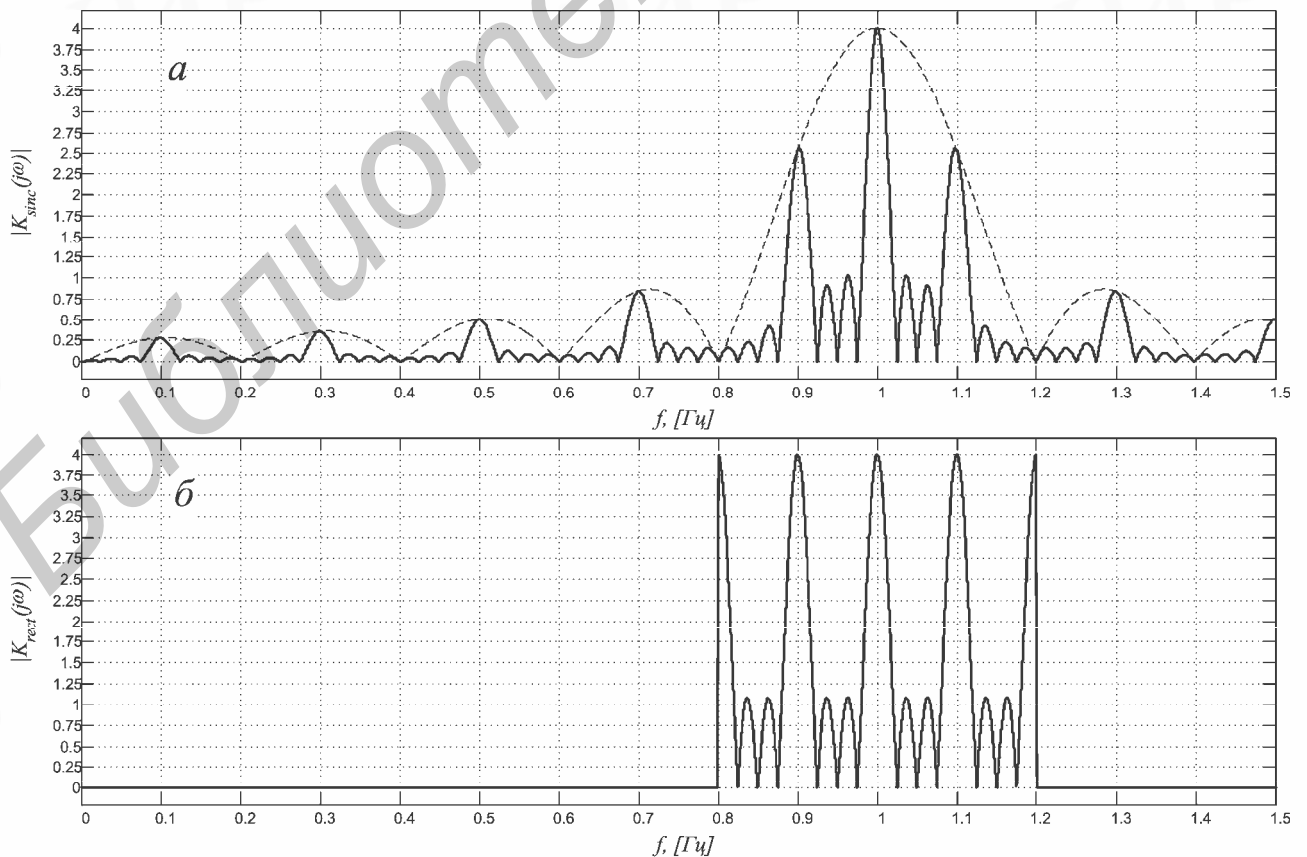
Рис. 2.25. Осциллограмма сигнала на выходе ОСФ

АЧХ, совпадающую по форме с амплитудно-частотным спектром пачки радиоимпульсов (рис. 2.27, а). Если заменить ОСФ полосовым фильтром, рассчитанным на эффективную полосу  $\Delta\omega$  радиосигнала, то АЧХ когерентного накопителя примет вид, показанный на рис. 2.27, б.



**Рис. 2.26.** Амплитудно-частотная характеристика схемы оптимального суммирования радиоимпульсов

Некогерентные накопители представляют согласованные фильтры для последовательностей видеоимпульсов. Чтобы учесть изменение амплитуды импульсов в пачке (огibaющую пачку), после линии задержки с отводами



**Рис. 2.27.** Амплитудно-частотная характеристика когерентного сумматора

включают БВК (рис. 2.28). Весовые множители определяются из выражений (2.77) и (2.78) в зависимости от того, является пачка нефлуктуирующей или флуктуирующей.

Поскольку реализация ЛЗ с отводами через период  $T$  встречает определенные трудности, используют квазиоптимальный накопитель, который строится с помощью ЛЗ на период повторения импульсов и используют положительную обратную связь. Схема накопителя, называемого **рециркулятором**, приведена на рис. 2.29, а.

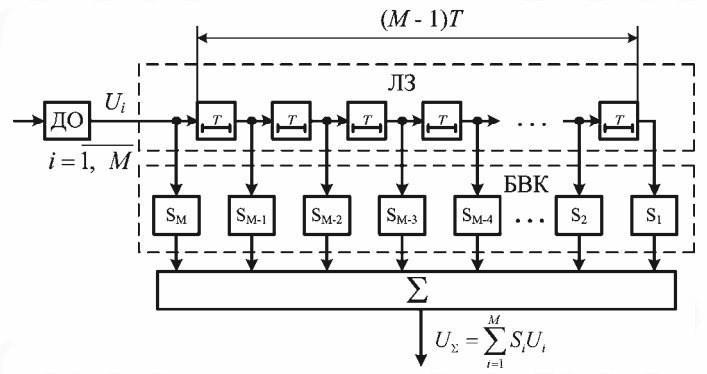


Рис. 2.28. Структурная схема некогерентного накопителя радиоимпульсов

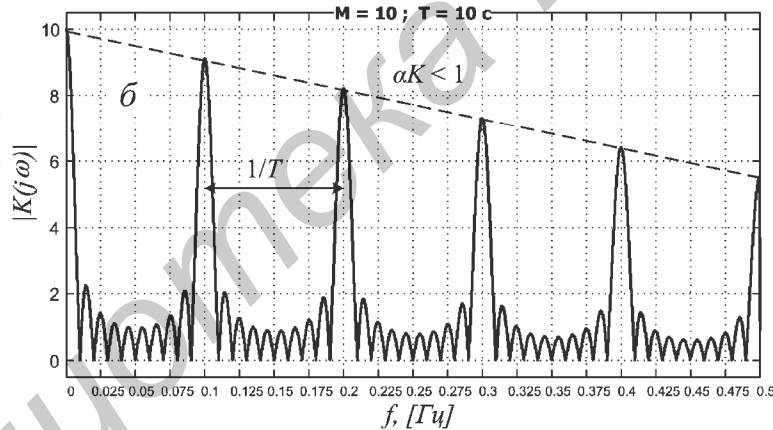
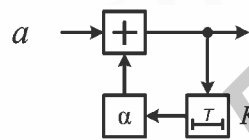


Рис. 2.29. Структурная схема рециркулятора и его АЧХ

Коэффициент обратной связи  $\alpha$  выбирается таким, чтобы произведение  $\alpha K < 1$  ( $K$  – коэффициент передачи ЛЗ) обеспечивало не очень сильное затухание первого импульса пачки к моменту прихода последнего импульса. Обычно  $\alpha K = 0,8 \dots 0,9$ . АЧХ рециркулятора напоминает гребенку (рис. 2.29, б), поэтому его иногда называют гребенчатым фильтром пропускания для пачки видеоимпульсов.

Одной из важных реализаций некогерентного накопления является **цифровое накопление (суммирование)**. При таком накоплении входные импульсы квантуются по амплитуде и выражаются в цифровом коде, например двоичном. В простейшем случае используют бинарное (двоичное)

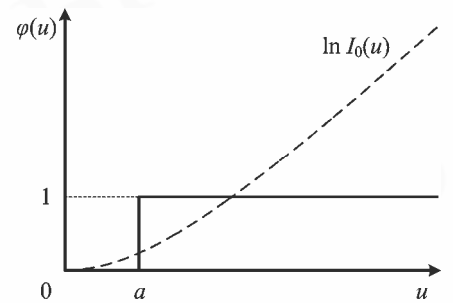


Рис. 2.30. Пороговая характеристика при цифровом накоплении

квантование, которое реализуется пороговой схемой, при этом напряжение на выходе квантователя выражается одним двоичным разрядом (0 или 1). Пороговую характеристику  $\varphi(u)$ , показанную на рис. 2.30, можно рассматривать как аппроксимацию функции  $\ln I_0(u)$  нелинейного элемента в схеме рис. 2.21. Включение пороговой схемы несколько ухудшает качество обнаружения сигнала, однако упрощает реализацию сумматора-накопителя за счет использования цифровых элементов обработки сигнала. Существенным является возможность накопления большого числа импульсов за счет использования цифровых запоминающих устройств и сумматоров.

Схема цифрового накопителя с двумя ПУ – на входе и выходе цифрового сумматора (ЦС) – приведена на рис. 2.31. ЦС, рассчитанный на  $M$  импульсов, осуществляет операции запоминания и суммирования и требует сброса данных по окончании накопления для подготовки к обработке новой реализации. С целью упрощения сумматора иногда рассчитывают его на запоминание  $m < M$  подряд следующих импульсов пачки. Если  $m$  равно 2 или 3, реализация ЦС оказывается весьма простой. Решение о наличии сигнала принимается, если хотя бы один раз за время действия пачки уровень первого порога будет превышен  $n$  импульсами из  $m$  возможных. Здесь  $n$  определяет уровень порога в ПУ2, где принимается решение о наличии или отсутствии цели (сигнала).



Рис. 2.31. Структурная схема цифрового накопителя

#### 2.4.4. Характеристики обнаружения при накоплении импульсов

Для получения характеристик обнаружения требуется определить условные плотности вероятности значений напряжения на выходе сумматора-накопителя  $W_{с.п}(u)$  и  $W_{п}(u)$ . При квадратичном суммировании  $u = \sum_i u_i^2$  при

линейном суммировании  $u = \sum_i u_i$ , где  $u_i$  – амплитуда  $i$ -го импульса. Если

сигнал отсутствует, плотность вероятности каждой случайной величины подчиняется закону Релея. Плотность вероятности меняется при появлении сигнала. Интегрируя плотности вероятности  $W_{с.п}(u)$  и  $W_{п}(u)$  в пределах от порогового значения до  $\infty$ , можно определить условные вероятности  $D$  и  $F$ .

Не приводя сложные формулы для расчета этих вероятностей, можно сказать, что *некогерентное накопление импульсов проигрывает когерентному*. Относительное изменение пороговой энергии при изменении вероятностей  $D$  и  $F$  практически не зависит от числа импульсов в пачке. Возможность обнаружения в этом случае определяется отношением энергии всей пачки к спектральной плотности  $N_0$ , поэтому при переходе от одного импульса к  $M$  пороговая энергия уменьшается в  $M$  раз. С увеличением числа импульсов в пачке потери возрастают, вместе с тем применение некогерентного накопле-

ния импульсов целесообразно, если нельзя использовать когерентное накопление.

Цифровое накопление с помощью двухпороговой схемы, функционирующей по правилу  $n$  из  $m$ , при  $m = M$  основано на подсчете числа импульсов, превышающих порог. Анализ показывает, что для каждого значения  $M$  существует оптимальное значение  $n_{\text{опт}}$ , для которого проигрыш цифрового накопления по сравнению с когерентным минимален. Если используется правило  $m < M$ , потери возрастают.

## 2.5. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

### 2.5.1. Различение детерминированных сигналов

Рассмотрим задачу различения двух детерминированных сигналов. В качестве критерия оптимальности примем критерий идеального наблюдателя (2.7), в соответствии с которым минимизируется полная вероятность ошибочного приема  $P_e$ .

Принятую смесь сигнала и шума представим в виде (1.6), полагая сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  известными точно:

$$r(t) = \theta s_1(t) + (1 - \theta) s_2(t) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.81)$$

Параметр  $\theta$  может принимать одно из двух значений – 0 или 1. Считаются известными априорные вероятности  $P(s_1)$  и  $P(s_2)$  присутствия каждого из сигналов, причем  $P(s_1) + P(s_2) = 1$ . Белый гауссовский шум  $n(t)$  имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию

$R_n(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2)$ . По принятой реализации (2.80) требуется принять решение о значении параметра  $\theta$ , т. е. определить, какой из двух возможных сигналов присутствует в реализации. В данной задаче ошибочные ситуации характеризуются условными вероятностями  $P_{e2} = P(s_1|s_2)$  и  $P_{e1} = P(s_2|s_1)$ .

При решении задачи различения двух сигналов можно воспользоваться методикой, изложенной в п. 2.2.2, и определить оптимальное решающее правило  $\theta^*[r(t)]$ , минимизирующее полную вероятность ошибки  $P_e$ . По аналогии с соотношениями (2.8) и (2.9) критерий минимизации вероятности  $P_e$  можно свести к максимизации взвешенной разности:

$$P(s_1|s_1) - l_0 P(s_1|s_2) = \max,$$

где  $P(s_1|s_1)$  – вероятность принятия решения о наличии сигнала при условии действия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_1$ ;  $P(s_1|s_2) = P_{e2}$  – вероятность ошибочного принятия решения о наличии сигнала  $s_1$ ;  $l_0 = P(s_1)/P(s_2)$  – отношение априорных вероятностей.

Применяя представление процессов в виде набора дискретных значений и пользуясь методикой, описанной в п. 2.2.2, после перехода к пределу



при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим следующее оптимальное правило различения двух сигналов:

$$\theta^*[r(t)] = \begin{cases} 1, & \text{если } l_1[r(t)] > l_0; \\ 0, & \text{если } l_1[r(t)] < l_0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Здесь отношение правдоподобия  $l_1[r(t)]$  определяется выражением

$$l_1[r(t)] = \frac{W[r(t)|s_1]}{W[r(t)|s_2]} = \exp\left[-\frac{E_1 - E_2}{N_0}\right] \exp\left\{\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt\right\}, \quad (2.83)$$

где  $W[r(t)|s_i]$ ,  $i = 1, 2$  – функционалы плотности вероятности реализации, вычисленные при условии наличия в смеси сигналов  $s_1$  и  $s_2$ ;  $E_1, E_2$  – энергии этих сигналов.

Исходя из выражения (2.82), оптимальное правило различения можно свести к следующему:

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = h, \quad (2.84)$$

где  $h$  – пороговый уровень. При превышении порога величиной, стоящей в левой части неравенства (2.84), принимается решение о правильности гипотезы  $H_1$  (в реализации присутствует сигнал  $s_1$ ). Если значение корреляционного интеграла меньше порога  $h$ , принимается гипотеза  $H_2$  (в реализации присутствует сигнал  $s_2$ ). Таким образом, задача различения сигналов (так же, как и задача обнаружения) может трактоваться как задача проверки статистических гипотез.

В **симметричной** системе передачи двоичных сигналов принимается  $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$ ;  $E_1 = E_2$ , поэтому  $P_{e1} = P_{e2}$ . Для такой системы выражение (2.84) упрощается, поскольку порог  $h = 0$ :

$$\int_0^T r(t)s_1(t) dt - \int_0^T r(t)s_2(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} 0. \quad (2.85)$$

Возможны различные варианты реализации оптимального алгоритма различения двух сигналов, известных точно: с использованием корреляторов (рис. 2.32) и согласованных фильтров (рис. 2.33). При построении схем, приведенных на рисунках, интеграл в левой час-

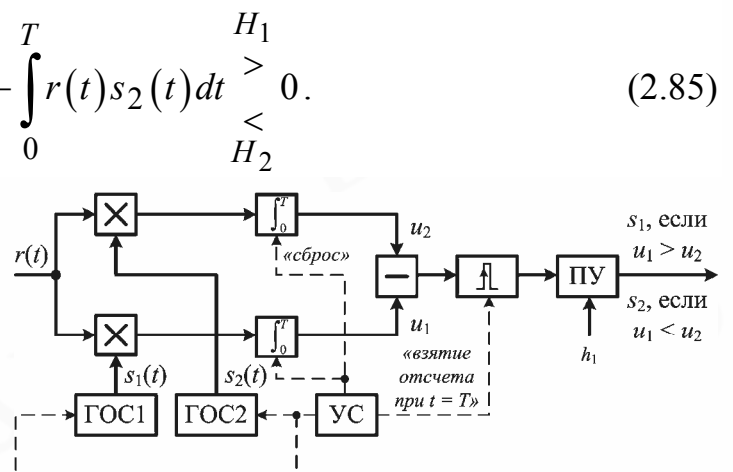


Рис. 2.32. Оптимальный различитель на основе корреляторов

ти неравенства (2.84) представляется в виде разности при  $h_1 = N_0 h/2$ :

$$\int_0^T r(t) s_1(t) dt - \int_0^T r(t) s_2(t) dt \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_2 \end{matrix} h_1.$$

Разность величин  $u_1$  и  $u_2$  на выходах интеграторов сравнивается с порогом  $h_1$ . Согласованные с сигналами  $s_1$  и  $s_2$  фильтры (СФ) на рис. 2.33 обеспечивают формирование в момент  $t = t_0 + t_3$ ,  $t_0 \geq T$ , величин, пропорциональных значениям  $u_1$  и  $u_2$ . При  $t_0 = T$  и  $C = 1$  импульсная реакция СФ определяется соотношением [см. формулу (2.36)]  $g_i(t) = s_i(T - t)$ ,  $i = 1, 2$ .

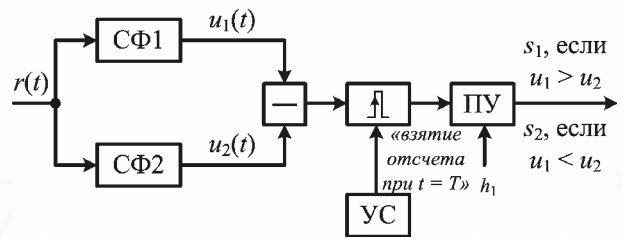


Рис. 2.33. Оптимальный различитель на основе согласованных фильтров

Возможна реализация различителя на основе одноканальной схемы. В этом случае генератор опорного сигнала (ГОС) формирует разностный сигнал  $s_1(t) - s_2(t)$ , а СФ имеет импульсную реакцию  $g(t) = s_1(T - t) - s_2(T - t)$ . Схемы различителей одноканального типа приведены на рис. 2.34, 2.35.

Вычислим вероятность общей ошибки  $P_e$  различителя двух детерминированных сигналов. Рассмотрим симметричную систему передачи. Решающее правило (2.84) содержит в левой части неравенства величину, которая зависит от реализации шума и поэтому случайна. Поскольку  $n(t)$  – гауссовский белый шум, случайная величина корреляционного интеграла подчиняется гауссовскому закону. При наличии в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_1(t)$  выражение в левой части неравенства (2.83) можно представить в виде

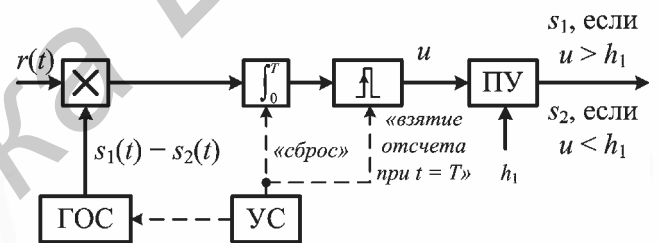


Рис. 2.34. Одноканальный различитель на корреляторе

$$u(T) = u_{s1} = \int_0^T [s_1(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt.$$

Гауссовская случайная величина  $u_{s1}$  имеет среднее значение

$$\langle u_{s1} \rangle = E(1 - \rho_s) \quad (2.86)$$

и дисперсию

$$\langle u_{s1}^2 \rangle - \langle u_{s1} \rangle^2 = EN_0(1 - \rho_s) \quad (2.87)$$

Здесь

$$\rho_s = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \quad (2.88)$$

есть коэффициент взаимной корреляции между сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

При условии наличия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_2(t)$  случайная величина  $u(t)$ , образующаяся на выходе коррелятора или СФ, определяется выражением

$$u(T) = u_{s2} = \int_0^T [s_2(t) + n(t)][s_1(t) - s_2(t)] dt$$

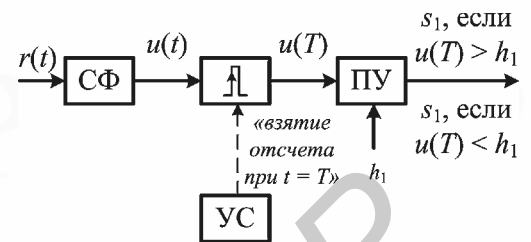


Рис. 2.35. Одноканальный различитель на согласованном фильтре

Характеристики этой гауссовской случайной величины следующие: среднее значение

$$\langle u_{s2} \rangle = -E(1 - \rho_s); \quad (2.89)$$

дисперсия

$$\langle u_{s2}^2 \rangle - \langle u_{s2} \rangle^2 = EN_0(1 - \rho_s). \quad (2.90)$$

Выражения (2.86) – (2.90) получены в соответствии с методикой, приведенной в п. 2.2.3.

Плотности вероятности  $W_1(u_s)$  и  $W_2(u_s)$  определяются при условии присутствия в смеси сигналов  $s_1$  и  $s_2$  соответственно. Вид этих условных плотностей вероятности показан на рис. 2.36, где заштрихованные площади соответствуют условным вероятностям ошибочного приема  $p(s_1|s_2)$  и  $p(s_2|s_1)$ . Указанные вероятности определяются выражениями:

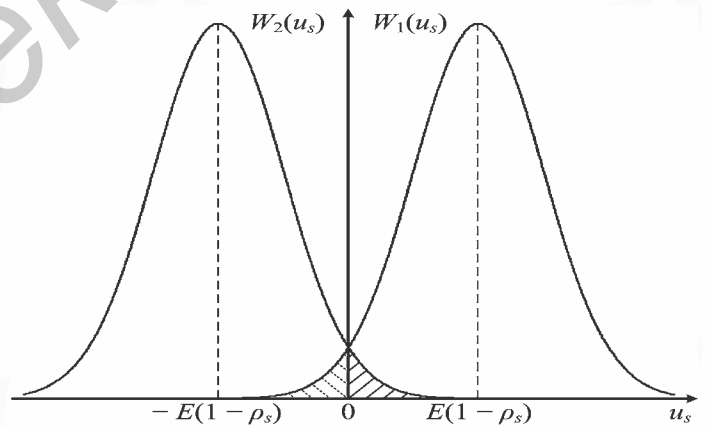


Рис. 2.36. Условные ПРВ при различении

$$p(s_1|s_2) = \int_h^\infty W_2(u) du; \quad p(s_2|s_1) = \int_{-\infty}^h W_1(u) du. \quad (2.91)$$

Вероятность общей ошибки в соответствии с соотношениями (2.7) и (2.91) для симметричной системы может быть записана в виде

$$P_e = 0,5 \left[ \int_0^\infty W_2(u) du + \int_{-\infty}^0 W_1(u) du \right].$$

После вычислений с учетом выражений для плотностей вероятности получим

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{0,5q(1 - \rho_s)}\right), \quad (2.92)$$

где  $q = 2E/N_0$  – отношение сигнал/шум;  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности (2.29).

Таким образом, вероятность полной ошибки при приеме равновероятных сигналов с одинаковыми энергиями для заданного отношения сигнал/шум  $q = 2E/N_0$  зависит от величины коэффициента взаимной корреляции сигналов  $\rho_s$ .

Наибольшей помехоустойчивостью обладают сигналы с минимальным коэффициентом корреляции  $\rho_s$ . Заметим, что  $|\rho_s| \leq 1$ . Для **противоположных** сигналов

$s_1(t) = -s_2(t)$  имеем  $\rho_s = -1$ . Для **одинаковых** сигналов  $s_1(t) = s_2(t)$  коэффициент  $\rho_s = 1$ . Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  **ортогональны**, если  $\rho_s = 0$ . *Наибольшей различимостью обладают сигналы, одинаковые по форме и противоположные по знаку (противоположные сигналы).* Одинаковые сигналы различить невозможно. Вероятность ошибки  $P_e$  зависит от коэффициента корреляции  $\rho_s$ , как показано на рис. 2.37, где значения отношения сигнал/шум зафиксированы. Наименьшую вероятность  $P_e$  можно получить при  $\rho_s = -1$ . Если  $\rho_s = 1$ , то независимо от значений  $q$ , вероятность  $P_e = 0,5$ .

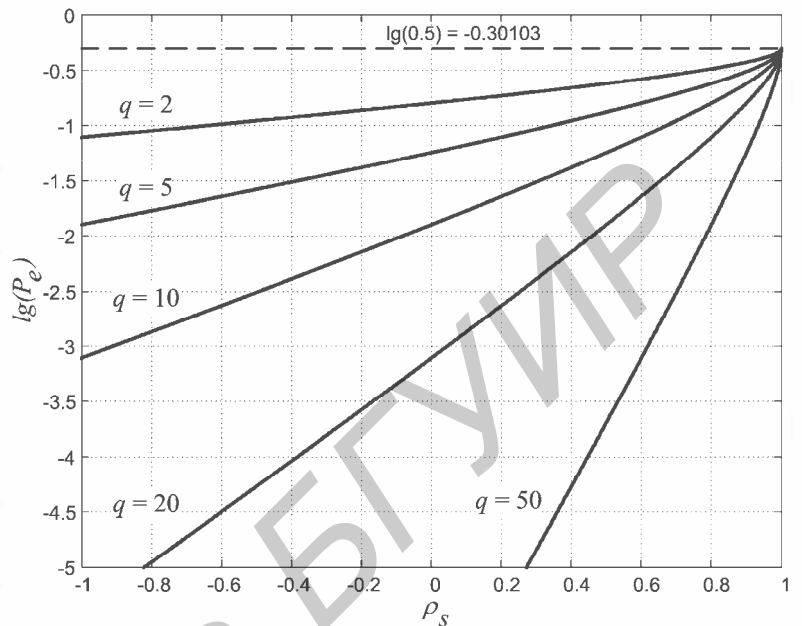
Обычно пользуются кривыми **потенциальной помехоустойчивости**, которые характеризуют зависимость вероятности общей ошибки  $P_e$  от отношения сигнал/шум  $q$  при оптимальном приеме детерминированных сигналов. Рассмотрим частные случаи кривых для некоторых видов манипулированных сигналов, применяемых для передачи двоичных сообщений.

При **амплитудной манипуляции (АМ)** и передаче сообщений с пассивной паузой

$$s_1(t) = A_m \cos[\omega_0 t + \varphi]; \quad s_2(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

В этом случае  $\rho_s = 0$ , а характеристики плотностей вероятности  $W_1(u_s)$  и  $W_2(u_s)$  следующие:  $\langle u_{s1} \rangle = E$ ;  $\langle u_{s2} \rangle = 0$ ;  $\langle u_{si}^2 \rangle - \langle u_{si} \rangle^2 = N_0 E / 2$ ,  $i = 1, 2$ , где

$E = A_m^2 T / 2$  – энергия сигнала.



**Рис. 2.37.** Логарифм вероятности ошибки различения как функция взаимной корреляции сигналов при различных отношениях С/Ш

При равных вероятностях наличия и отсутствия сигнала вероятность  $P_e$  полной ошибки записывается в виде суммы  $0,5(P_{e1} + P_{e2})$ , где  $P_{e1}$  соответствует условной вероятности  $\hat{D} = 1 - D$  пропуска сигнала  $s_1$ , а вероятность  $P_{e2}$  – условной вероятности ложной тревоги. Вероятности  $D$  и  $F$  вычислены в п. 2.2.4 и определяются соотношениями (2.31) и (2.32). На основании этих соотношений можно определить оптимальный порог  $h_{opt}$ , при котором полная вероятность  $P_e$  минимальна. Из условия  $dP_e/dh = 0$  или по формуле (2.84) находим  $h_{opt} = E/2$ . При таком пороге вероятность  $P_e$  минимальна и равна  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q}/2)$ , где  $q = 2E/N_0$ . График зависимости  $P_e$  от  $q$  для АМ приведен на рис. 2.38.

При **частотной манипуляции** (ЧМ) сигнал на интервале  $[0, T]$  принимает одно из двух возможных значений частоты, поэтому

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos[\omega_1 t + \varphi_1]; \\ s_2(t) &= A_m \cos[\omega_2 t + \varphi_2]. \end{aligned} \quad (2.93)$$

При условии  $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$  можно считать сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  ортогональными, т. е.  $\rho_s = 0$ . Подставив это значение коэффициента корреляции в формулу (2.91), получим выражение для вероятности полной ошибки:  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q}/2)$ , зависимость которой от отношения сигнал/шум  $q$  приведена на рис. 2.38.

Отметим некоторые особенности ЧМ-сигналов. Различают ЧМ-сиг-

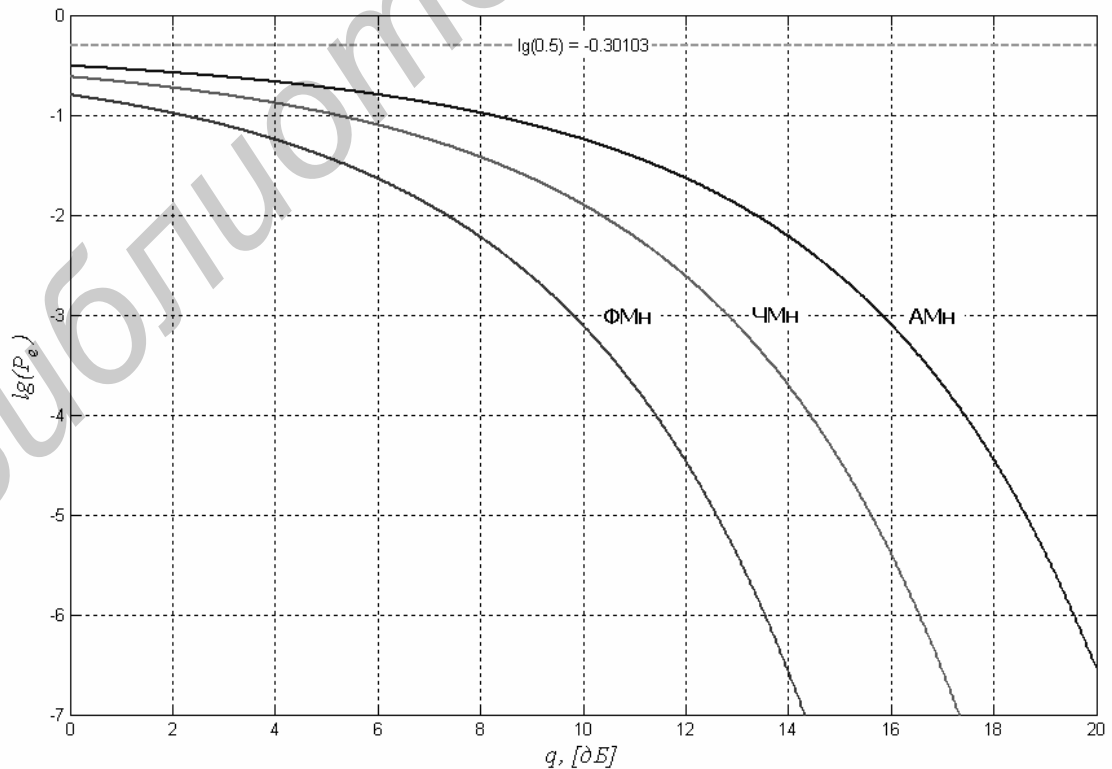


Рис. 2.38. Логарифм вероятности ошибки различения как функция отношения сигнал/шум

налы с разрывом фазы, которые определяются выражениями (2.93). Такие сигналы формируются разными генераторами, коммутируемыми в соответствии с передаваемыми информационными символами. Начальные фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  независимы друг от друга.

ЧМ-сигналы без разрыва фазы формируются с помощью одного генератора, частота которого изменяется в соответствии с передаваемыми символами. При этом фаза колебаний в начале очередного тактового интервала совпадает с фазой колебания в конце предыдущего интервала:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos[\omega_1(t - kT) + \Phi_k + \varphi]; \\ s_2(t) &= A_m \cos[\omega_2(t - kT) + \Phi_k + \varphi], \end{aligned} \quad t \in [kT, (k+1)T],$$

где  $\Phi_k = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i T$  – набег фазы за  $k-1$  предыдущих интервалов;  $\omega_i$  – значение частоты на  $i$ -м интервале ( $\omega_i = \omega_1$  или  $\omega_i = \omega_2$ ).

Влияние значения информационного символа на фазу сигнала в последующих интервалах можно использовать для повышения помехоустойчивости по сравнению с посимвольным приемом независимых посылок. Так, при выборе  $(\omega_2 - \omega_1)T = \pi$  можно получить вероятность  $P_e$  приема ЧМ-радиосигналов с непрерывной фазой такую же, как и при приеме фазоманипулированных сигналов.

При **фазовой манипуляции** (ФМ) справедливо следующее соотношение для сигналов:

$$s_1(t) = -s_2(t) = A_m \cos \omega_0 t, \quad t \in [0, T].$$

Коэффициент корреляции  $\rho_s = -1$ , и в соответствии с выражением (2.92) вероятность полной ошибки  $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{q})$ .

Зависимость вероятности  $P_e$  от отношения сигнал/шум для ФМ-сигналов приведена на рис. 2.38.

Сравнение кривых, представленных на рис. 2.38, показывает, что наибольшей помехоустойчивостью обладает фазовая манипуляция, наименьшей – амплитудная манипуляция с пассивной паузой. Приведенные зависимости характеризуют **потенциальную помехоустойчивость**. В реальных системах осуществить идеальный когерентный прием сигналов не удастся из-за влияния случайных дестабилизирующих факторов на фазу и амплитуду радиосигнала. Поэтому реальная помехоустойчивость при рассмотренных условиях (помеха – гауссовский белый шум) всегда ниже потенциальной.

### 2.5.2. Различение двоичных сигналов со случайными параметрами

Рассмотрим радиосигналы со случайными начальными фазами. Такие сигналы можно представить квазигармоническими колебаниями в виде [см. выражение (1.9)]

$$s_i(t) = S_{0i}(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t) + \varphi_i], \quad i = 1, 2,$$

где  $S_{0i}(t)$ ,  $\psi_i(t)$  – функции, определяющие закон модуляции;  $\omega_i$  – несущая частота;  $\varphi_i$  – начальная фаза  $i$ -го сигнала. Считаем начальные фазы сигналов независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Оптимальное решающее правило различения сигналов характеризуется соотношением (2.82). Чтобы определить отношение правдоподобия  $l_1[r(t)]$ , воспользуемся методикой, примененной при решении задачи обнаружения сигнала со случайной начальной фазой (п. 2.3.3). Введем обозначения для корреляционных интегралов:

$$z_{ic} = \int_0^T r(t) S_{0i}(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t)] dt;$$

$$z_{is} = \int_0^T r(t) S_{0i}(t) \sin[\omega_i t + \psi_i(t)] dt;$$

$$Z_i = \sqrt{z_{ic}^2 + z_{is}^2}, \quad i=1,2$$
(2.94)

и после преобразований, аналогичных описанным в п. 2.3.3, получим

$$l_1[r(t)] = \exp\left[\frac{E_2 - E_1}{N_0} \frac{I_0(2Z_1/N_0)}{I_0(2Z_2/N_0)}\right].$$
(2.95)

Логарифмируя выражение (2.95), можно оптимальное правило различения привести к виду

$$\ln I_0(2Z_1/N_0) - \ln I_0(2Z_2/N_0) \begin{matrix} > & \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{P(s_1)}{P(s_2)} h. \\ < & \end{matrix}$$
(2.96)

Здесь  $E_1, E_2$  – энергия сигналов;  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $h$  – порог.

Структурные схемы оптимальных различителей сигналов, имеющих случайные начальные фазы, можно реализовать на базе квадратурных корреляционных каналов (рис. 2.39) или на базе согласованных фильтров с детекторами огибающих (рис. 2.40). В приведенных схемах различи-

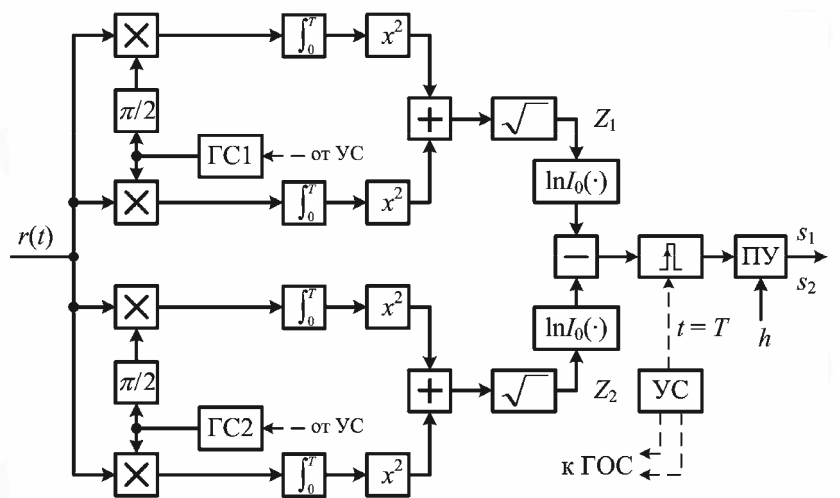


Рис. 2.39. Некогерентный различитель радиосигналов на основе корреляторов

телей используются те же элементы, что и в обнаружителях сигналов со случайными начальными фазами (см. рис. 2.15, 2.16).

Кроме указанных методов построения различителей, используется **корреляционно-фильтровой**, который основан на преобразовании сигнала, фильтрации и детектировании. Входная смесь умножается на сигналы  $s'_1(t)$  и  $s'_2(t)$ , частоты которых сдвинуты относительно входных частот на величину  $\omega'$ .

После перемножителей включаются идеальные (с малым затуханием) колебательные контуры ( $K$ ), настроенные на частоты  $\omega_i - \omega'$ ,  $i = 1, 2$ , и выполняющие роль интеграторов, и детекторы огибающих (ДО) (рис. 2.41). ДО имеют нелинейные характеристики, определяемые функцией  $\ln I_0(x)$ . Следует отметить, что из всех рассмотренных вариантов корреляционно-фильтровой приемник наиболее прост в реализации.

Определим вероятность  $P_e$  ошибочного приема. Для этого необходимо вычислить условные вероятности ошибок  $P_{e1}$  и  $P_{e2}$ . С этой целью определяют совместную плотность вероятности случайных величин  $z_{iс}, z_{iс}$ ,  $i = 1, 2$ , а затем по известному правилу переходят к новым величинам, используя соотношение (2.94). В общем случае выражение для  $P_e$  оказывается громоздким. Для симметричной системы, использующей ортогональные сигналы ( $\rho_s = 0$ ),

$$P_e = 0,5 \exp(-q/4) \quad (2.97)$$

В случае АМ с пассивной паузой показатель экспоненты берется равным  $-q/8$ . Рассчитанные кривые помехоустойчивости для некоторых систем передачи двоичных сигналов приведены на рис. 2.42. Штриховые кривые относятся к некогерентному приему (сигналы со случайными начальными фазами) и рассчитаны по формуле (2.97), сплошные кривые – к когерентному приему, определяемому выражением (2.92). Как видно из сопоставления кривых, *наибольшей помехоустойчивостью обладают когерентные приемники ФМ-сигналов. При некогерентном приеме наименьшую вероятность ошибки обеспечивают системы с ЧМ-сигналами, которые являются практически ортогональными.* Благодаря простоте реализации, системы с ЧМ-сигналами применяются на практике наиболее часто.

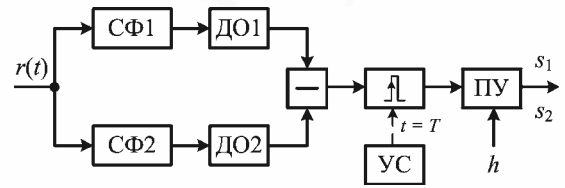


Рис. 2.40. Некогерентный различитель радиосигналов на основе СФ

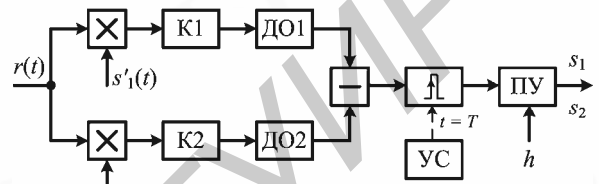
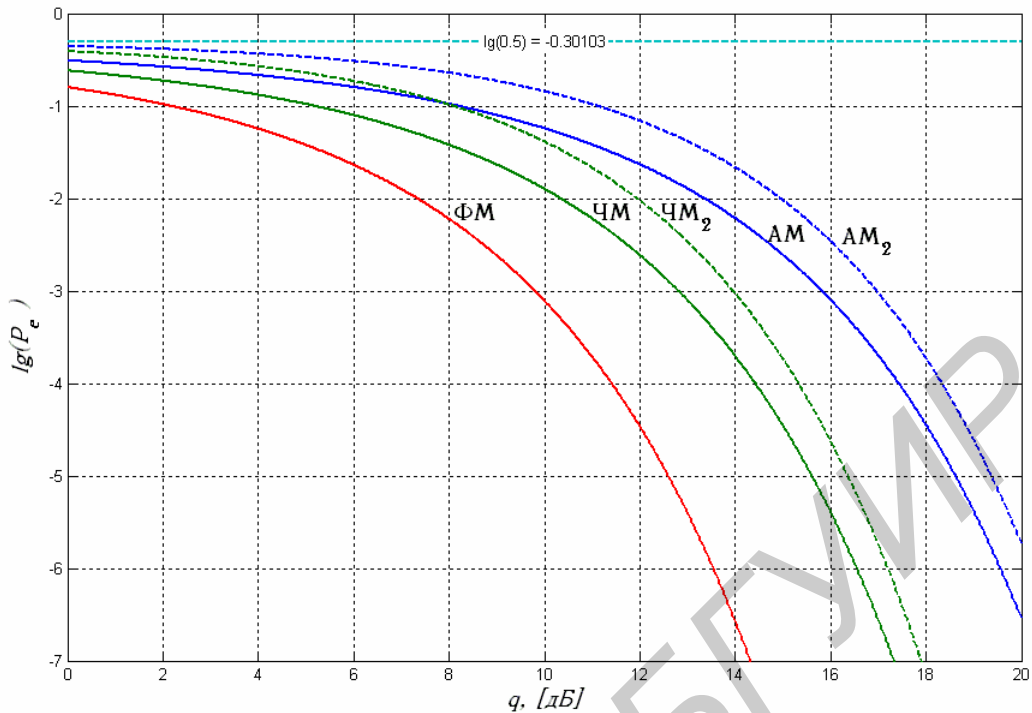


Рис. 2.41. Корреляционно-фильтровой различитель





**Рис. 2.42.** Кривые помехоустойчивости при когерентном (сплошные линии) и некогерентном (штриховые линии) приеме

### 2.5.3. Различение ансамблей сигналов

В РЭИС ПИ для передачи информации нередко используют несколько различных (ансамбль) сигналов  $s_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . При этом на каждом временном интервале длительностью  $T$  может передаваться один из  $m$  сигналов. Рассмотрим оптимальный различитель (по критерию минимума вероятности полной ошибки)  $m$  детерминированных сигналов  $s_i(t)$ , принимаемых на фоне белого шума  $n(t)$ . Исходное колебание имеет вид

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, m}.$$

Предполагаем, что сигналы имеют одинаковые энергии и равные априорные вероятности появления  $P(s_i) = 1/m$ . Считаем, что в реализации  $r(t)$  присутствует тот из сигналов, апостериорная вероятность для которого наибольшая, т. е. принимается решение о наличии сигнала  $s_i$ , если для всех  $j \neq i$

$$P_{ps}(s_i) \geq P_{ps}(s_j). \quad (2.98)$$

Апостериорная вероятность определяется выражением

$$P_{ps}(s_i) = kP(s_i)W[r(t)|s_i], \quad (2.99)$$

которое характеризует условную вероятность присутствия  $i$ -го сигнала при наблюдении реализации смеси  $r(t)$  на интервале  $[0, T]$ . В выражение (2.99) входит  $P(s_i)$  – априорная вероятность присутствия  $i$ -го сигнала;  $W[r(t)|s_i] \equiv W_{с.пи}[r(t)]$  – функционал плотности вероятности реализации,

вычисленный при условии наличия в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_i(t)$ ;  $k$  – нормирующий коэффициент.

Выполнение условия (2.98) обеспечивает наибольшую вероятность правильного решения для каждой реализации и, следовательно, минимальную полную вероятность ошибки. С помощью уже известной методики можно записать выражение для условной плотности вероятности  $W_{c.лi}(\mathbf{r})$  по аналогии с формулой (2.14), а затем перейти к непрерывному наблюдению. В результате условие (2.98) примет вид

$$P(s_i) \exp \left[ -\frac{E_i}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_i(t) dt \right] \geq P(s_j) \exp \left[ -\frac{E_j}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_j(t) dt \right]. \quad (2.100)$$

Это соотношение определяет оптимальный алгоритм различения  $m$  сигналов. При априорно равновероятных сигналах, имеющих равные энергии, алгоритм (2.100) приводится к более простому путем логарифмирования обеих частей неравенства. В результате имеем

$$u_i = \int_0^T r(t) s_i(t) dt \geq \int_0^T r(t) s_j(t) dt = u_j.$$

Приведенному алгоритму соответствует структурная схема  $m$ -канального корреляционного различителя, показанная на рис. 2.43. Различитель включает устройство принятия решения (УПР), которое определяет канал с наибольшим значением корреляционного интеграла. Вместо коррелятора каждый канал может включать согласованный фильтр, настроенный на соответствующий сигнал из ожидаемого ансамбля. Решение вырабатывается в момент окончания действия сигнала. Схема, представленная на рис. 2.43, является обобщением рассмотренных схем различения двоичных сигналов. Отметим, что принцип многоканального построения различителя сохраняется и при различении  $m$  сигналов, содержащих случайные параметры.

Вероятность полной ошибки можно вычислить достаточно просто для ансамбля равновероятных ортогональных сигналов с одинаковыми энергиями. Условие ортогональности сигналов записывается в виде

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определим вначале условную совместную плотность вероятности  $W(u_1, \dots, u_m | s_i)$  гауссовских случайных величин  $u_i$ ,  $i = 1, m$ . Характеристики этих случайных величин определяются выражениями:

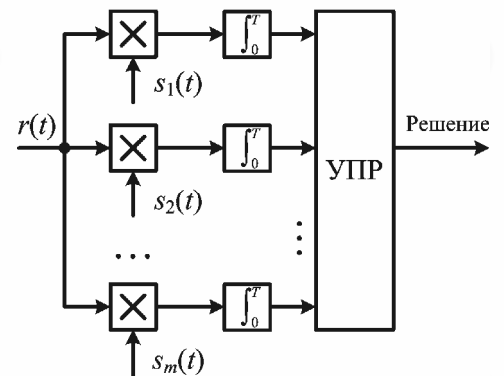


Рис. 2.43. Структурная схема многоканального различителя

$$\langle u_j \rangle = \int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = \begin{cases} E, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

$$\langle u_j^2 \rangle - \langle u_j \rangle^2 = EN_0/2;$$

$$\langle (u_i - \langle u_i \rangle)(u_j - \langle u_j \rangle) \rangle = \begin{cases} EN_0/2, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Зная условную плотность вероятности  $W(u_1, \dots, u_m | s_i)$ , можно найти вероятность правильного решения:

$$P_{ii} = \int_{-\infty}^{+\infty} du_i \int_{-\infty}^{u_i} \dots \int_{-\infty}^{u_i} W(u_1, \dots, u_m | s_i) du_1 \dots du_{i-1} du_{i+1} \dots du_m.$$

В результате интегрирования и замены  $u_i$  на  $x$  можно получить следующее выражение для вероятности  $P_{ii}$ :

$$P_{ii} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \sqrt{q})^2\right] \Phi^{m-1}(x) dx, \quad (2.101)$$

где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности [см. (2.29)]. Для равновероятных сигналов вероятность правильного приема каждого из сигналов одинакова.

Полная вероятность ошибки при различении равновероятных сигналов определяется соотношением

$$P_e = \sum_{i=1}^m (1 - P_{ii}) P(s_i) = 1 - P_{ii},$$

где вероятность  $P_{ii}$  вычисляется по формуле (2.101).

Кривые помехоустойчивости когерентного приема ортогональных сигналов для значений  $m$ , равных 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, приведены на рис. 2.44. Как видно из рисунка, *увеличение числа каналов  $m$  приводит к росту вероятности  $P_e$* . Это можно объяснить увеличением вероятности того, что напряжение на выходе канала, где действует в момент  $t = T$  только шум, превышает напряжение канала, в котором действуют ожидаемый сигнал и шум.

Каналы приема в различителе  $m$  ортогональных сигналов, имеющих случайные начальные фазы, строятся аналогично рис. 2.39 и 2.40. Выход детектора каждого канала подключается к УПР, где вырабатывается решение. Оценка помехоустойчивости некогерентного различителя показывает, что при  $\log_2 m > 7$  разница между когерентным и некогерентным приемниками становится пренебрежимо малой. В пределе при  $m \rightarrow \infty$  полные вероятности ошибки  $P_e$  для когерентного и некогерентного приемников совпадают. Верхняя граница для вероятности  $P_e$  определяется соотношением

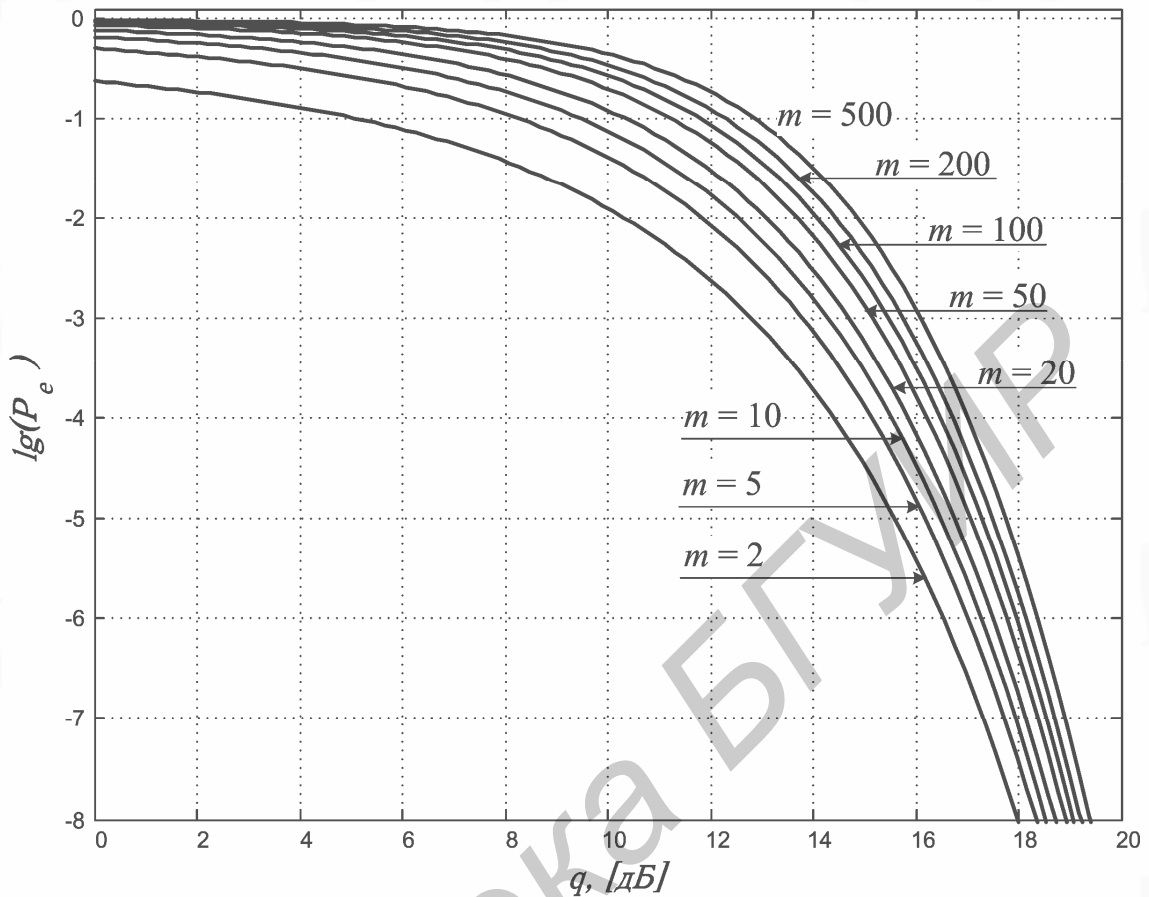


Рис. 2.44. Характеристики различения  $m$  ортогональных сигналов

$$P_e \leq (m-1) \left[ 1 - \Phi\left(\sqrt{q/2}\right) \right], \quad (2.102)$$

или с учетом асимптотики функции  $\Phi(\sqrt{q/2})$  получается

$$P_e \leq \frac{(m-1)}{\sqrt{\pi q}} \exp\left[-\frac{q}{4}\right], \quad (2.103)$$

где  $q = 2E/N_0$  – отношение сигнал/шум.

#### 2.5.4. Обнаружение и различение сигналов с неизвестными параметрами

В рассмотренных выше задачах обнаружения и различения сигналов предполагалось, что известны статистические характеристики помехи и случайных параметров сигнала. Во многих случаях априорные плотности вероятности параметров могут существенно отличаться от реально существующих. При этом качественные показатели приема ухудшаются по сравнению с ожидаемыми. Отсутствие или неполнота априорных сведений о параметрах сигналов и помех приводит к необходимости постановки задачи приема сигналов в условиях априорной неопределенности.

Возможны различные подходы к решению указанной задачи. Первый подход заключается в использовании приближенных априорных плотностей

вероятности, например, равномерной в ожидаемом интервале изменения параметра. Вид априорного распределения оказывает влияние на переходный (нестационарный) режим работы устройства. В стационарном режиме результаты практически не зависят от вида априорной плотности вероятности неизвестных параметров. Второй подход основан на применении оценок неизвестных параметров, полученных с использованием результатов на всем интервале наблюдения.

С практической точки зрения наиболее интересен третий подход, предполагающий использование текущих оценок неизвестных параметров и осреднения с учетом текущей апостериорной плотности вероятности. Обобщенная схема **оценочно-корреляционного** обнаружителя приведена на рис. 2.45. Оценка сигнала формируется в блоке оценки сигнала (БОС) на основе апостериорной плотности вероятности параметров  $\lambda$ :

$$s^*(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t, \lambda) W(t, \lambda) d\lambda.$$

Формирование такой оценки сигнала в общем случае сопряжено с большими трудностями, связанными с необходимостью получения текущей апостериорной плотности вероятности параметров сигнала. Заметное упрощение алгоритма и схемы приема может быть получено при замене оценки сигнала  $s^*(t, \lambda)$  на функцию  $s(t, \lambda^*)$ , в которой  $\lambda^*$  – оценка неизвестных параметров. В условиях, когда отношение сигнал/шум  $q \gg 1$ , такая замена практически не снижает качества приема. Формирование функции  $s(t, \lambda^*)$  осуществляется с помощью генератора сигнала, параметры которого изменяются в соответствии с текущими оценками  $\lambda^*(t)$ . Эти оценки вырабатываются с помощью специальных устройств фильтрации, конкретные примеры построения которых подробно рассматриваются далее, в гл. 3.

Особое место занимают задачи обнаружения сигналов при нефиксированном времени анализа. В таких задачах используется критерий **последовательного наблюдения**. При последовательном наблюдении производится непрерывный анализ отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами: низким  $h_1 = (1 - D) / (1 - F)$  и высоким  $h_2 = D / F$ . Если отношение правдоподобия больше порога  $h_2$ , принимается решение о наличии сигнала (цели). Если отношение правдоподобия меньше порога  $h_1$ , принимается решение об отсутствии сигнала (цели). Если отношение правдоподобия находится между высоким и низким порогами, наблюдение продолжается до тех пор, пока не будет принято определенное решение. Последовательный анализ, разработанный А. Вальдом, позволяет независимо задавать вероятности

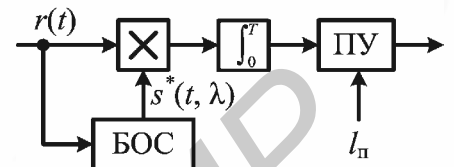


Рис. 2.45.

Обобщенная структурная схема оценочно-корреляционного обнаружителя

ложной тревоги  $F$  и правильного обнаружения  $D$ , экономит среднее время, требуемое для принятия решения, т. е. время анализа. Теория показывает, что процедура последовательного анализа обеспечивает минимизацию среднего времени, необходимого для принятия решения при заданных вероятностях  $D$  и  $F$ .

## 2.6. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ДИСКРЕТНОЙ И ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ

Некоторые особенности цифровой обработки были отмечены при рассмотрении накопителей импульсных сигналов (см. 2.4.3). В обеспечении стабильной и точной реализации алгоритмов оптимальной обработки сигналов цифровые методы являются основным направлением. Следует отметить, что по мере роста сложности алгоритмов обработки аппаратные затраты при использовании аналоговых методов увеличиваются гораздо быстрее, чем при использовании цифровых методов. Наименьший рост затрат обеспечивается при применении цифровой аппаратуры на основе программируемой логики (микропроцессоров).

Рассмотрим некоторые особенности дискретной и цифровой обработки на примере обнаружения детерминированного сигнала. Принимаемая реализация  $r(t)$  подвергается дискретизации по времени, в результате на интервале  $[0, T]$  наблюдается конечное число значений реализации  $r_i = r(t_i)$  (рис. 2.46). Такое преобразование реализации связано с возможным использованием дискретных устройств. Если дискретные выборки подвергаются квантованию по уровню и преобразованию в цифровую форму, то после аналого-цифрового преобразователя включается цифровое устройство обработки.

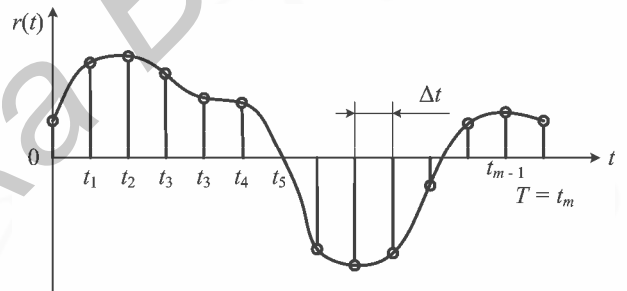


Рис. 2.46. Процесс дискретизации сигнала

Предположим, что сигнал  $s(t)$  полностью известен, неизвестен лишь факт его наличия в смеси  $r(t)$  с шумом  $n(t)$ . Этот шум полагаем стационарным гауссовским процессом с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $R_n(t, t + \tau) = \sigma_n^2 \exp[-\alpha|\tau|]$ , где  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий время корреляции (ширину спектра помехи). Наблюдаются значения  $r(t_i) = r_i$  при  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = \overline{1, m}$ , причем  $m = T/(\Delta t)$  – число подынтервалов дискретизации.

Алгоритм оптимального обнаружения можно записать на основании соотношений (2.16), (2.17) в следующем виде:

$$\ln l(r_0, \dots, r_m) = \ln \frac{W_{\text{с.п.}}(r_0, \dots, r_m)}{W_{\Pi}(r_0, \dots, r_m)} \begin{matrix} \theta^* = 1 \\ > \\ \theta^* = 0 \end{matrix} \ln l_0. \quad (2.104)$$

Чтобы определить совместные плотности вероятности, входящие в выражение (2.104), введем вспомогательные случайные величины для отсчетов шума  $n_0, n_1, \dots, n_m$ :  $\xi_0 = n_0$ ;  $\xi_1 = n_1 - \gamma n_0$ ;  $\dots$ ;  $\xi_i = n_i - \gamma n_{i-1}$ ;  $\dots$ ;  $\xi_m = n_m - \gamma n_{m-1}$ , где  $\gamma = \exp(-\alpha \Delta t)$ , и найдем совместную плотность вероятности этих  $m$  гауссовских случайных величин с нулевыми средними значениями. Введенные случайные величины  $\xi_i$  взаимно некоррелированы и имеют дисперсии  $\langle n_i^2 \rangle = \sigma_{\Pi}^2 (1 - \gamma^2)$ . С учетом указанного запишем плотность вероятности:

$$W(\xi_1, \dots, \xi_m) = (2\pi\sigma_{\Pi}^2)^{-(m+1)/2} (1 - \gamma^2)^{-m/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\Pi}^2(1 - \gamma^2)} \left[ (1 - \gamma^2)\xi_0^2 + \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right] \right\}.$$

Якобиан преобразования при переходе к переменным  $n_0, n_1, \dots, n_m$  равен единице, поэтому

$$W(n_1, \dots, n_m) = (2\pi\sigma_{\Pi}^2)^{-(m+1)/2} (1 - \gamma^2)^{-m/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\Pi}^2(1 - \gamma^2)} \left[ (1 - \gamma^2)n_0^2 + \sum_{i=1}^m (n_i - \gamma n_{i-1})^2 \right] \right\}. \quad (2.105)$$

На основании выражения (2.105) запишем условные плотности вероятности, входящие в отношение правдоподобия (2.104). В результате придем к следующему алгоритму обнаружения:

$$z_d = \frac{1}{\sigma_{\Pi}^2(1 - \gamma^2)} \left[ (1 - \gamma^2)r_0 s_0 + \sum_{i=1}^m (r_i - \gamma r_{i-1})(s_i - \gamma s_{i-1}) \right] \begin{matrix} \theta^* = 1 \\ > \\ \theta^* = 0 \end{matrix} h.$$

Вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения определяются на основе условных плотностей вероятности величины  $z_d$  при отсутствии и наличии сигнала в смеси. С учетом того, что величина  $z_d$  является результатом линейной комбинации совокупности гауссовских случайных величин, в итоге получим:  $F = 1 - \Phi(h/d)$ ;  $D = 1 - \Phi(h/d - d)$ , где  $h$  – порог;  $d^2 = m_1^2 / \sigma_0^2$  – отношение мощности сигнала на выходе обнаружителя к мощности выходного шума  $\sigma_0^2$ . Заметим, что значения  $m_1$  и  $\sigma_0^2$  равны одной и той же величине  $d$ , которая определяется выражением

$$d^2 = \frac{1}{(1-\gamma^2)\sigma_{\Pi}^2} \left[ (1-\gamma^2)s_0^2 + \sum_{i=1}^m (s_i - \gamma s_{i-1})^2 \right]. \quad (2.106)$$

Анализ этого выражения показывает, что отношение сигнал/шум при дискретной обработке зависит как от параметров шума и сигнала, так и от интервала дискретизации  $\Delta t$ . Например, для детерминированного сигнала  $s(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi]$  при условии  $\omega_0 T = \pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , когда на интервале наблюдения  $[0, T]$  укладывается целое число полупериодов гармонического колебания и  $\omega \Delta t \neq \pi l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , имеем

$$d^2 = \frac{A_0^2}{\sigma_{\Pi}^2} \left[ \cos^2 \varphi - \frac{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos[\omega \Delta t]}{2(1-\gamma^2)} \frac{T}{\Delta t} \right]. \quad (2.107)$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  дискретная обработка переходит в непрерывную и  $d^2 \rightarrow d_0^2$ . Отношение  $\kappa = d^2/d_0^2$  характеризует потери энергии сигнала при дискретной обработке. При  $\varphi = \pi/2$  величина  $\kappa$  определяется выражением

$$\kappa = \frac{d^2}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} d^2} = \frac{2(1 + \exp[-2\delta] + 2\exp[-\delta] \cos[v\delta])}{\delta^2(1 + v^2)(1 - \exp[-2\delta])}.$$

Графики относительных потерь как функций  $\delta$  при фиксированных значениях  $v$  представлены на рис. 2.47, где  $\delta = \alpha \Delta t$  – нормированный интервал дискретизации,  $v = \omega_0/\alpha$  – нормированная частота. Из графиков видно, что при относительно малых интервалах дискретизации по времени качество дискретного обнаружителя незначительно уступает

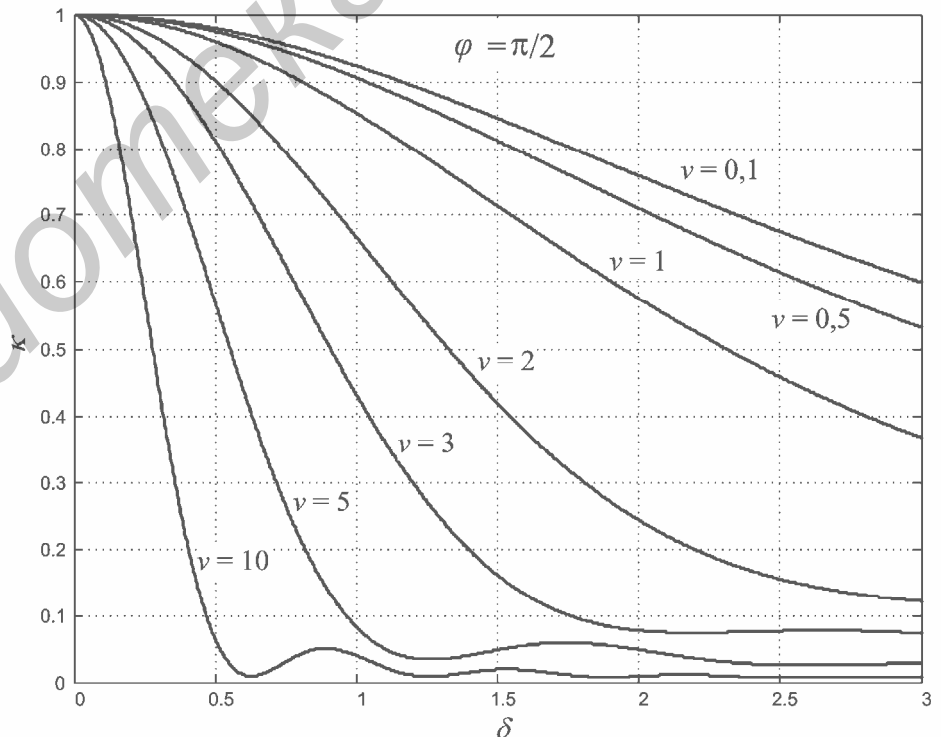


Рис. 2.47. Характеристики относительных потерь энергии при дискретной обработке сигналов



качеству аналогового. С учетом преимуществ дискретной обработки можно считать такие потери несущественными и использовать эту обработку вместо аналоговой.

Рассмотрение дискретного различителя двух сигналов приводит к результатам, аналогичным вышеприведенным, поскольку вероятность ошибочного приема  $P_e$  определяется величиной  $d^2$ , которую можно вычислить по формуле (2.106).

## 2.7. ОБНАРУЖЕНИЕ И РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ В КОРРЕЛИРОВАННЫХ И НЕГАУССОВСКИХ ШУМАХ

### 2.7.1. Обнаружение и различение детерминированного сигнала в гауссовской корреляционной помехе

Многие виды помех искусственного и естественного происхождения отличаются от белого шума. Это отличие касается как корреляционных функций, так и законов распределения помех. К коррелированным относятся отраженные от местных предметов радиосигналы, активные узкополосные помехи. Атмосферные, импульсные и модулированные шумом активные помехи существенно отличаются от гауссовских.

Рассмотрим вначале задачу обнаружения на интервале  $(0, T)$  детерминированного сигнала  $s(t)$  на фоне коррелированной помехи  $\eta(t)$ , представляющей случайный процесс марковского типа. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее процесс  $\eta(t)$ , имеет вид

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\alpha\eta(t) + \xi(t), \quad (2.108)$$

где  $\xi(t)$  – порождающий белый шум с нулевым средним значением  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и корреляционной функцией  $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 0,5N_\xi\delta(t_1 - t_2)$ ,  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий ширину спектра помехи. Коэффициент корреляции процесса  $\eta(t)$  определяется функцией

$$\rho_\eta(\tau) = \exp[-\alpha|\tau|].$$

Покажем, что задача обнаружения сигнала на фоне коррелированной помехи  $\eta(t)$  может быть сведена к задаче обнаружения преобразованного соответствующим образом сигнала на фоне белого шума  $\zeta(t)$ . Введем в рассмотрение преобразованный сигнал

$$\tilde{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} + \alpha s(t)$$

и наблюдаемую смесь

$$\tilde{r}(t) = \frac{dr(t)}{dt} + \alpha r(t),$$

где  $r(t) = \theta s(t) + \eta(t)$ . Здесь  $\theta$  – параметр обнаружения.

С учетом приведенных соотношений наблюдение  $\tilde{r}(t)$  можно представить в следующем виде:

$$\tilde{r}(t) = \theta \frac{ds(t)}{dt} + \frac{d\eta(t)}{dt} + \alpha\theta s(t) + \alpha\eta(t),$$

или на основании (2.108)

$$\tilde{r}(t) = \theta\tilde{s}(t) + \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  – белый шум.

Таким образом, задача обнаружения сведена к известной и рассмотренной ранее. При этом наблюдаемая смесь  $r(t)$  подвергается преобразованию, в результате которого коррелированный процесс  $\eta(t)$  преобразуется в некоррелированный  $\xi(t)$ . Такое преобразование называют «выбеливанием», а фильтр – «обеляющим». Спектральная плотность белого шума  $0,5N_\xi = 2\sigma_0^2\alpha$ , где  $\sigma_0^2$  – средняя мощность процесса  $\eta(t)$ .

Структурная схема обнаружителя детерминированного сигнала  $s(t)$  включает «обеляющий» фильтр, фильтр, согласованный с преобразованным сигналом  $\tilde{s}(t)$  и пороговое устройство. При использовании коррелятора между генератором опорного сигнала (ГОС) и перемножителем (см. рис. 2.1) включается такой же «обеляющий» фильтр, как и на входе корреляционного обнаружителя.

Можно показать, что при любой гауссовской коррелированной помехе структура обнаружителя будет включать соответствующий «обеляющий» фильтр.

Характеристики обнаружения детерминированного сигнала  $s(t)$  в коррелированной гауссовской помехе совпадают с характеристиками обнаружения преобразованного детерминированного сигнала  $\tilde{s}(t)$  в белом шуме, спектральная плотность которого для экспоненциально коррелированной помехи равна  $2\sigma_0^2\alpha = 0,5N_\xi$ .

При различении двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  наблюдаемую смесь можно представить соотношением (2.81), где в качестве помехи следует рассматривать коррелированный шум  $\eta(t)$ .

По аналогии с задачей обнаружения алгоритм различения равновероятных сигналов с равными энергиями сводится к следующему:

$$\int_0^T \tilde{r}(t)\tilde{s}_1(t)dt - \int_0^T \tilde{r}(t)\tilde{s}_2(t)dt \begin{matrix} > 0, \\ < 0, \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}$$

где волнистые линии обозначают преобразование в «обеляющем» фильтре.

Структурные схемы различителей на базе согласованных фильтров или корреляторов должны включать «обеляющие» фильтры и учитывать при по-

строении генераторов опорных сигналов и согласованных фильтров преобразование  $s(t)$  в  $\tilde{s}(t)$ .

При определении вероятности ошибочного приема  $P_e$ , следует вычислять отношение сигнал/шум с учетом преобразования спектра сигнала в обесцеляющем фильтре:

$$q_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S_i(j\omega)|^2}{S_\eta(\omega)} d\omega, \quad i=1, 2, \quad (2.109)$$

где  $S_i(j\omega)$  – спектральная функция сигнала  $s_i(t)$ ,  $S_\eta(t)$  – спектральная плотность коррелированной помехи  $\eta(t)$ . Обнаружение и различение сигналов со случайными параметрами на фоне коррелированных помех также сводится к построению оптимальных фильтров, включающих «обесцеляющий» и согласованный фильтры.

### 2.7.2. Обнаружение и различение сигналов на фоне негауссовских помех

Если помеха описывается негауссовским распределением вероятностей, то использование устройств обнаружения и различения сигналов, оптимизированных под гауссовскую помеху, может привести к неоптимальному результату. В связи с этим задачи приема и обработки сигналов на фоне негауссовских помех представляют значительный интерес.

Рассмотрим вначале задачу обнаружения детерминированного сигнала, заданного в виде последовательности отсчетов  $s(t_k) \equiv s_k$  на фоне помехи  $y(t_k) \equiv y_k$  с независимыми значениями при наблюдении в дискретном времени процесса

$$r_k = \theta s_k + y_k, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Плотность распределения вероятности помехи задана и обозначена  $W(y_k)$ .

Оптимальный обнаружитель должен формировать отношение правдоподобия (2.16), которое для случая независимых отсчетов помехи запишется в виде

$$l(\mathbf{r}) = \frac{\prod_{k=1}^n W(r_k - s_k)}{\prod_{k=1}^n W(r_k)}.$$

Преобразуем это выражение, перейдя к логарифму отношения правдоподобия

$$\ln l(\mathbf{r}) = \ln \prod_{k=1}^n [W(r_k - s_k)/W(r_k)] = \sum_{k=1}^n [\ln W(r_k - s_k) - \ln W(r_k)].$$

Разложим  $\ln W(r_k - s_k)$  в степенной ряд:

$$\ln W(r_k - s_k) = \ln W(r_k) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} s_k^i \frac{d^i \ln W(r_k)}{dr_k^i}. \quad (2.110)$$

Обозначив

$$f_i(r_k) = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{d^i W(r_k)}{dr_k^i}, \quad (2.111)$$

перепишем (2.110) в виде

$$\ln l(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i, \quad (2.112)$$

где

$$Z_i = \sum_{k=1}^n f_i(r_k) s_k^i. \quad (2.113)$$

Сравнение  $\ln l(r)$  с порогом  $Z_{\Pi}$  определяет алгоритм оптимального обнаружения. Для реализации этого алгоритма необходимо бесконечное число каналов, каждый из которых включает **безынерционный нелинейный преобразователь** (2.110), перемножитель и сумматор-накопитель. Результаты накопления всех каналов суммируются и подаются на пороговое устройство.

Практическая реализация обнаружителя существенно упрощается в случае слабых сигналов. При этом ряд по степеням достаточно малых величин  $s_k$  в (2.110), (2.111) можно ограничить одним членом ряда:

$$\ln l(\mathbf{r}) \cong Z_1 = \sum_{k=1}^n f_1(r_k) s_k,$$

где

$$f_1(r_k) = -\frac{d \ln W(r_k)}{dr_k}. \quad (2.114)$$

При  $s_k \rightarrow 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) величина  $Z_1$  сходится в среднем квадратичном к величине  $Z$ ; это означает асимптотическую оптимальность алгоритма

$$\sum_{k=1}^n -\frac{d \ln W(r_k)}{dr_k} s_k \begin{matrix} \theta^* = 1 \\ > \\ < \\ \theta^* = 0 \end{matrix} Z_{\Pi}.$$

Структурная схема обнаружителя в рассматриваемом случае включает на входе безынерционный нелинейный преобразователь (БНП), характеристика которого (2.114) связана с заданной одномерной плотностью вероятности помехи.

Если помеха гауссовская с дисперсией  $\sigma_0^2$ , то БНП вырождается в линейный преобразователь с характеристикой  $f_1(r_k) = \sigma_0^{-2} r_k$ .

При различении сигналов не фоне интенсивной негауссовской помехи алгоритм различения остается таким же, как и при белом шуме, однако входная смесь  $r(t)$  предварительно поступает в БНП.

Для слабых сигналов со случайными параметрами структурные схемы, рассмотренные ранее (см. п.п. 2.2.4, 2.5.2), дополняются устройством БНП, включаемым на входе.

Заметим, что при переходе к непрерывному наблюдению на интервале  $[0, T]$  алгоритм обнаружения детерминированного сигнала на фоне негауссовской помехи сводится к формированию корреляционного интеграла  $Z(T)$  и сравнению его с порогом:

$$Z(T) = \int_0^T f_1[r(t)]s(t)dt \begin{matrix} \theta^* = 1 \\ > Z_i \\ < \\ \theta^* = 0 \end{matrix}$$

где нелинейная функция  $f_1$  определяется выражением (2.114).

Определение характеристик обнаружения осуществляется по методике п. 2.2.4. Считаем величину  $Z(T)$  распределенной по гауссовскому закону, поскольку операция суммирования (интегрирования) приводит к нормализации результата. Тогда достаточно определить средние значения и дисперсии величины  $Z(T)$  при наличии и отсутствии сигнала  $s(t)$  в смеси  $r(t)$ .

Можно показать, что отношение сигнал/помеха  $q_{\text{вых}}$  на выходе БНП определяется соотношением

$$q_{\text{вых}} = q_{0\Gamma} \mu_a^2, \quad (2.115)$$

где  $q_{0\Gamma} = 2E/N_y$  – отношение сигнал/шум, рассчитываемое из условия действия гауссовского шума с такой же средней мощностью, как и у негауссовской помехи  $N_y = 2T\sigma_y^2$ , где  $\sigma_y^2$  – средняя мощность негауссовской помехи. Коэффициент  $\mu_a^2$  характеризует степень подавления негауссовской помехи в БНП. Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$\mu_a^2 = \sigma_y^2 I_\Phi = \sigma_y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{W(y)} \frac{dW(y)}{dy} \right)^2 W(y) dy. \quad (2.116)$$

Здесь  $I_\Phi$  – информация по Фишеру, зависящая от плотности вероятности помехи.

В частном случае гауссовской помехи со средней мощностью  $\sigma_y^2$  имеем  $I_\Phi = \sigma_y^{-2}$  и  $\mu_a^2 = 1$ . Очевидно, что коэффициент  $\mu_a^2$  и для некоторых помех может быть существенно больше единицы.

Таким образом, повышение отношения сигнал/помеха в БНП позволяет получить более качественные характеристики обнаружения, чем при гауссовском шуме с такой же средней мощностью, как у негауссовской помехи.

Рассмотрим пример импульсной помехи с плотностью вероятности

$$W(y) = A \exp[-\alpha |y|^\nu]. \quad (2.117)$$

Здесь  $\nu$  принимает значения от 0,5 до 2. Коэффициент  $A$  определяется из условия нормировки.

Характеристика БНП для данного примера

$$f_1(y) = \alpha \nu |y|^{\nu-1} \text{sign}(y).$$

Если  $\nu = 1$ , то  $W(y) = 0,5\alpha \exp[-\alpha |y|]$  соответствует распределению Лапласа.

Тогда

$$f_1(y) = \alpha \text{sign } y,$$

т. е. БНП представляет идеальный ограничитель. Коэффициент подавления в этом случае  $\mu_a^2 = 2$ .

Следует отметить, что в БНП осуществляется амплитудное подавление помехи. Если помеха коррелирована, то вместо БНП включается инерционный нелинейный преобразователь. Коэффициент подавления помехи при этом зависит также от частотных свойств помехи. Верхняя граница коэффициента амплитудно-частотного подавления  $\mu_{ач}^2$  определяется произведением коэффициентов амплитудного и частотного подавления:  $\mu_{ач}^2 = \mu_a^2 \mu_{ч}^2$ . Если коэффициент корреляции помехи равен  $\rho$ , то для лапласовского распределения  $\mu_{ч}^2 = (1 - \rho^2)^{-1}$ .

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Определите средний риск для случая различения трех равновероятных сигналов.

2. Докажите, что вероятность пропуска сигнала в оптимальном обнаружителе не больше, чем в любом другом, если вероятности ложной тревоги приняты одинаковыми или меньшими оптимального случая.

3. Запишите отношение правдоподобия для случая детерминированного сигнала и аддитивной помехи с независимыми отсчетами  $y_j$  и произвольной плотностью вероятности  $W(y_i)$ .

4. Как зависят вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги от значения порога?

5. Объясните физический смысл зависимости дисперсии величины корреляционного интеграла от энергии обнаруживаемого сигнала.

6. Постройте зависимости вероятности правильного обнаружения детерминированного сигнала от величины вероятности ложной тревоги при фиксированных значениях отношения сигнал/шум.

7. Докажите, что максимальное отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра совпадает с отношением сигнал/шум на выходе коррелятора.

8. Определите характеристики, постройте структурную схему и выходную реакцию согласованного фильтра для пачки прямоугольных импульсов с заданными длительностью и скважностью.

9. Пользуясь характеристиками обнаружения на рис. 2.19, оцените потери в энергии порогового сигнала из-за незнания начальной фазы, а также амплитуды и начальной фазы сигнала при  $D = 0,7$  и трех значениях вероятности ложной тревоги  $F = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ .

10. На сколько децибел можно уменьшить энергию каждого из двух детерминированных сигналов равной энергии, имеющих коэффициент корреляции  $\rho_s = 0,5$ , если заменить их противоположными? Каков будет ответ, если  $\rho_s = 0,33, \rho_s = 0,2, \rho_s = -0,33$ ?

11. Определите характеристику безынерционного нелинейного преобразователя в обнаружителе слабого детерминированного сигнала, если аддитивный шум с независимыми отсчетами имеет одномерную плотность вероятности

$$W(y_i) = 0,5 \left[ N(c_1, \sigma_y^2) + N(c_2, \sigma_y^2) \right],$$

где  $N(c_i, \sigma_y^2)$  – гауссовская плотность вероятности с математическим ожиданием  $c_i$  и дисперсией  $\sigma_y^2$ ,  $i = 1, 2$ .

## ГЛАВА 3. ОЦЕНКА И ФИЛЬТРАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

### 3.1. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА И МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

Задача оценки (измерения) параметров сигнала состоит в следующем. Наблюдается аддитивная смесь  $r(t)$  сигнала  $s(t, \lambda)$  с помехой  $n(t)$  на интервале  $[0, T]$ . Измеряемые параметры  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  и сопутствующие неизмеряемые параметры  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  образуют систему случайных величин с известной совместной плотностью вероятности  $W(\lambda, \beta)$ . Помеха представляет белый гауссовский шум с нулевым средним значением и двусторонней спектральной плотностью  $N_0/2$ . Решение задачи измерения состоит в подборе оценок  $\lambda^* = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*\}$  для измеряемых параметров  $\lambda$ , оптимальном с точки зрения минимума среднего риска. Необходимо найти качественные показатели оптимальной обработки и рассмотреть пути реализации найденных алгоритмов оценки.

Показателем качества измерения параметра  $\lambda$  является ошибка измерения, т. е. отклонение  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$ , где  $\lambda^*$  – оценка (измеренное значение) параметра. Различают грубые (**аномальные**), систематические и случайные ошибки. Специальными мерами первые два вида ошибок могут быть устранены, а случайные ошибки, порождаемые помехами, полностью устранить невозможно. Случайные ошибки характеризуются плотностью вероятности, по которой можно определить средний квадрат ошибок, вероятную (срединную) ошибку, вероятность попадания ошибок в заданные пределы и т. д. **Среднеквадратичная ошибка**  $\varepsilon_{\text{СКВ}}$  определяется корнем квадратным из среднего квадрата ошибки  $\langle \varepsilon^2 \rangle$ . **Вероятная ошибка**  $\varepsilon_{\text{в}}$  определяется равенством вероятностей  $P(|\varepsilon| \leq \varepsilon_{\text{в}}) = P(|\varepsilon| > \varepsilon_{\text{в}}) = 0,5$ . При гауссовском (нормальном) законе распределения ошибок с характеристиками  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ ,  $\sigma_{\varepsilon}^2 = \varepsilon_{\text{СКВ}}^2$  между вероятной и среднеквадратичной ошибками имеет место соотношение  $\varepsilon_{\text{в}} = (2/3)\varepsilon_{\text{СКВ}}$ . В качестве **максимальной ошибки** обычно используют  $\varepsilon_{\text{max}} = 4\varepsilon_{\text{в}}$ . Для нормального закона вероятность  $P(|\varepsilon| < \varepsilon_{\text{max}}) = 0,993$ , т. е. вероятность превышения максимальной ошибки составляет 0,7 %.

Введем понятия **риска и среднего риска** применительно к измерению одного параметра. Совокупность возможных ситуаций при измерении соответствует совокупности различных значений параметра  $\lambda$  и его оценки  $\lambda^*$ . При этом цена (риск) за каждую ситуацию определяется случайной величиной  $R(\lambda, \lambda^*)$ , которая называется **функцией потерь**, а средний риск



$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda, \lambda^*) W(\lambda, \lambda^*) d\lambda^*, \quad (3.1)$$

где  $W(\lambda, \lambda^*)$  – совместная плотность вероятности случайных величин  $\lambda$  и  $\lambda^*$ .

**Критерий минимума среднего риска** определяется соотношением

$$\langle R \rangle = \min_{\lambda^*}. \quad (3.2)$$

Оптимальной системой измерения (оценки) по этому критерию является та, для которой выполняется соотношение (3.2).

Если считать функцию потерь зависящей лишь от разности  $\lambda - \lambda^* = \varepsilon$ , средний риск будет определяться плотностью вероятности  $W(\varepsilon)$  функцией потерь  $R(\varepsilon)$ . Для частных случаев функции  $R(\varepsilon)$  можно получить частные критерии оптимального измерения. Для квадратичной функции потерь  $R(\varepsilon) = \varepsilon^2$  (рис. 3.1, а)

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon = \langle \varepsilon^2 \rangle = \min_{\varepsilon},$$

что определяет **критерий минимума среднего квадрата ошибки**. Для функции потерь, заданной выражением  $R(\varepsilon) = 1 - \text{rect}[(\varepsilon + \varepsilon_0)/(2\varepsilon_0)]$  (рис. 3.1, б), критерий минимума среднего риска сводится к критерию минимума вероятности превышения модулем ошибки заданной величины  $\varepsilon_0$ :

$$\langle R \rangle = \int_{-\varepsilon_0}^{\infty} W(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{-\infty}^{-\varepsilon_0} W(\varepsilon) d\varepsilon = P(|\varepsilon| > \varepsilon_0) = \min_{\varepsilon}.$$

При простой функции потерь  $R(\varepsilon) = 1 - \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$  критерий минимума среднего риска сводится к критерию максимума апостериорной вероятности:  $W(\varepsilon_0) = \max_{\varepsilon_0}$  (рис. 3.1, в).

Формирование оценки параметра осуществляется по определенному правилу, которое называют **решающим**. При закономерных (нерандомизи-

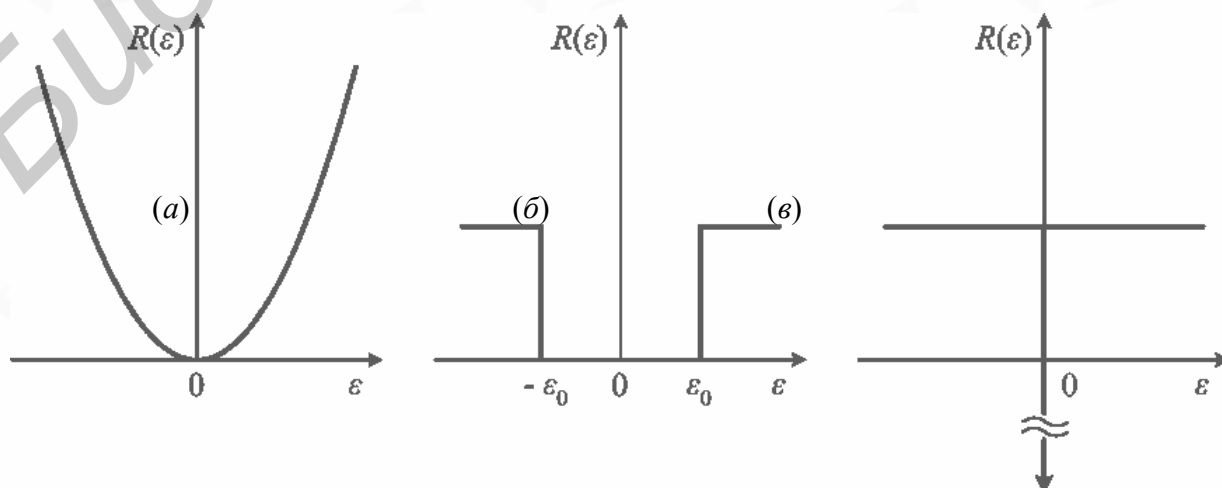


Рис. 3.1. Некоторые виды функций потерь

рованных) правилах каждой реализации  $r(t)$  соответствует определенная оценка  $\lambda^*$ , т. е. решающее правило  $\lambda^*[r(t)]$  или для дискретных значений реализации –  $\lambda^*(\mathbf{r})$

Рассмотрим методику формирования оценки параметра по принятым значениям реализации  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$ . В качестве критерия оптимальности решающего правила используем критерий минимума среднего риска. Предварительно преобразуем выражение (3.1) для среднего риска, заменив элемент вероятности  $W(\lambda, \lambda^*)d\lambda d\lambda^*$  на  $W(\lambda, \mathbf{r})d\lambda d\mathbf{r}$ . Тогда

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda, \lambda^*) W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda \text{ при } \lambda^* = \lambda^*[\mathbf{r}]. \quad (3.3)$$

Полагая, по теореме умножения, плотность вероятности  $W(\lambda, \mathbf{r}) = W(\mathbf{r})W(\lambda | \mathbf{r})$ , перепишем выражение (3.3) в виде

$$\langle R \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle W(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

где

$$\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle R(\lambda, \lambda^*) \rangle W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda \quad (3.4)$$

есть **условный средний риск**, вычисляемый для фиксированных значений  $\mathbf{r}$ .

Усреднение условного среднего риска с учетом плотности вероятности  $W(\mathbf{r})$  дает **безусловный средний риск**. Таким образом, критерий минимума среднего риска сводится к критерию **минимума условного среднего риска**:

$$\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \min_{\lambda^*}.$$

Минимизация условного среднего риска требует знания условной плотности вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r})$ , которая представляет **апостериорную плотность вероятности** параметра  $\lambda$ . По теореме умножения вероятностей можно записать:  $W(\lambda, \mathbf{r}) = W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda) = W(\mathbf{r})W(\lambda | \mathbf{r})$ . Отсюда апостериорная плотность вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r}) \equiv W_{ps}(\lambda)$  определяется выражением

$$W_{ps}(\lambda) = kW(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda), \quad (3.5)$$

где  $k$  – коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$k = [W(\mathbf{r})]^{-1} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda) d\lambda \right]^{-1}.$$

Условная плотность вероятности  $W(\mathbf{r} | \lambda)$ , рассматриваемая как функция от  $\lambda$ , называется **функцией правдоподобия**. При фиксированных значениях реализации эта функция показывает, насколько одно возможное значение параметра  $\lambda$  “более правдоподобно”, чем другое.

Для нахождения оптимальных оценок можно использовать применяемое в задачах обнаружения **условное отношение правдоподобия**, которое представляет отношение плотности вероятности  $W(\lambda | \mathbf{r}) \equiv W_{c.n}(\mathbf{r})$  к плотности вероятности  $W_n(\mathbf{r})$ :

$$l(\mathbf{r} | \lambda) = W(\mathbf{r} | \lambda) / W_n(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

С учетом выражения (3.6) апостериорная плотность вероятности представляется в виде  $W_{ps}(\lambda) = k_1 W(\lambda) / l(\mathbf{r} | \lambda)$ , где  $k_1 = k W_n(\mathbf{r})$ .

Переходя от дискретных значений  $\mathbf{r}$  к непрерывным реализациям  $r(t)$ , получаем

$$W_{ps}(\lambda) = k W(\lambda) W[r(t) | \lambda] = k_1 W(\lambda) l[r(t) | \lambda].$$

Выражения для условных функционалов  $l[r(t) | \lambda]$  были получены в гл. 2, и ими можно воспользоваться при решении конкретных задач оценки параметров сигнала. Таким образом, *апостериорная плотность вероятности с точностью до нормирующего множителя определяется умножением априорной плотности вероятности  $W(\lambda)$  параметра  $\lambda$  на функционал или отношение правдоподобия.*

Для конкретной модели сигнала и шума (смеси  $r(t)$ ) функционал правдоподобия  $F(\lambda) \equiv W[r(t) | \lambda]$  вычисляется в результате перехода к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$  [см. аналогичный переход от формулы (2.18) к (2.19)]. При фиксированных значениях параметра  $\lambda$  можно воспользоваться выражением (2.14) для  $W_{c.n}(\mathbf{r})$ , на основании которого в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим с точностью до коэффициента

$$F(\lambda) \sim \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [r(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right]. \quad (3.7)$$

Заметим, что сомножитель, стоящий перед экспонентой в выражении (2.14), при  $\Delta t \rightarrow 0$  стремится к нулю. Однако при решении задач приходится оперировать с отношениями функционалов (например, с отношением правдоподобия), поэтому роль указанного сомножителя не существенна при дальнейших рассуждениях.

Апостериорная плотность вероятности определяется формулой (3.5), которую называют формулой **Байеса**. С учетом соотношения (3.7) формула Байеса принимает вид

$$W_{ps}(\lambda) = k W(\lambda) F(\lambda). \quad (3.8)$$

Располагая апостериорной плотностью вероятности, для конкретных функций потерь можем найти оптимальную оценку  $\lambda^*$ , минимизирующую средний риск. Такие оценки называют **байесовскими**.

Рассмотрим квадратичную функцию потерь. Критерий минимума условного среднего риска (3.4) сводится к следующему:

$$\lambda^{*2} - 2\lambda^* \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda = \min_{\lambda^*}.$$

Оптимальная оценка находится дифференцированием левой части приведенного соотношения по  $\lambda^*$  и приравниванием к нулю результата. Решение полученного уравнения имеет вид

$$\lambda_0^* = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda, \quad (3.9)$$

т. е. оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценка совпадает с апостериорным средним значением. Такая оценка называется **несмещенной**. Условный средний риск с учетом выражения (3.9) равен условной апостериорной дисперсии:

$$\langle R(\lambda^* | \mathbf{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0^*)^2 W(\lambda | \mathbf{r}) d\lambda = \sigma_{\lambda}^2. \quad (3.10)$$

Таким образом, при квадратичной функции потерь обеспечивается оценка параметра с минимальной дисперсией ошибки.

Применим простую функцию потерь  $R(\lambda, \lambda^*) = 1 - \delta(\lambda - \lambda^*)$ . Минимизация условного среднего риска (3.4) в этом случае приводит к критерию  $W(\lambda | \mathbf{r})|_{\lambda=\lambda^*}$  или  $W(\lambda)W(\mathbf{r} | \lambda)|_{\lambda=\lambda^*} = \max_{\lambda^*}$ , т. е. оптимальная оценка обращает в максимум апостериорную плотность вероятности оцениваемого параметра.

При отсутствии априорных сведений об оцениваемом параметре обычно предполагают, что априорная плотность вероятности равномерна на заданном интервале неопределенности. Тогда вычисление оценки сводится к максимизации функции правдоподобия:

$$W(\mathbf{r} | \lambda)|_{\lambda=\lambda^*} = \max_{\lambda^*}.$$

Условие оптимальности оценки в этом случае может быть выражено в виде **уравнения правдоподобия**:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W(\mathbf{r} | \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda^*} = 0.$$

**Оценка максимального правдоподобия**  $\lambda$  представляет корень уравнения правдоподобия, обеспечивающий глобальный максимум. Эта оценка в общем случае отличается от оптимальной среднеквадратичной. *В тех случаях, когда функции  $W(\mathbf{r} | \lambda)$  и  $W(\lambda | \mathbf{r})$  являются симметричными относительно точки  $\lambda^*$ , все рассмотренные критерии приводят к одной и той же оценке  $\lambda^*$ .*

В теории оценок доказано, что дисперсия (3.10) несмещенной оценки удовлетворяет неравенству Крамера–Рао. При равномерном априорном распределении и гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности с математическим ожиданием  $\lambda_0$  и дисперсией  $\sigma_{\lambda}^2$  нижняя граница, определяемая **неравенством Крамера–Рао**, имеет вид

$$\sigma_{\lambda}^2 = \left\langle \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln W(\mathbf{r} | \lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0} \right\rangle^{-1}, \quad (3.11)$$

где  $\lambda_0$  – оценка максимального правдоподобия. Из формулы (3.11) следует, что апостериорная погрешность характеризуется второй производной от логарифма функции правдоподобия.

## 3.2. ОЦЕНКА НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

### 3.2.1. Оценка параметров известного сигнала

Параметры сигнала делят на энергетические и неэнергетические. К энергетическим относятся те параметры, от которых зависит энергия сигнала, т. е.  $E = E(\lambda)$ , в противном случае параметры называют неэнергетическими. В дальнейшем ограничимся рассмотрением неэнергетических параметров.

Вся доступная информация об оцениваемых параметрах содержится в формуле Байеса (3.8). С учетом выражения (3.7) эта формула для известного сигнала принимает вид

$$W_{ps}(\lambda) = kW(\lambda) \exp\left[-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T r^2(t) dt\right] \exp\left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)s(t, \lambda) dt\right]. \quad (3.12)$$

Множитель  $\exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T r^2(t) dt\right]$  не зависит от  $\lambda$  и не содержит информации

об оцениваемом параметре, поэтому он может быть включен в постоянный коэффициент  $k$ . В случае оценки неэнергетических параметров энергия сигнала также не зависит от  $\lambda$ , т. е.  $E(\lambda) = E$ , следовательно, множитель

$\exp\left[-\frac{E}{N_0}\right]$  может быть включен в постоянную  $k$ . Таким образом, формула

(3.12) приводится к виду

$$W_{ps}(\lambda) = kW(\lambda) \exp[z(\lambda)],$$

где  $z(\lambda)$  – корреляционный интеграл, определяемый выражением

$$z(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t)s(t, \lambda) dt. \quad (3.13)$$

*Корреляционный интеграл включает существенные операции над принятой реализацией  $r(t)$ , которые необходимо выполнить, чтобы извлечь всю доступную информацию о параметре  $\lambda$ , содержащуюся в  $r(t)$ . По этой причине функцию  $z(\lambda)$  называют **достаточной статистикой** для оценки параметра  $\lambda$ . Сопоставляя выражения (3.13) и (3.7), нетрудно установить,  $z(\lambda)$  пред-*

ставляет логарифм функционала правдоподобия. Максимально правдоподобной оценкой, следовательно, является такое значение  $\lambda^*$ , которое обеспечивает максимум логарифма функционала правдоподобия. Такая оценка должна удовлетворять следующему уравнению правдоподобия:

$$\left. \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0. \quad (3.14)$$

В соответствии с выражениями (3.13) и (3.14) можно предложить способы реализации устройств оценивания. Первый способ основан на запоминании принимаемой реализации  $r(t)$  с последующим умножением ее на сигнал и интегрированием для последовательных значений оцениваемого параметра из области его допустимых значений. При этом за оценочное значение принимается такое  $\lambda^*$ , для которого функция  $z(\lambda)$  имеет наибольшее значение. Этот способ требует больших затрат времени. Обычно применяют другой, многоканальный способ, позволяющий получить  $n$  значений параметра в  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  (рис. 3.2).

Принимаемая реализация  $r(t)$  умножается на опорные сигналы  $s(t, \lambda_i)$ , каждый из которых имеет одно из  $n$  значений параметра  $\lambda$ . На выходах интеграторов формируются значения  $z(\lambda_i)$ . Решающее устройство (РУ) определяет номер канала с максимальным значением корреляционного интеграла. Число каналов зависит от требуемой точности измерения параметра. При фиксированных интервалах параметра  $[\lambda', \lambda'']$ , на которые разбивается область ожидаемых значений  $\lambda$ , увеличение числа каналов  $n$  целесообразно до определенных пределов. Эти пределы обусловлены возможным появлением аномальных ошибок, характеристика которых дана в п. 3.2.5. При относительно малых шумах действием аномальных ошибок можно пренебречь. В этом случае дисперсия ошибок измерения может быть вычислена как нижняя граница неравенства Крамера–Рао (3.11). С учетом выражения (3.13) в предположении равномерной априорной плотности вероятности  $W(\lambda)$  из формулы (3.11) следует

$$\sigma_{\lambda}^2 = \left[ - \left. \frac{\partial^2 z_s(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda^*} \right]^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $z_s(\lambda)$  – сигнальная функция, определяемая выражением

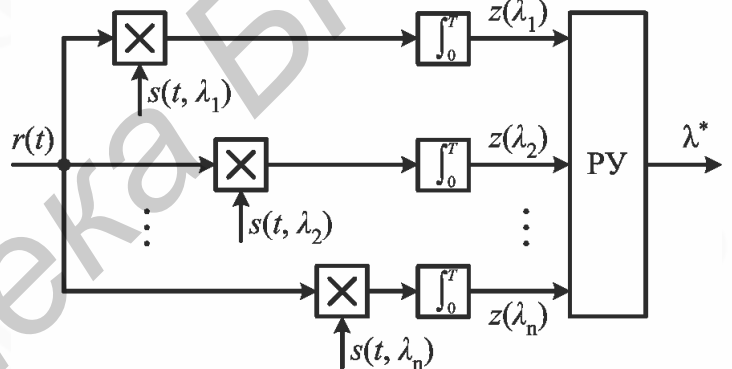


Рис. 3.2. Структурная схема многоканального устройства оценки неэнергетических параметров

$$z_s(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t, \lambda) s(t, \lambda_0) dt; \quad (3.16)$$

$\lambda_0$  – истинное значение параметра, относительно которого осуществлено разложение в ряд Тейлора функции

$$z(\lambda) = z(\lambda_0) + \left. \frac{\partial z(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 z(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda^*} (\lambda - \lambda_0)^2.$$

Поскольку сигнальная функция пропорциональна автокорреляционной функции (АКФ) сигнала, можно утверждать, что дисперсия (3.15) обратно пропорциональна значению второй производной АКФ сигнала в нуле.

### 3.2.2. Оценка параметров сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим оценку неэнергетического параметра сигнала, у которого начальная фаза представляет случайную величину, равномерно распределенную на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Сумма такого сигнала и белого шума представляет наблюдаемую смесь  $r(t)$ .

Найдем выражение для функционала правдоподобия, используя известную методику, изложенную в п. 2.3.3. Модель сигнала при этом принимается в виде (1.9). В итоге  $F(\lambda) = C_0 I_0[Z(\lambda)]$ , где  $C_0$  – постоянная величина, не зависящая от параметра  $\lambda$ ;  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В соответствии с выражением (2.62) функция  $Z(\lambda)$  определяется огибающей напряжения, вырабатываемого согласованным фильтром, т. е.

$$Z(\lambda) = \frac{1}{N_0} \left| \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t, \lambda) dt \right|. \quad (3.17)$$

По аналогии с соотношением (3.14) уравнение правдоподобия можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln F(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda^*} = \left[ \frac{I_1[Z(\lambda)]}{I_0[Z(\lambda)]} \cdot \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} \right] \Bigg|_{\lambda=\lambda^*} = 0.$$

Здесь  $I_1(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Поскольку функции Бесселя не равны нулю, уравнение правдоподобия можно упростить:

$$\left. \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0, \quad (3.18)$$

где  $Z(\lambda)$  определяется выражением (3.17).

По аналогии с формулой (3.14) реализация оптимального устройства оценивания параметра для сигнала со случайной начальной фазой требует построения  $n$  каналов, каждый из которых включает согласованный фильтр, настроенный на сигнал  $s(t, \lambda_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и детектор огибающей. На рис. 3.3 приведена многоканальная схема устройства оценивания.

Для больших значений отношения сигнал/шум, когда аномальные ошибки практически отсутствуют, дисперсия “нормальных” ошибок оценивания определяется выражением (3.15), в которое следует подставлять сигнальную функцию  $Z_s(\lambda)$ . В рассматриваемом случае сигнальная функция определяется формулой

$$Z_s(\lambda) = \frac{1}{N_0} \left| \int_0^T \bar{S}_0(t, \lambda_0) \hat{\bar{S}}_0(t, \lambda) dt \right|. \quad (3.19)$$

При вычислении производной от модуля функции следует иметь в виду равенство  $|f(x)| = \sqrt{f(x) \hat{f}(x)}$ . Вторую производную от сигнальной функции, вычисленную с учетом этого равенства, следует подставлять в формулу (3.15).

Приведенные здесь и в п. 3.2.1 соотношения справедливы в общем случае оценки неэнергетических параметров сигнала. Конкретизация этих соотношений позволяет решить некоторые частные задачи, встречающиеся в радиоэлектронных системах.

### 3.2.3. Оценка начальной фазы радиоимпульса

Алгоритм работы оптимального измерителя начальной фазы радиоимпульса

$$s(t, \varphi) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi], \quad t \in [0, T],$$

определяется уравнением правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \ln F(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi] dt \right\} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0.$$

Выполняя операцию дифференцирования, можно привести это уравнение к виду

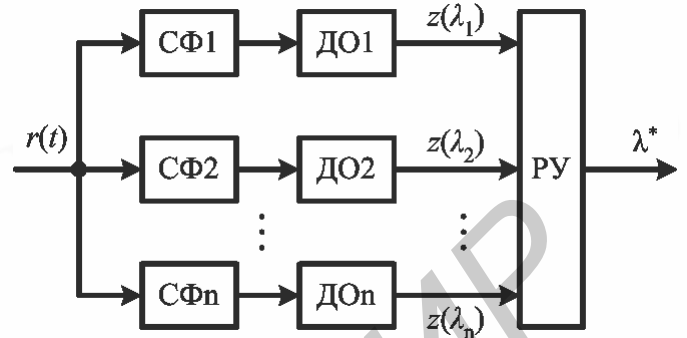


Рис. 3.3. Структурная схема устройства оценки неэнергетического параметра сигнала со случайной начальной фазой



$$\int_0^T r(t) S_0(t) \sin[\omega_0 t + \psi(t) + \varphi] dt = 0.$$

Учитывая формулу для синуса суммы, из приведенного уравнения получаем выражение для оценки начальной фазы:

$$\varphi^* = -\operatorname{arctg} \frac{\int_0^T r(t) S_0 \sin[\omega_0 t + \psi(t)] dt}{\int_0^T r(t) S_0 \cos[\omega_0 t + \psi(t)] dt}. \quad (3.20)$$

Структурная схема, соответствующая алгоритму (3.20), содержит два корреляционных канала, опорные сигналы которых сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $\pi/2$ , и вычислитель функции  $\operatorname{arctg}(u_1/u_2)$  (рис. 3.4). Вместо корреляторов можно использовать согласованные фильтры.

В частном случае при отсутствии амплитудной и фазовой модуляции сигнала уравнение правдоподобия приобретает вид

$$\int_0^T r(t) S_0 \sin[\omega_0 t + \varphi^*] dt = 0.$$

Это уравнение можно представить схемой, аналогичной схеме

(рис. 3.4), а также приближенно схемой фазовой автоподстройки, приведенной на рис. 3.5. В этом устройстве переменный коэффициент усиления стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . При отсутствии шума напряжение на выходе перемножителя (фазового дискриминатора) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos[\omega_0 t + \varphi_0] \sin[\omega_0 t + \varphi_1^*] = \\ &= (A/2) \sin[\varphi_1^* - \varphi_0] + (A/2) \sin[2\omega_0 t + \varphi_1^* + \varphi_0], \end{aligned}$$

где  $\varphi_1^*$  – фаза подстраиваемого генератора (ПГ), значение которой отличается в общем случае от максимально правдоподобной оценки  $\varphi^*$ . Фильтр нижних частот (ФНЧ) осуществляет весовое интегрирование, подавляя колебание на удвоенной частоте (второе слагаемое в  $u(t)$ , а также случайные колебания, обусловленные шумом. Напряжение  $U_{\Phi}(t)$ , пропорциональное фазовой ошибке, подстраивает ПГ, обеспечивая приближение  $\varphi_1^*$  к  $\varphi^*$ .

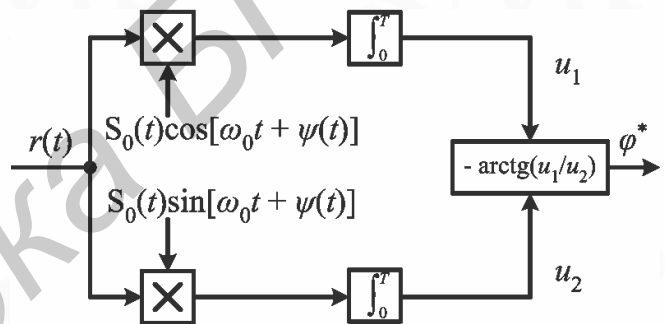


Рис. 3.4. Функциональная схема устройства оценки начальной фазы радиоимпульса

Для вычисления дисперсии оценки начальной фазы определим сигнальную функцию  $z_s(\varphi)$ . По формуле (3.16) находим

$$z_s(\varphi) \cong \frac{2E}{N_0} \cos[\varphi - \varphi_0].$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial^2 z_s(\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{2E}{N_0},$$

а дисперсия

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{N_0}{2E} = 1/q.$$

Таким образом, дисперсия оценки начальной фазы обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и не зависит от формы радиоимпульса.

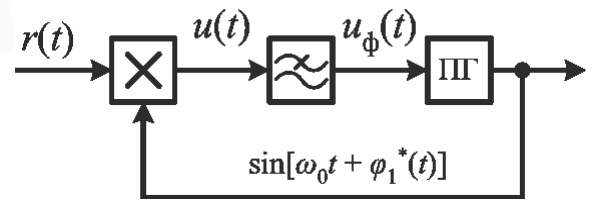


Рис. 3.5. Устройство оценки начальной фазы радиоимпульса

### 3.2.4. Оценка временного положения радиоимпульса со случайной начальной фазой

Рассмотрим радиоимпульс

$$s(t - \tau) = S_0(t - \tau) \cos[\omega_0(t - \tau) + \psi(t - \tau) + \varphi], \quad t \in [0, T],$$

у которого начальная фаза  $\varphi$  случайна и равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Полагаем, что момент  $t = \tau$  соответствует середине радиоимпульса (рис. 3.6, а).

В уравнение правдоподобия (3.18) входит производная от функции (3.17). В рассматриваемом случае

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t - \tau) dt \right|_{\tau=\tau^*} = 0. \quad (3.21)$$

Если обозначить

$$\bar{X}(t) = \int_0^T \bar{R}(t) \hat{S}_0(t - \tau) dt; \quad \bar{X}'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{X}(\tau),$$

то с учетом операции вычисления производной от модуля функции уравнение правдоподобия можно представить в виде

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{\bar{X}(\tau) \hat{X}(\tau)} = \frac{1}{2|\bar{X}(\tau)|} \left[ \bar{X}(\tau) \hat{X}'(\tau) + \hat{X}(\tau) \bar{X}'(\tau) \right]_{\tau=\tau^*} = 0.$$

Реализация устройства оценивания  $\tau$  на основе уравнения (3.21) требует использования схем, включающих согласованный фильтр (СФ), детектор огибающей (ДО) и устройство принятия решения (УПР), которое определяет временное положение огибающей сигнала на выходе детектора (рис. 3.6, б). Стробуемый каскад (СК) обеспечивает ограничение рассматриваемого интервала возможных значений задержки  $\tau$  априорными границами  $[\tau_1, \tau_2]$ , т. е. с помощью СК вводятся априорные данные. УПР действует в соответствии с уравнением (3.21), определяя момент времени, соответствующий максимуму напряжения на выходе детектора. Для упрощения реализации локального оценивания задержки операцию дифференцирования в уравнении (3.21) заменяют вычислением конечной разности:

$$\left| \int_0^T \bar{R}(t) \bar{S}_0(t - \hat{\tau} + \Delta\tau) dt \right| - \left| \int_0^T \bar{R}(t) \bar{S}_0(t - \hat{\tau} - \Delta\tau) dt \right|,$$

которая при  $\tau = \tau^*$  должна обращаться в нуль. Величина  $\Delta\tau$  выбирается из условия обеспечения наибольшей точности оценивания. Если область неопределенности задержки сигнала существенно превышает время его корреляции, для определения локальной оценки необходимо предварительно осуществить поиск сигнала. В результате поиска и обнаружения сигнала область неопределенности его временного положения сокращается до величины порядка времени корреляции.

Потенциальная точность оценки времени запаздывания определяется по формуле (3.15), в которой сигнальная функция рассчитывается с помощью выражения (3.19). Произведя необходимые преобразования с учетом определения модуля комплексной функции, выразим вторую производную от сигнальной функции следующим образом:

$$\frac{\partial^2 Z_s(\tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=\tau_0} = -q \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega - \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |S(j\omega)|^2 d\omega \right]^2 \right\} = -q\gamma^2, \quad (3.22)$$

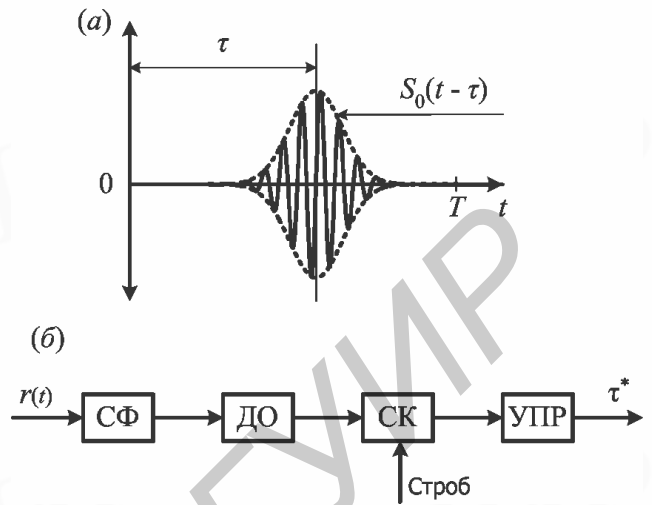


Рис. 3.6. Устройство оценки начальной фазы радиоимпульса

где  $S(j\omega)$  – спектральная функция сигнала  $S_H(t)$ , нормированного в соответствии с соотношением

$$E = \int_0^T |s_H(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (3.23)$$

Дисперсия оценки времени запаздывания вычисляется на основании выражений (3.15) и (3.22)

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{q\gamma^2}. \quad (3.24)$$

Здесь  $\gamma^2$  – величина, определяющая второй момент от квадрата модуля спектра сигнала  $|S(j\omega)|^2$  относительно средней частоты (квадрат эффективной полосы спектра). В частном случае – для радиоимпульса с огибающей гауссовской формы  $S_0(t) = \exp[-2,8t^2/\tau_{и}^2]$  имеем  $\gamma^2 = 2,8/\tau_{и}^2 = (\pi\Delta f)^2/1,4$ , где  $\Delta f$  – ширина полосы квадрата модуля спектра импульса на уровне 0,5. Таким образом, дисперсия  $\sigma_\tau^2$  оптимальной оценки времени запаздывания обратно пропорциональна отношению сигнал/шум  $q$  и квадрату эффективной полосы спектра радиоимпульса.

### 3.2.5. Оценка смещения частоты радиоимпульса

Принимаемое колебание запишем в виде

$$r(t) = S_0(t) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi] + n(t), \quad t \in [0, T],$$

где оценке подлежит смещение (сдвиг) частоты  $\Omega$ , а фазу  $\varphi$ , как и в п. 3.2.4, считаем случайной величиной. Функционал правдоподобия

$$F(\Omega) = C_0 I_0 [Z(Q)],$$

где корреляционный интеграл представляется в развернутом виде:

$$Z(Q) = \frac{2}{N_0} \sqrt{\left\{ \int_0^T r(t) S_0(t) \cos[(\omega_0 - \Omega)t] dt \right\}^2 + \left\{ \int_0^T r(t) S_0(t) \sin[(\omega_0 - \Omega)t] dt \right\}^2}.$$

Реализация алгоритма максимального правдоподобия возможна на основе многоканальной схемы, включающей согласованные фильтры, настроенные на частоту  $\omega_0 - \Omega_i$ , где  $\Omega_i = i\Delta\omega$ ,  $i = \overline{1, n}$ . На выходе каждого согласованного фильтра включается детектор огибающей. Выходы детекторов соединены с решающим устройством, которое определяет номер канала с наибольшим выходным напряжением. За оценку сдвига частоты принимается частота расстройки этого канала относительно  $\omega_0$ . Представленную на рис. 3.3 многоканальную схему можно рассматривать как устройство оценивания частотного сдвига. Частоты  $\Omega_i$  должны перекрывать с шагом  $\Delta\omega$  весь ожидаемый диапазон сдвигов частоты. Практически расстройка между каналами выбирается равной  $\Delta\omega \cong 2\pi/T$ .

Анализ показывает, что потенциальная точность оценивания частоты определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{1}{q\alpha^2}, \quad (3.25)$$

где

$$\alpha^2 = \int_0^T t^2 |s_H(t)|^2 dt - \left[ \int_0^T t |s_H(t)|^2 dt \right]^2 \quad (3.26)$$

есть второй момент квадрата огибающей импульса относительно среднего значения временного положения радиоимпульса ( $\alpha$  – эффективная продолжительность сигнала);  $s_H(t)$  – сигнал, нормированный в соответствии с соотношением (3.23).

В частном случае – для радиоимпульса с гауссовской огибающей, рассмотренного выше (п. 3.2.4) – при неизвестном частотном сдвиге дисперсия оценки такого сдвига определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{\pi^2}{1,4q\tau_{и}^2} = \frac{4\pi^2\Delta f^2}{(2,8)^3 q}.$$

Для сравнения приведем дисперсию оценки сдвига частоты прямоугольного импульса:

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{12}{q\tau_{и}^2}.$$

Таким образом, дисперсия оценки частотного сдвига обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и квадрату эффективной продолжительности радиоимпульса.

### 3.2.6. Влияние аномальных ошибок на оценку параметров

Установим влияние **аномальных ошибок** на результат оценивания сигнала. Рассмотрим это влияние на примере оценки сдвига частоты. Пусть сигнал имеет вид

$$s(t, \Omega) = A_0 \cos[(\omega_0 + \rho\Omega)t], \quad t \in [-T/2, T/2]$$

и принимается на фоне белого шума. Здесь  $\rho$  – заданный коэффициент. Оценке подвергается частота  $\Omega$ , априорная плотность вероятности которой  $W(\Omega)$  предполагается равномерной в пределах  $[-\sqrt{3}\sigma_0, \sqrt{3}\sigma_0]$ . Априорная

дисперсия случайной величины  $\Omega$  равна  $\sigma_0^2$ . Разбивая весь диапазон ожидаемых частот на участки, организуем многоканальную схему по типу представленной на рис. 3.2. Окончательная локальная оценка сдвига частоты формируется согласно уравнению правдоподобия на основании выбора канала с максимальным выходным напряжением. Устройство локальной оценки

частоты показано на рис. 3.7, где НИ – нуль-индикатор, вырабатывающий оценку  $\hat{\Omega}$  в соответствии с уравнением

$$\frac{2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} [r(t) - s(t, \Omega)] \frac{\partial s(t, \Omega)}{\partial \Omega} dt \Big|_{\Omega=\hat{\Omega}} = 0.$$

В процессе работы схемы оценка  $\hat{\Omega}$  сводится к оптимальной  $\Omega^*$  путем управления частотой генератора сигнала (ГС).

Для прямоугольного радиоимпульса дисперсия  $\sigma_{\Omega}^2$  оценки частоты при условии правильного выбора канала определяется выражением

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{12}{q(\rho T)^2}. \quad (3.27)$$

Тогда относительная дисперсия

$$\delta_{\Omega}^2 = \sigma_{\Omega}^2 / \sigma_0^2 = \frac{12}{q\sigma_0^2(\rho T)^2}.$$

Из формулы (3.27) видно, что с увеличением коэффициента  $\rho$  относительная дисперсия уменьшается, однако здесь не учитывается влияние  $\rho$  на вероятность ошибки первоначального определения подынтервала  $\Delta\omega$ . Число  $n$  подынтервалов при  $\Delta\omega = 2\pi/(\rho T)$  определяется выражением

$$n \cong \frac{2\sqrt{3}\sigma_0}{\Delta\omega} = \frac{\rho T \sqrt{3}\sigma_0}{\pi}.$$

Интервал  $\Delta\omega$  выбран из условия обращения в нуль сигнальной функции в точках  $\Omega_i$ , кратных величине  $2\pi/(\rho T)$ . Действительно, для нормированной функции  $\tilde{Z}_s(\Omega)$  имеем

$$\tilde{Z}_s(\Omega) = \frac{1}{E} \int_{-T/2}^{T/2} s(t, \Omega) s(t, \Omega^*) dt \cong \frac{\sin[\rho(\Omega - \Omega^*)T/2]}{\rho(\Omega - \Omega^*)T/2}.$$

Воспользуемся выражениями (2.102) и (2.103) для вероятности  $P_e$  полной ошибки различения  $n$  сигналов. При условии  $\rho T \gg 1$

$$P_e \leq \frac{\rho T \sqrt{3}\sigma_0 / \pi - 1}{\sqrt{\pi q}} \exp\left[-\frac{q}{4}\right]. \quad (3.28)$$

С увеличением  $\rho T \sqrt{3}\sigma_0$  вероятность ошибочного выбора  $i$ -го интервала  $\Delta\omega$  из  $n$  возможных возрастает. Эту вероятность называют **вероятностью аномальной ошибки** или **вероятностью неоднозначности оценки**.

Чтобы вероятность пребывания в ошибочном подынтервале была достаточно мала, необходимо при заданной величине  $\rho$  обеспечить некоторое

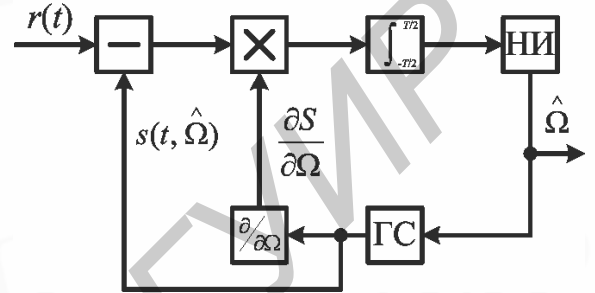
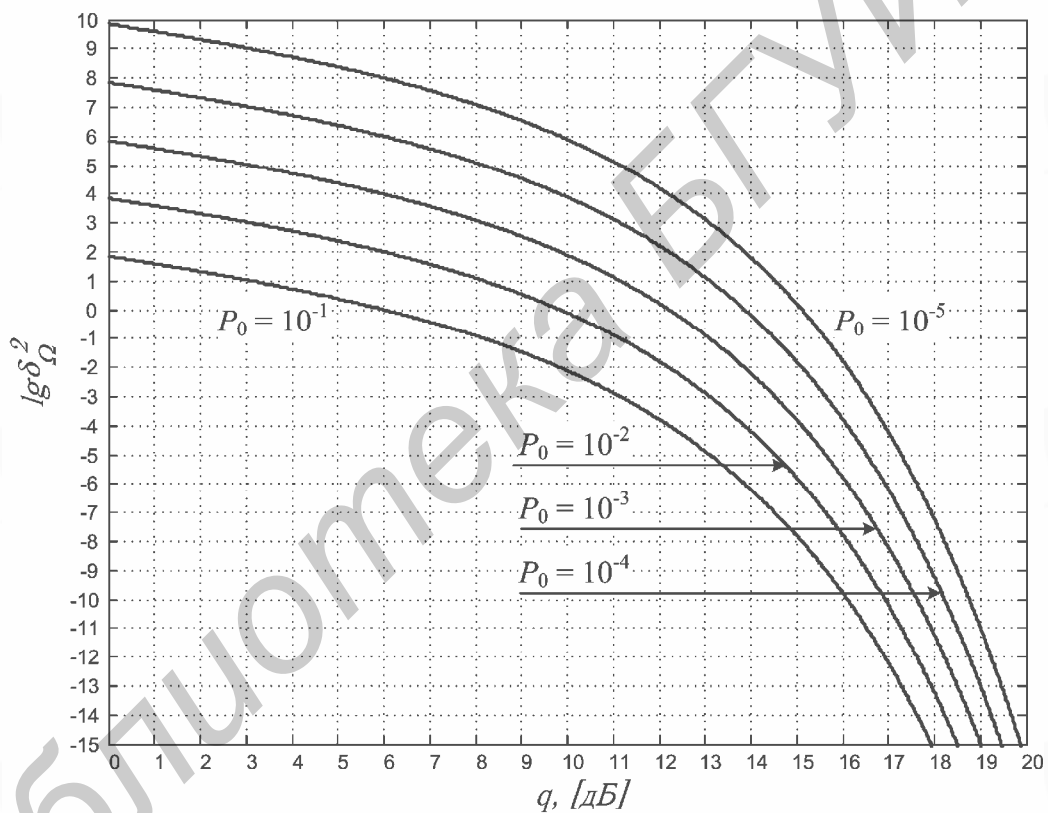


Рис. 3.7. Устройство локальной оценки частоты

минимальное отношение сигнал/шум  $q$ . Для минимизации среднего квадрата ошибки при ограниченном значении вероятности  $P_e = P_0$  выбирают  $\rho$  так, чтобы в формуле (3.28) выполнялось равенство. Решив это равенство относительно  $\rho T \sigma_0$  (единицей в числителе дроби (3.28) пренебрегаем), после подстановки результата в выражение (3.27) получим

$$\delta_{\Omega}^2 \cong 9(q/2)^{-2} \exp\left[\frac{-q/2}{\pi^3 P_0^2}\right].$$

Зависимость  $\delta_{\Omega}^2$  от отношения сигнал/шум приведена для пяти значений  $P_0$  на рис. 3.8. Наблюдается пороговый эффект, обусловленный аномальными ошибками. Например, при  $P_0 = 10^{-5}$  снижение  $q$  с 18 дБ до 15 дБ вызывает



**Рис. 3.8.** Логарифм относительной дисперсии аномальной ошибки как функция отношения С/Ш при различных значениях ошибки различения

увеличение  $\delta_{\Omega}^2$  на семь порядков.

Для сравнения алгоритмов оценивания параметров сигнала удобнее оперировать одним показателем качества – полным средним квадратом ошибки  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , учитывающим различные значения ошибок при двух несовместных событиях: при правильном и при ошибочном выборе подынтервала. Считая неверный выбор любого из подынтервалов равновероятным и рассматривая  $\hat{\Omega}$  и  $\Omega^*$  как независимые случайные величины, равномерно рас-

пределенные на заданном интервале  $[-\sqrt{3}\sigma_0, \sqrt{3}\sigma_0]$ , получаем следующее выражение для относительного значения полного среднего квадрата ошибки:

$$\delta_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_0^2 = \frac{\delta_\Omega^2 \sqrt{q}}{\sqrt{\pi}} (1 - P_e) + 2P_e,$$

где  $P_e$  определяется из равенства (3.28). Зависимости  $\delta_\varepsilon^2$  от отношения сигнал/шум приведены на рис. 3.9 при нескольких значениях  $\rho T \sigma_0$ . Эти зависимости носят пороговый характер.

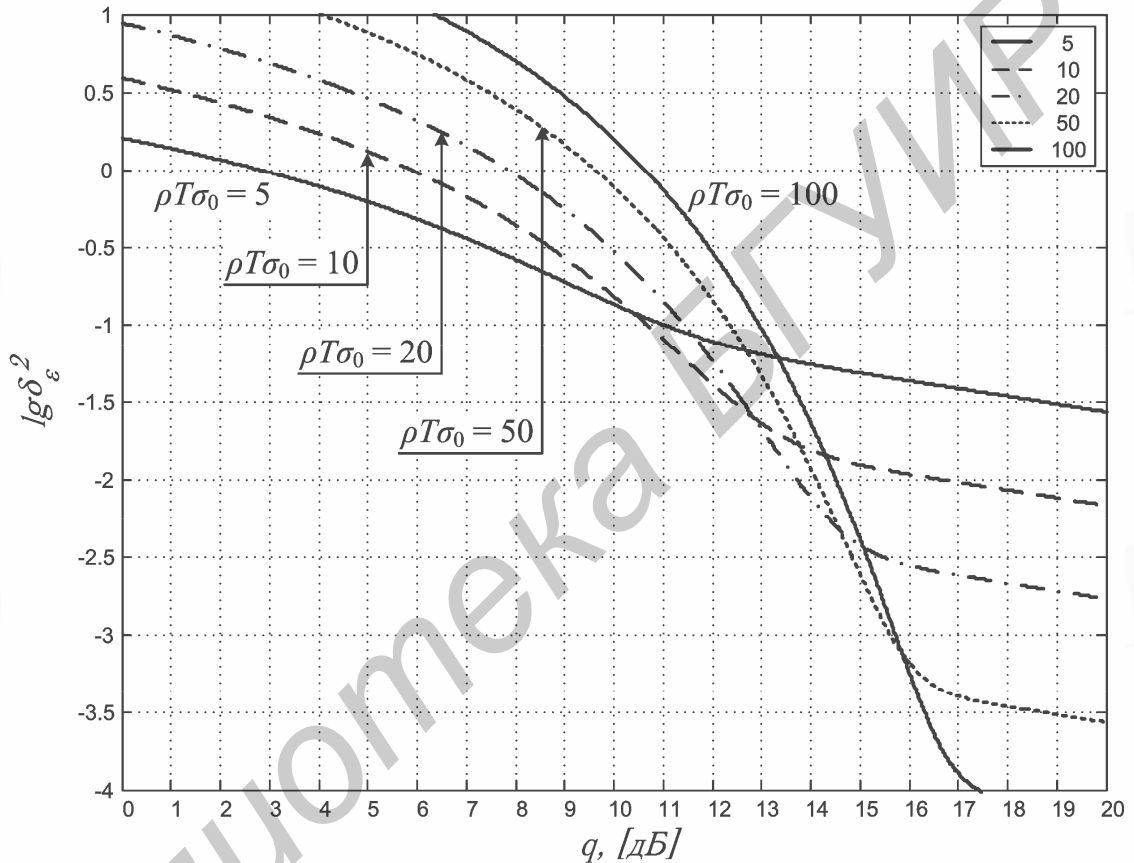


Рис. 3.9. Характеристики полной ошибки

### 3.3. СОВМЕСТНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ЧАСТОТНОГО СДВИГА РАДИОСИГНАЛА

Пусть сигнал зависит от неизвестных значений задержки  $\tau$  и частотного сдвига  $\Omega$ , тогда можно записать:

$$\begin{aligned} s(t, \Omega, \tau) &= S_0(t - \tau) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi(t - \tau) + \varphi] = \\ &= \text{Re} \left\{ \sqrt{2E} \bar{s}_{0H}(t - \tau) \exp[j\omega_0 t + \varphi] \right\}, t \in [0, T]. \end{aligned}$$



Здесь  $E$  – энергия сигнала;  $\varphi$  – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале  $[-\pi, \pi]$ ;  $\bar{s}_{0H}(t)$  – нормированная комплексная огибающая сигнала:

$$\bar{s}_{0H}(t) = \frac{1}{\sqrt{2E}} S_0(t) \exp[j\psi(t)].$$

По аналогии с формулой (3.13) запишем сигнальную функцию для рассматриваемого сигнала:

$$Z_s(\tau, \Omega) = q \left| \int_0^T \bar{s}_{0H}(t - \tau, \Omega) \hat{\bar{s}}_{0H}(t - \tau_0, \Omega_0) dt \right|, \quad (3.29)$$

где  $\tau_0, \Omega_0$  – истинные значения оцениваемых параметров;  $\bar{s}_{0H}(t - \tau, \Omega)$  – комплексная огибающая радиоимпульса:

$$\bar{s}_{0H}(t - \tau, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{2E}} S_0(t - \tau) \exp[-j\Omega t + j\psi(t - \tau)].$$

Структурная схема оптимального измерителя строится по многоканальному принципу (см. рис. 3.3), учитывающему все комбинации  $\tau_i, \Omega_i$  в ожидаемых подынтервалах значений  $\tau, \Omega$ .

При большом отношении сигнал/шум, когда наблюдается один пик выходного сигнала (аномальные пики отсутствуют), время появления этого пика и фильтр, в котором он появляется, будут давать совместную оценку запаздывания  $\tau^*$  и смещения частоты  $\Omega^*$ .

Для оценки потенциальной точности совместного измерения параметров  $\tau$  и  $\Omega$  необходимо вычислить вторые производные от сигнальной функции (3.29) в точке  $\tau = \tau_0, \Omega = \Omega_0$ . Заметим, что из выражения (3.29) следуют частные сигнальные функции для отдельных параметров  $\tau$  и  $\Omega$ .

Статистические характеристики совместной оценки параметров  $\lambda_1 \equiv \tau$  и  $\lambda_2 \equiv \Omega$  определяются дисперсиями  $\sigma_\tau^2, \sigma_\Omega^2$  и корреляционным моментом  $R_{\tau\Omega}$ :  $\sigma_\tau^2 = -J_{11}/\Delta$ ;  $\sigma_\Omega^2 = -J_{22}/\Delta$ ;  $R_{\tau\Omega} = J_{12}/\Delta$ , где

$$J_{ij} = \left| \frac{\partial^2 Z_s(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right|_{\lambda_{10}, \lambda_{20}}; \quad \Delta = J_{11}J_{22} - J_{12}^2; \quad i, j = 1, 2. \quad (3.30)$$

В рассматриваемом случае, используя обозначения, принятые в выражениях (3.22) и (3.26) для  $\gamma^2$  и  $\alpha^2$ , а также предполагая равными нулю среднюю частоту и среднее временное положение радиоимпульса, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^2 &= [q\gamma^2(1 - r_{\tau\Omega})]^{-1}; \\ \sigma_\Omega^2 &= [q\alpha^2(1 - r_{\tau\Omega})]^{-1}; \\ R_{\tau\Omega} &= r_{\tau\Omega} [q(1 - r_{\tau\Omega})]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $r_{\tau\Omega}$  – коэффициент частотно-временной связи сигнала:

$$r_{\tau\Omega} = \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2} \frac{2}{\sqrt{2E}} \int_0^T t \frac{d\psi(t)}{dt} S_0^2(t - \tau) dt. \quad (3.32)$$

Этот коэффициент характеризует среднюю величину произведения времени  $t$  на текущее отклонение частоты  $d\psi(t)/dt$ .

Из приведенных выражений видно, что при  $r_{\tau\Omega} = 0$  ошибки оценок  $\tau$  и  $\Omega$  некоррелированы ( $R_{\tau\Omega} = 0$ ). При этом формулы (3.24) и (3.25) для дисперсий  $\sigma_\tau^2$  и  $\sigma_\Omega^2$  представляют частный случай более общих соотношений (3.31). Значение  $r_{\tau\Omega} = 0$  обеспечивается в двух случаях: если в сигнале отсутствует угловая модуляция, т. е.  $d\psi(t)/dt = 0$ , и если сигнальная функция  $Z_s(\tau, \Omega)$  является четной относительно точки  $(\tau_0, \Omega_0)$  по  $\tau$  или по  $\Omega$ . В случае выполнения условия четности сигнальной функции при  $\tau = \tau_0$ ,  $\Omega = \Omega_0$  имеем  $\partial^2 Z_s / (\partial \tau \partial \Omega) = 0$ , поэтому  $R_{\tau\Omega} = 0$ , что следует из выражений (3.30) и (3.32).

Для совместной оценки  $\tau$  и  $\Omega$  при выборе сигналов стремятся обеспечить  $r_{\tau\Omega} = 0$ . Чтобы при этом уменьшить дисперсии  $\sigma_\tau^2$  и  $\sigma_\Omega^2$ , необходимо одновременно увеличивать эффективную полосу спектра и эффективную продолжительность сигнала. При  $R_{\tau\Omega} = 0$  произведение должно удовлетворять неравенству  $\sigma_\tau \sigma_\Omega \geq (q\alpha\gamma)^{-1}$ . В правой части этого неравенства произведение  $\alpha\gamma = B_3$  характеризует **эффективную базу сигнала**. Можно определить нижнюю границу для базы  $B_3$ . С этой целью проведем следующие преобразования с выражением  $\alpha\gamma$ .

Примем в выражениях для  $\alpha$  и  $\gamma$  средние значения частоты и временно-го положения сигнала равными нулю:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |S(j\omega)|^2 d\omega = 0; \quad \bar{t} = \int_0^T t |\bar{s}_{0H}(t)|^2 dt = 0.$$

Тогда с учетом выражений (3.22) и (3.26) получим

$$\alpha^2 \gamma^2 = \int_0^T t^2 |\bar{s}_{0H}(t)|^2 dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.33)$$

Используя равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^T |\bar{s}'_{0H}(t)|^2 dt.$$

где  $\bar{s}'_{0H}(t) = d\bar{s}_{0H}(t)/dt$ , перепишем соотношение (3.33) в виде

$$\alpha^2 \gamma^2 \geq \int_0^T t^2 |\bar{s}_{0H}(t)|^2 dt \int_0^T |\bar{s}'_{0H}(t)|^2 dt.$$

Применив к правой части неравенство Буняковского-Шварца, получим

$$\alpha^2 \gamma^2 \geq \left| \int_0^T t \hat{s}_{0H}(t) \bar{s}'_{0H}(t) dt \right|^2. \quad (3.34)$$

Представим нормированную комплексную огибающую сигнала  $\bar{s}_{0H}(t)$  в виде  $\bar{s}_{0H}(t) = f(t) \exp[j\psi(t)]$ ,  $f(t) = S_0(t)/\sqrt{2E}$ . Тогда

$$\hat{s}_{0H}(t) \frac{d\bar{s}_{0H}(t)}{dt} = jf^2(t) \frac{d\psi(t)}{dt} + f(t) \frac{df(t)}{dt}.$$

В результате неравенство (3.34) приводится к следующему:

$$\alpha^2 \gamma^2 = \left[ \int_0^T t f^2(t) \frac{d\psi(t)}{dt} dt \right]^2 + \left[ \int_0^T f(t) \frac{df(t)}{dt} dt \right]^2.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства совпадает с выражением в квадратных скобках в формуле (3.32), а второе слагаемое равно 1/4, в чем можно убедиться интегрированием по частям, имея в виду, равенство нулю

сигнала на концах интервала  $[0, T]$ , а также равенство  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 1$ . Таким

образом, приходим к соотношению  $\alpha^2 \gamma^2 \geq \alpha^2 \gamma^2 r_{\tau\Omega} + 1/4$  или при  $r_{\tau\Omega} = 0$   $\alpha\gamma = 1/2$ .

Полученное неравенство носит название **соотношения неопределенности**, оно показывает, что сигнал не может иметь одновременно сколь угодно малую продолжительность и произвольно малую ширину спектра.

Для характеристики сигналов, зависящих от  $\tau$  и  $\Omega$ , вводят **функцию неопределенности**:

$$\rho_1(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{S}_0(t) \hat{S}_0(t - \tau) \exp[-j\Omega t] dt \right|, \quad (3.35)$$

где  $E = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{S}_0(t)|^2 dt \right|$  – энергия сигнала.

Функция неопределенности зависит от формы сигнала. Поверхность, определяемую функцией неопределенности, называют **поверхностью неопределенности**. Геометрическое тело, ограниченное поверхностью неопределенности и плоскостью  $\rho_H = 0$ , носит название **тела неопределенности**. Пример тела неопределенности для линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) сигнала показан на рис. 3.10. Сечение тела неопределенности плоскостями  $\rho_H = \text{const}$  позволяют судить об основных свойствах тела неопределенности на уровнях сильной ( $\rho_H > 0,5$ ) и слабой ( $\rho_H \leq 0,1$ ) корреляции (рис. 3.11).

Тело неопределенности, построенное для функции  $\rho_1^2(\tau, \Omega)$ , обладает следующими важными свойствами: при  $\tau = \Omega = 0$  функция неопределенности принимает свое наибольшее значение

$$\rho_H^2(0, 0) = 1; \quad (3.36)$$

объем тела неопределенности  $\rho_H^2(\tau, \Omega)$

не зависит от вида сигнала, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_H^2(\tau, \Omega) d\tau d\Omega = 2\pi. \quad (3.37)$$

Соотношение (3.37) можно рассматривать как более общую формулировку **принципа неопределенности**, в соответствии с которым объем тела неопределенности не зависит от вида модуляции сигнала.

Конкретные примеры тел неопределенности будут рассмотрены далее, в гл. 4.

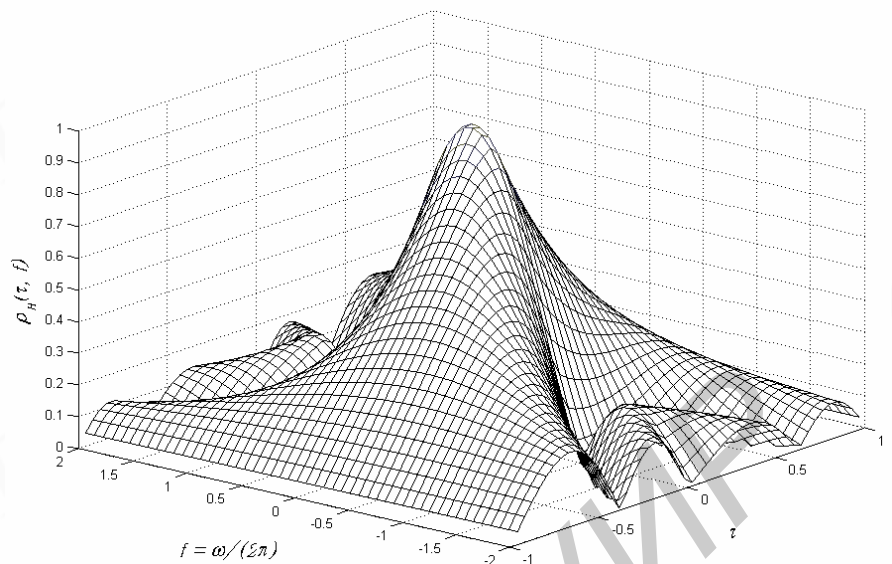


Рис. 3.10. Тело неопределенности ЛЧМ-сигнала

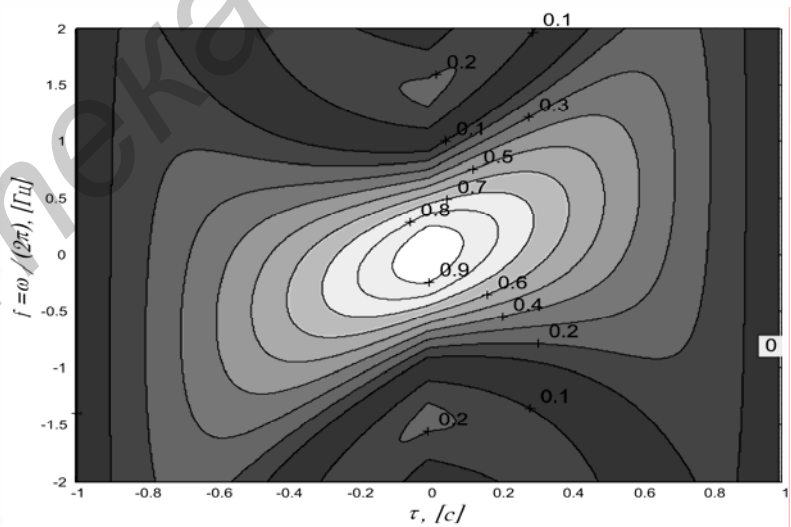


Рис. 3.11. Сечения тела неопределенности для ЛЧМ-сигнала

### 3.4. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

#### 3.4.1. Постановка и методика решения задачи фильтрации

В общем случае задача фильтрации формулируется следующим образом. Наблюдается процесс  $r(t)$ , являющийся известной детерминированной функцией от полезного сигнала  $s(t, \lambda)$  и некоторой помехи  $n(t)$ .

Полезный сигнал  $s(t, \lambda)$  есть функция времени  $t$  и многокомпонентного параметра (сообщения)  $\lambda(t) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n(t)\}$ , представляющего векторный случайный процесс. Сигнал является известной функцией аргументов  $t$  и  $\lambda$ , известными считаются все необходимые вероятностные характеристики случайного процесса  $\lambda(t)$  и помехи  $n(t)$ .

Общая задача заключается в том, чтобы на основании априорных сведений и по наблюдаемой реализации процесса  $r(t)$  для каждого момента времени  $t$  сформировать апостериорную плотность вероятности сообщения  $\lambda(t)$ .

В большинстве случаев требуется получить текущую оценку  $\lambda^*(t)$ , наилучшую в смысле критерия минимума среднего риска. Различают несколько модификаций задачи построения оценок. При наблюдении процесса  $r(t)$  на текущем интервале времени  $[0, t]$  ищется оценка  $\lambda^*(t + \tau)$ : если  $\tau = 0$  имеет место задача **текущей фильтрации**; если  $\tau > 0$  – задача фильтрации с предсказанием, или задача **экстраполяции**; при  $\tau < 0$  – задача фильтрации с запаздыванием, или задача **интерполяции**.

Критерии оптимальности, используемые в теории фильтрации, при фиксированном значении  $t$  совпадают с критериями теории оценок, рассмотренными в § 3.1.

Априорные сведения о вероятностных характеристиках параметра  $\lambda(t)$  и помехи  $n(t)$  задаются либо в форме многомерных плотностей вероятности, либо в виде дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

При дальнейшем рассмотрении полагаем наблюдение  $r(t)$  в виде

$$r(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \quad (3.38)$$

где  $n(t)$  – гауссовский белый шум с нулевым средним значением и  $\delta$ -функцией корреляции:

$$\langle n(t) \rangle = 0; \quad \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2). \quad (3.39)$$

Считаем, что информационный параметр  $\lambda(t)$  представляет однокомпонентный случайный процесс и формируется из белого гауссовского шума  $n_\lambda(t)$ , имеющего характеристики:  $\langle n_\lambda(t) \rangle = 0; \quad \langle n_\lambda(t_1)n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2} \delta(t_1 - t_2)$ .

Формирование сообщения  $\lambda(t)$  определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = K_1(t, \lambda) + n_\lambda(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (3.40)$$

где  $K_1(t, \lambda)$  – известная функция аргументов  $t$  и  $\lambda$ .

В зависимости от вида уравнения наблюдения (3.38) и [уравнений сообщения (3.40)] различаются два класса задач фильтрации: **линейная фильтрация**, если уравнение (3.38) и (3.40) являются линейными относительно  $\lambda$ ;

**нелинейная фильтрация**, если уравнение (3.38) или (3.40) содержит нелинейные функции сообщения  $\lambda$ .

Полагая  $\lambda(t)$  однокомпонентным случайным процессом, описываемым уравнением (3.40), получим алгоритм для задачи фильтрации. Случайный процесс  $\lambda(t)$  является диффузионным **марковским** процессом, априорная плотность вероятности  $W(t, \lambda)$  которого определяется **уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова**

$$\frac{\partial W(t, \lambda)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ K_1(t, \lambda)W(t, \lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (N_\lambda W(t, \lambda)) \right] \equiv L[W(t, \lambda)]. \quad (3.41)$$

Здесь через  $L(\cdot)$  обозначен **оператор Фоккера-Планка-Колмогорова**. Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место однозначное соответствие между описаниями процесса  $\lambda(t)$  в виде уравнения (3.40) или (3.41).

Апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  параметра  $\lambda(t)$  удовлетворяет уравнению, впервые полученному Р. Л. Стратоновичем. Для рассматриваемого однокомпонентного марковского процесса  $\lambda(t)$  это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \lambda)}{\partial t} = L\{W_{ps}(t, \lambda)\} + [F(t, \lambda) - \langle F(t, \lambda) \rangle] W_{ps}(t, \lambda), \quad (3.42)$$

где

$$F(t, \lambda) = -\frac{1}{N_0} [r(t) - s(t, \lambda)]^2 \quad (3.43)$$

есть производная по времени от логарифма функции правдоподобия [см. формулу (3.7) при  $T = t$ ];

$$\langle F(t, \lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \lambda) W_{ps}(t, \lambda) d\lambda. \quad (3.44)$$

Начальные условия для уравнения (3.43) определяются априорной плотностью вероятности  $W(0, \lambda)$  начальной координаты сообщения  $\lambda(0) = \lambda_0$ .

Апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  содержит всю доступную информацию о параметре  $\lambda(t)$ , которую можно извлечь из наблюдения  $r(t)$  на интервале  $[0, t]$  и из априорных сведений о  $\lambda(t)$ . Определив апостериорную плотность  $W_{ps}(t, \lambda)$  можно получить другие требуемые характеристики, например условное математическое ожидание  $\lambda^*(t)$ , представляющее оптимальную оценку сообщения по критерию минимума среднего квадрата ошибки или оценку, оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности.

Для реализации оптимальных алгоритмов используют различные упрощающие предположения, которые будут рассмотрены далее.

### 3.4.2. Линейная фильтрация

Частным случаем рассмотренных выше общих соотношений является линейная фильтрация сообщения  $\lambda(t)$ . Пусть наблюдаемая смесь

$$r(t) = \lambda(t) + n(t), \quad (3.45)$$

где шум имеет характеристики (3.39), а процесс  $\lambda(t)$  задан линейным уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t). \quad (3.46)$$

Здесь  $\alpha$  – постоянный коэффициент, определяющий ширину спектра сообщения  $\lambda(t)$ . Процесс  $\lambda(t)$ , заданный уравнением (3.46), может быть сформирован из белого шума  $n_\lambda(t)$ , характеристики которого известны  $\langle n_\lambda(t) \rangle = 0$ ;  $\langle n_\lambda(t_1)n_\lambda(t_2) \rangle = \frac{N_\lambda}{2} \delta(t_1 - t_2)$ , где  $\frac{N_\lambda}{2}$  – спектральная плотность шума  $n_\lambda(t)$ . В качестве формирующего фильтра можно использовать RC-фильтр нижних частот с постоянной времени  $T_{RC} = 1/\alpha$ .

При линейной фильтрации гауссовских процессов, каким является рассматриваемое сообщение  $\lambda(t)$ , апостериорная плотность вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$  представляется гауссовским законом. Параметрами такой плотности вероятности служат математическое ожидание  $\lambda^*(t)$  и дисперсия  $\sigma_\lambda^2(t)$ . Подставляя гауссовскую плотность вероятности в уравнение Р. Л. Стратоновича (3.42), можно прийти к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}; \quad (3.47)$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt} = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2(t) + \sigma_\lambda^4(t) \frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (3.48)$$

Уравнение (3.47) определяет алгоритм формирования оптимальной оценки, а уравнение (3.48) – эволюцию апостериорной дисперсии. Эти уравнения можно преобразовать с учетом соотношений (3.43) и (3.45). На основе этих соотношений функция  $F(t, \lambda^*)$  и ее производные принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F(t, \lambda^*) &= -\frac{1}{N_0} \left[ r(t) - \lambda^*(t) \right]^2; \\ \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} &= -\frac{2}{N_0} \left[ r(t) - \lambda^*(t) \right]; \\ \frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} &= -\frac{2}{N_0}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Подставив выражения (3.49) в уравнения (3.47) и (3.48), получим

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2(t) \frac{2}{N_0} \left[ r(t) - \lambda^*(t) \right]; \quad (3.50)$$

$$\frac{d\sigma_{\lambda}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha\sigma_{\lambda}^2(t) + \sigma_{\lambda}^4(t)\frac{2}{N_0}. \quad (3.51)$$

Уравнения (3.50) и (3.51) описывают так называемый фильтр **Калмана** для непрерывного времени.

Рассмотрим задачу фильтрации в дискретном времени. Наблюдение и сообщение задаются скалярными разностными уравнениями:  $r_v = H_v\lambda_v + n_v$ ;  $\lambda_v = \beta_{v-1}\lambda_{v-1} + n_{\lambda v}$ , где  $n_v, n_{\lambda v}$  – гауссовские шумы с нулевыми средними значениями и дисперсиями  $D_{\lambda}$  и  $D_{\lambda v}$  соответственно;  $H_v = H(t_v)$ ,  $\beta_v = \beta(t_v)$  – заданные функции времени; интервал времени  $t_v - t_{v-1} = \Delta t$  определяется временем дискретизации процессов.

Результирующие уравнения для оценки  $\lambda_v$  и дисперсии  $\sigma_{\lambda v}^2$  определяют **дискретный фильтр Калмана**. Они носят рекуррентный характер и имеют следующий вид:

$$\lambda_v^* = \beta_{v-1}\lambda_{v-1}^* + H_v \frac{\sigma_{\lambda v}^2}{D_v} (r_v - H_v\beta_{v-1}\lambda_{v-1}^*); \quad (3.52)$$

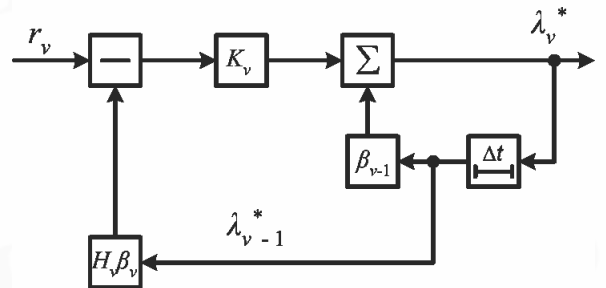
$$\frac{1}{\sigma_{\lambda v}^2} = [\beta_{v-1}^2\sigma_{\lambda v-1}^2 + D_{\lambda v}]^{-1} + \frac{H_v^2}{D_v}. \quad (3.53)$$

Схема, реализующая алгоритм (3.52, 3.53), приведена на рис. 3.12, где  $K_v = H_v(\sigma_{\lambda v}^2/D_v)$ . Заметим, что уравнение для дисперсии (3.53), так же как и (3.51), не зависит от наблюдения  $r$ , поэтому коэффициент  $K(t_v) \equiv K_v$  может быть заранее вычислен, т. е. представляет известную функцию времени. При постоянных величинах  $\beta_v, D_v, D_{\lambda v}, H_v$  и при условии существования установившегося значения дисперсии  $\sigma_{\lambda\infty}^2 = \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_{\lambda v}^2$  оценка  $\lambda_v^*$  может формироваться в соответствии с уравнением

$$\lambda_v^* = \beta\lambda_{v-1}^* + H \frac{\sigma_{\lambda\infty}^2}{D_v} (r_v - H\beta\lambda_{v-1}^*). \quad (3.54)$$

Оценка в этом случае является асимптотически оптимальной (при  $t \rightarrow \infty$ ), а фильтр, описываемый уравнением (3.54), – стационарным. Такой фильтр проще в реализации, чем нестационарный, однако в течение переходного процесса дисперсия оценки в нем больше, чем в нестационарном оптимальном фильтре.

Приведенные результаты линейной фильтрации обобщаются на многомерный случай. При этом априорные сведения о передаваемых сообщениях задаются системой стохастических дифференциальных уравнений:



**Рис. 3.12.** Дискретный фильтр Калмана



$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \alpha_{i1}(t)\lambda_1 + \alpha_{i2}(t)\lambda_2 + \dots + \alpha_{in}(t)\lambda_n + n_{\lambda i}(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.55)$$

Эти уравнения удобно записать в виде одного векторно-матричного уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{A}(t)\bar{\boldsymbol{\lambda}} + \mathbf{n}_{\lambda}(t), \quad (3.56)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  – вектор-столбец сообщения размерности  $n$ , который для удобства можно записать в виде транспонированной вектор-строки:  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ ;  $\mathbf{A}(t)$  –  $n \times n$  матрица коэффициентов системы (3.55);  $\mathbf{n}_{\lambda} = [n_{\lambda 1}, \dots, n_{\lambda n}]^T$  – вектор-столбец формирующих белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и матричной корреляционной функцией  $\langle \mathbf{n}_{\lambda}(t)\mathbf{n}_{\lambda}^T(t+\tau) \rangle = \mathbf{N}_{\lambda}(t)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{N}_{\lambda}(t)$  – симметрическая матрица деленных пополам спектральных плотностей. Наблюдаемое колебание записывается в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{n}(t),$$

где  $\mathbf{r}(t)$  – вектор-столбец наблюдений размерности  $m$  ( $m$  – число каналов наблюдения);  $\mathbf{H}(t)$  – матрица наблюдений размерности  $m \times n$ ;  $\mathbf{n}(t)$  – вектор-столбец аддитивных белых шумов размерности  $m$  с характеристиками  $\langle \mathbf{n}(t) \rangle = 0$ ;  $\langle \mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau) \rangle = \mathbf{N}_0(t)\delta(\tau)$ ;  $\mathbf{N}_0(t)$  – симметрическая  $m \times m$  матрица спектральных плотностей, деленных пополам.

Уравнения оптимальной линейной фильтрации имеют вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^*(t)}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}^*); \quad (3.57)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T - \mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R} + \mathbf{N}_{\lambda}, \quad (3.58)$$

где  $\mathbf{R}$  – корреляционная матрица ошибок фильтрации.

Пусть, например,  $\lambda$  представляет случайную, но постоянную скалярную величину, заданную уравнением  $d\lambda/dt = 0$ . Это частный случай уравнения (3.56) при  $\mathbf{A} \equiv 0$  и  $n_{\lambda} = 0$ .

Имеются два канала с независимыми белыми шумами:  $r_1 = \lambda + n_1$ ;  $r_2 = \lambda + n_2$ . В данном случае справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} N_{01}/2 & 0 \\ 0 & N_{02}/2 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

Матрица дисперсий одномерна:  $\mathbf{R} = R \equiv \sigma_{\lambda}^2$ . На основании соотношений (3.59) запишем матрицу

$$\mathbf{R}\mathbf{H}^T\mathbf{N}_0^{-1} = R \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ N_{01} & N_{02} \end{bmatrix}.$$

Уравнение оптимальной фильтрации (3.57) примет вид

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = \sigma_\lambda^2 \left[ \frac{2}{N_{01}}(r_1 - \lambda^*) + \frac{2}{N_{02}}(r_2 - \lambda^*) \right]. \quad (3.60)$$

Схема, соответствующая уравнению (3.60), приведена на рис. 3.13, где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования. Усложнение схемы по сравнению с одномерным случаем (ему соответствует обведенная штриховой линией схемы) повышает точность фильтрации. В соответствии с уравнением (3.58)

$$\frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} = -\left( \frac{2}{N_{01}} + \frac{2}{N_{02}} \right) \sigma_\lambda^2.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $\sigma_\lambda^2(0) = \sigma_{\lambda 0}^2$  можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} = \frac{\sigma_{\lambda 0}^2}{1 + \sigma_{\lambda 0}^2 (2/N_{01} + 2/N_{02})t}. \quad (3.61)$$

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $\sigma_\lambda^2 \rightarrow 0$ . По сравнению с одномерным случаем, соответствующим одноканальной обработке, в данном примере слагаемое в знаменателе дроби (3.61) содержит больший по величине коэффициент, поэтому текущие значения  $\sigma_\lambda^2(t)$  меньше.

Важным вопросом при решении задач фильтрации является определение **чувствительности характеристик** полученного фильтра к отклонению его параметров от номинальных значений, определяемых решением задачи синтеза. Требуется выяснить влияние отклонений параметров фильтра на точность фильтрации. Рассмотрим этот вопрос на примере линейной фильтрации процесса, заданного уравнением (3.46).

Уравнение для оценки (3.50) перепишем в виде

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -\alpha\lambda^* + k[r(t) - \lambda^*], \quad (3.62)$$

где  $k = 2\sigma_\lambda^2/N_0$  – коэффициент, постоянный в стационарном режиме. Вычтем априорное уравнение (3.46) из уравнения (3.62) и, обозначив разность  $\lambda^* - \lambda = \varepsilon$ , найдем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\alpha\varepsilon - n_\lambda + k(n - \varepsilon) = -(\alpha + k)\varepsilon + (kn - n_\lambda).$$

Отсюда определим дисперсию оценки:

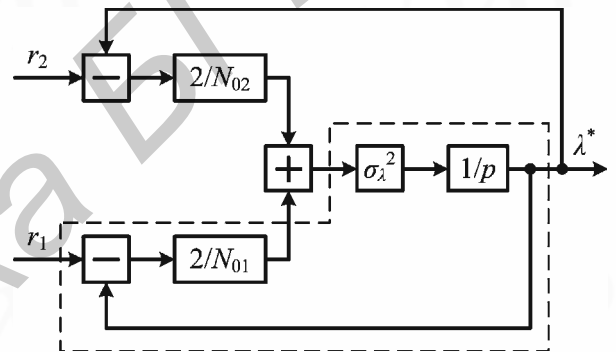


Рис. 3.13. Линейный фильтр

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{k^2 N_0 + N_{\lambda}}{4(n+k)}. \quad (3.63)$$

На основании формулы (3.63) можно указать допустимые пределы изменения коэффициента  $k$ . Характер зависимости  $\sigma_{\varepsilon}^2$  от  $k$  показан на рис. 3.14. Минимальная дисперсия соответствует значению  $k_0 = \alpha \left( \sqrt{1 + N_0 / \alpha^2 N_{\lambda}} - 1 \right)$ . При

этом относительная ошибка фильтрации  $\delta^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 / D_{\lambda} = (1/(2q))(\sqrt{1+4q}-1)$ , где  $D_{\lambda} = N_{\lambda}/(4\alpha)$  – дисперсия сообщения  $\lambda(t)$ ;  $q = D_{\lambda}/(\alpha N_0)$  – отношение сигнал/шум.

Фильтры Калмана применяются при вторичной обработке радиолокационной и радионавигационной информации, в устройствах систем радиоуправления.

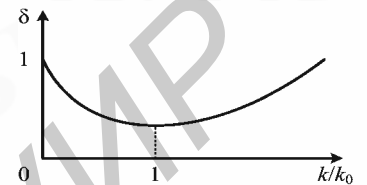


Рис. 3.14. Чувствительность характеристик фильтрации

### 3.5. НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

#### 3.5.1. Общие соотношения

Задача нелинейной фильтрации параметров (сообщения) возникает, если уравнение, описывающее сообщение, нелинейно или уравнения наблюдения содержат нелинейные функции. На практике радиосигналы являются нелинейными функциями сообщений  $\lambda(t)$ , содержащихся, например, в фазе, задержке или частоте сигнала  $s(t, \lambda)$ .

Рассмотрим наблюдение  $r(t)$ , заданное соотношением (3.38), где сообщение  $\lambda(t)$  считаем случайным процессом, определяемым уравнением (3.40). Уравнения нелинейной фильтрации Р. Л. Стратоновича, характеризующие эволюцию апостериорной плотности вероятности  $W_{ps}(t, \lambda)$ , определяются соотношениями (3.42)-(3.44). Интегро-дифференциальное уравнение (3.42) в частных производных не имеет в общем случае точного решения (за исключением линейной фильтрации). Однако существуют пути, позволяющие найти приближенные решения его. Наибольшее распространение получил способ решения, основанный на аппроксимации апостериорной плотности  $W_{ps}(t, \lambda)$  гауссовской плотностью вероятности, – **гауссовское приближение**. Это приближение тем точнее, чем больше отношение сигнал/шум и чем меньше ошибки фильтрации. При этом алгоритмы, основанные на гауссовской аппроксимации, являются оптимальными.

Уравнения гауссовского приближения имеют вид, представленный соотношениями (3.47), (3.48). В отличие от уравнений линейной фильтрации (3.50), (3.51) в уравнение дисперсии (3.48) входит текущая реализация  $r(t)$  и текущая оценка  $\lambda^*(t)$  (см. выражение для  $\partial^2 F / \partial \lambda^{*2}$ ), поэтому уравнение

(3.48) необходимо решать совместно с уравнением (3.47) в текущем времени, что усложняет построение нелинейного фильтра.

Для упрощения нелинейного фильтра прибегают к осреднению зависящих от времени членов в уравнении (3.48), в частности к замене

$$\frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^{*2}} \cong -\frac{2}{N_0} \left[ \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \right]^2. \quad (3.64)$$

После осреднения можно определить стационарное значение дисперсии, полагая  $d\sigma_\lambda^2/dt = 0$ . При этом с учетом соотношения (3.64) дифференциальное уравнение (3.48) переходами алгебраическое:

$$0 = \frac{N_\lambda}{2} - 2\alpha\sigma_\lambda^2 - \alpha_\lambda^2 \left[ \frac{2}{N_0} \left( \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} \right)^2 \right]. \quad (3.65)$$

Считая справедливым принятые приближения, уравнение (3.47) для оценок фильтруемого параметра можно записать в виде

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_\lambda^2 \frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}, \quad (3.66)$$

где производная  $\partial F(t, \lambda^*)/\partial \lambda^*$  определяется соотношением

$$\frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \frac{2}{N_0} \left[ r(t) - s(t, \lambda^*) \right] \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}. \quad (3.67)$$

Для неэнергетического параметра  $\lambda$  выражение (3.67) можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{\partial F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \frac{2}{N_0} r(t) \frac{\partial s(t, \lambda^*)}{\partial \lambda^*}. \quad (3.68)$$

Таким образом, приведенные уравнения позволяют осуществить структурный синтез устройств нелинейной фильтрации и определить стационарные значения для дисперсий ошибок фильтрации. Получаемые в результате синтеза устройства относятся к квазиоптимальным, поскольку в переходном режиме они обладают большими ошибками, чем оптимальные устройства.

Уравнения квазиоптимальной нелинейной фильтрации обобщить на многомерный случай, представляя сообщение в виде векторно-матричного уравнения (3.56) и имея в виду, что  $\mathbf{A}(t, \boldsymbol{\lambda})$  – вектор-функция, зависящая от  $\boldsymbol{\lambda}$  и  $\mathbf{N}_\lambda$ . Результирующие уравнения гауссовского приближения имеют вид:

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = \alpha_i(t, \boldsymbol{\lambda}^*) + \sum_{j=1}^n R_{ij}(t) \frac{\partial F(t, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j}; \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_{ij}}{dt} = & \frac{N_{\lambda ij}(t, \lambda^*)}{2} + \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial \alpha_j(t, \lambda^*)}{\partial \lambda_\mu} R_{i\mu}(t) + \\ & + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \alpha_i(t, \lambda^*)}{\partial \lambda_\nu} R_{\nu j}(t) + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n R_{i\mu}(t) R_{\nu j}(t) \frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

В стационарном (установившемся) режиме  $dR_{ij}/dt = 0$  и уравнения (3.70) для элементов корреляционной матрицы ошибок фильтрации после осреднения функций  $\frac{\partial^2 F(t, \lambda^*)}{\partial \lambda_\mu \partial \lambda_\nu}$  переходят в систему алгебраических уравнений.

Ниже рассматриваются примеры применения алгоритмов нелинейной фильтрации.

### 3.5.2. Фильтрация фазы узкополосного радиосигнала

В радиосвязи возникает задача синхронизации генераторов колебаний. Представим, что на передающей стороне вырабатывается колебание

$$s(t, \varphi) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi],$$

где фаза  $\varphi \equiv \varphi(t)$  представляет **винеровский процесс**, заданный уравнением

$$d\varphi(t)/dt = n_\varphi(t), \quad (3.71)$$

которое представляет частный случай уравнения (3.46) при  $\alpha = 0$ . Гауссовский белый шум  $n_\varphi(t)$ , из которого формируется процесс  $\varphi(t)$ , имеет характеристики:  $\langle n_\varphi(t) \rangle = 0$ ;  $\langle n_\varphi(t_1) n_\varphi(t_2) \rangle = \frac{N_\varphi}{2} \delta(t_1 - t_2)$ .

На приемной стороне колебание имеет вид

$$r(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi] + n(t),$$

где  $n(t)$  – аддитивная помеха, представляющая белый шум с характеристиками (3.39).

В соответствии с формулой (3.66), имея в виду  $\alpha = 0$ , а также соотношения (3.68) и (3.71), запишем уравнение для оценки фазы  $\varphi^*(t)$ :

$$\frac{d\varphi^*(t)}{dt} = -\frac{2}{N_0} \sigma_\varphi^2 r(t) a_0 \sin[\omega_0 t + \varphi^*]. \quad (3.72)$$

Согласно уравнению (3.72), принимая  $K = -(2/N_0) \sigma_\varphi^2 a_0$ , где  $\sigma_\varphi^2$  – стационарное значение дисперсии ошибки оценивания фазы, можно построить структурную схему фильтрации. На рис. 3.15 представлена схема фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), реализующая алгоритм (3.72). Перемножитель в

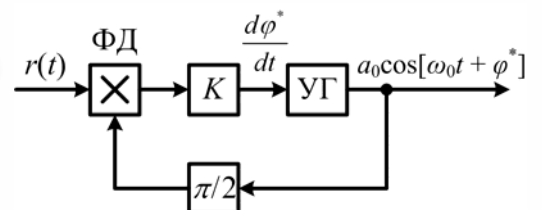


Рис. 3.15. Фильтр фазы узкополосного колебания

схеме выполняет роль фазового дискриминатора (ФД), который осуществляет подстройку управляемого генератора (УГ).

Определим дисперсию  $\sigma_\varphi^2$ , полагая в уравнении (3.65)  $\alpha = 0$  и имея в виду равенство  $\overline{\left(\partial s(t, \varphi^*) / \partial \varphi^*\right)^2} = \overline{a_0^2 \sin^2[\omega_0 t + \varphi^*]} \cong a_0^2 / 2$ , где черта сверху означает операцию временного усреднения и учитывая, что осциллирующий член  $\cos 2\omega_0 t$  при интегрировании дает нуль. В результате получим:

$$\sigma_\varphi^2 = \sqrt{\frac{N_\varphi N_0}{2a_0^2}}. \quad (3.73)$$

Соотношение (3.73) для стационарной дисперсии можно преобразовать. Для этого введем дисперсию набега фазы сигнала за время  $T$ , т. е. определим априорную дисперсию фазы:  $D_\varphi = N_\varphi T / 2$ . Тогда, обозначив отношение сигнал/шум  $q = 2a_0^2 T / N_0$ , получим  $\sigma_\varphi^2 = \sqrt{2D_\varphi / q}$ .

По уравнению (3.72) возможно другое построение схемы фазовой автоподстройки, показанное на рис. 3.16, где используется управляемый фазовращатель, изменяющий фазу сигнала генератора (ГС) в соответствии с оценкой  $\varphi^*$ . Управляющее напряжение вырабатывается на выходе интегратора.

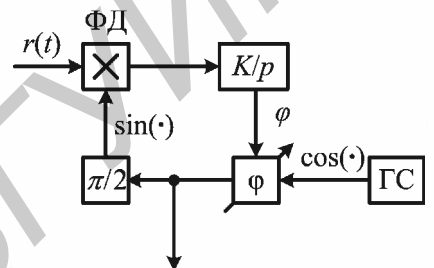


Рис. 3.16. Схема ФАП с управляемым фазовращателем

### 3.5.3. Фильтрация задержки псевдослучайного сигнала

Рассмотрим фильтрацию времени задержки псевдослучайного сигнала  $s(t, \tau) = a_0 g(t - \tau)$ .

Запаздывание  $\tau$  представляет винеровский процесс:

$$d\tau(t)/dt = n_\tau(t), \quad (3.74)$$

где формирующий белый шум  $n_\tau(t)$  имеет характеристики:  $\langle n_\tau(t) \rangle = 0$ ;

$$\langle n_\tau(t_1) n_\tau(t_2) \rangle = \frac{N_\tau}{2} \delta(t_1 - t_2).$$

Принимаемое колебание представляет аддитивную смесь сигнала и белого шума с характеристиками (3.39):  $r(t) = a_0 g(t - \tau) + n(t)$ . Задача состоит в оценке параметра  $\tau$ .

Отметим некоторые особенности сигнала. На передающей стороне сигнал  $a_0 g(t)$  может формироваться с помощью генератора псевдослучайной последовательности (ПСП). Такой генератор в частном случае строится на основе регистра сдвига с обратными связями (РСОС). Случайная задержка сигнала может быть обусловлена нестабильностью генератора тактовой частоты (ГТЧ), обеспечивающего работу РСОС. Формирователь сигнала показан на рис. 3.17, а. Формируемая ПСП представляет периодическую функцию зна-

копеременных прямоугольных импульсов. Длительность элементарного импульса  $\tau_s = 1/f_t$ , где  $f_t$  – тактовая частота колебаний ГТЧ. Период ПСП определяется величиной  $T = N\tau_s$ , причем для РСОС справедливо соотношение  $N = 2^n - 1$ , где  $n$  – число разрядов РСОС.

В пределах одного периода ПСП можно представить в виде

$$a_0 g(t) = a_0 \sum_{i=1}^N v_i \operatorname{rect} \left[ \frac{t - (i-1)\tau_s}{\tau_s} \right], \quad (3.75)$$

где  $a_0$  – амплитуда ПСП;  $v_i$  – коэффициент, принимающий значения  $\pm 1$  в соответствии с законом формирования ПСП.

Уравнение для оценки задержки  $\tau^*$  в соответствии с формулами (3.66), (3.68) и (3.74) можно записать в виде

$$\frac{\partial \tau^*(t)}{\partial t} = \frac{2\sigma_\tau^2 a_0}{N_0} r(t) \frac{\partial g(t - \tau^*)}{\partial \tau^*}. \quad (3.76)$$

Операцию дифференцирования  $\partial/\partial \tau^*$  разрывной функции, каковой является ПСП  $g(t - \tau^*)$ , с учетом реализации квазиоптимального устройства заменим операцией вычисления конечной разности, т. е. примем

$$\frac{\partial g(t - \tau^*)}{\partial \tau^*} \cong \frac{1}{\Delta \tau} \left[ g(t - \tau^* + \Delta \tau/2) - g(t - \tau^* - \Delta \tau/2) \right], \quad (3.77)$$

где величина  $\Delta \tau$  выбирается из условия обеспечения наибольшей точности оценивания и удобства реализации схемы. Учитывая выражение (3.77) и введя обозначение  $k = 2\sigma_\tau^2 / (N_0 \Delta \tau)$ , где  $\sigma_\tau^2$  – стационарное значение дисперсии ошибки фильтрации, запишем уравнение (3.76) в виде

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial t} = k a_0 r(t) \left[ g(t - \tau^* + \Delta \tau/2) - g(t - \tau^* - \Delta \tau/2) \right]. \quad (3.78)$$

В соответствии с уравнением (3.78) можно представить несколько вариантов построения устройства фильтрации. Один из вариантов схемы приведен на рис. 3.17, б. Устройство содержит схему слежения за задержкой ПСП (ССЗ), в которую включены: дискриминатор в виде перемножителей и разностного устройства; сглаживающая цепь (СЦ); генератор тактовой частоты, управляемый напряжением (ГУН). Последовательность тактовых импульсов, вырабатываемых в ГУН, обеспечивает работу РСОС. Заметим, что согласно формуле (3.78), в рассматри-

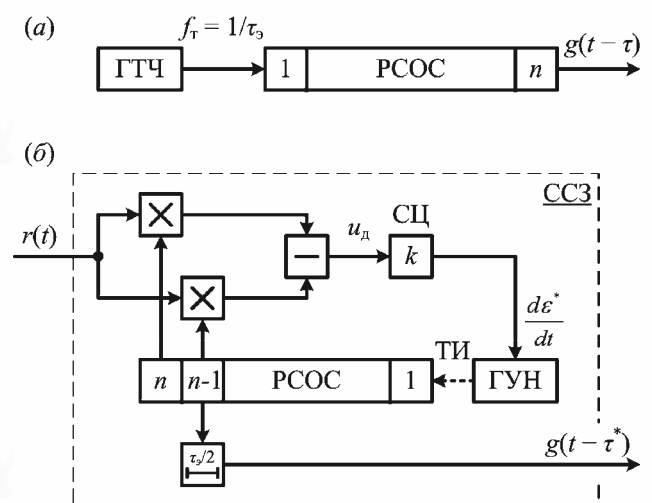


Рис. 3.17. Генератор ПСП (а); схема слежения за задержкой (б)

ваемом случае интегратор считается включенным в ГУН, а СЦ представляет усилитель с коэффициентом передачи. Дискриминатор следящего фильтра может быть реализован иначе, на основе одного перемножителя, опорным сигналом которого служит разность ПСП, определяемая правой частью выражения (3.77).

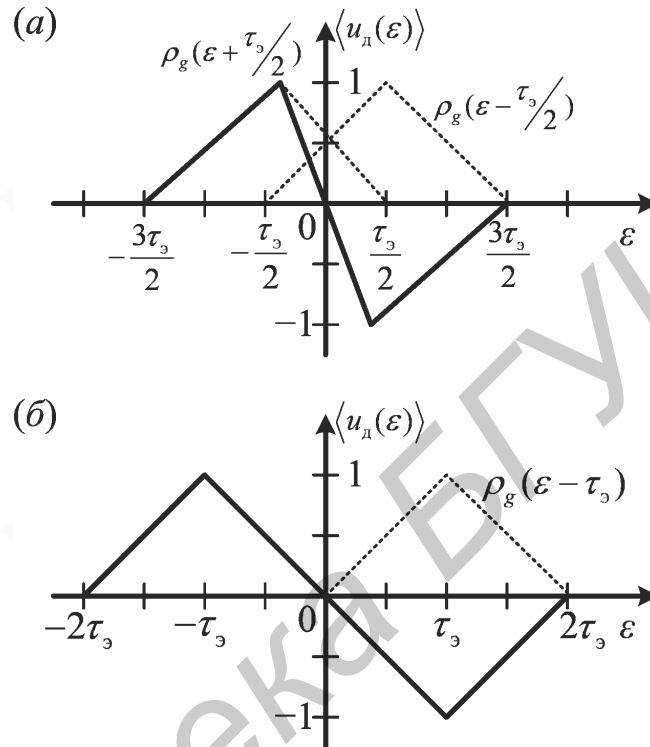


Рис. 3.18. Нормированные дискриминационные характеристики ССЗ

Для описания дискриминатора введем **дискриминационную характеристику (ДХ)**, под которой понимают зависимость среднего значения напряжения на выходе дискриминатора от рассогласования  $\varepsilon = \lambda - \lambda^*$ . В рассматриваемом примере  $\varepsilon = \tau - \tau^*$  и ДХ представляет функцию  $\overline{u_d(t, \varepsilon)}$ . С учетом выражения (3.77) запишем:

$$\begin{aligned} \overline{u_d(t, \varepsilon)} &= \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) \left[ g(t-\tau^* + \Delta\tau/2) - g(t-\tau^* - \Delta\tau/2) \right] dt = \\ &= \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) g(t-\tau^* + \Delta\tau/2) dt - \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^T g(t-\tau) g(t-\tau^* - \Delta\tau/2) dt = \\ &= \frac{a_0^2 T}{N_0} \left[ \rho_g(\varepsilon + \Delta\tau/2) - \rho_g(\varepsilon - \Delta\tau/2) \right]. \end{aligned}$$

Нормированные ДХ, построенные на основе полученного выражения, приведены на рис. 3.18 для двух значений  $\Delta\tau$ :  $\Delta\tau = \tau_3$  (а) и  $\Delta\tau = \tau_3$  (б). Здесь



$\rho_g(\varepsilon)$  – автокорреляционная функция ПСП, определяемая при  $N \gg 1$  выражением

$$\rho_g(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - |\varepsilon|/\tau_3, & \text{если } |\varepsilon| < \tau_3; \\ 1/N \cong 0, & \text{если } |\varepsilon| > \tau_3. \end{cases} \quad (3.79)$$

Дисперсия  $\sigma_\lambda^2$  определяется из уравнения (3.66) при  $\alpha = 0$  и с учетом вычисления конечных разностей (3.77) принимает вид

$$\sigma_\tau^2 = \sqrt{\frac{N_\tau N_0 (\Delta\tau)^2}{(4a_0^2)^2}}$$

или

$$\sigma_\tau^2 = \sqrt{\frac{D_\tau (\Delta\tau)^2}{q}}, \quad (3.80)$$

где  $D_\tau = N_\tau T/2$  – дисперсия набега задержки за время  $T$  (априорная дисперсия задержки);  $q$  – отношение сигнал/шум.

Как видно из выражения (3.80), точность фильтрации задержки зависит от выбора величины  $\Delta\tau$ . Уменьшение  $\Delta\tau$  приводит, согласно выражению (3.80), к уменьшению дисперсии. Однако при сокращении разность сдвинутых друг относительно друга ПСП в формуле (3.77) превращается в последовательность знакопеременных импульсов короткой длительности, которые выполняют роль стробирующих импульсов, обеспечивая подавление шума. Вместе с тем при уменьшении длительности стробирующих импульсов возрастает вероятность срыва слежения в ССЗ. Можно показать, что наилучшие характеристики ССЗ достигаются при  $\Delta\tau = \tau_3$ .

### 3.5.4. Некогерентная фильтрация

Во многих задачах сигнал, помимо измеряемых параметров, содержит случайные параметры, которые являются для потребителя несущественными (например, начальная фаза или амплитуда сигнала). В связи с этим возникает необходимость фильтрации параметра сигнала в условиях, когда наблюдаемая смесь представляется в виде  $r(t) = s(t, \lambda, \beta) + n(t)$ , где  $\lambda \equiv \lambda(t)$  – фильтруемый параметр, представляющий случайный процесс. Полагаем, что процесс  $\lambda(t)$  задан уравнением (3.46). Несущественный параметр не подвергается измерению и представляет случайную величину с заданной априорной плотностью вероятности  $W(\beta)$ .

При решении задачи фильтрации параметр  $\beta$  может быть включен в число оцениваемых, в результате чего увеличивается размерность вектора фильтруемых параметров. Для апостериорной плотности вероятности расширенного вектора параметров можно записать уравнение Р. Л. Стратоновича. Модифицированный вид этого уравнения следующий:

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \lambda, \beta)}{\partial t} = L[W_{ps}(t, \lambda, \beta)] + (V - \gamma)W_{ps}(t, \lambda, \beta). \quad (3.81)$$

Здесь при условии  $\tau_{\text{кор}} \gg \Delta T$ , где  $\tau_{\text{кор}}$  – время корреляции процесса  $\lambda(t)$ ;  $\Delta T$  – заданный интервал; функция  $V \equiv V(t, \lambda, \beta)$  определяется функцией правдоподобия:

$$V = \frac{1}{\Delta T} \left\{ \exp \left[ \int_{t-\Delta T}^t F(t, \lambda, \beta) dt \right] - 1 \right\}; \quad (3.82)$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, \lambda, \beta) W_{\text{ps}}(t, \lambda, \beta) d\lambda. \quad (3.83)$$

Учитывая независимость параметров  $\beta$  и  $\lambda$ , можно принять  $W_{\text{ps}}(t, \lambda, \beta) = W(\beta)W_{\text{ps}}(t, \lambda)$ . Произведя осреднение левой и правой частей уравнения (3.81) по всем возможным значениям  $\beta$ , получим

$$\frac{\partial W_{\text{ps}}(t, \lambda)}{\partial t} = L[W_{\text{ps}}(t, \lambda)] + (\langle V \rangle_{\beta} - \gamma) W_{\text{ps}}(t, \lambda),$$

где

$$\langle V \rangle_{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, \lambda, \beta) W(\beta) d\beta. \quad (3.84)$$

При дальнейшем рассмотрении можно аппроксимировать апостериорную плотность вероятности  $W_{\text{ps}}(t, \lambda)$  гауссовской плотностью. В результате уравнения гауссовского приближения можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -\alpha\lambda^*(t) + \sigma_{\lambda}^2(t) \frac{\partial \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial \lambda^*}; \quad (3.85)$$

$$\frac{d\sigma_{\lambda}^2(t)}{dt} = \frac{N_{\lambda}}{2} - 2\alpha\sigma_{\lambda}^2(t) + \sigma_{\lambda}^4(t) \frac{\partial^2 \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial \lambda^{*2}}. \quad (3.86)$$

При построении структурных схем фильтрации уравнение (3.86) можно исключить, считая дисперсию  $\sigma_{\lambda}^2$  в установившемся режиме постоянной величиной, которая вычисляется из алгебраического уравнения, соответствующего (3.86)  $d\sigma_{\lambda}^2/dt = 0$ .

Рассмотрим пример фильтрации частоты сигнала, имеющего случайную начальную фазу. Принимаемое колебание имеет вид

$$r(t) = a_0 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi] + n(t). \quad (3.87).$$

Сигнал, входящий в смесь (3.87), зависит от изменяющейся частоты  $\Omega$  и случайной фазы  $\varphi$ , равномерно распределенной на интервале  $[\pi, \pi]$ . Представление сигнала в виде (3.87) справедливо при относительно малой скорости измерения частоты  $\Omega$ , т. е. при  $(d\Omega/dt) \rightarrow 0$  и  $t < \Delta T$ . В качестве модели  $\Omega(t)$  примем винеровский процесс

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = n_{\Omega}(t), \quad (3.88)$$

$n_{\Omega}(t)$  – формирующий белый шум со спектральной плотностью  $N_{\Omega}/2$ . Амплитуда  $a_0$  и частота  $\omega_0$  сигнала считаются известными. Аддитивный белый шум  $n(t)$  имеет характеристики, определяемые (3.39).

Учитывая выражение для сигнала, соотношения (3.82) и (3.84), а также то, что параметр  $\Omega$  неэнергетический, после ряда преобразований, аналогичных описанным в п. 2.3.3, получаем

$$\langle V \rangle_{\beta}^* = \frac{1}{\Delta T} \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^*)}{N_0} \right) - 1 \right], \quad (3.89)$$

$$Z(\Omega^*) = \frac{a_0}{2} \left| \int_{t-\Delta T}^t \bar{R}(t) \exp[-j(\omega_0 + \Omega^*)t] dt \right|, \quad (3.90)$$

где  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Функция  $Z(\Omega^*)$ , определяемая соотношением (3.90), может быть получена с помощью устройства, состоящего из согласованного фильтра и детектора огибающей. Согласованный фильтр представляет узкополосный фильтр, настроенный на частоту  $(\omega_0 + \Omega^*)$  и имеющий полосу  $\Delta f \approx 1/(\Delta T)$ .

Для упрощения реализации фильтра производную  $\partial \langle V \rangle_{\beta}^* / \partial \Omega^*$  удобно представить конечной разностью:

$$\frac{\partial \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial \Omega^*} \cong \frac{1}{\Delta \omega \Delta T} \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* + \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) - I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* - \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) \right].$$

На основании этого выражения и общего уравнения (3.85), учитывая априорное уравнение (3.88), получим следующий алгоритм формирования оценки сдвига частоты некогерентного сигнала:

$$\frac{d\Omega^*(t)}{dt} = k \left[ I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* + \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) - I_0 \left( \frac{2Z(\Omega^* - \Delta \omega / 2)}{N_0} \right) \right], \quad (3.91)$$

где  $k = \sigma_{\Omega}^2 / (\Delta \omega \Delta T)$ .

Уравнению (3.91) соответствует схема измерения частоты, представляющая следящее устройство частотной автоподстройки (ЧАП) (рис. 3.19). Частотный дискриминатор (ЧД) выполняет функцию вычисления конечной разности продетектированных колебаний. Подстройка согласованных узкополосных фильтров (УФ) осуществляется с помощью управляющего элемента (УЭ) в соответствии со значениями оценки  $\Omega^*$ . Нелинейные характеристики детекторов огибающей определяются функциями Бесселя.

Дисперсия ошибок фильтрации  $\sigma_{\Omega}^2$  вычисляется по формуле

$$\sigma_{\Omega}^2 = \sqrt{\frac{N_{\Omega}}{2\left(\partial^2 \langle V \rangle_{\beta}^* / \partial \Omega^{*2}\right)}}, \quad (3.92)$$

которая следует из уравнения (3.86) при  $\alpha = 0$  и  $d\sigma_{\Omega}^2 / dt = 0$ . С учетом вычисления конечной разности вместо производной  $\partial^2 Z / \partial \Omega^{*2}$ , образующейся в соотношении (3.92), получим приближенное выражение  $\sigma_{\Omega}^2 \cong \sqrt{N_{\Omega} \Delta T (\Delta \omega)^2 / (2q^2)}$ ; где  $q = 2a_0^2 \Delta T / N_0$  – отношение сигнал/шум;  $\Delta \omega$  – расстройка узкополосных фильтров в частотном дискриминаторе, которая выбирается из условия обеспечения наибольшей крутизны дискриминационной характеристики и примерно равна  $\Delta \omega \cong 2\pi / (\Delta T)$ .

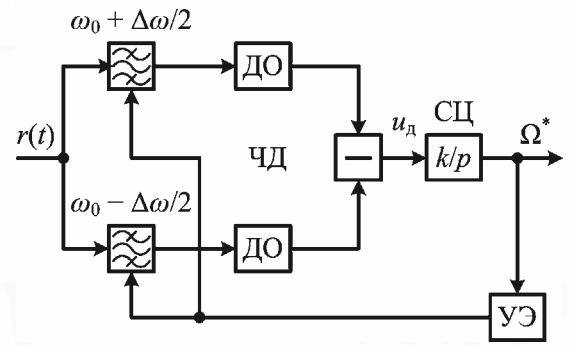


Рис. 3.19. Схема частотной автоподстройки

## 3.6. АДАПТИВНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ

### 3.6.1. Особенность задач адаптивного приема сигналов

В реальных ситуациях статистические характеристики сигналов известны не полностью или вовсе неизвестны. В связи с этим важны исследования чувствительности алгоритмов фильтрации к отклонениям параметров сигнала и помех. Задача подобного рода рассматривалась выше, в п. 3.4.2. При большом диапазоне неопределенности значений параметров могут быть значительные потери качества фильтрации из-за несоответствия расчетных характеристик фильтра действительным условиям приема сигнала. В связи с этим важной для практики задачей является синтез **адаптивных (приспосабливающихся) устройств**, способных функционировать в условиях неопределенности.

При решении задач приема сигналов в условиях параметрической неопределенности можно использовать байесовский подход. Неизвестные неинформационные параметры  $\beta$  сигнала  $s(t, \lambda, \beta)$  ухудшают качество оценки информационных параметров  $\lambda$ , особенно при относительно малом времени наблюдения. По мере наблюдения формируемые оценки неинформационных параметров стремятся к истинным значениям  $\beta$ , что приводит к повышению качества оценивания информационных параметров. В пределе качество оценки этих параметров стремится к качеству, получаемому для сигнала с полностью известными статистическими характеристиками. При байесовском подходе необходимо знать априорную вероятность совокупности случайных параметров. Для неинформационных параметров  $\beta$  бывает трудно установить априорное распределение. Однако в практических случаях по мере

наблюдения априорная плотность вероятности  $W(\beta)$  мало влияет на апостериорную  $W_{ps}(\beta)$ .

В связи с малой чувствительностью к априорному распределению в адаптивных задачах можно использовать метод максимального правдоподобия. Действительно, представим апостериорную плотность вероятности  $W_{ps}(\lambda) = W(\lambda | r)$  следующим образом:

$$W(\lambda | r) = \int_{\beta} W(\lambda, \beta | r) d\beta = \int_{\beta} W(\lambda | r, \beta) W(\beta | r) d\beta. \quad (3.93)$$

Если плотность вероятности  $W(\beta | r)$  узка, то ее можно приближенно заменить  $\delta$ -функцией:  $W(\beta | r) \cong \delta(\beta - \beta^*)$ , тогда из выражения (3.93) следует  $W(\lambda | r) \cong W(\lambda | r, \beta^*)$ , т. е. апостериорная плотность вероятности информационного параметра в адаптивной задаче с неизвестным  $\beta$  определяется апостериорной плотностью  $W(\lambda | r, \beta^*)$  в задаче с известным параметром  $\beta$ , в качестве которого берется оценочное значение  $\beta^*$ . Оценку  $\beta^*$  можно вычислить по критерию максимума правдоподобия, т. е. из условия

$$\beta^* = \max_{\beta}^{-1} [W(r | \beta)].$$

Метод максимального правдоподобия не всегда приводит к удовлетворительным результатам, особенно если плотность вероятности  $W(\beta | r)$  полимодальна. Вместе с тем, этот метод находит применение во многих задачах РЭИС.

Наряду с описанным выше методом в адаптивных задачах применяют методы самообучения и предварительного обучения, гауссовского приближения и др. Рассмотрим более подробно метод разделения, позволяющий приближенно решать многие задачи приема сигналов в условиях существенной априорной неопределенности.

### 3.6.2. Метод разделения

Этот метод позволяет получить технически реализуемый алгоритм адаптивного приема. Совместная апостериорная плотность вероятности информационного параметра  $\lambda$  и неинформационного параметра  $\beta$  представляется в виде

$$W_{ps}(t, \lambda, \beta) = W_{ps}(t, \beta) W_{ps}(t, \lambda | \beta), \quad (3.94)$$

где  $\beta$  – случайная величина, имеющая апостериорную плотность вероятности  $W_{ps}(t, \beta)$ . Считаем, что сигнал  $s(t, \lambda)$  не зависит от параметра  $\beta$ . Подставив формулу (3.94) в уравнение Р. Л. Стратоновича для  $W_{ps}(t, \lambda, \beta)$  и, проинтегрировав обе части по  $\lambda$ , получим

$$\frac{\partial W_{ps}(t, \beta)}{\partial t} = [F_{\beta}(t) - \langle F_{\beta}(t) \rangle] W_{ps}(t, \beta), \quad (3.95)$$

где

$$F_{\beta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \lambda) W_{ps}(t, \lambda | \beta) d\lambda;$$

$$\langle F_{\beta}(t) \rangle = \int_{\beta} F_{\beta}(t) W_{ps}(t, \beta) d\beta.$$

Здесь функция  $F(t, \lambda)$  не зависит от  $\beta$ , поскольку сигнал не зависит от этого параметра.

Уравнение (3.95) имеет решение:

$$W_{ps}(t, \beta) = \frac{\exp \left[ \int_0^t F_{\beta}(t) dt \right] W(\beta)}{\int_{\beta} \exp \left[ \int_0^t F_{\beta}(t) dt \right] W(\beta) d\beta}, \quad (3.96)$$

где  $W(\beta)$  – априорная плотность вероятности неинформационного параметра.

Подставляя выражения (3.94) и (3.95) в уравнение Р. Л. Стратоновича, получаем

$$W_{ps}(t, \lambda | \beta) = L[W_{ps}(t, \lambda | \beta)] + [F(t, \lambda) - F_{\beta}(t)] W_{ps}(t, \lambda | \beta). \quad (3.97)$$

Уравнения (3.96) и (3.97) можно положить в основу построения приближенных алгоритмов адаптивной фильтрации. Область возможных значений параметра  $\beta$  разбивается на элементарные интервалы, что позволяет перейти к рассмотрению дискретного множества значений  $\beta_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ . В этом случае требуется вычислить апостериорные плотности  $W_{ps}(t, \beta)$  и  $W_{ps}(t, \lambda | \beta)$  в конечном числе точек  $\beta_m$ .

Апостериорная плотность вероятности (3.96) переходит в следующее соотношение для апостериорной вероятности значений  $\beta_m$ :

$$P(t, \beta_m) = \frac{\exp \left[ \int_0^t F_{\beta_m}(t) dt \right] p(\beta_m)}{\sum_{i=1}^M \exp \left[ \int_0^t F_{\beta_i}(t) dt \right] p(\beta_i)}.$$

Чтобы определить оценку параметра  $\lambda^*$ , применим гауссовскую аппроксимацию условной апостериорной плотности вероятности  $W_{ps}(t, \lambda | \beta_m)$  при  $\beta_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ . В результате найдем условные оценки информационного параметра  $\lambda^*(\beta_m)$  и условные дисперсии  $\sigma_{\lambda}^2(\beta_m)$ . Безусловная оценка  $\lambda^*$  формируется на основе критерия минимума среднего риска и при квадратичной функции потерь определяется выражением

$$\lambda^* = \sum_{m=1}^M \lambda^*(\beta_m) P(t, \beta_m). \quad (3.98)$$

Адаптивное устройство фильтрации, построенное на основе полученных соотношений (рис. 3.20), состоит из  $M$  каналов, фильтр  $\Phi_m$  каждого из которых формирует условную оценку  $\lambda^*(\beta_m)$ . Идентификатор  $I_m$  вырабатывает значение апостериорной вероятности  $P(t, \beta_m)$ . Эта вероятность соответствует весу оценки  $\lambda^*(\beta_m)$ . Весовое суммирование осуществляется согласно формуле (3.93). В результате определяется безусловная оценка информационного параметра.

Основное преимущество метода разделения состоит в его универсальности. Однако многоканальная реализация требует значительных аппаратных затрат, что не всегда приемлемо.

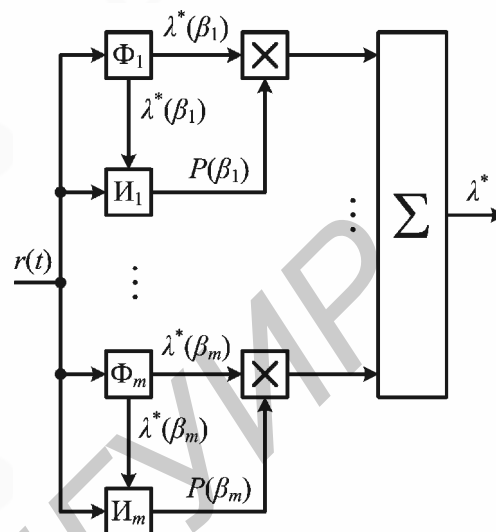


Рис. 3.20. Адаптивный приемник

### 3.7. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

#### 3.7.1. Пространственно-временные характеристики сигналов

Одной из основных задач систем радиолокации и радионавигации является определение направления прихода радиоволн, т. е. угловых координат источника излучений или переизлучений (цели). Определение угловых координат связано с рядом особенностей, которые не учитывались в ранее рассмотренных задачах приема и обработки радиосигналов. Основная особенность состоит в том, что радиосигнал в задачах оценки угла прихода представляет сложную зависимость времени и положения точки приема. Таких точек должно быть много, т. е. должна быть образована некоторая пространственная область приема, или **пространственная апертура**. Измерение координат в указанных условиях требует оценки параметров пространственно-временных сигналов, оценки общего для них па-

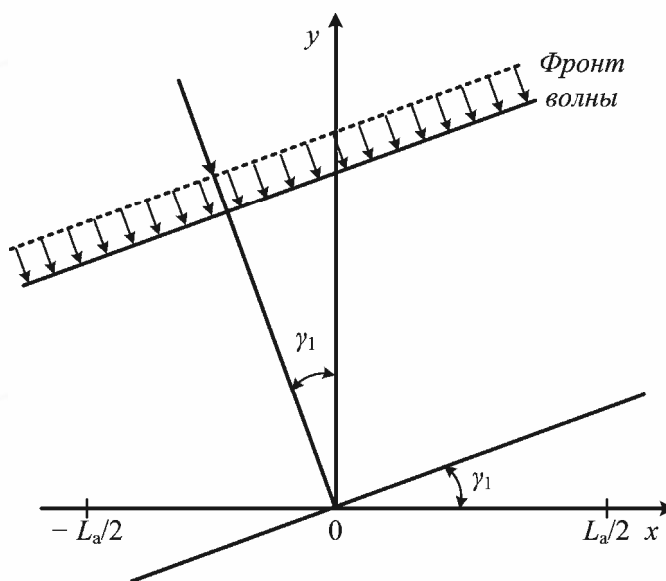


Рис. 3.21. Геометрическая интерпретация приема антенной с линейным раскрывом

раметра – угла прихода радиоволн.

Рассмотрим простейший случай одной угловой координаты. Антенну представим в виде линейного раскрыва длиной  $L_a$  (рис. 3.21). Пусть на эту антенну под углом  $\gamma_1$  приходит плоская волна. Сигнал, попадающий на апертуру, запишем в виде

$$s(t, x, \gamma_1) = s(t - t_3(x, \gamma_1)), \quad t \in [0, T], \quad (3.99)$$

где  $s(t) = \bar{S}_0(t) \exp[j\omega_0 t]$ . Здесь  $\bar{S}_0(t)$  – комплексная огибающая сигнала;  $t_3 \equiv t_3(x, \gamma_1)$  – задержка сигнала во времени относительно центра раскрыва ( $x = 0$ ) в точке приема  $x$ . Эта задержка является функцией координаты точки  $x$  и угла прихода  $\gamma_1$ . В соответствии с рис. 3.21 можно записать:

$$t_3(x, \gamma_1) = x \sin(\gamma_1) / c. \quad (3.100)$$

Введем обобщенную угловую координату

$$u = \sin \gamma_1 / c, \quad (3.101)$$

где  $c$  – скорость распространения радиоволн. Тогда сигнал выражается в виде

$$s(t, x) = s(t - ux). \quad (3.102)$$

Таким образом, сигнал представляет функцию времени и пространственной координаты.

Сигналы, возбуждаемые в каждой точке апертуры, суммируются и поступают в приемное устройство. Вклад различных элементов раскрыва различен и зависит от **весовой функции антенны**  $A(x)$ . Часто функцию  $A(x)$  называют **функцией возбуждения** или **функцией распределения поля в раскрыве**. Принятые в каждой точке раскрыва сигналы с учетом функции  $A(x)$  образуют в результате

$$s_{\Pi}(t, x) = A(x)s(t - ux). \quad (3.103)$$

Для такого сигнала по аналогии с автокорреляционной функцией можно ввести пространственно-временную автокорреляционную функцию

$$\psi(v) = \int_0^T dt \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 \bar{S}_0(t - ux) \hat{\bar{S}}_0(t - ux - vx) \exp[j\omega_0 vx] dx. \quad (3.104)$$

Функцию  $\psi(v)$  называют **функцией неопределенности по угловой координате**. Выразим эту функцию через характеристики сигнала и антенны.

Проинтегрируем в правой части выражения (3.104) по  $t$  и введем обозначение

$$\psi_s(vx) = \int_0^T \bar{S}_0(t - ux) \hat{\bar{S}}_0(t - ux - vx) dt. \quad (3.105)$$

С учетом формулы (3.105) получим

$$\psi(v) = \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 \psi_s(vx) \exp[j\omega_0 vx] dx. \quad (3.106)$$



Функция  $\psi_s(vx)$  представляет автокорреляционную функцию сигнала, которую можно рассматривать как функцию неопределенности сигнала по времени. Автокорреляционная функция сигнала выражается через квадрат модуля спектральной функции  $S_s(j\omega)$  с помощью преобразования Фурье:

$$\psi_s(vx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 \exp[j\omega vx] d\omega. \quad (3.107)$$

Подставим выражение (3.107) в формулу (3.106), тогда

$$\psi(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 |S_s(j\omega)|^2 \exp[j(\omega_0 + \omega)vx] dx. \quad (3.108)$$

Дальнейшие преобразования функции  $\psi(v)$  проведем, учитывая связь между весовой функцией антенны  $A(x)$  с характеристикой направленности антенны  $G_a(\omega_0 u)$  на частоте  $\omega_0$ :

$$G_a(\omega_0 u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} A(x) \exp[j\omega_0 ux] dx. \quad (3.109)$$

По формуле Парсеваля можно записать:

$$2\pi\omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(\omega_0 u) \hat{G}_a(\omega_0(u+v)) du = \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 \exp[j\omega_0 vx] dx. \quad (3.110)$$

Левая часть соотношения (3.110) представляет пространственную АКФ характеристики направленности антенны:

$$\psi(v) = \omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} G_a(\omega_0 u) \hat{G}_a(\omega_0(u+v)) du. \quad (3.111)$$

Используя выражение (3.111), приведем формулу (3.108) для функции неопределенности по угловой координате к следующему виду:

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 \psi_G[(\omega_0 + \omega)v] d\omega. \quad (3.112)$$

Выражение (3.112) показывает, что функция неопределенности по угловой координате зависит от спектральных свойств сигнала и от направленных свойств антенны на частотах, находящихся в окрестности средней частоты спектра радиосигнала  $\omega_0$ . Поскольку реальные радиосигналы представляют процессы, спектры которых сосредоточены в полосе, примыкающей к средней частоте  $\omega_0$ , в выражении (3.112) можно приближенно положить  $\omega_0 + \omega \cong \omega_0$ . Тогда, полагая  $\psi_G[(\omega_0 + \omega)v] \cong \psi_G(\omega_0 v)$ , получим

$$\psi(v) = \psi_G(\omega_0 v) \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 d\omega.$$

Интеграл от квадрата модуля спектральной функции сигнала пропорционален величине энергии  $E$ . Таким образом,

$$\psi(v) = \psi_s(0)\psi_G(\omega_0 v) = 2\pi E\psi_G(\omega_0 v), \quad (3.113)$$

т. е. функция неопределенности по угловой координате с точностью до постоянного множителя совпадает с пространственной АКФ характеристики направленности антенны.

### 3.7.2. Оценка угловых координат

Постановка задачи оценки угловой координаты аналогична постановке задачи оценки параметров сигнала. Наблюдаемая смесь  $r(t, x)$  сигнала и шума в точке  $x$  раскрыва антенны представляется в виде

$$r(t, x) = s_{\Pi}(t, x, u)\psi_G(\omega_0 v) + n(t, x), \quad t \in [0, T],$$

где  $S_{\Pi}(t, x, u)$  – сигнал в точке  $x$  раскрыва антенны, зависящий от обобщенного угла прихода  $u$  волны;  $n(t, x)$  – помеха, представляющая белый гауссовский шум со следующими характеристиками:

$$\langle n(t, x) \rangle = 0, \quad \langle n(t_1, x_1)n(t_2, x_2) \rangle = N_0\delta(t_1 - t_2)\delta(x_1 - x_2). \quad (3.114)$$

Выражения (3.114) означают, что каждый элемент антенны является источником белого шума со спектральной плотностью  $N_0$ .

В соответствии с критерием максимального правдоподобия определим оптимальную оценку угловой координаты. Запишем вначале функционал плотности вероятности шума для некоторого  $i$ -го элемента раскрыва с координатой  $x_i$ :

$$W_i[n(t, x_i)] = k \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T |n(t, x_i)|^2 dt \right]. \quad (3.115)$$

Считая источники независимыми, а число элементов раскрыва конечным и равным  $M$  ( $M = L_a/\Delta$ ;  $\Delta$  – размер элемента), можно записать совместную плотность вероятности как произведение выражений (3.115) при  $i = \overline{1, M}$ :

$$W[n(t, x_i)] = k \exp \left[ -\frac{\Delta}{N_0} \sum_{i=1}^M \int_0^T |n(t, x_i)|^2 dt \right].$$

Переходя к непрерывной координате  $x$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем следующее выражение для функционала плотности вероятности шума:

$$W[n(t, x)] = k \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_0^T |n(t, x)|^2 dt \right].$$

На основании полученного выражения можно определить вид функционала апостериорной плотности вероятности оцениваемого параметра. При этом считаются точно известными сигнал  $s_{\Pi}(t, x, u)$  в форме (3.103) для фиксированных значений  $x$  и  $u$ , а также априорная плотность вероятности  $W(u)$ :

$$W_{\text{ps}}(u) = kW(u) \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_0^T |r(t, x) - s_{\Pi}(t, x, u)|^2 dt \right].$$

В приведенных выражениях коэффициент  $k$  определяется из условия нормировки.

Максимально правдоподобная оценка угловой координаты  $u^*$  находится из уравнения правдоподобия, которое можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial u} |z(u)|_{u=u^*} = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \operatorname{Re} \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_0^T \bar{R}(t, x) \hat{S}_{\Pi}(t, x, u) dt \right]_{u=u^*} = 0. \quad (3.116)$$

Для реализации алгоритма оптимального оценивания удобно представить уравнение правдоподобия следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \sum_{i=1}^M \int_0^T \bar{R}(t, x_i) A(x_i) \hat{S}_0(t - ux_i) dt \right]_{u=u^*} = 0, \quad (3.117)$$

или, введя переменную  $t_1 = t - ux_i + t_0$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \int_0^T \sum_{i=1}^M A(x_i) \bar{R}(t_1 - t_0 + ux_i) \hat{S}_0(t_1 - t_0) dt_1 \right]_{u=u^*} = 0. \quad (3.118)$$

Согласно этому уравнению, оптимальная оценка  $u^*$  соответствует максимальному значению напряжения на выходе пространственно-временного согласованного фильтра, достигаемому путем подбора фазовых сдвигов  $u^* x_i$  принимаемого колебания для каждого элемента раскрыва.

Структурная схема пространственно-временного согласованного фильтра приведена на рис. 3.22. Антенна представляет решетку элементов, каждому из которых соответствует весовая

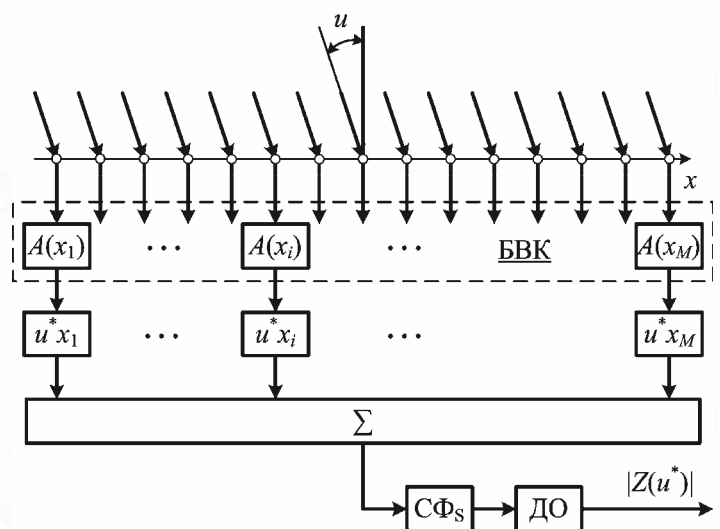


Рис. 3.22. Пространственно-временной фильтр

обработка принятого колебания в блоке весовых коэффициентов (БВК). Значения весовых коэффициентов определяются весовой функцией антенны  $A(x_i)$ . Блок фазосдвигающих элементов обеспечивает компенсацию пространственной задержки в каждом элементе раскрыва. При полной компенсации пространственных сдвигов достигается наибольшее значение напряжения в сумматоре. При этом согласованный с сигналом  $s(t)$  фильтр (СФ<sub>s</sub>) в момент  $t = T + t_0$  вырабатывает наибольшее по величине среднее значение напряжения. Рис. 3.23 поясняет процесс формирования реакции СФ как суммы реакций всех элементов многоканального устройства оценки. Диаграммы, представленные на рис. 3.23, а, относятся к случаю  $u^* = u = 0$ , т. е. совпадению фронта волны с раскрывом антенны. Диаграммы, показанные на рис. 3.23, б, иллюстрируют случай, когда  $u^* \neq u = 0$  при этом суммарный эффект оказывается меньше, чем в случае рис. 3.23, а. Заметим, что результирующий эффект на выходе СФ пропорционален площади под кривой  $A(x)\rho_s[(u - u^*)x]$ ,  $\rho(ux)$  – нормированная АКФ сигнала, форма которого на рис. 3.23 принята прямоугольной. Диаграммы, представленные на рис. 3.23, в и з, поясняют указанное для  $u^* = u = 0$  и  $u^* \neq u = 0$  соответственно.

Определим точность оценки обобщенной угловой координаты. Точность характеризуется дисперсией ошибки  $\sigma_u^2$ , которая может быть определена по описанной в п. 3.2.1 методике. Представим функцию  $z(u)$  в виде суммы сигнальной и помеховой составляющих:  $z(u) = z_s(u) + z_n(u)$ , где  $z_s(u)$  – сигнальная составляющая, определяемая функцией неопределенности по угловой координате, т. е.  $z_s(u) = \psi(u)$ .

При больших отношениях сигнал/шум, когда оценка  $u^*$  близка к истинному значению  $u_0$ , можно принять  $\partial z_n(u)/\partial u = z_n'(u_0)$ , тогда

$$z_s'(u^*) + z_n'(u_0) = 0, \quad (3.119)$$

где  $z_s'(u^*) = \partial z_s(u)/\partial u|_{u=u^*}$ .

Преобразуем уравнение правдоподобия, разложив функцию  $z_s(u)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $u_0$ :

$$z_s(u) = z_s(u_0) + (u - u_0)z_s'(u_0) + 0,5(u - u_0)^2 z_s''(u_0) + \dots$$

Вычисляя производную по  $u$  и учитывая на основании четности функции  $z_s(u)$  равенство  $z_s'(u_0) = 0$  получаем

$$(u - u_0)z_s''(u_0) = z_s'(u).$$

После подстановками  $z_s'(u)$  в уравнение правдоподобия (3.119) имеем соотношение

$$(u^* - u_0) = -\frac{z_n'(u_0)}{z_n''(u_0)}. \quad (3.120)$$

Выражение (3.120) положим в основу вычисления дисперсии  $\sigma_u^2$ , тогда

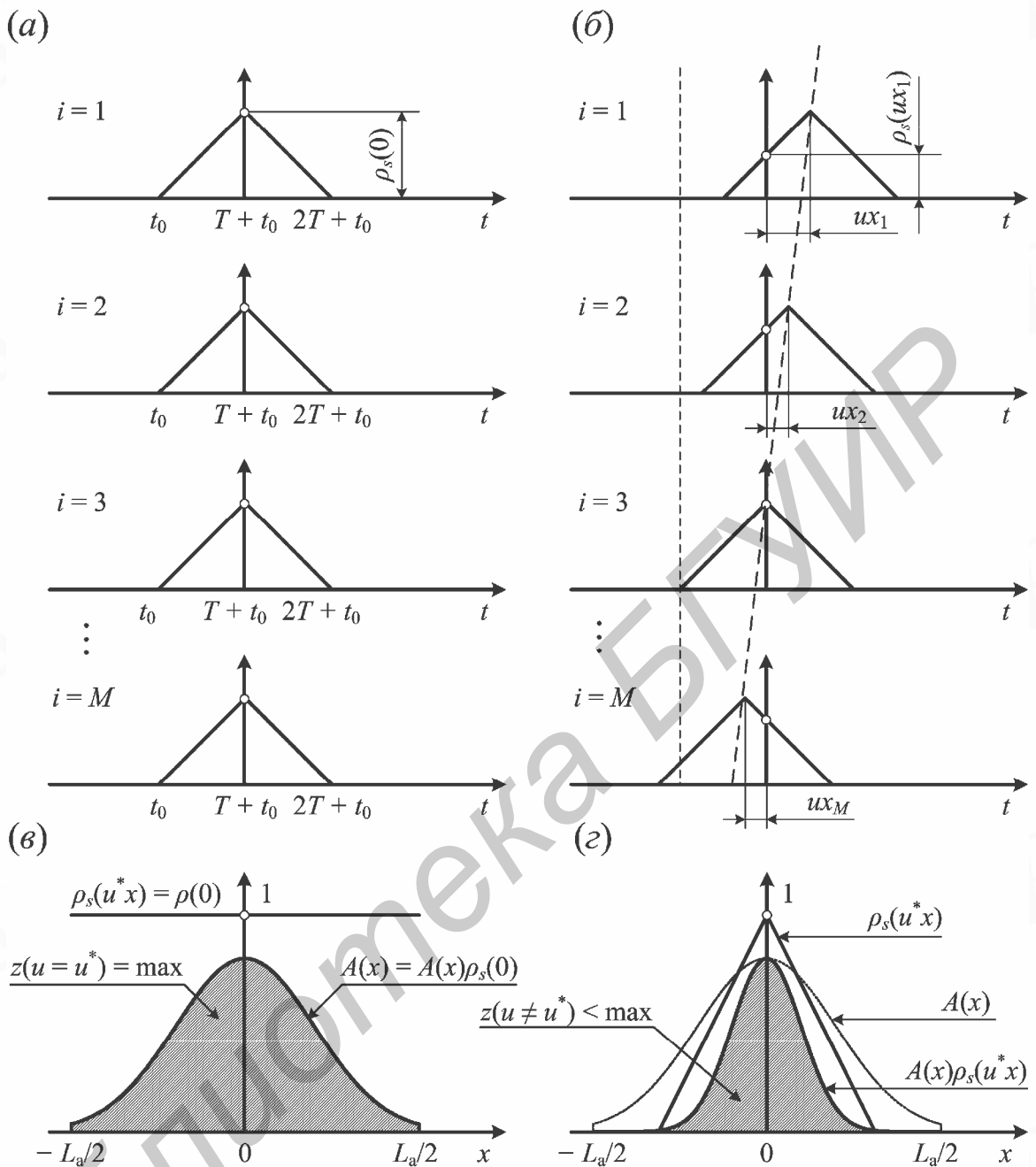


Рис. 3.23. Процесс формирования реакции пространственно-временного согласованного фильтра

$$\sigma_u^2 = \langle (u^* - u_0)^2 \rangle = \frac{\langle z_{\Pi}^{\prime 2}(u_0) \rangle}{[z_s''(u_0)]^2}. \quad (3.121)$$

Вычислим числитель полученного выражения. С учетом соотношения (3.116) можно записать:

$$\langle z^{\prime 2}(u_0) \rangle = \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx_1 \int_0^T dt \int_0^T \langle n(t, x)n(t_1, x_1) \rangle \bar{S}_{\Pi}'(t, x, u_0) \hat{S}_{\Pi}'(t_1, x_1, u_0) dt \quad (3.122)$$

(штрихом обозначены производные по параметру  $u$ ).

Имея в виду характеристики шума (3.114) и используя свойства  $\delta$ -функции, получим

$$\begin{aligned} \langle z'^2(u_0) \rangle &= N_0 \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_0^T \bar{S}_{\Pi}'(t, x, u_0) \hat{S}_{\Pi}'(t, x, u_0) dt = \\ &= N_0 \frac{d^2}{du^2} \left[ \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} dx \int_0^T \bar{S}_{\Pi}'(t, x, u) \hat{S}_{\Pi}'(t, x, u) dt \right]_{u=u_0} = N_0 z_s''(u_0). \end{aligned}$$

Подставив выражение (3.122) вместо вычислителя в формулу (3.121), получим  $\sigma_u^2 = N_0/z_s''(u_0)$ .

Рассмотрим функцию, стоящую в знаменателе полученного выражения. Воспользуемся соотношением (3.113) и представлением (3.111) для АКФ характеристики направленности антенны. Тогда

$$\begin{aligned} z_s''(u_0) &= \frac{d^2}{du^2} [2\pi E \psi_G(\omega_0 u)]_{u=u_0} = \\ &= 2\pi E \frac{d^2}{du^2} \left[ \omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_a[\omega_0(v+u_0)] G_a[\omega_0(v+u)] dv \right]_{u=u_0} = \quad (3.123) \\ &= 2\pi E \left[ \omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_a'[\omega_0(v+v_0)] G_a'[\omega_0(v+u)] dv \right]_{u=u_0}. \end{aligned}$$

Введем нормированную характеристику направленности  $F(\omega_0 v)$ , тогда

$$G_a(\omega_0 v) = \sqrt{G_{a0}} F_a(\omega_0 v), \quad (3.124)$$

где  $G_{a0}$  – коэффициент направленности антенны. С учетом выражения (3.124), заменив переменные в подынтегральном выражении (3.123):  $\omega_0 v = y$ ,  $\omega_0(v+u) = y+a$ , получим

$$z_s''(u_0) = \frac{d^2 \psi(u)}{du^2} \Big|_{u=u_0} = 2\pi E \omega_0^2 G_{a0} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F_a'(y) F_a'(y+a) dy \right]_{a=a_0}, \quad (3.125)$$

где  $a_0 = \omega_0 u_0$ .

Используя правую часть выражения (3.110), запишем соотношение (3.125) иначе;

$$z_s''(u_0) = E \frac{d^2}{du^2} \left[ \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 \exp[j\omega_0 ux] dx \right]_{u=u_0} =$$

$$\int_{-L_a/2}^{+L_a/2} x^2 |A(x)|^2 dx \quad (3.126)$$

$$= E\omega_0 B_0 \frac{\int_{-L_a/2}^{+L_a/2} x^2 |A(x)|^2 dx}{\int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 dx}.$$

Здесь введено обозначение

$$B_0 = \int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 dx.$$

Отношение интегралов в правой части соотношения (3.126) представляет квадрат эффективной длины апертуры антенны:

$$L_{\text{эф}}^2 = \frac{\int_{-L_a/2}^{+L_a/2} x^2 |A(x)|^2 dx}{\int_{-L_a/2}^{+L_a/2} |A(x)|^2 dx}. \quad (3.127)$$

С учетом выражения (3.127) значение  $z_s''(u_0)$  из формулы (3.126) принимаем в виде  $z_s''(u_0) = E\omega_0^2 B_0 L_{\text{эф}}^2$ . Таким образом, дисперсия  $\sigma_u^2$  выражается формулой

$$\sigma_u^2 = \frac{N_0}{EB_0\omega_0^2 L_{\text{эф}}^2}.$$

Если использовать соотношение (3.124), то

$$\sigma_u^2 = N_0 / \left( EG_{a0}\omega_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |F_a'(y)|^2 dy \right).$$

Из приведенных выражений следует, что точность оценки угловой координаты тем выше, чем больше отношение сигнал/шум  $q = 2E/N_0$ , коэффициент направленности антенны и эффективная длина ее раскрыва  $L_{\text{эф}}$ . Заметим, что значение  $L_{\text{эф}}^2$  определяется второй моментной функцией квадрата модуля весовой функции антенны  $|A(x)|^2$ . Поэтому для обеспечения наибольшего значения  $L_{\text{эф}}^2$  необходимо, чтобы функция  $|A(x)|$  сосредоточивалась на

краях апертуры. В идеальном случае функция  $|A(x)|$  должна представлять две  $\delta$ -функции на краях апертуры.

### 3.7.3. Фильтрация угловой координаты

Оценка изменяющейся во времени угловой координаты  $v(t)$  осуществляется на основании уравнений нелинейной фильтрации.

Рассмотрим следующую задачу. Наблюдаемую реализацию  $r(t, x)$  применительно к линейному раскрыву антенны запишем в виде  $r(t, x) = s_{\Pi}(t, x, v, \beta) + n(t, x)$ , где  $n(t, x)$  – белый гауссовский шум с характеристиками (3.114); сигнал  $s_{\Pi}(t, x, v, \beta)$  представляет известную функцию времени угловой координаты  $\sin \gamma(t)/c \cong v(t)$  и зависит от случайной начальной фазы  $\beta$ , равномерно расположенной на интервале  $[-\pi, \pi]$ . Априорные сведения об угловой координате заданы в виде уравнения, описывающего винеровский процесс,

$$dv(t)/dt = n_v(t), \quad (3.128)$$

где  $n_v(t)$  – формирующий белый шум с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью  $N_v/2$ . Представим сигнал в виде

$$s_{\Pi}(t, x, v, \beta) = \bar{S}_{0\Pi}(t, x, v, \beta) \exp[j\omega_0 t],$$

где  $\bar{S}_{0\Pi}$  – комплексная огибающая сигнала.

Для сигнала со случайной начальной фазой можно применить уравнения некогерентной фильтрации (3.85), в которых на основании условия (3.128)  $\alpha = 0$ , а выражение (3.89), определяющее функцию  $\langle V \rangle_{\beta}^*$ , имеет вид

$$\langle V \rangle_{\beta}^* = \frac{1}{\Delta T} \left[ I_0 \left( \frac{2z(v^*)}{N_0} \right) - 1 \right],$$

где

$$z(v^*) = \left| \sum_{i=1}^M \int_{t-\Delta T}^t \bar{R}(t, x_i) \hat{S}_{0\Pi}(t, x_i, v^*) dt \right|.$$

В уравнение для оценки  $v^*$  входит производная  $\partial \langle V \rangle_{\beta}^* / \partial v^*$ , которую можно приближенно представить выражением

$$\frac{\partial \langle V \rangle_{\beta}^*}{\partial v^*} \cong \frac{2}{\Delta T N_0^2 \Delta v} z(v^*) \left[ z(v^* + \Delta v) - z(v^* - \Delta v) \right].$$

На основании приведенных, соотношений уравнение для оценки  $v^*$  запишем следующим образом:

$$\frac{dv^*}{dt} = \frac{2\sigma_v^2}{\Delta T N_0^2 \Delta v} z(v^*) \left[ z(v^* + \Delta v) - z(v^* - \Delta v) \right].$$



Реализация функций  $z(v^*)$ ,  $z(v^* + \Delta v)$  и  $z(v^* - \Delta v)$ , входящих в уравнение фильтрации, требует организации  $M$ -канальных устройств каждая. Действительно, по аналогии с выражением (3.118) представим

$$z(v^*) = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^M \int_{t-\Delta T}^t \bar{R}(t_1 - t_0 + v^* x_i) A(x_i) \hat{S}_0(t_1 - t_0) dt_1 \right| = 0.$$

Этому выражению соответствует схема, аналогичная приведенной на рис. 3.24. Смещение на  $\Delta v$  осуществляется включением в каналы фазосдвигающих элементов  $\Delta v x_i$ , обеспечивающих фиксированное значение сдвига колебания в каждом элементе раскрыва. Подстройка фазового сдвига в соответствии с оценкой  $v^*$  производится с помощью управляемых линий задержки (УЛЗ) в каждом канале. Рис. 3.24 показывает один из вариантов реализации следящего пространственно-временного фильтра. Здесь каждый канал строится по аналогии со схемой рис. 3.24 и содержит управляемый элемент (УЭ), сигнал на выходе которого пропорционален рассогласованию  $\varepsilon = v - v^*$ . Дисперсию ошибок фильтрации можно приближенно определить по формуле

$$\sigma_v^2 = \sqrt{\frac{N_v \Delta T \Delta v^2}{2q^2}},$$

где  $q$  – отношение сигнал/шум. Величина рассогласования  $\Delta v$  выбирается из условия обеспечения наибольшей крутизны пеленгационной характеристики.

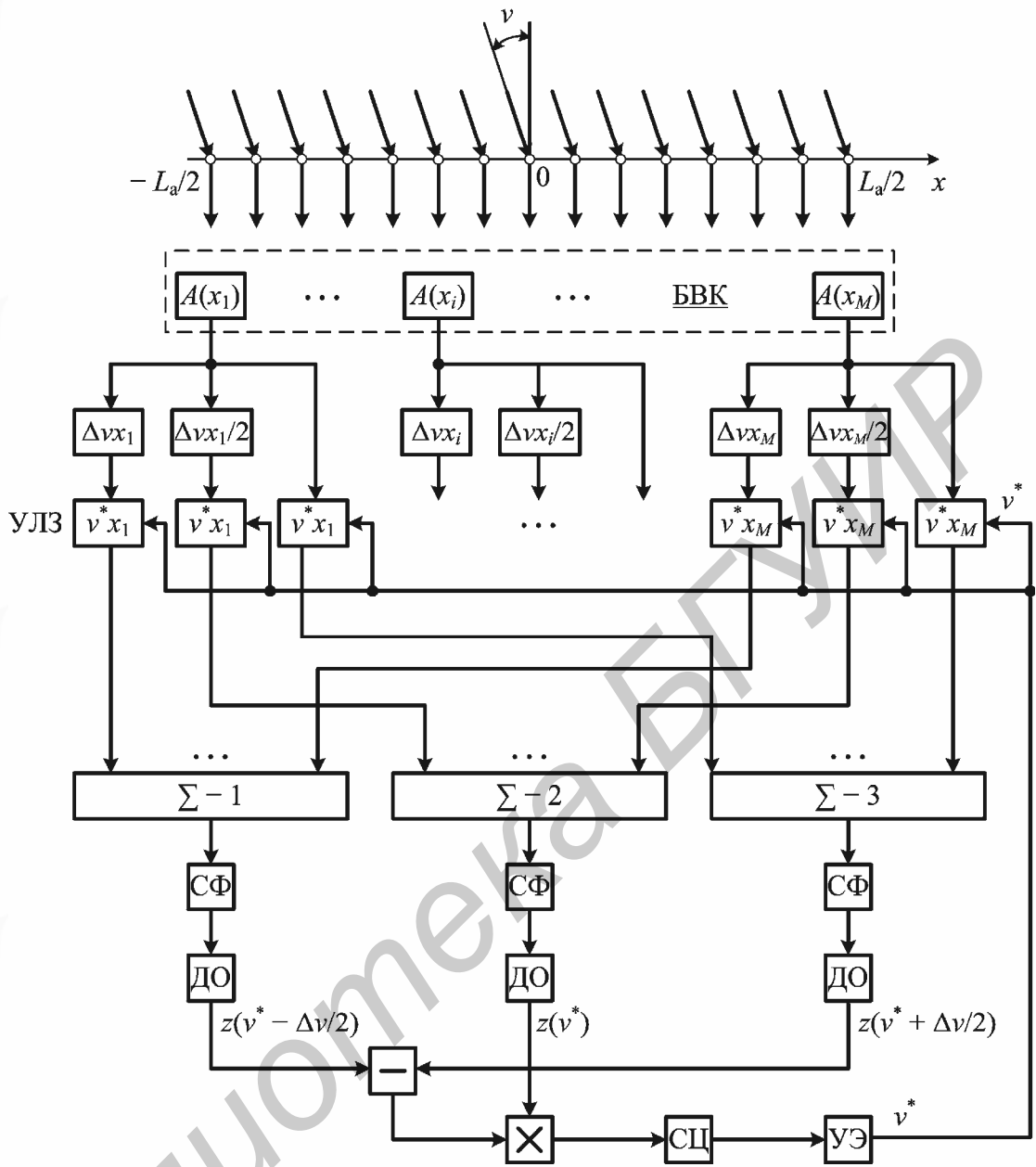


Рис. 3.24. Устройство фильтрации угловой координаты

### ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Детерминированной или случайной функцией оцениваемого параметра является апостериорная плотность вероятности? В чем принципиальное отличие априорной плотности вероятности от апостериорной?
2. В чем сходство и различие оценок максимального правдоподобия и максимума апостериорной вероятности?
3. На основании выражения (3.12) для апостериорной плотности вероятности запишите уравнение правдоподобия и постройте структурную схему устройства оценки амплитуды сигнала.
4. Как изменятся дисперсии оценки времени запаздывания и смещения частоты радиоимпульса при увеличении продолжительности сигнала в два раза? Что произойдет с указанными характеристиками, если за счет частотной внутриимпульсной модуляции эффективная полоса спектра возросла в два раза?
5. Последите за деформацией функции неопределенности колоколообразного радиоимпульса при изменении его эффективной длительности.
6. Запишите уравнения, описывающие фильтр Калмана для сообщения  $\lambda(t) = \lambda_0 = \text{const}$ . Определите выражение для дисперсии  $\sigma_\lambda^2$  и проанализируйте его.
7. Запишите уравнения фильтрации амплитуды радиосигнала с известными частотой и фазой, считая амплитуду случайной величиной.
8. Существуют ли ограничения при определении числа  $M$  каналов в адаптивном многоканальном устройстве фильтрации?
9. В каких случаях при расчете функции неопределенности по угловой координате можно пренебречь частотной зависимостью пространственной АКФ характеристики направленности антенны?
10. Как влияет эффективная длина раскрыва антенны на точность оценки угловых координат?

## ГЛАВА 4. РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

### 4.1. ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

Разрешающая способность оценивается той минимальной разницей в параметрах сигналов, при которой возможны уверенное раздельное обнаружение сигналов и оценка их параметров. Применительно к системам извлечения информации разрешающая способность количественно оценивается минимальной разницей в координатах или скоростях целей, позволяющей уверенно и раздельно обнаруживать цели и измерять их координаты. На практике большинство ситуаций сводится к разрешению двух сигналов (целей), поэтому в дальнейшем будем рассматривать этот случай.

В процессе разрешения двух сигналов одновременно решается задача их обнаружения. Наблюдаемая смесь на входе приемника представляется соотношением (1.7), которое запишем в виде

$$r(t) = \theta_1 s_1(t) + \theta_2 s_2(t) + n(t), \quad t \in [0, T],$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  – независимые случайные величины, которые могут принимать значения 0 и 1; сигналы  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  считаем полностью известными функциями времени;  $n(t)$  – белый гауссовский шум с характеристиками (1.16).

При разрешении двух сигналов возможны следующие четыре ситуации: 1) наличие в смеси  $r(t)$  обоих сигналов и шума ( $\theta_1 = \theta_2 = 1$ ); 2) наличие в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_1$  и шума ( $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$ ); наличие в смеси  $r(t)$  сигнала  $s_2$  и шума ( $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$ ); наличие в  $r(t)$  одного шума ( $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ ). Задача оптимального разрешающего устройства состоит в оценке параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , обеспечивающей минимум среднего риска (2.2). Этот критерий может быть сведен к максимизации функционала правдоподобия. В рассматриваемом случае функционал правдоподобия можно представить в виде (3.7)

$$F(\theta_1, \theta_2) = \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (r(t) - s(t, \theta_1, \theta_2))^2 dt \right], \quad (4.1)$$

$$s(t, \theta_1, \theta_2) = \theta_1 s_1(t) + \theta_2 s_2(t) \quad (4.2)$$

Максимизация функционала (4.1) сводится к определению минимального значения интеграла в показателе экспоненты. Предположим, что энергии сигналов  $s_1$  и  $s_2$  одинаковы и равны  $E$ . Тогда с учетом выражения (4.2) запишем

$$l = \int_0^T (r(t) - s(t, \theta_1, \theta_2))^2 dt =$$

$$= \int_0^T r^2(t) dt - 2\theta_1 \int_0^T r(t)s_1(t) dt - 2\theta_2 \int_0^T r(t)s_2(t) dt + \theta_1^2 E + 2\theta_1\theta_2\rho_{12}E + \theta_2^2 E,$$

где  $\rho_{12} = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt$  – коэффициент взаимной корреляции сигналов.

Определим значения  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , при которых обеспечивается минимум величины  $l$ . Оценки  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \frac{\partial l}{\partial \theta_1} \right|_{\theta=\theta^*} = \theta_1^* E - \int_0^T r(t)s_1(t) dt + \rho_{12}\theta_2^* E = 0; \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right|_{\theta=\theta^*} = \theta_2^* E - \int_0^T r(t)s_2(t) dt + \rho_{12}\theta_1^* E = 0. \quad (4.4)$$

Решая уравнения (4.3) и (4.4), получаем значения, приводящие к минимуму ( $l = l_{\min}$ ):

$$\theta_1^* = \frac{1}{E(1 - \rho_{12}^2)} \int_0^T r(t)(s_1(t) - \rho_{12}s_2(t)) dt; \quad (4.5)$$

$$\theta_2^* = \frac{1}{E(1 - \rho_{12}^2)} \int_0^T r(t)(s_2(t) - \rho_{12}s_1(t)) dt. \quad (4.6)$$

Приемник, реализующий алгоритм (4.5), (4.6), состоит из двух каналов, включающих согласованные фильтры. Импульсные реакции определяются по аналогии с выражением (2.36) и имеют вид:

$$g_1(t) = C[s_1(t_0 - t) - \rho_{12}s_2(t_0 - t)] \frac{1}{E(1 - \rho_{12}^2)}; \quad (4.7)$$

$$g_2(t) = C[s_2(t_0 - t) - \rho_{12}s_1(t_0 - t)] \frac{1}{E(1 - \rho_{12}^2)}, \quad (4.8)$$

где  $t_0 \geq T$ , что следует из условия физической реализуемости фильтров. При  $t_0 = T$  наибольшее значение сигналов на выходе СФ ожидается в момент  $t = T$ , образующиеся в этот момент напряжения сравниваются с пороговыми уровнями  $\pm l_{\text{п}}$  в пороговых устройствах (ПУ) (рис. 4.1). Заметим, что возможна реализация каналов разрешающего устройства на основе корреляторов.

В отличие от обнаружителя сигнала с полностью известными параметрами (см., например, формулу (2.36) и рис. 2.7) импульсные реакции  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , в устройстве разрешения имеют более сложную зависимость от сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . При отсутствии корреляции между сигналами ( $\rho_{12} = 0$ ) каждый из каналов превращается в оптимальный обнаружитель одиночного сигнала.

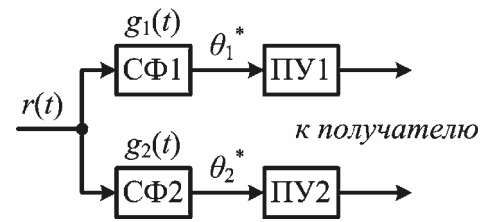


Рис. 4.1. Устройство разрешения на двух согласованных фильтрах

Определим качественные показатели оптимального устройства разрешения двух сигналов. Как и при обычном обнаружении, качество разрешения можно охарактеризовать условными вероятностями правильного обнаружения и ложной тревоги. Для определения этих вероятностей необходимо знать следующие условные плотности вероятности:  $W_{\text{п}}(\theta_1^*)$  – при наличии только шума;  $W_{\text{с.п}}(\theta_1^*)$  – при наличии шума и сигнала  $s_1$ ;  $W_{\text{п}}(\theta_2^*)$  – при наличии только шума;  $W_{\text{с.п}}(\theta_2^*)$  – при наличии шума и сигнала  $s_2$ . Поскольку шум является гауссовским, случайные величины  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$  также гауссовские и характеризуются своими математическими ожиданиями и дисперсиями. Используя методику, описанную в п. 2.4.4, можно получить выражения для условных плотностей вероятности, аналогичные (2.25), (2.26). Дисперсии  $\sigma_{\theta_1}^2$  и  $\sigma_{\theta_2}^2$ , характеризующие случайные величины  $\theta_1^*$  и  $\theta_2^*$ , при одинаковой энергии сигналов оказываются равными и определяются выражением

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{N_0}{2E(1 - \rho_{12}^2)}. \quad (4.9)$$

Условные математические ожидания  $\langle \theta_1^* \rangle$  и  $\langle \theta_2^* \rangle$  при наличии в смеси шума и сигнала равны единице, при наличии только шума – нулю. Условные плотности вероятности  $W_{\text{п}}(\theta_1^*)$  и  $W_{\text{с.п}}(\theta_1^*)$  показаны на рис. 4.2 для двух значений  $\rho_{12}$ : штриховые кривые – для  $\rho_{12}''$ , сплошные – для  $\rho_{12}'$ ; здесь принято  $\rho_{12}' < \rho_{12}''$ . Вероятность обнаружения сигнала  $s_1$  не зависит от того, присутствует на входе сигнал  $s_2$  или нет. То же самое можно сказать и о вероятности обнаружения сигнала  $s_2$ . Вероятность ложной тревоги  $F$  для сигнала  $s_1$  определяется вероятностью превышения порога  $l_{\text{п}}$  величиной  $\theta_1^*$  при условии действия в смеси только шума:

$$F = P[\theta_1^* > l_{\text{п}}, \theta_1 = 0] = \int_{l_{\text{п}}}^T W_{\text{п}}(\theta_1^*) d\theta_1^* = 1 - \Phi\left(\frac{l_{\text{п}}}{\sigma_{\theta}}\right),$$

где  $\sigma_{\theta}$  определяется выражением (4.9);  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности (2.29). Вероятность правильного обнаружения вычисляется по формуле

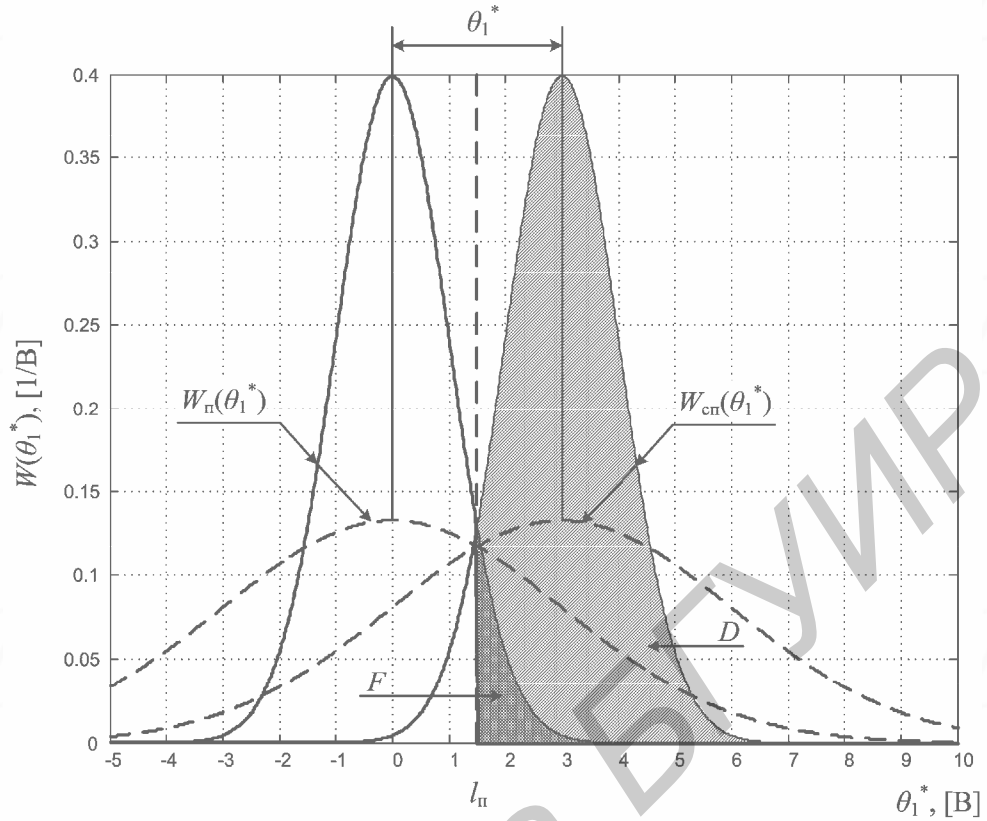


Рис. 4.2. Условные ПРВ при разрешении двух сигналов

$$D = P[\theta_1^* > l_1, \theta_1 = 1] = 1 - \Phi\left(\frac{l_1 - 1}{\sigma_\theta}\right). \quad (4.10)$$

Фиксируя значение вероятности ложной тревоги  $F$ , можно при заданной величине отношения сигнал/шум  $q = 2E/N_0$  построить зависимости вероятности  $D$  от  $\rho_{12}$ . Семейство таких характеристик, построенных в соответ-

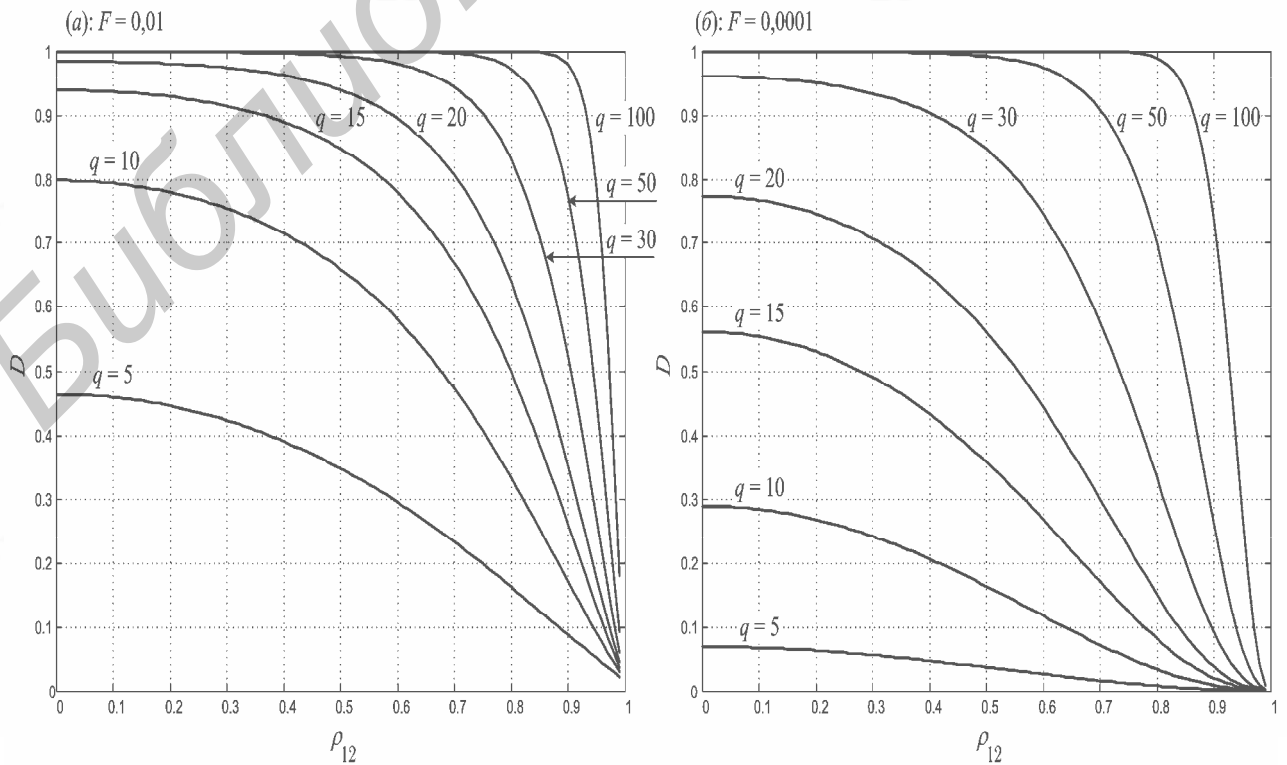
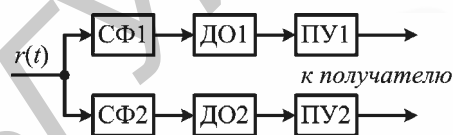


Рис. 4.3. Характеристики разрешения двух сигналов

ствии с выражением (4.10) при различных значениях  $q$ , образует **характеристики разрешения**. Они представлены на рис. 4.3 для двух значений вероятности ложной тревоги:  $F = 0,01$  (а) и  $F = 10^{-4}$  (б). Характеристики разрешения показывают, что с уменьшением значения коэффициента взаимной корреляции  $\rho_{12}$  и увеличением отношения сигнал/шум  $q$  надежность разрешения двух сигналов возрастает. Удобно ввести **параметр разрешения**  $2E(1 - \rho_{12}^2)/N_0 = q(1 - \rho_{12}^2)$ , определяющий надежность разрешения. Для канала обнаружения сигнала  $s_2$ , т. е. для  $\theta_2^*$ , можно получить аналогичные характеристики разрешения. Таким образом, по наблюдениям выходов обоих каналов осуществляется процесс разрешения: при превышении порога только в канале  $\theta_1^*$  принимается решение, что имеется один сигнал  $s_1$ ; превышение порога в канале  $\theta_2^*$  указывает на то, что имеется только сигнал  $s_2$ ; превышение порогов одновременно в обоих каналах свидетельствует о присутствии обоих сигналов.

Для двух сигналов, имеющих случайные независимые амплитуды и случайную разность фаз, каналы оптимального устройства разрешения включают согласованные фильтры (СФ), детекторы огибающей (ДО) и пороговые устройства (ПУ). На рис. 4.4 изображена структурная схема устройства разрешения двух сигналов со случайными параметрами. Надежность разрешения сигналов со случайными параметрами существенно уступает надежности разрешения детерминированных сигналов. Следует отметить, что для случая разрешения по времени коэффициент взаимной корреляции  $\rho_{12}$  высокочастотных сигналов представляет осциллирующую функцию, спадающую до нуля за четверть периода высокочастотных колебаний. Коэффициент  $\rho_{12}$  для огибающих сигналов спадает до нуля за время длительности сигнала, т. е. разрешение заметно хуже, однако на практике реализовать разрешение сигналов по схеме рис. 4.4 оказывается проще, чем для случая полностью известных радиосигналов.



**Рис. 4.4.** Разрешающее устройство для сигнала с неизвестными параметрами

## 4.2. ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Рассмотрим упрощенный метод оценки разрешающей способности, позволяющий сравнивать между собой сигналы различного вида с точки зрения их разрешения. Применительно к системам извлечения информации используются понятия разрешающей способности по дальности, по скорости, по угловым координатам целей. Информация об этих параметрах цели содержится соответственно в задержке  $\tau$  сигнала, в доплеровском сдвиге частоты  $\Omega$ , в направлении прихода радиоволн  $\gamma$ . В качестве **меры различимости** двух сигналов, имеющих одинаковые энергии и различающихся задержкой  $\tau$ , примем средний квадрат отклонения сигнала  $s(t)$  от  $s(t - \tau)$ :



$$\Delta_{\tau}^2 = \frac{1}{E} \int_0^T [s(t) - s(t - \tau)]^2 dt. \quad (4.11)$$

Раскрывая подынтегральное выражение, нетрудно привести соотношение (4.11) к следующему виду:

$$\Delta_{\tau}^2 = 2[1 - \rho_s(\tau)], \quad (4.12)$$

где

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{E} \int_0^T s(t)s(t - \tau)dt$$

есть нормированная АКФ сигнала. В соответствии с выражением (4.12) мерой разрешающей способности сигналов по времени служит АКФ сигнала.

*Для обеспечения наибольшей различимости по времени необходимо выбирать такие сигналы, у АКФ которых приближается к нулю всюду, за исключением окрестности  $\tau = 0$ .*

Как было показано в п. 2.2.5, напряжение на выходе согласованного фильтра при отсутствии шума имеет форму автокорреляции иной функции сигнала. В обнаружителях сигналов со случайными параметрами на выходе цепи, состоящей из согласованного фильтра и детектора огибающей, формируется напряжение, которое по форме повторяет автокорреляционную функцию комплексной огибающей ожидаемого сигнала. Таким образом, различимость сигналов определяется свойствами АКФ, в частности временем корреляции. Интервал задержки  $\tau_H$  одного сигнала по отношению к другому, в пределах которого сигналы считаются неразрешимыми, называется **интервалом неопределенности по задержке**. Этот интервал определяется удвоенным значением времени корреляции:

$$\tau_H = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_s(t)|^2 d\tau, \quad (4.13)$$

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2E} \int_0^T \bar{S}_0(t) \hat{S}_0(t - \tau) dt$$

и представляет автокорреляционную функцию комплексной огибающей сигнала. Согласно выражению (4.13), наибольшей разрешающей способностью по времени, а, следовательно, и по дальности обладают системы, использующие широкополосные сигналы, имеющие малое время корреляции, т. е. малый интервал неопределенности по задержке.

Рассмотрим разрешающую способность по частоте (скорости). В качестве меры различимости сигналов, различающихся по частоте, можно принять величину среднего квадрата разности спектральных функций огибающих:

$$\Delta_{\Omega}^2 = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\text{ор}}(j\omega) - S_{\text{ор}}(j(\omega - \Omega))]^2 d\omega, \quad (4.14)$$

где принято:  $s(t) = S_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]$ ;  $S_{\text{ор}}(j\omega) = \int_0^T S_0(t) \exp[-j\omega t] dt$ .

После преобразования выражения (4.14) получим

$$\Delta_{\Omega}^2 = 2[1 - \rho_s(\Omega)],$$

$$R_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{ор}}(j\omega) \hat{S}_{\text{ор}}(j(\omega - \Omega)) d\omega,$$

которая является комплексной функцией частотной корреляции.

По аналогии с  $\tau_n$  можно ввести в рассмотрение **интервал неопределенности по частоте**

$$\Omega_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_s(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.15)$$

Согласно выражению (4.15), наибольшей разрешающей способностью по частоте (скорости) обладают системы, использующие протяженные сигналы, которые имеют малый интервал неопределенности по частоте.

Перейдем к оценке совместного разрешения сигналов (целей) по времени (дальности) и по частоте (радиальной скорости). Для этого введем квадратичную меру, аналогичную ранее рассмотренным. Пусть, например, два сигнала различаются задержкой  $\tau$  и смещением частоты  $\Omega$ :

$$s_1(t) = \bar{S}_0(t) \exp(j\omega_0 t);$$

$$s_2(t - \tau) = \bar{S}_0(t - \tau) \exp[j(\omega_0 - \Omega)(t - \tau)].$$

Определим меру различимости сигналов по формуле

$$\Delta_{\tau\Omega}^2 = \frac{1}{2E} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t - \tau)]^2 dt.$$

После возведения в квадрат подынтегральной функции и преобразований получим

$$\Delta_{\tau\Omega}^2 = 2[1 - \psi(\tau, \Omega)],$$

где

$$\psi(\tau, \Omega) = \frac{1}{2E} \int_0^T \hat{S}_0(t) \bar{S}_0(t - \tau) \exp[-j\omega t] dt$$

есть **двухмерная автокорреляционная функция сигнала**. Она связана с функцией неопределенности  $\rho_n(\tau, \Omega)$  (3.35) соотношением

$$\rho_i(\tau, \Omega) = |\psi(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_0^T \hat{S}_0(t) \bar{S}_0(t - \tau) \exp[-j\Omega t] dt \right|. \quad (4.16)$$

Характеристики двумерной автокорреляционной функции и, следовательно, функции неопределенности определяют меру различимости сигналов по времени и частоте. Некоторые свойства функции неопределенности  $\rho_H(\tau, \Omega)$  были указаны в § 3.3 [см. формулы (3.36), (3.37)]. Поскольку  $\tau = \Omega = 0$ ,  $\rho_H(0, 0) = 1$ , то в этом случае  $\Delta_{\tau\Omega}^2 = 0$ , т. е. сигналы неразличимы. Так как объем тела неопределенности  $\rho_H^2(\tau, \Omega)$  не зависит от формы сигнала и равен единице, невозможно достичь сколь угодно высокой степени разрешения сигналов: концентрация тела неопределенности в окрестности точки  $\tau = \Omega = 0$  приводит к образованию боковых выбросов в других областях на плоскости  $(\tau, \Omega)$ . При  $\tau = 0$  из формулы (4.16) получаем сечение тела неопределенности вертикальной плоскостью:

$$\rho_H(0, \Omega) = \frac{1}{2E} \left| \int_0^T |\bar{S}_0(t)|^2 \exp[-j\omega t] dt \right|,$$

т. е. данное сечение представляет модуль спектральной функции квадрата модуля огибающей сигнала. Это сечение не зависит от фазовой структуры сигнала. При  $\Omega = 0$  получаем сечение тела неопределенности плоскостью, включающей ось  $\tau$  и перпендикулярной к плоскости  $\tau, \Omega$ :

$$\rho_H(\tau, 0) = \frac{1}{2E} \left| \int_0^T \hat{S}_0(t) \bar{S}_0(t - \tau) dt \right|.$$

Это сечение представляет модуль автокорреляционной функции сигнала (его комплексной огибающей).

Как уже указывалось в § 3.3, для анализа тела неопределенности и, следовательно, разрешающей способности по времени и частоте удобно использовать сечения тела неопределенности горизонтальными плоскостями. Площадь сечения плоскостью, параллельной  $\tau, \Omega$ , представляющая площадь сечения цилиндра с высотой, равной главному максимуму (единице), и объемом, ограниченным всей поверхностью  $\rho_H^2(\tau, \Omega)$ , называется **эквивалентной площадью неопределенности**. Она определяется выражением

$$P_3(\tau, \Omega) = \frac{1}{\rho_H^2(0, 0)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_H^2(\tau, \Omega) d\Omega. \quad (4.17)$$

Если запаздывание  $\tau$  и смещение частоты  $\Omega$  сигналов попадают в область, определяемую соотношением (4.17), такие сигналы не разрешаются. Указанная область называется **областью сильной корреляции**. Область, лежащая вне  $P_3(\tau, \Omega)$ , относится к **области слабой корреляции**. Сечение тела

неопределенности на уровне сильной и слабой корреляции изображают в виде так называемых **диаграмм неопределенности**. Пример такой диаграммы был приведен на рис. 3.10. Другие примеры рассмотрены ниже.

Для характеристики пространственного разрешения сигналов (целей) можно ввести критерии, аналогичные ранее рассмотренным. Ограничимся случаем разрешения только по одной угловой координате. Пусть антенна представляет линейный раскрыв длиной  $L_a$ , как это показано на рис. 3.21. На эту антенну под углами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  приходят две плоские волны. Используя обозначения, принятые в п. 3.7.1 и определяемые соотношениями (3.99)–(3.103), введем меру разрешения по обобщенной угловой координате  $v$ :

$$\Delta_v^2 = \frac{1}{E} \int_{-L_a/2}^{L_a/2} dx \int_0^T [s_{ц1}(t, x) - s_{ц2}(t, x)]^2 dt, \quad (4.18)$$

где  $s_{ц1}(t, x) = A(x)s(t - ux)$ ;  $s_{ц2}(t, x) = A(x)s(t - ux - vx)$ , а обобщенные координаты определяются выражениями:  $u = (\sin \gamma_1)/c$ ;  $u + v = (\sin \gamma_2)/c$ ;  $c$  – скорость распространения радиоволн;  $A$  – весовая функция антенны.

Считая, что сигналы имеют одинаковую энергию, равную  $E$ , преобразуем выражение (4.18). В результате получим

$$\Delta_v^2 = 2[1 - \psi_H(v)], \quad (4.19)$$

где функция  $\psi_H(v)$  определяется из соотношения (3.105) и называется **нормированной функцией неопределенности по угловой координате**. Эту функцию можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_H(v) &= \frac{1}{E} \int_{-L_a/2}^{L_a/2} dx \int_0^T s_{ц1}(t, x) s_{ц2}(t, x) dt = \\ &= \frac{1}{E} \int_{-L_a/2}^{L_a/2} dx \int_0^T |A(x)|^2 \bar{S}_0(t - ux) \hat{S}_0(t - ux - vx) \exp[j\omega_0 vx] dt. \end{aligned}$$

Основные свойства функции  $\psi(v)$  описаны ранее, в п. 3.7.1. В частности, имеет место соотношение, справедливое для узкополосных сигналов:

$$\psi_H(v) \cong 2\pi\psi_G(\omega_0 v) = 2\pi\omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_a(\omega_0 u) G_a(\omega_0(u + v)) du, \quad (4.20)$$

где  $G_a(\omega_0 u)$  – характеристика направленности антенны, связанная с весовой функцией  $A(x)$  преобразованием Фурье (3.109). Из выражений (4.19) и (4.20) следует, что *мера разрешения по угловой координате определяется автокорреляционной функцией характеристики направленности антенны*. По аналогии с  $\tau_H$  и  $\Omega_H$  можно ввести **интервал неопределенности по угловой координате**

$$v_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_i(v)|^2 dv. \quad (4.21)$$

Наибольшей разрешающей способностью по угловым координатам обладают системы, характеризуемые наименьшим интервалом неопределенности  $v_n$  (4.21). Рассматриваемый случай относится к узкополосным пространственно-временным сигналам, для которых выполняется условие  $2L_a F < c$ , где  $F$  – ширина спектра сигнала. Возможен и другой случай, когда выполняется условие широкополосности пространственно-временного сигнала, т. е.  $2L_a F > c$ . При этом условии функцию неопределенности  $\psi_n(v)$  по угловой координате определяют на основе соотношения (3.107), т. е.

$$\psi_i(v) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_s(j\omega)|^2 \psi_G((\omega_0 + \omega)v) d\omega.$$

Эффект широкополосности может оказать существенное влияние на вид функции неопределенности лишь в некоторых видах дискретных антенн, например, в разряженных антенных решетках, в многоканальных разнесенных системах при использовании широкополосных сигналов.

#### 4.3. ДИАГРАММЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СИГНАЛОВ

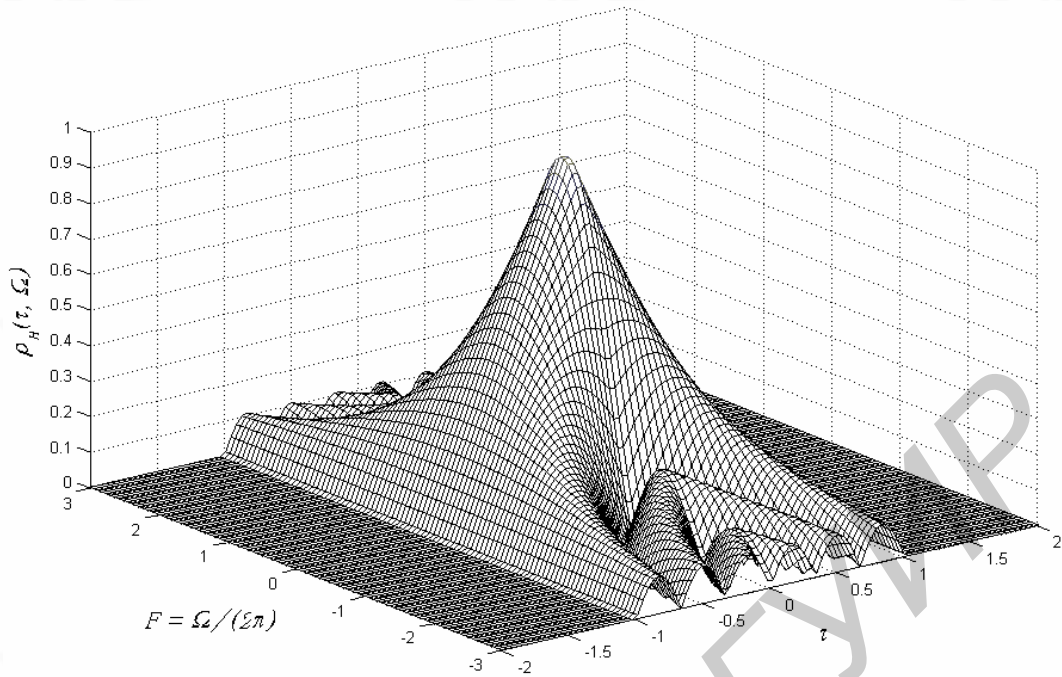
Рассмотрим сечения тела неопределенности для некоторых типичных радиосигналов, применяемых в системах извлечения информации.

Пусть **одионый радиоимпульс** имеет прямоугольную огибающую (2.43) с единичной амплитудой

$$\bar{S}(t) = S_0(t) = \text{rect}\left[\frac{t}{\tau_{\text{и}}}\right]. \quad (4.22)$$

Воспользуемся выражением (4.16) и подставим в него значение  $\bar{S}_0(t)$  из формулы (4.22), в результате получим следующее соотношение для нормированной функции неопределенности:

$$\rho_{\text{н}}(\tau, \Omega) = \begin{cases} \left| \frac{\sin[\Omega(\tau_{\text{и}} - |\tau|)/2]}{\Omega\tau_{\text{и}}/2} \right| & \text{при } |\tau| \leq \tau_{\text{и}}; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_{\text{и}}. \end{cases} \quad (4.23)$$



**Рис. 4.5.** Тело неопределенности одиночного радиоимпульса

На рис. 4.5 изображено тело неопределенности для одиночного прямоугольного радиоимпульса с комплексной огибающей (4.22).

Из выражения (4.23)  $\Omega = 0$  получаем функцию

$$\rho_H(\tau, 0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{и}} & \text{при } |\tau| \leq \tau_{и}; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_{и}. \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\rho_H(0, \Omega) = \left| \frac{\sin[\Omega\tau_{и}/2]}{\Omega\tau_{и}/2} \right|. \quad (4.25)$$

На рис. 4.6 изображены сечения тела неопределенности (4.24) и (4.25) и диаграмма неопределенности, характеризующая области сильной ( $\rho_H > 0,5$ ) и слабой ( $\rho_H < 0,1$ ) корреляций. Можно показать влияние параметра  $\tau_{и}$  импульса на диаграмму неопределенности: *укорочение импульса приводит к вытягиванию фигуры неопределенности вдоль оси  $\Omega$ , т. е. к улучшению разрешающей способности сигналов по времени, и наоборот, удлинение импульса приводит к улучшению разрешающей способности сигналов по частоте.*

Для прямоугольного радиоимпульса с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) колебаний комплексная огибающая имеет вид

$$\bar{S}_0(t) = \text{rect}\left[\frac{t}{\tau_{и}}\right] \exp\left[j\alpha t^2\right].$$

Мгновенная частота радиоимпульса, изменяется по закону

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\left[\omega_0 t + \alpha t^2\right] = \omega_0 + 2\alpha t,$$

т. е. линейно возрастает от  $\omega_0$  до  $\omega_0 + 2\alpha\tau_{и}$ . Девияция частоты  $\Delta\Omega = 2\alpha\tau_{и}$ .

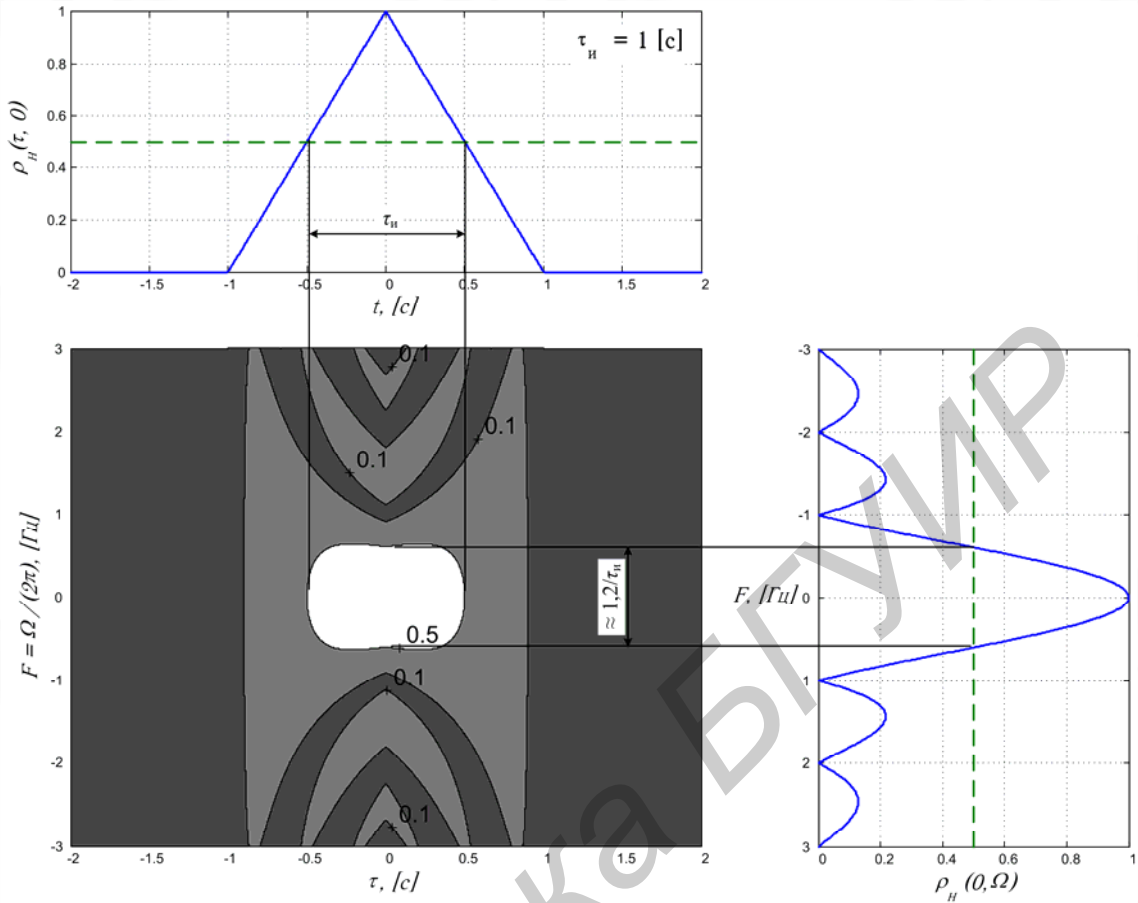


Рис. 4.6. Сечения ТН одиночного прямоугольного радиоимпульса

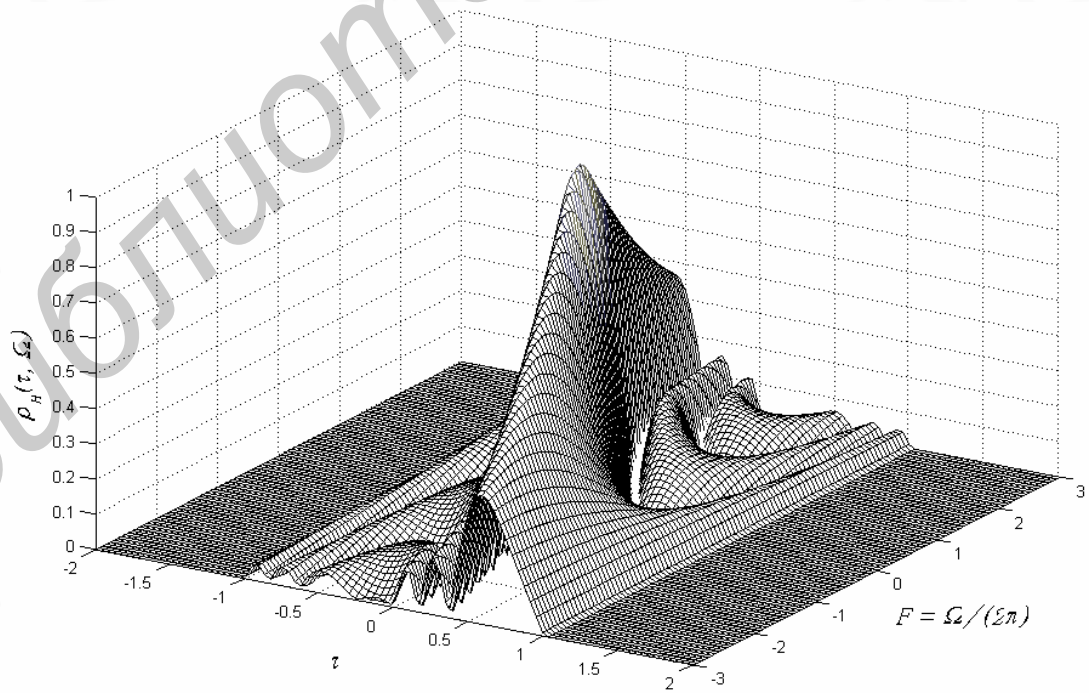


Рис. 4.7. Тело неопределенности для ЛЧМ сигнала длительностью 1 с и девиацией 4 Гц

Нормированная функция неопределенности  $\rho_H(\tau, \Omega)$  определяется выражением

$$\rho_H(\tau, \Omega) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \left[ (\Omega + \Delta\Omega \tau / \tau_H) (\tau_H - |\tau|) / 2 \right]}{(\Omega + \Delta\Omega \tau / \tau_H) \tau_H / 2} \right| & \text{при } |\tau| \leq \tau_H; \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_H. \end{cases} \quad (4.26)$$

Тело неопределенности для ЛЧМ-сигнала приведено на рис. 4.7.

Сечение тела неопределенности

$$\rho_H(0, \Omega) = \left| \frac{\sin [\Omega \tau_H / 2]}{\Omega \tau_H / 2} \right| \quad (4.27)$$

совпадает с аналогичным сечением (4.25) для одиночного радиоимпульса, поскольку огибающие сигналов одинаковы.

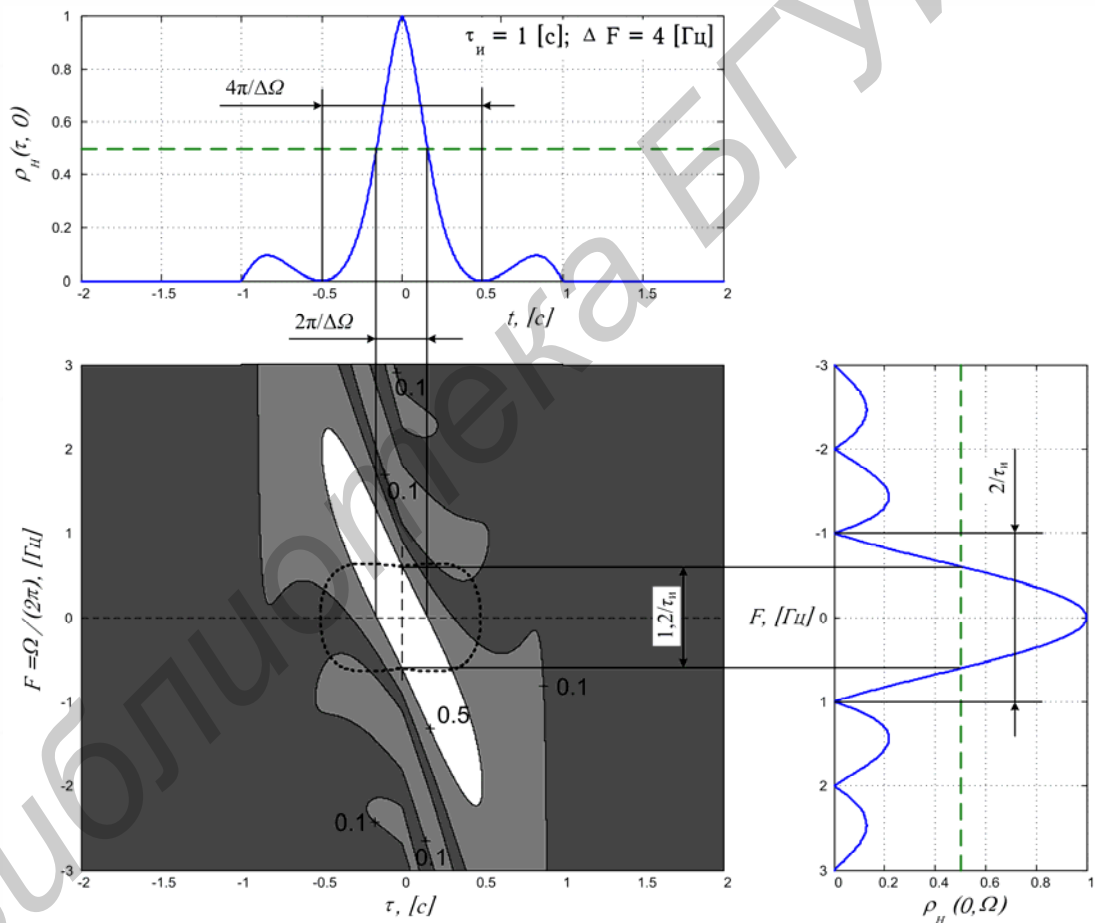


Рис. 4.8. Сечения ТН одиночного ЛЧМ импульса

При  $\Omega = 0$  из формулы (4.26) получим выражение

$$\rho_H(\tau, 0) = \begin{cases} \left| \frac{\sin \left[ (\Delta\Omega \tau / \tau_H) (\tau_H - |\tau|) / 2 \right]}{\Delta\Omega \tau / 2} \right|, & \text{при } |\tau| \leq \tau_H; \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_H. \end{cases} \quad (4.28)$$

В соответствии с выражениями (4.27) и (4.28) на рис. 4.8 показаны се-



чения тела неопределенности. Здесь же изображена диаграмма неопределенности ЛЧМ-радиоимпульса. Штриховыми линиями обозначена фигура неопределенности одиночного прямоугольного радиоимпульса.

При одинаковой длительности простого и ЛЧМ-радиоимпульсов размеры эллипсов неопределенности по оси  $\tau = 0$  одинаковы, что означает одинаковую разрешающую способность таких сигналов по частоте. При разрешении по времени ЛЧМ-радиоимпульсов взаимное расположение фигур неопределенности показано на рис. 4.9, а, при разрешении по частоте — на рис. 4.9, б (время прихода сигналов считается известным). Если время прихода сигналов неизвестно, то при совместном разрешении по  $\tau$  и по  $\Omega$  применение ЛЧМ-радиоимпульсов не улучшает разрешения по времени (дальности) и в  $k_{сж}$  раз ухудшает разрешение по частоте (скорости). Коэффициент  $k_{сж}$  является коэффициентом сжатия ЛЧМ-радиоимпульса на выходе согласованного фильтра и определяется базой сигнала:  $k_{сж} = B = \Delta\Omega\tau_n / (2\pi)$ . Эффект сжатия показан на рис. 4.10.

**Пачка прямоугольных радиоимпульсов с прямоугольной огибающей** имеет тело неопределенности с несколькими пиками сильной корреля-

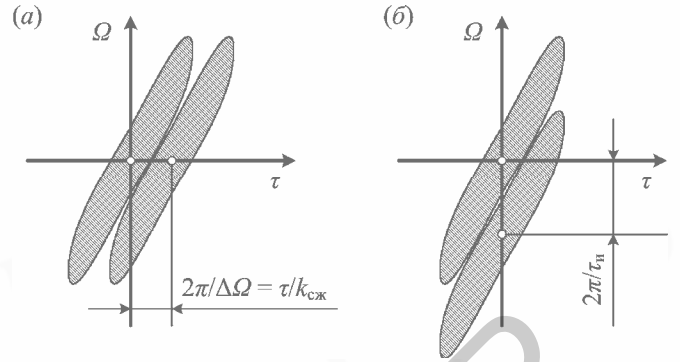


Рис. 4.9. Разрешение по времени (а) и частоте (б) ЛЧМ радиоимпульса

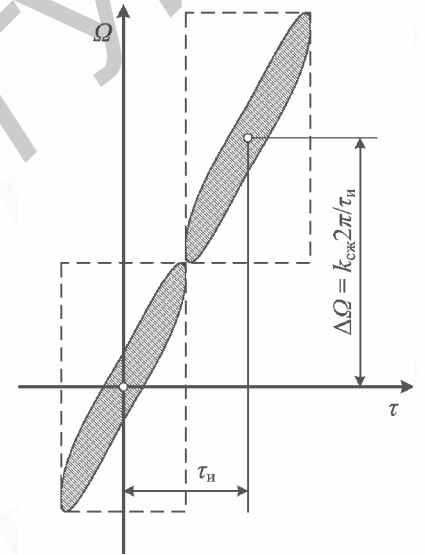


Рис. 4.10. Совместное разрешение по времени и частоте

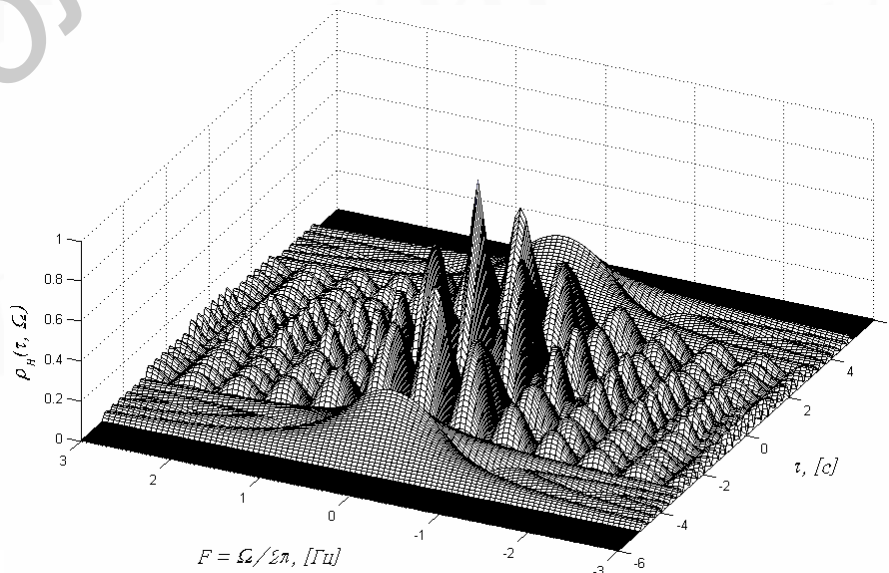


Рис. 4.11. Тело неопределенности пачки из трех радиоимпульсов

ции, что может привести к неоднозначности отсчета дальности и скорости (рис. 4.11). Диаграмма неопределенности и сечения тела неопределенности  $\rho_n(\tau, 0)$  и  $\rho_n(0, \Omega)$  для пачки радиоимпульсов показаны на рис. 4.12. В верхней части рис. 4.12 показана автокорреляционная функция пачки, справа – спектр пачки. Увеличение числа  $M$  импульсов в пачке при сохранении периода повторения  $T_n$  и длительности импульсов приводит к уменьшению размеров фигур неопределенности по оси  $\Omega$ . Период повторения  $T_n$  импульсов определяет периодичность областей высокой корреляции на диаграмме неопределенности, что является причиной неоднозначности отсчетов дальности и скорости.

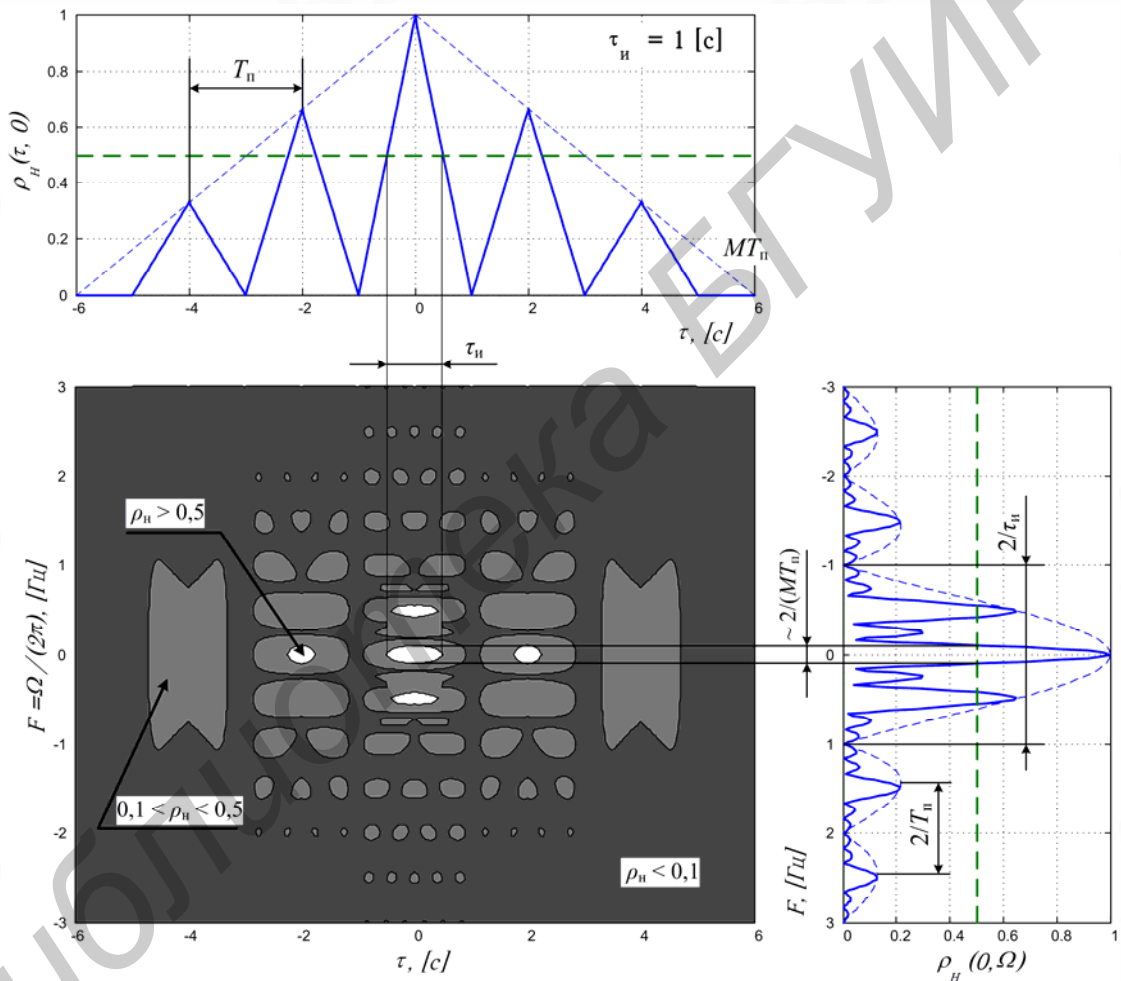


Рис. 4.12. Сечения ТН пачки из трех радиоимпульсов

**Радиоимпульс с фазовой манипуляцией кодом Баркера** длиной  $N=7$  не имеет недостатков, присущих пачке радиоимпульсов. Так как временная корреляционная функция  $\rho_n(\tau, 0)$  имеет малые боковые пики, то для такого сигнала практически исключена неоднозначность оценки параметров. Тело неопределенности сигнала изображено на рис. 4.13, его сечения и диаграмма неопределенности – на рис. 4.14. Другие типы сигналов и их диаграммы неопределенности рассматриваются в специальной литературе, посвященной теории сигналов.

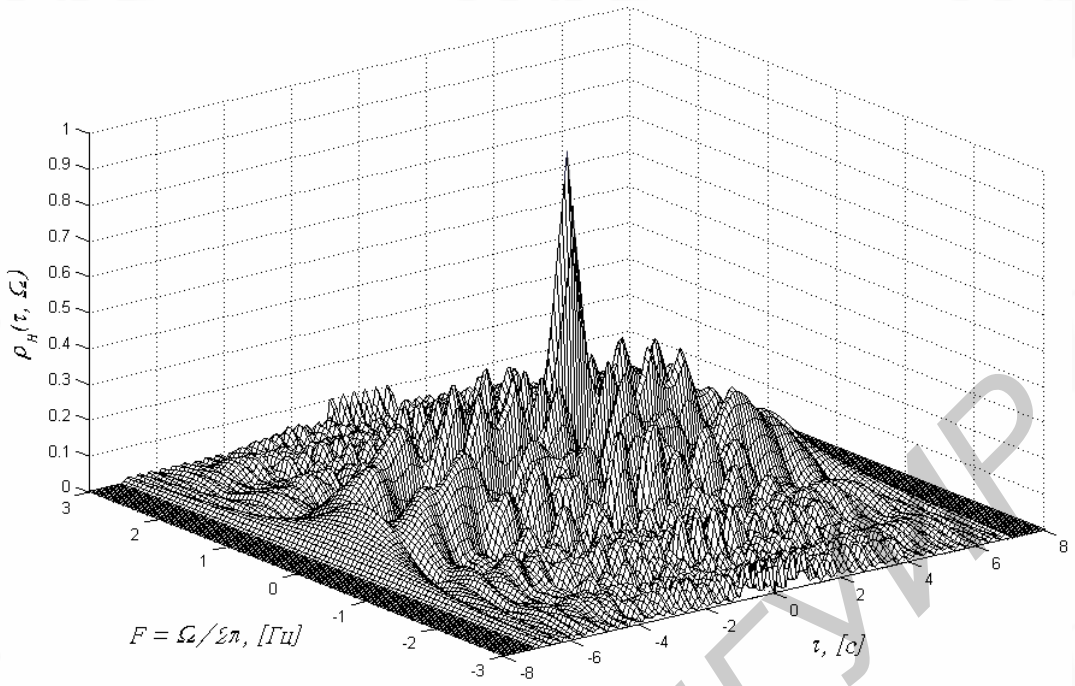


Рис. 4.13. Тело неопределенности радиоимпульса с фазовой манипуляцией кодом Баркера

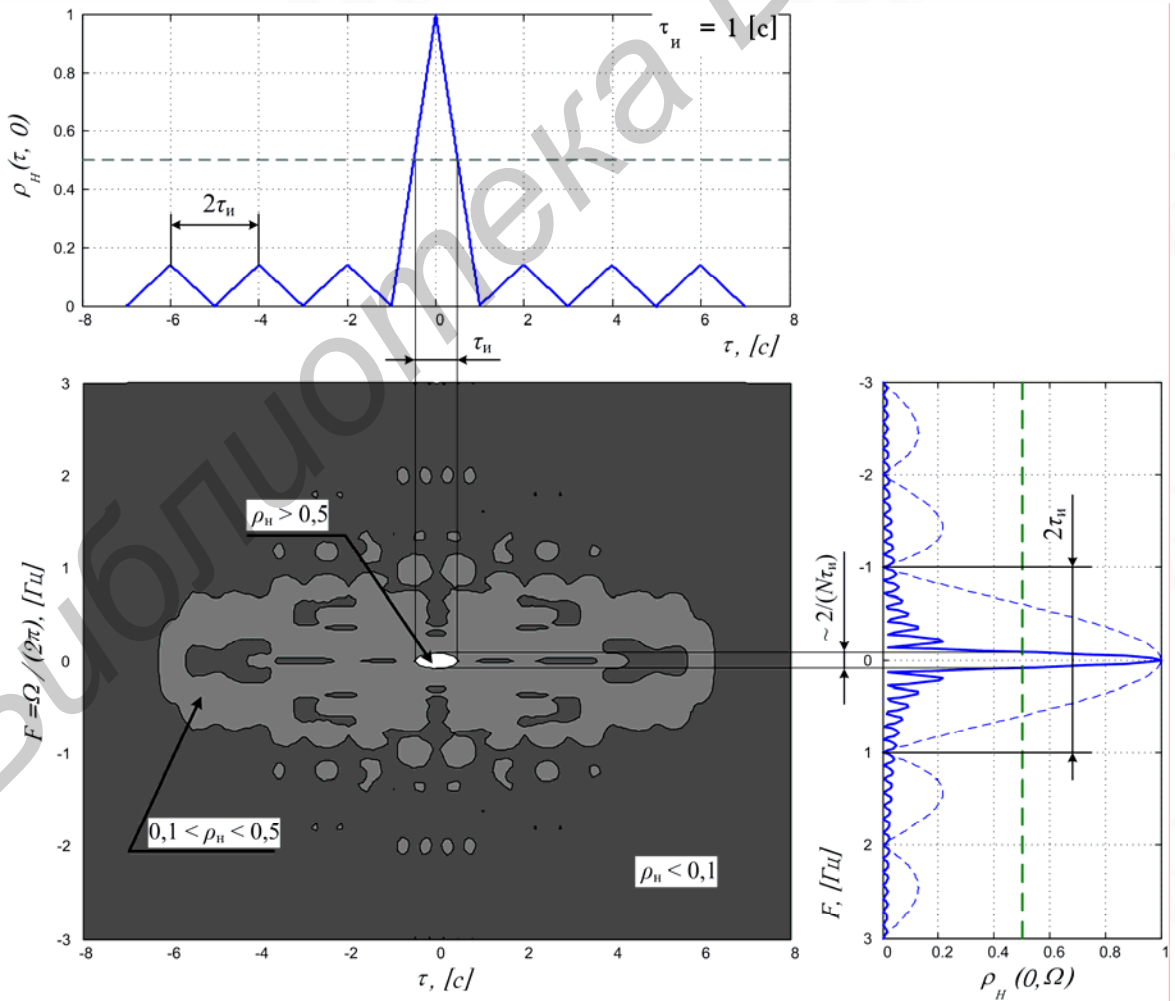


Рис. 4.14. Сечения ТН радиоимпульса с фазовой манипуляцией кодом Баркера

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 4.

1. Объясните различия в задачах различения и разрешения двух сигналов.
2. Поясните связь функции неопределенности с разрешающей способностью сигналов по частоте и по времени.
3. Что является мерой разрешения по угловой координате и по дальности?
4. Проанализируйте диаграмму неопределенности прямоугольного радиоимпульса при различных длительностях сигнала.
5. Сравните разрешающую способность по частоте и по времени для радиоимпульсов с прямоугольной огибающей при отсутствии и наличии внутриимпульсной линейной частотной модуляции.
6. Запишите аналитическое выражение для расчета тела неопределенности радиоимпульса с внутриимпульсной фазовой манипуляцией кодом Баркера длиной 7.
7. Как изменится автокорреляционная функция и диаграмма неопределенности прямоугольной пачки, состоящей из 7 радиоимпульсов при изменении амплитуды импульсов пачки по закону последовательности рис. 2.10 (знаку «минус» соответствует нулевая амплитуда)?
8. Покажите, что коэффициент частотно-временной связи для ЛЧМ-радиоимпульса больше, чем для фазоманипулированного радиоимпульса.

## ГЛАВА 5. ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Многие задачи РЭИС решаются на основе количественных соотношений теории информации. Основания этой теории заложены в трудах К. Шеннона. Эта теория позволяет определить потенциальные характеристики систем с точки зрения информационных критериев. основополагающим в теории информации является информационное описание сигналов и систем.

Рассмотрим дискретные сообщения, состоящие из  $n$  элементов, каждый из которых может находиться в одном из  $m$  различных равновероятных фиксированных состояний. Количество различных сообщений, которые можно составить из  $n$  элементов, определяется величиной

$$L_c = m^n. \quad (5.1)$$

Обычно принимают логарифмическую меру количества информации, определяемую логарифмом числа возможных состояний:  $I_0 = \log L_i = n_i \log m_i$ .

Главная особенность введенной меры состоит в том, что величина  $I_0$  обладает свойством **аддитивности** числа элементов сообщения и суммы различных сообщений, т. е. при  $k$  источниках сообщений

$$I_0 = \sum_{i=1}^k I_{0i},$$

где  $I_{0i} = \log L_i = n_i \log m_i$ .

Если основание логарифма  $e = 2,71828\dots$ , количество информации выражается в **натуральных единицах**:  $I_{0e} = \ln L_i = n \ln m$ . При основании логарифма, равном двум, – в **двоичных единицах**, или **битах**:  $I_0 = \log_2 L_c = n \log_2 m$ . В дальнейшем будут использоваться в основном двоичные единицы, причем символ  $\log_2$  заменяется символом  $\log$ .

Количество информации, приходящейся на один элемент, называют удельной информативностью или энтропией сообщений и обозначают буквой  $H$ :

$$H = \frac{I_0}{n} = \frac{1}{n} \log L_c = \log m.$$

Если элементы сообщения являются независимыми и могут принимать любые из  $m$  состояний  $x_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , с вероятностями  $p_k$ , а число элементов, принявших состояние  $x_k$ , равно  $n_k$ , общее число элементов сообщения определяется соотношением

$$n = \sum_{k=1}^m n_k.$$

**Среднее количество информации**  $I_0$ , содержащейся в одном сообщении, определяется средним числом всех возможных сообщений:

$$I_0 = \log L_c = -n \sum_{k=1}^m p_k \log p_k .$$

Разделив среднее количество информации  $I_0$ , содержащейся в одном сообщении, на число его элементов, получим **среднюю энтропию сообщений**:

$$H = \frac{I_0}{n} = - \sum_{k=1}^m p_k \log p_k = \sum_{k=1}^m p_k \log [1/p_k] . \quad (5.2)$$

Величина  $\log(1/p_k)$  представляет **частную энтропию**, характеризующую информативность  $k$ -го состояния. В дальнейшем, употребляя понятия средней энтропии и среднего количества информации, будем называть их соответственно энтропией и количеством информации.

Основные свойства энтропии заключаются в следующем: энтропия есть вещественная, ограниченная и неотрицательная величина; энтропия равна нулю, если сообщение известно заранее; энтропия максимальна, если все состояния элементов сообщения равновероятны; энтропия двоичных сообщений ( $m = 2$ ) может изменяться в пределах от нуля до единицы.

Рассмотрим **непрерывные** по состояниям элементы. В этом случае считается заданной плотность вероятности  $W(x)$  состояний элементов непрерывного сообщения. Заменяя непрерывные состояния  $x$  дискретными  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , отстоящими друг от друга на расстоянии  $\Delta x$ , можно определить вероятность  $p_k = W(x_k)\Delta x$ . На основании выражения (5.2) определим энтропию сообщений:

$$H(X) = - \sum_{k=1}^m W(x_k)\Delta x \log [W(x_k)\Delta x] .$$

При уменьшении  $\Delta x$  с учетом условия нормировки для плотности вероятности  $W(x)$  получим в пределе

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) \log W(x) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x . \quad (5.3)$$

В практических приложениях обычно интересуются приращением энтропии, поэтому величину  $\log \Delta x$ , зависящую только от выбранного интервала  $\Delta x$ , не учитывают и пользуются **дифференциальной энтропией**

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) \log W(x) dx . \quad (5.4)$$

Дифференциальная энтропия может принимать и отрицательные значения, однако она сохраняет свойство аддитивности, характерное для энтропии. Взаимная дифференциальная энтропия двух случайных величин  $\lambda$  и  $r$  оп-

ределяется соотношением

$$b(\lambda, r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda, r) \log W(\lambda, r) dr. \quad (5.5)$$

Взаимную информацию  $I(\lambda, r)$  между непрерывными величинами  $\lambda$  и  $r$  можно определить как разность дифференциальных энтропий

$$I(\lambda, r) = b(\lambda) - b(\lambda | r) = b(r) - b(r | \lambda), \quad (5.6)$$

где  $b(\lambda | r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda, r) \log W(\lambda | r) dr$  – условная дифференциальная энтропия.

Две реализации сообщений, принятую  $\lambda^*(t)$  и переданную  $\lambda(t)$ , называют эквивалентными, если различие между ними несущественно. В качестве критерия эквивалентности обычно используют средний квадрат разности между принятым и переданным сообщениями, причем мощность (дисперсия) переданного сообщения  $\sigma_\lambda^2$  считается заданной. Разность  $\varepsilon(t) = \lambda^*(t) - \lambda(t)$  называется шумом воспроизведения. При отсутствии систематических ошибок  $\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$ , средний квадрат  $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$  совпадает с дисперсией шума воспроизведения  $\sigma_\varepsilon^2$ . Сообщения  $\lambda(t)$  и  $\lambda^*(t)$  называют эквивалентными, если среднеквадратическое отклонение  $\sigma_\varepsilon$  не превышает заданной величины  $\varepsilon_0$  или

$$\sigma_\varepsilon^2 < \sigma_0^2. \quad (5.7)$$

Количество информации  $I(\lambda, \lambda^*)$  зависит от дифференциальной энтропии  $b(\lambda)$  и от критерия эквивалентности, определяющего условную плотность вероятности  $W(\lambda^* | \lambda)$  и, следовательно, условную энтропию  $b(\lambda | \lambda^*)$ .

**Эпсилон-энтропией**  $h_\varepsilon(\lambda)$  называют минимальное количество информации, содержащееся в сообщении  $\lambda^*(t)$  относительно  $\lambda(t)$ , при котором они еще эквивалентны, т. е.  $\sigma_\varepsilon^2 < \sigma_0^2$ . В соответствии с (5.5) имеем

$$H_\varepsilon(\lambda) = \min I(\lambda, \lambda^*) = b(\lambda) - \max b(\lambda | \lambda^*), \quad (5.8)$$

где минимум берется по всем условным распределениям  $W(\lambda^* | \lambda)$ , для которых  $\sigma_\varepsilon^2 < \sigma_0^2$ . Эпсилон-энтропия определяет количество существенной информации, содержащейся в одном отсчете непрерывного сообщения.

Рассмотрим источник непрерывного сообщения  $\lambda(t)$ , представляющего стационарный гауссовский процесс с заданной мощностью  $\sigma_\lambda^2$ . Используем критерий эквивалентности (5.7). Процесс  $\lambda(t)$  можно представить разностью  $\lambda^*(t) - \varepsilon(t)$ , поэтому условная дифференциальная энтропия  $b(\lambda | \lambda^*)$  при заданном сообщении  $\lambda(t)$  полностью определяется шумом воспроизведения  $\varepsilon(t)$ . Отсюда получаем условие

$$\max b(\lambda | \lambda^*) = \max b(\varepsilon). \quad (5.9)$$

Определим, при каком распределении  $W(\varepsilon)$  энтропия  $h(\varepsilon)$  максимальна. Считаем, что дисперсия  $\sigma_\varepsilon^2$  фиксирована. С учетом ограничений на нормировку плотности вероятности  $W(\varepsilon)$  функционал  $F$ , экстремум которого необходимо найти, в соответствии с методами вариационного исчисления записывается в виде

$$F = - \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon) \log W(\varepsilon) d\varepsilon + a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon) d\varepsilon + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 W(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (5.10)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – коэффициенты, которые называют неопределенными множителями Лагранжа.

Для обеспечения экстремума функционала  $F$  необходимо удовлетворить уравнению

$$\left. \frac{dF}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = 0, \quad (5.11)$$

где  $\gamma$  – переменная, входящая в качестве коэффициента перед вариацией  $W_\gamma(\varepsilon)$ . В (5.11) подставляется функция  $W(\varepsilon)$ , представленная в виде

$$W(\varepsilon) = W_0(\varepsilon) + \gamma W_{\hat{a}}(\varepsilon). \quad (5.12)$$

Здесь  $W_0(\varepsilon)$  – искомая функция, обеспечивающая выполнение условия (5.9).

После подстановки (5.12) в (5.10) и дифференцирования по  $\gamma$  получим уравнение (5.11) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\varepsilon) \left[ -\log W(\varepsilon) + a_1 + a_2 \varepsilon^2 \right] d\varepsilon = 0.$$

Отсюда с учетом того, что  $W(\varepsilon) \geq 0$ , имеем

$$\log W(\varepsilon) = -a_1 - a_2 \varepsilon^2. \quad (5.13)$$

Множители Лагранжа определяются из ограничительных условий на дисперсию и нормировку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -a_1 - a_2 \varepsilon^2 \right] d\varepsilon = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \exp \left[ -a_1 - a_2 \varepsilon^2 \right] d\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2.$$

После вычисления множителей  $a_1$  и  $a_2$  окончательно получим

$$W_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left[ -\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right]. \quad (5.14)$$

Таким образом, дифференциальная энтропия  $h(\varepsilon)$  при фиксированном значении  $\sigma_\varepsilon^2$  максимальна, если распределение  $W(\varepsilon)$  – гауссовское. Максимальное значение энтропии определяется выражением

$$\max b(\varepsilon) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_\varepsilon^2}. \quad (5.15)$$



На основании (5.8) и (5.15) энтальпия гауссовского непрерывного источника на один отсчет равна

$$H_{\varepsilon}(\lambda) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_{\lambda}^2} - \log \sqrt{2\pi e \sigma_{\varepsilon}^2} = 0,5 \log \frac{\sigma_{\lambda}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2}. \quad (5.16)$$

Отношение  $q_0 = \sigma_{\lambda}^2 / \sigma_{\varepsilon}^2$  характеризует минимальное отношение сигнал/шум, при котором сообщения  $\lambda^*(t)$  и  $\lambda(t)$  можно считать эквивалентными. Значение  $q_0$  зависит от характера передаваемых сообщений. При независимых отсчетах сообщений содержащаяся в них информация складывается.

Производительность источника непрерывных сообщений определяется как количество информации, выдаваемое источником в одну секунду при заданном критерии эквивалентности. Если средняя скорость выдачи независимых отсчетов сообщения равна  $\nu$ , то энтальпия-производительность

$$H_{\varepsilon}'(\lambda) = \nu H_{\varepsilon}(\lambda) = \nu \left[ b(\lambda) - \log \sqrt{2\pi e \sigma_{\varepsilon}^2} \right]. \quad (5.17)$$

Согласно теореме В. А. Котельникова, для источника непрерывных сообщений, спектр которых ограничен полосой  $F_B$ , шаг временной дискретизации  $\Delta t = 1/(2F_B) = 1/\nu$ . При равномерном спектре в полосе  $F_B$  эти отсчеты некоррелированы и, следовательно, для гауссовского источника независимы. Тогда можно записать

$$H_{\varepsilon}'(\lambda) = 2F_B H_{\varepsilon}(\lambda), \quad (5.18)$$

и с учетом (5.16) получим следующее выражение, определяющее энтальпия-производительность гауссовского источника с равномерным в полосе спектром:

$$H_{\varepsilon}'(\lambda)_{\Gamma} = F_B \log \frac{\sigma_{\lambda}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} = F_B \log q_0. \quad (5.19)$$

Количество информации, выдаваемое гауссовским источником за время  $T_c$ , равно

$$T_c H_{\varepsilon}'(\lambda)_{\Gamma} = T_c F_B \log q_0 \quad (5.20)$$

и совпадает с определением объема сигнала, если считать, что динамический диапазон сигнала равен  $\log q_0$ . Поскольку производительность гауссовского источника квазиглобального шума больше, чем любого другого источника с той же мощностью, выражение (5.20) определяет максимальное количество информации, выдаваемое источником за время  $T$ .

Избыточность источника непрерывных сообщений без памяти можно определить соотношением

$$\kappa_H = \frac{H_{\varepsilon}(\lambda)_{\Gamma} - H_{\varepsilon}(\lambda)}{H_{\varepsilon}(\lambda)_{\Gamma}} = 1 - \frac{h(\lambda) \log \sqrt{2\pi e \sigma_{\varepsilon}^2}}{0,5 \log \sqrt{2\pi e \sigma_{\lambda}^2 / \sigma_{\varepsilon}^2}}. \quad (5.21)$$

Избыточность источника равна нулю только в том случае, если распределение сигнала является гауссовским.

Под верностью передачи в соответствии с квадратичным критерием эк-

вивалентности понимается вероятность того, что сообщение будет принято при отношении мощностей сигнала и шума на выходе приемника не меньше заданной величины  $q_0$ .

В радиоэлектронных системах приходится иметь дело с различными источниками сообщений, образующих взаимозависимую совокупность. Для характеристики совокупности сообщений вводят понятия количества информации и энтропии. Рассмотрим два источника сообщений  $X$  и  $Y$ . Взаимная статистическая связь между сообщениями характеризуется условными вероятностями  $p(y_i | x_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Например, для данного фиксированного состояния  $x_k$  совокупность условных вероятностей  $p(y_i | x_k)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , определяет **частную условную энтропию**, характеризующую информативность сообщений  $Y$ , после того, как стало известным состояние  $x_k$ :

$$H(Y | x_k) = - \sum_{j=1}^m p(y_j | x_k) \log p(y_j | x_k).$$

Эта энтропия, усредненная по всем состояниям  $x_k$  с учетом вероятностей  $p(p_k)$  появления каждого из состояний, определяет **общую условную энтропию** сообщений  $Y$  относительно сообщений  $X$ :

$$H(Y | X) = \sum_{k=1}^m p(x_k) H(Y | x_k) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_k) p(y_j | x_k) \log p(y_j | x_k). \quad (5.22)$$

Поскольку вероятность совместного появления двух зависимых состояний  $x_k$  и  $y_j$  определяется равенством

$$p(x_k, y_j) = p(x_k) p(y_j | x_k), \quad (5.23)$$

общая условная энтропия в соответствии с формулой (5.22) выражается в виде

$$H(Y | X) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_k, y_j) \log p(y_j | x_k). \quad (5.24)$$

Она характеризует энтропию сообщений  $Y$ , когда уже известна энтропия сообщений  $X$ . При статистически независимых сообщениях  $X$  и  $Y$  условная энтропия  $H(Y | X)$  равна безусловной:  $H(Y | X) = H(Y)$ , т. е. вся информация, содержащаяся в сообщениях  $Y$ , является новой по отношению к информации, содержащейся в сообщениях  $X$ . При жесткой связи сообщений  $X$  и  $Y$  (вероятности  $p(y_i | x_k)$  равны либо нулю, либо единице) условная энтропия  $H(Y | X) = 0$ , т. е. сообщения  $Y$  не содержат никакой новой информации сверх той, которая содержится в сообщениях  $X$ .

Если для двух множеств  $X$  и  $Y$  возможно всего  $mn$  различных состояний, то энтропия объединения двух источников сообщений определяется выражением

$$H(X, Y) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_k, y_j) \log p(x_k, y_j). \quad (5.25)$$

На основании соотношения (5.23) энтропию  $H(X, Y)$  можно представить в виде

$$H(X, Y) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_k) p(y_j | x_k) \log p(x_k) - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_k, y_j) \log p(y_j | x_k). \quad (5.26)$$

С учетом условия нормировки  $\sum_{j=1}^n p(y_j | x_k) = 1$  и соотношения (5.24) выра-

жение (5.26) приводится к виду

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X), \quad (5.27)$$

т. е. энтропия объединения равна сумме безусловной энтропии  $H(Y)$  и условной энтропии  $H(Y | X)$ . Здесь условная энтропия представляет добавочную энтропию, которую дают сообщения  $Y$  при условии, что энтропия сообщений  $X$  уже известна.

Очевидно, что  $H(X, Y) = H(Y, X)$ , откуда следует

$$H(X, Y) = H(Y) + H(Y | X). \quad (5.28)$$

На основании свойств условной энтропии можно утверждать, что при статистически независимых сообщениях  $X$  и  $Y$  энтропия объединения равна сумме энтропий сообщений  $X$  и  $Y$ . В случае полной статистической зависимости  $X$  и  $Y$  условная энтропия равна нулю, поэтому  $H(X, Y) = H(X) = H(Y)$ , т. е. энтропии сообщений  $X$  и  $Y$  равны друг другу.

Для непрерывных сообщений условная энтропия  $H(X | y)$  при фиксированном состоянии  $y$  по аналогии с выражением (5.3) определяется условной плотностью вероятности  $W(x | y)$ :

$$H(X | y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} W(x | y) \log [W(x | y) \Delta x] dx. \quad (5.29)$$

Количество информации, содержащейся во всех возможных сообщениях  $X$  для всех возможных сообщений  $Y$ , определяется усреднением условной энтропии  $H(X | y)$  с учетом  $W(x | y)$ :

$$H(X | Y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} W(y) H(X | y) dy,$$

или на основании соотношения (5.29)

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) \log[W(x, y)\Delta x] dx = \\
 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) \log[W(y|x)\Delta y] dx.
 \end{aligned}$$

Энтропия объединений непрерывных сообщений  $H(X, Y)$  вычисляется по формулам (5.27) и (5.28).

Введенные понятия используются при информационном описании сообщений и систем передачи и приема информации.

## 5.2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ПРИЕМА СИГНАЛОВ

В системах передачи информации сообщения  $X$  искажаются помехами, в результате чего принимаемые сообщения имеют состояния  $Y$ , которые отличаются от  $X$ . Помехи, действующие в канале, можно охарактеризовать энтропией  $H(n)$ . Если передаваемое количество информации определяется энтропией  $H(X)$ , а принятое – энтропией  $H(Y)$ , то условная энтропия  $H(X|Y)$  характеризует количество информации, которое требуется добавить к  $H(Y)$  для того, чтобы найти энтропию объединения  $H(X, Y)$ . Условная энтропия  $H(X|Y)$  представляет **потерю информации**, обусловленную воздействием помех на передаваемое сообщение. Количество информации, содержащейся в принятой совокупности сообщений  $Y$  относительно переданной совокупности  $X$ , обозначим  $I(Y|X)$  или  $I(Y, X)$  и определим разностью

$$I(Y, X) = H(X) - H(X|Y). \quad (5.30)$$

Выражение (5.30) определяет количество информации, передаваемой в среднем по каналу в условиях воздействия помех.

В предельном случае, когда помехи отсутствуют, сообщения  $X$  и  $Y$  статистически полностью зависимы, поэтому условная энтропия  $H(X|Y) = 0$  и, следовательно,  $I(X, Y) = H(X)$ . При большом уровне помех сообщения  $X$  и  $Y$  становятся статистически независимыми, поэтому  $H(X|Y) = H(X)$  и количество информации, содержащейся в  $Y$  относительно  $X$  равно нулю:  $I(Y, X) = 0$ .

На основании соотношений (5.10) и (5.11) можно показать справедливость равенства

$$I(Y, X) = I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (5.31)$$

Здесь условная энтропия  $H(Y|X)$  представляет добавочную по отношению к  $H(X)$  энтропию, которую дает знание состояний  $Y$ . При статистической независимости сообщений  $X$  и помехи, имеющей состояния  $N$ , добавочная энтропия обусловлена только помехами, т. е.

$$H(Y|X) = H(N). \quad (5.32)$$

С учетом выражения (5.32) количество информации (5.14) можно записать в

виде

$$I(Y | X) = H(Y) - H(N).$$

Следовательно, для определения количества информации, содержащейся в  $Y$  относительно  $X$ , необходимо из общей средней энтропии принятых сообщений  $H(Y)$  вычесть энтропию помех  $H(N)$ .

Выражая условную энтропию  $H(Y | X)$  в соответствии с соотношением (5.27) через разность  $H(X, Y) - H(X)$ , представим **полную взаимную информацию**  $I(Y, X)$ , заданную формулой (5.31), в виде

$$I(Y, X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

или в развернутом виде

$$I(Y, X) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p(x_k | y_j) \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)p(y_j)}. \quad (5.33)$$

При записи выражения (5.33) учтены соотношения (5.26), (5.27), а также выражения для энтропий  $H(X)$  и  $H(Y)$ . Используя равенство (5.23), можно привести выражение для общего среднего количества информации, содержащейся в  $Y$  относительно  $X$ , к виду

$$I(Y, X) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m p(y_j)p(x_k | y_j) \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)}. \quad (5.34)$$

Входящая в это выражение величина

$$I(y_j, X) = \sum_{k=1}^m p(x_k | y_j) \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)}$$

представляет частное количество информации, содержащейся в  $y_j$ , относительно совокупности передаваемых состояний  $X$ .

Частное количество информации, содержащейся в  $y_j$  относительно некоторого  $x_k$  в соответствии с соотношением (5.35) определяется выражением

$$I(y_j, x_k) = \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)}. \quad (5.35)$$

Здесь вероятность  $p(x_k)$  является априорной, а условная вероятность  $p(x_k | y_j)$  – апостериорной.

В теории оптимального приема сигналов используется **критерий максимума апостериорной вероятности**. Этот критерий может быть приведен к **критерию максимума частного количества информации**, т. е. к максимизации выражения (5.41). Согласно этому критерию, после приема  $y_j$  следует считать переданным с наибольшей достоверностью то сообщение из  $x_k$ , которое соответствует максимуму количества информации  $I(y_j, x_k)$ :

$$I_{\max}(y_j, x_k) = \left[ \log \frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)} \right]_{\max}. \quad (5.36)$$

Для сравнения частных количеств информации, содержащихся в  $y_j$  от-

носителем произвольно взятых  $x_k$  и  $x_l$  из множества состояний  $x_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , вводят **разность частных количеств информации**:

$$I(y_j, x_k) - I(y_j, x_l) = \log \frac{p(x_k | y_j) p(x_l)}{p(x_l | y_j) p(x_k)}. \quad (5.37)$$

Имея в виду равенство

$$\frac{p(x_k | y_j)}{p(x_k)} = \frac{p(y_j | x_k)}{p(y_j)}, \quad (5.38)$$

приведем формулу (5.37) к виду

$$I(y_j, x_k) - I(y_j, x_l) = \log \frac{p(y_j | x_k)}{p(y_j | x_l)}. \quad (5.39)$$

При положительной разности (5.37) или (5.39) наиболее вероятным считается факт передачи сообщения  $x_k$ , при отрицательной разности – факт передачи сообщения  $x_l$ .

Выражения, аналогичные (5.33)...(5.39), могут быть получены для сообщений с непрерывным распределением состояний. Например, для количества информации  $I(Y, X)$  имеем

$$I(Y, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, y) \log \frac{W(x, y)}{W(x)W(y)} dx.$$

Количество информации, содержащейся в принятом одиночном состоянии  $y$  относительно частного состояния  $x$  из совокупности передаваемых состояний  $X$ , определяется выражением

$$I(y, x) = \log \frac{W(x | y)}{W(x)} = \log \frac{W(y | x)}{W(y)}. \quad (5.40)$$

Частное количество информации  $I(y, X)$ , которое содержится в состоянии  $y$  относительно  $X$ , вычисляется путем интегрирования выражения (5.40) с учетом апостериорной плотности вероятности  $W(x | y)$ :

$$I(y, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x | y) \log \frac{W(y | x)}{W(y)} dx. \quad (5.41)$$

Под  $y$  в выражении (5.41) понимаем конкретную реализацию наблюдаемой смеси сигнала и шума, т. е.  $y = r(t)$ . В этом случае  $I(y, X)$  представляет функционал.

Разность частных количеств информации (5.39) выражается через отношение правдоподобия. Для этого реализацию  $r(t)$  представим набором дискретных значений  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ , как это было сделано в п. 2.2.1. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} p(r | x_k) &= p(y_j | x_k) = W(\mathbf{r} | x_k) d\mathbf{r}; \\ p(r | x_l) &= p(y_j | x_l) = W(\mathbf{r} | x_l) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Подставив выражения (5.42) в правую часть соотношения (5.39), получим

$$I(r, x_k) - I(r, x_l) = \log l_{kl}(r),$$

где  $l_{kl}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r} | x_k) / W(\mathbf{r} | x_l)$  – отношение правдоподобия. Для помехи  $n(t)$ , представляющей белый гауссовский шум, отношение правдоподобия  $l_{kl}(\mathbf{r})$  имеет вид, аналогичный выражению (2.83).

**Информационный критерий** приема сигналов состоит в определении разности количеств информации, содержащейся в принятом колебании, относительно переданных сигналов  $x_k$  и  $x_l$ ; он сводится к вычислению двоичного логарифма отношения правдоподобия и сравнению его с порогом  $l$ :

$$I(r, x_k) - I(r, x_l) = \log I_{kl}(r) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} x_k \\ x_l \end{matrix} l_0. \quad (5.43)$$

При повышении порога  $l$  принимается решение о наличии в смеси  $r$  сигнала  $x_k$ , в противном случае – о наличии в смеси сигнала  $x_l$ . Таким образом, рассмотренные в предыдущих главах оптимальные приемники, обеспечивающие максимум правдоподобия, являются оптимальными и по информационному критерию.

### 5.3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ВЫБОРА СИГНАЛОВ

С помощью информационного критерия (5.43) можно определить сигналы, обеспечивающие наименьшую вероятность ошибки при их различении. Результаты должны привести к выводам, аналогичным ранее сделанным, например в п. 2.5.1. Совпадение результатов обусловлено взаимосвязью информационного критерия и критерия максимального правдоподобия. Вместе с тем информационный подход позволяет решить некоторые задачи, связанные с выбором сигналов, которые при использовании традиционных критериев оказываются трудными даже в плане постановки.

Рассмотрим нетрадиционные информационные критерии. В задачах адаптивного приема сигналов целесообразно применять **критерий максимизации скорости изменения количества информации**, в соответствии с которым можно обеспечить наименьшее время, затрачиваемое на оценку неизвестного параметра сигнала, т. е. наименьшее время адаптации. Обозначив через  $X$  совокупность значений неизвестного параметра, запишем указанный критерий:

$$\frac{\partial I(r, X)}{\partial t} = \max. \quad (5.44)$$

Используя выражения (5.40) и (5.41), представим производную  $\partial I / \partial t$  в виде

$$\frac{\partial I(r, X)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial W(x|r)}{\partial t} \log W(r|x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x|r) \frac{\partial \log W(x)}{\partial t} dx. \quad (5.45)$$

При записи выражения (5.45) учтено условие нормировки, из которого следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial W(x|r)}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} W(x|r) dx \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \{I\} = 0.$$

Поскольку априорная плотность вероятности  $W(x)$  не зависит от времени, производная по времени от логарифма этой плотности вероятности равна нулю, поэтому второй интеграл в выражении (5.45) можно положить равным нулю. Тогда критерий (5.44) приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial W(x|r)}{\partial t} \log W(r|x) dx = \max. \quad (5.46)$$

Воспользуемся неравенством Шварца–Буняковского для произвольных, в общем случае комплексных, функций  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx. \quad (5.47)$$

Знак равенства в соотношении (5.31) имеет место в том и только в том случае, если  $g(x) = C_0 f(x)$ , где  $C_0$  – некоторая постоянная.

На основании неравенства Шварца–Буняковского максимум интеграла в формуле (5.46) достигается при выполнении условия

$$\log W(r|x) = C_0 \frac{\partial W(x|r)}{\partial t}. \quad (5.48)$$

Таким образом, наибольшая скорость изменения количества информации, содержащейся в реализации  $r(t)$  относительно неизвестного параметра  $x$ , в каждый момент времени обеспечивается при равенстве логарифма функционала правдоподобия и производной по времени от апостериорной плотности вероятности параметра  $x$ .

В случае, если параметр  $x$  сигнала  $s(t, x)$  является неэнергетическим, а шум представляет гауссовский случайный процесс с характеристиками (1.16), можно воспользоваться ранее полученным выражением (3.12) и записать логарифм функционала правдоподобия в виде

$$\log W(r|x) = (\log e) \frac{2}{N_0} \int_0^t r(t)s(t, x)dt = (\log e) \frac{2}{N_0} z_t(x),$$

где  $z_t(x)$  – текущее значение корреляционного интеграла:



$$z_t(x) = \int_0^t r(t)s(t, x)dt.$$

Рассмотрим разность значений логарифма функционала правдоподобия для двух значений времени:  $t$  и  $t - T$ , где  $T$  – фиксированная величина. Тогда

$$\log W(r|x, t) - \log W(r|x, t - T) = (\log e) \frac{2}{N_0} \int_{t-T}^t r(t)s(t, x)dt = (\log e) q z_H(t, x), \quad (5.49)$$

где  $q = 2E / N_0$  – отношение энергии сигнала  $E_t = \int_{t-T}^t |s(t, x)|^2 dt$  на интервале  $(t - T, t)$  к спектральной плотности  $N_0 / 2$  белого шума;

$$z_H(t, x) = \frac{1}{E_t} \int_{t-T}^t r(t)s(t, x)dt \quad (5.50)$$

есть нормированное значение корреляционного интеграла для фиксированного по длительности временного «окна»  $[t - T, t]$ . Усредненное по множеству реализаций шума значение корреляционного интеграла (5.34) с учетом условия  $\langle n(t) \rangle = 0$  определяет нормированную автокорреляционную функцию сигнала:

$$\langle z_H(t, x) \rangle = \rho_s(t, x) = \frac{1}{E_t} \int_{t-T}^t s(t)s(t, x)dt.$$

Операцию статистического усреднения можно применить к обеим частям равенства (5.48). Вычтем почленно такие равенства, взятые для двух моментов времени:  $t$  и  $t - T$ . Тогда в левой части получим выражение (5.33), а в правой части – разность производных по времени от усредненных апостериорных плотностей вероятности  $\partial \langle W(x|r, t) \rangle / \partial t$  и  $\partial \langle W(x|r, t - T) \rangle / \partial t$ . Таким образом, окончательное соотношение приобретает вид

$$\rho_s(t, x) = \frac{1}{q \log e} C_t \left[ \frac{\partial \langle W(x|r, t) \rangle}{\partial t} - \frac{C_{t-T}}{C_t} \frac{\partial \langle W(x|r, t - T) \rangle}{\partial t} \right]. \quad (5.51)$$

Коэффициенты  $C_t$  и  $C_{t-T}$  определяются из условия нормировки АКФ:  $\rho_s(t, 0) = 1$ .

Соотношение (5.51) означает, что для обеспечения максимальной скорости изменения количества информации необходимо согласование форм АКФ сигнала с текущей функцией апостериорной плотности вероятности  $\partial \langle W(x|r, t) \rangle / \partial t$ . Таким образом, эволюция апостериорной плотности вероятности неизвестного параметра сигнала должна сопровождаться соот-

ветствующей эволюцией автокорреляционной функции сигнала.

Для определения требований к характеристикам сигнала можно воспользоваться критерием (5.36). Потребуем, чтобы оптимальная система обеспечивала в каждый момент времени **максимум количества информации**:

$$I(r, X) = \max, \quad (5.52)$$

где  $I(r, x)$  – количество информации, которое содержится в реализации  $r(t)$  относительно состояний неизвестного параметра  $X$ . На основании соотношения (5.35) критерий (5.52) запишем в виде

$$-\log k + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x|r) \log W(r|x) dx = \max. \quad (5.53)$$

Вновь воспользуемся неравенством Шварца-Буняковского (5.47). Максимум интеграла в левой части соотношения (5.53) обеспечивается при выполнении условия

$$\log W(r|x) = C_0 W(x|r). \quad (5.54)$$

Выполняя операции, аналогичные тем, какие производили при выводе соотношений (5.49) и (5.51), получим из выражения (5.54)

$$\rho_s(t, x) = \frac{1}{q \log e} C_t \left[ \langle W(x|r, t) \rangle - \frac{C_{t-T}}{C_t} \langle W(x|r, t-T) \rangle \right], \quad (5.55)$$

где  $q$  и  $\rho_s(t, x)$  определяются характеристиками сигнала и шума, приведенными выше.

Соотношение (5.55) означает, что для максимизации количества информации  $I(r, X)$  в каждый момент времени необходимо согласовывать форму АКФ сигнала с приращением усредненной апостериорной плотности вероятности. Изменение формы апостериорной плотности вероятности во времени влечет необходимость изменения формы АКФ сигнала. Вариант возможного изменения апостериорной плотности вероятности для нескольких моментов времени, разделенных интервалом  $T$ , показан на рис. 5.1, а. На рис. 5.1, б приведены автокорреляционные функции сигнала, согласованные с апостериорными плотностями вероятности на основании условия (5.55). На рисунке принято, что за время  $T$  апостериорная дисперсия уменьшается в два раза по сравнению с дис-

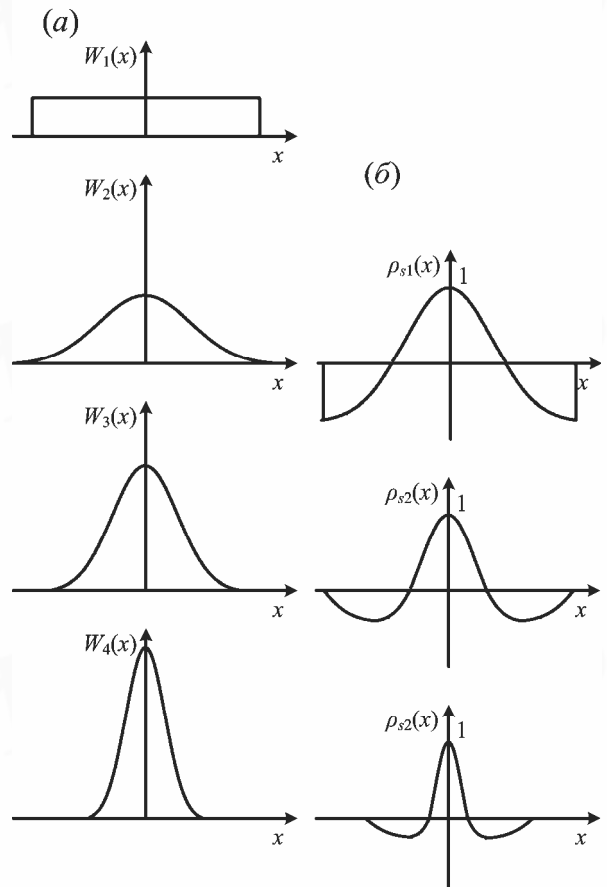


Рис. 5.1. Взаимосвязь АПРВ и АКФ

персией на предыдущем интервале, при этом отношение коэффициента  $C_{t-T} / C_t$  остается постоянным и равным 0,5. Из диаграмм видно, что время корреляции сигнала изменяется от интервала к интервалу, что означает расширение спектра сигнала во времени. Следовательно, произведение полосы спектра на продолжительность интервала  $T$  увеличивается, т. е. происходит увеличение базы сигнала от одного этапа наблюдения продолжительностью  $T$  к другому. Сигналы подобного рода можно назвать **сигналами с переменной базой**.

#### 5.4. ОПТИМИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С АДАПТАЦИЕЙ

Рассмотрим на конкретном примере возможность сокращения времени адаптации (времени, затрачиваемого на оценку неизвестного параметра сигнала с требуемой точностью) за счет рационального выбора характеристик сигнала. Требуемая точность оценки неизвестного параметра определяется условиями захвата сигнала следящим устройством оценки информационного параметра. Например, в следящих системах слежения за задержкой псевдослучайной последовательности (см. п. 3.5.3) дискриминационная характеристика имеет апертуру, размеры которой определяются длительностью элемента  $\tau$ , ПСП. Вместе с тем область начальной неопределенности задержки принимаемой ПСП может охватывать интервал, примерно равный периоду ПСП, т. е.  $N\tau$ , где  $N$  – число элементов ПСП, укладываемых в периоде. При  $N \gg 1$  интервал неопределенности оказывается больше, чем область локализации дискриминационной характеристики. Устранение неопределенности начальной задержки ПСП с точностью до длительности элемента и является задачей устройства адаптации.

Как указывалось в п. 3.6.1, неизвестный параметр сигнала может быть оценен на основе формирования апостериорной плотности вероятности, которая описывается уравнением Р. Л. Стратоновича. Предположим, что апостериорная плотность вероятности неизвестного параметра может быть описана гауссовским распределением. При этом для оценки  $x^*$  неизвестного параметра и его апостериорной дисперсии  $\sigma_x^2$  справедливы уравнения (3.47) и (3.48). Нас будет интересовать уравнение для дисперсии, при этом предполагается, что неизвестный параметр представляет случайную величину. Тогда можно положить  $\alpha = 0$  и  $N_\lambda = 0$ , а уравнение для апостериорной дисперсии примет вид [см. выражение (3.48)]

$$\frac{d\sigma_x^2(t)}{dt} = \sigma_x^4(t) \frac{2}{N_0} r(t) \frac{\partial^2 s(t, x^*)}{\partial x^{*2}}. \quad (5.56)$$

Полагая, что начальное значение дисперсий равно  $\sigma_0^2$ , можно получить решение дифференциального уравнения (5.56) в следующем виде:

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_0^2 \left[ 1 - \sigma_0^2 \frac{2}{N_0} \int_0^t r(t) \frac{\partial^2 s(t, x^*)}{\partial x^{*2}} dt \right]^{-1}. \quad (5.57)$$

Отбрасывая случайный компонент в интеграле выражения (5.57), запишем приближенное соотношение

$$\sigma_x^2(t) \cong \sigma_0^2 \left[ 1 - \sigma_0^2 q(t) \rho_s''(0, t) \right]^{-1}. \quad (5.58)$$

где  $q(t) = 2E(t) / N_0$ ; текущее значение энергии сигнала  $E(t) = \int_0^t s^2(t, x) dt$ ;

$\rho_s''(0, t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^t s(t, x) \frac{\partial^2 s(t, x)}{\partial x^2} dt$ . Здесь функция  $\rho_s''(\varepsilon, t)$  как функция време-

ни и рассогласования  $\varepsilon = x - x^*$  заменена ее значением при  $\varepsilon = 0$ .

Будем считать, что амплитуда  $a_0$  сигнала постоянна, т. е. мощность сигнала не меняется во времени. Тогда энергия  $E(t) = a_0^2 t$  – линейная функция времени. Примером такого сигнала является псевдослучайная последовательность  $g(t)$ , принимающая значения  $\pm 1$  в соответствии с законом чередования элементов, которая представляется выражением (3.75). Если длительность элемента ПСП  $\tau_{\varepsilon 0}$  согласована с интервалом неопределенности, то  $\sigma_0^2 = \tau_{\varepsilon 0}^2$ . В этом случае дискриминационная характеристика устройства слежения за случайной задержкой  $\tau \equiv x$  обеспечивает начальную синхронизацию устройства, поскольку начальное рассогласование по неизвестной задержке не выходит за пределы апертюры дискриминационной характеристики. Формирование этой характеристики, как показано в п. 3.5.3, осуществляется на основе взаимной корреляции ПСП с ее сдвинутыми друг относительно друга копиями  $g(t - \tau^* + \Delta\tau)$  и  $g(t - \tau^* - \Delta\tau)$ , где  $\Delta\tau = 2\tau_{\varepsilon 0}$ . При указанных условиях определение второй производной  $\rho_s''(0, t)$  от АКФ сигнала заменяется вычислением конечных разностей. Для ПСП с элементами, имеющими длительность  $\tau_{\varepsilon 0}$ , имеем

$$\rho_s''(0, t) = -\frac{1}{\tau_{\varepsilon 0}^2}.$$

Отсюда на основании соотношения (5.58) определим закон изменения дисперсии ошибки  $\sigma_x^2$  во времени:

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_0^2 \left[ 1 + \frac{\sigma_0^2 q(t)}{\tau_{\varepsilon 0}^2} \right]^{-1}. \quad (5.59)$$

Для случая  $q(t) = \gamma t$ , где  $\gamma = 2a_0^2 / N_0 = 1$ , на рис. 5.2 приведена зависимость относительной дисперсии  $\sigma_x^2(t) / \sigma_0^2$  от времени. На графике отмечены

требуемое значение дисперсии и время, необходимое для достижения этого значения. Из выражения (5.59), имея в виду условие  $\sigma_{\text{тр}}^2 \ll \sigma_0^2$ , можно определить величину этого времени  $T_{\text{н}}$  по формуле

$$T_{\text{н}} = \frac{\tau_{\text{э}0}^2}{\gamma \sigma_{\text{тр}}^2} \left[ \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{тр}}^2} - 1 \right]. \quad (5.60)$$

Здесь  $\tau_{\text{э}0}$  характеризует время корреляции сигнала, величина  $\gamma$  определяется отношением квадрата амплитуды сигнала к спектральной плотности белого шума. Поскольку принято  $\tau_{\text{э}0} = \sigma_0$ , при заданном значении  $\gamma$  время установления  $T_{\text{н}}$  тем больше, чем больше отношение  $\sigma_0 / \sigma_{\text{тр}}$ .

Рассмотрим возможность уменьшения времени установления требуемого значения апостериорной дисперсии. Такое уменьшение может быть получено за счет изменения во времени значения  $\rho_s''(0, t)$ , если считать действующими ограничения, связанные с постоянством амплитуды сигнала и спектральной плотности шума. Будем считать также, что начальное значение  $\rho_s''(0, 0) = -1/\tau_{\text{э}0}^2$  определяется начальным значением длительности элемента ПСП  $\tau_{\text{э}0}$ , которое обеспечивает согласование начальной апертуры дискриминационной характеристики с интервалом неопределенности по задержке, т. е.  $\tau_{\text{э}0} = \sigma_0$ . Выявление закона изменения  $\rho_s''(0, t)$  во времени основывается на следующих рассуждениях.

Для оптимизации закона изменения  $\rho_s''(0, t)$ , обеспечивающего наименьшее значение времени установления дисперсии ( $T_0 = \min$ ), воспользуемся информационным критерием. Потребуем, чтобы в каждый момент времени обеспечивалась максимальная скорость изменения энтропии, соответствующей апостериорной плотности вероятности оцениваемого параметра  $x$ :

$$\left| \frac{dH(t)}{dt} \right| = \max. \quad (5.61)$$

Поскольку апостериорная плотность вероятности принята гауссовской, для энтропии  $H(t)$  справедливо соотношение

$$H(t) = \log \sqrt{2\pi e \sigma_x^2(t)}, \quad (5.62)$$

где  $\sigma_x^2(t)$  – дисперсия, определяемая выражением (5.58).

После вычисления производной по времени от энтропии с учетом выражения (5.58) имеем

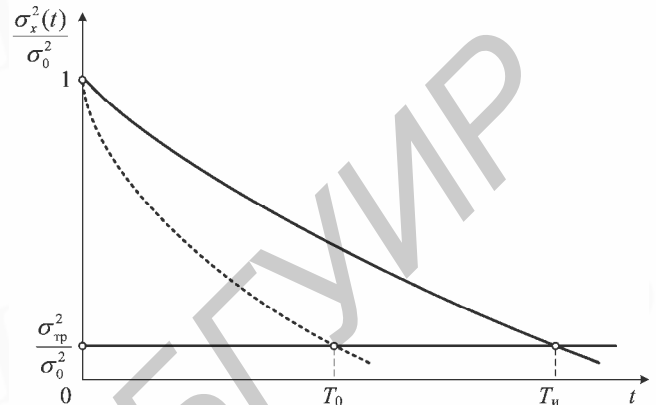


Рис. 5.2. Зависимость относительной дисперсии от времени

$$\left| \frac{dH(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \log e \frac{\sigma_0^2 \gamma / \tau_{\text{э}0}^2}{1 + \sigma_0^2 \gamma \tau / \tau_{\text{э}0}^2}.$$

Отсюда видно, что при постоянном значении  $\rho_s''(0, t) = -1/\tau_{\text{э}0}^2$  энтропия и скорость ее изменения убывают во времени, причем наибольшее значение скорости соответствует моменту времени  $t = 0$ :

$$\left| \frac{dH(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \log e \frac{\sigma_0^2 \gamma}{\tau_{\text{э}0}^2}. \quad (5.63)$$

Следует ожидать, что при неизменной скорости изменения энтропии, равной значению (5.63), удовлетворяется требование (5.62). Тогда закон изменения энтропии можно представить в виде

$$H_0(t) = 0,5 \log \left[ 2\pi e \sigma_0^2 \right] - 0,5 \log e \frac{\sigma_0^2 \gamma}{\tau_{\text{э}0}^2} t. \quad (5.64)$$

При линейном законе убывания энтропии (5.64) дисперсия  $\sigma_{x_0}^2(t)$  в соответствии с соотношением (5.62) изменяется во времени по экспоненциальному закону:

$$\sigma_{x_0}^2(t) = \sigma_0^2 \exp \left[ -\frac{\sigma_0^2 \gamma t}{\tau_{\text{э}0}^2} \right]. \quad (5.65)$$

Относительное значение дисперсии при  $\gamma = 1$  в зависимости от времени показано на рис. 5.2 штриховой линией. Время  $T_0$ , за которое достигается требуемое конечное значение дисперсии  $\sigma_{\text{тп}}^2$ , определяется из выражения (5.65):

$$T_0 = \frac{\tau_{\text{э}0}^2}{\sigma_0^2 \gamma} \ln \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{тп}}^2}.$$

Это время оказывается значительно меньшим, чем в системе, использующей сигнал ПСП с постоянной длительностью элемента  $\tau_{\text{э}0}$ . При  $\sigma_0 \gg \sigma_{\text{тп}}$  сокращение времени адаптации  $T_0$  примерно в

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{тп}}^2 \ln \left[ \sigma_0^2 / \sigma_{\text{тп}}^2 \right]}$$

раз по сравнению с  $T_{\text{н}}$  [см. формулу (5.60)] обеспечивается за счет изменения во времени длительности элементов ПСП, т. е. за счет расширения полосы сигнала во времени. Закон изменения  $\tau_3^2(t)$  от времени определяется уравнением

$$\frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2 \gamma \tau / \tau_3^2(t)} = \sigma_0^2 \exp \left[ -\frac{\sigma_0^2 \gamma}{\tau_{\text{э}0}^2} t \right].$$

Это уравнение получено приравнованием правых частей выражений (5.59) и (5.65), причем в (5.43) вместо  $\tau_{\text{э}0}$  положено  $\tau_3(t)$ . Решение уравнения относи-

тельно  $\tau_3^2(t)$  дает

$$\tau_3^2(t) = \sigma_0^2 \gamma \tau \left\{ \exp \left[ \frac{\sigma_0^2 \gamma}{\tau_{30}^2} t \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (5.66)$$

В следящем устройстве оценки параметра дискриминационная характеристика изменяет свою крутизну и аперттуру во времени. За счет увеличения крутизны происходит возрастание точности оценки параметра. Разделив продолжительность  $T$  сигнала на длительность элемента, получим базу сигнала. Таким образом, величина, обратная (5.66), определяет закон изменения базы сигнала во времени. Величина  $T$  выбирается из условия обеспечения требуемой энергии сигнала, при которой достигается необходимое отношение сигнал/шум, т. е.  $T = q_{\text{тр}} / \gamma$ .

Для упрощения реализации устройств формирования и обработки сигналов с переменной базой можно разбить время адаптации на одинаковые подынтервалы продолжительностью  $T$  каждый. В пределах подынтервала фиксируется длительность элемента ПСП, равная начальному значению в данном подынтервале. Таким образом, плавное изменение базы сигнала заменяется скачкообразным.

Заметим, что сигналы с переменной базой целесообразно применять для начальной синхронизации следящих систем в условиях существенной априорной параметрической неопределенности, когда накладываются ограничения на пиковую мощность сигнала и на объем аппаратурных затрат. При отсутствии этих ограничений решение задачи устранения начальной неопределенности оказывается тривиальным. Например, при отсутствии ограничения на пиковую мощность сигнала оптимальным образом, обеспечивающим практически мгновенное устранение неопределенности по задержке, является короткий импульс, амплитуда которого позволяет получить требуемую энергию сигнала, т. е. требуемое отношение сигнал/шум. Если амплитуда сигнала ограничена и необходимо использовать непрерывные сигналы для начальной синхронизации, но ограничения, связанные с аппаратурными затратами, отсутствуют, можно использовать сложный сигнал продолжительностью  $T$ , имеющий базу  $B$ . База  $B$  определяется из соотношения (5.66) при  $t = T_0$ , т. е. равна конечной базе в рассмотренной оптимальной системе. Для приема такого сигнала используется согласованный фильтр, реакция которого указывает с заданной точностью положение сигнала во времени.

## ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Проанализируйте влияние вероятностей  $p_k$  двух состояний сообщения на среднюю энтропию.
2. Поясните влияние характера плотности непрерывного сообщения на дифференциальную энтропию. Какая из функций плотности вероятности сообщений с ограниченной средней мощностью (дисперсией) обеспечивает наибольшую энтропию?
3. Какая из функций плотности вероятности сообщений с ограниченным пиковым значением обеспечивает наибольшую энтропию?
4. Как влияет статистическая зависимость сообщений на энтропию объединения источников?
5. Определите дифференциальные энтропии источников с гауссовской и равномерной плотностями распределения вероятностей.
6. Объясните связь апостериорной плотности вероятности с корреляционными свойствами сигнала.



## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Информационные технологии в радиотехнических системах. / Под ред. И. Б. Федорова – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 672 с.
2. **Прокис Дж.** Цифровая связь. Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
3. **Чердынцев В. А.** Радиотехнические системы.: Учебн. пособие для вузов. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 369 с.
4. **Апорович А. Ф., Чердынцев В. А.** Радиотехнические системы передачи информации. – Мн.: Выш. шк., 1980. – 214 с.
5. **Варакин Л. Е.** Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
6. **Дымова А, И., Алабац М. Е., Бонч-Бруевич А. М.** Радиотехнические системы / Под ред. А. И. Дымовой. – М.: Сов. радио, 1970. – 440 с.
7. **Клюев Н. И.** Информационные основы передачи сообщений. – М.: Сов. радио, 1966. – 360 с.
8. **Лезин Ю. С.** Введение в теорию и технику радиотехнических систем. – М.: Радио и связь, 1986. – 280 с.
9. **Пенин П. И., Филиппов Л. И.** Радиотехнические системы передачи информации. – М.: Радио и связь, 1984. – 266 с.
10. **Пестряков В. Б., Кузенко В. Д.** Радиотехнические системы. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
11. Радиотехнические системы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника», **Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др.;** Под ред. **Ю. М. Казаринова.** – М.: Высш. шк., 1990. – 496 с.
12. Радиолокационные устройства (теория и принципы построения) / **В. В. Васин, О. В. Власов, В. Б. Григорин-Рябов и др.;** Под ред. **В. В. Григорина-Рябова.** – М.: Сов. радио, 1970. – 580 с.
13. **Тихонов В. И.** Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
14. **Шкирятов В. В.** Радионавигационные системы и устройства. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
15. **Ярлыков М. С.** Статистическая теория радионавигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автопилот	10	– – условного риска	90
Автоподстройка фазовая	97, 117	– Неймана-Пирсона	27
– частотная	123	Ложная тревога	33
Аддитивность	157	Максимум количества информации	170
Алгоритм (правило) обнаружения	19, 30, 78	Манипуляция амплитудная	68
– оптимального оценивания	20, 90	– фазовая	70
– – различения	65, 71	– частотная	69
– – разрешения	20, 141	Мера различимости	144
Ансамбль сигналов	73	Множитель весовой	57
Антенна	8, 15, 127	Модель помехи	21
Апертура антенны пространственная	127	– сигнала	21
База сигнала	15, 106, 171	– – марковская	21
Бит	157	Накопление (суммирование) цифровое	62
Вектор волновой	14	Необнаружение правильное	24
Вероятность		Неравенство Крамера-Рао	92
– апостериорная	90, 110, 125	– Шварца-Буняковского	168
– априорная	109, 126	Область корреляции сильной	147
– ложной тревоги	33, 35, 53	– слабой	147
– неоднозначности оценки	102	Обнаружение сигналов	19
– ошибки аномальной	102	– оценочно-корреляционное	77
– правильного обнаружения	34, 35, 53	– правильное	24
Диаграмма неопределенности	148	Оператор Фоккера–Планка–Колмогорова	110
Единицы двоичные	157	Отношение правдоподобия	30
– натуральные	157	– – условное	43, 91
Жизненный цикл	7	– сигнал/шум	32
Интеграл вероятности	34	Оценка байесовская	91
– корреляционный	31	– несмещенная	92
Интервал неопределенности		– параметра	20
– по задержке	145	– – максимального правдоподобия	92
– по угловой координате	148	Ошибка аномальная	88, 101
– по частоте	146	– вероятная	88
Интерполяция	109	– максимальная	88
Информация	6, 157	– среднеквадратичная	88
– взаимная	165	– разрешения	144
Количество информации	157	Пачка импульсов когерентная	21
– среднее	158	– некогерентная	21
Критерий весовой	27	– нефлуктуирующая	21
– идеального наблюдателя	26	– прямоугольных	153
– информационный	167	Плата за ошибку	26
– максимизации скорости изменения количества информации	167	– средняя	26
– максимума апостериорной информации	165	Плотность вероятности	
– – количества информации	165	– апостериорная	90, 110, 125
– минимума среднего		– априорная	109, 126
квадрата ошибки	89	– гауссовская	109, 122
– – риска	89	– Релея	17

– спектральная	17	Тело неопределенности	107
– – белого шума	22	Тревога ложная	24
Площадь неопределенности эквивалентная	147	Уравнение дальности радиолокации	
– рассеяния эффективная		– правдоподобия	92
Поверхность неопределенности	107	– Стратоновича	110, 121
Помеха аддитивная	16	– Фоккера–Планка–Колмогорова	110
– мультипликативная	16	Устройство адаптивное	124
– узкополосная	17	– пороговое	31
– широкополосная	17	– радиопередающее	8
Помехоустойчивость	13	– радиоприемное	9
– потенциальная	19, 68	Фильтрация сообщений	20
Потеря информации	164	– – линейная	109
Правило обнаружения	30, 78	– – некогерентная	121
– различения сигналов	65, 71	– – нелинейная	110
– решающее	89	– оптимальная	20
Преобразователь безынерционный нелинейный	84	– текущая	109
Приближение гауссовское	115	Фильтр гребенчатый	60
Приемник квадратурный	47	– Калмана	112
– оптимальный	19	– – дискретный	112
Принцип неопределенности	108	– оптимальный	36
Пропуск сигнала	24	– согласованный	36
Процесс Винера	117	Формула Байеса	91
– марковский	110	Функционал отношения правдоподобия	30
Радиоимпульс		Функция автокорреляционная	16
– одиночный	149	– – двухмерная	146
– с линейной ЧМ	150	– весовая антенны	128
Различение сигналов	19	– возбуждения	128
корреляционно-фильтровое	72	– неопределенности	107
Разрешение сигналов	20, 140	– – нормированная по угловой координате	128
Рециркулятор	62	– потерь	88
Риск	26, 88	– правдоподобия	90
– средний	26, 88, 90	– распределения поля в раскрыве	128
– условный	90	– спектральная	17
Сигнал групповой		Характеристика амплитудно-частотная	
– ортогональный	68	– – гребенчатая	60
– пороговый	35	– дискриминационная	120
– простой	16	– обнаружения	35
– противоположный	68	– разрешения	144
– сложный	16	Цикл жизненный РЭИС	7
– с переменной базой	164	Чувствительность характеристик	114
– шумоподобный	16	Шум	17
Синтез структурный	17, 18	– белый	21
Система радиоэлектронная информационная	6	Экстраполяции	109
– передачи информации	8	Энтропия дифференциальная	158
Сообщение	6	– общая условная	162
Соотношение неопределенности	107	– сообщений	158
Статистика достаточная	93	– частная	158
Суммирование взвешенное	58	– – условная	162
		Эпсилон-энтропия	159

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	1
Список сокращений .....	3
<b>Глава 1. Общие сведения о радиотехнических системах .....</b>	<b>6</b>
1.1. Основные определения .....	6
1.2. Классификация радиотехнических систем .....	8
1.3. Основные показатели РЭИС .....	12
1.4. Характеристики сигналов и помех в РЭИС .....	14
1.5. Особенности задач оптимизации РЭИС .....	17
<b>Глава 2. Обнаружение и различение сигналов .....</b>	<b>24</b>
2.1. Качественные показатели и критерии оптимального обнаружения и различения сигналов .....	24
2.2. Оптимальное обнаружение детерминированных сигналов .....	27
2.3. Обнаружение сигналов со случайными параметрами .....	42
2.4. Обнаружение пачек импульсов .....	54
2.5. Различение сигналов .....	64
2.6. Обнаружение и различение сигналов при дискретной и цифровой обработке .....	78
2.7. Обнаружение и различение сигналов в коррелированных и негауссовских шумах .....	81
<b>Глава 3. Оценка и фильтрация параметров сигнала .....</b>	<b>88</b>
3.1. Критерии качества и методика оценки параметров .....	88
3.2. Оценка неэнергетических параметров сигнала .....	93
3.3. Совместная оценка временного запаздывания и частотного сдвига радиосигнала .....	104
3.4. Фильтрация изменяющихся параметров сигнала .....	108
3.5. Нелинейная фильтрация .....	115
3.6. Адаптивный прием сигналов .....	124
3.7. Пространственно-временная обработка сигналов .....	127
<b>Глава 4. Разрешение сигналов .....</b>	<b>140</b>
4.1. Оптимальное разрешение сигналов .....	140
4.2. Оценка разрешающей способности .....	144
4.3. Диаграммы неопределенности сигналов .....	149
<b>Глава 5. Информационные критерии в задачах синтеза сигналов и систем .....</b>	<b>157</b>
5.1. Основные понятия теории информации .....	157
5.2. Информационные критерии приема сигналов .....	164

5.3. Информационные критерии выбора сигналов .....	167
5.4. Оптимизация сигналов в системах с адаптацией .....	171
Рекомендуемая литература .....	177
Предметный указатель .....	178

Библиотека БГУИР

Учебное издание  
**Чердынцев Валерий Аркадьевич**  
**Дубровский Василий Викторович**

**ОПТИМИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

Учебное пособие  
для студентов специальности I-39 01 03  
«Радиоинформатика»

Редактор Т. Н. Крюкова  
Корректор

---

Подписано в печать  
Гарнитура «Таймс».  
Уч.-изд. л.

Формат 60×84 1/16.  
Печать офсетная.  
Тираж 300.

Бумага офсетная  
Усл. печ. л.  
Заказ

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.  
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.  
220013, Минск, П. Бровки, 6