Введём в рассмотрение также $E_n(f)_{A_{p,\alpha}} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \| f - P_n \|_{p,\alpha}$, $n = 0,1,2,...,$ - наилучшее приближение функции f в пространстве $A_{p,\alpha}$ посредством множества $\mathcal{P}_n$.

Выбор производной не случаен и в первую очередь продиктован видом аналога соотношения (1) для пространств типа Бергмана: *пусть* $0 < p < \infty$, $s = 1,2,3,...$, $P_n \in \mathcal{P}_n$, *то*

$$\left\| P_n^{[s]} \right\|_{p,\alpha} \leqslant n^s \left\| P_n \right\|_{p,\alpha} \qquad (3)$$

Следует заметить, что соотношение (3) является точным, а ее приложение приводим в виде соответствующего аналога обратной теоремы (2): *если* $f \in A_{p,\alpha}(D)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ *и при некотором* $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^s E_n(f)_{A_{p,\alpha}} \right)^{\min\{p,1\}} < \infty, \qquad (4)$$

то $f^{[s]} \in A_{p,\alpha}(D)$.

В заключение следует отметить, что соотношения (3) и (4) для случая $\alpha = 1 - 1/p$ ранее были получены в [4].

Список литературы

1. Бернштейн, С.Н. Полное собрание сочинений в 4-х томах Т. 1. М.:Изд-во АН СССР, 1952; Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1952; Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.

2. Кусис, П. Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис. - М.: Мир, 1984. – 368 с.

3. Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. - М.: Мир, 1984. -469 с.

4. Мисюк, В.Р. Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана / В.Р. Мисюк // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер.2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. – 2006. - №1. – С.58-62.

УДК 514.76

СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

STRUCTURES ON HOMOGENEOUS SPACES AND THEM APPLICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS

Можей Наталья Павловна

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий», Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), г. Минск, Беларусь, mozhey@bsuir.by

Аннотация. Изучаются нетривиальные геометрические структуры, возникающие при решении физических уравнений. Проведена локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантные связности. Описаны также сами связности вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии. Результаты работы могут быть использованы при исследовании приложений однородных пространств и структур на них в математической физике.

Abstract. We study nontrivial geometric structures that arise when solving physical equations. We present a local classification of three-dimensional homogeneous spaces allowing invariant connections. We describe the connections together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras. The results of the work can be used in the study of applications of homogeneous spaces and structures on them in the mathematical physics.

Ключевые слова: инвариантная связность, дифференциальное уравнение, однородное пространство, тензор кривизны.

Keywords: invariant connection, differential equation, homogeneous space, curvature tensor.

Много физических моделей сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений. Если считать, что дифференциальные уравнения являются ковариантными объектами, т.е. при преобразовании координат преобразуются по тензорным правилам, то физические следствия не зависят от выбора системы отсчета. Для построения таких моделей используется понятие связности, т.к. обычные частные производные от тензорных полей на многообразии не приводят к тензорным объектам, теория связностей же позволяет определить ковариантную производную, которая используется для записи ковариантных уравнений. Например, поля Янга–Миллса (калибровочные поля), играющие важную роль в математической физике (т.к. лежат в основе современных моделей, объединяющих электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия), представляют собой компоненты локальной формы связности. Также нетривиальная связность на главном расслоении возникает в нерелятивистской квантовой механике при решении уравнения Шредингера, гамильтониан квантовой системы задает компоненты локальной формы связности, а уравнение Шредингера определяет параллельный перенос слоев.

В основе исследований, проводимых в данной работе, лежат понятия и методы современной теории связностей. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, т.е. $\Lambda([x,y])=[\Lambda(x),\Lambda(y)]$ для всех $x\in\mathfrak{g}, y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Многие твердые тела обладают кристаллической структурой. Однако, в природе идеальных кристаллов нет, и большинство их физических свойств определяется дефектами кристаллической структуры. Один из подходов к созданию теории дефектов – геометрический, рассматривающий кристалл как непрерывную упругую среду со спиновой структурой. Дефекты упругой структуры называются дислокациями и приводят к возникновению нетривиальной геометрии, они соответствуют отличному от нуля тензору кручения. Э. Картан ввел понятие кручения в геометрию [1], проводя аналогию с механикой упругой среды. Многие тела обладают не только упругими свойствами, но и спиновой структурой. Например, ферромагнетики, жидкие кристаллы, спиновые стекла и др. В этом случае существуют дефекты в спиновой структуре, которые называются дисклинациями [2]. Наличие дисклинаций также связано с нетривиальной геометрией, а именно, тензором кривизны. Геометрическая теория распределения дефектов, которая описывает оба типа дефектов – дислокации и дисклинации, предложена в [3]. При этом тензоры кручения и кривизны имеют прямой физический смысл поверхностной плотности, соответственно, линейных дислокаций и дисклинаций.

Интегрирование уравнений движения во многом зависит от удачного выбора системы координат. В некоторых случаях геометрические свойства многообразия позволяют выбрать такую систему координат, в которой уравнения движения принимают наиболее простой вид. Поиск необходимых геометрических инвариантов также приводит к построению тензора кривизны многообразия. Тензоры кривизны и кручения играют важную роль и в геометрии, их обращение в нуль является критерием локальной тривиальности связности и существования такой системы координат, в которой репер совпадает с координатным базисом касательного пространства. Тензор кручения $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны

$R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$.

С геометрической точки зрения уравнения движения интерпретируются как уравнения геодезических связности. Геодезические линии определяются связностью как линии, касательный вектор к которым остается касательным при параллельном переносе, они также играют важную роль в физических моделях. В частности, одним из постулатов теории относительности является предположение о том, что свободные точечные частицы, подверженные действию только гравитационных сил, движутся по геодезическим. Исследование моделей гравитации упрощается, если кривизну и кручение раскладывать на неприводимые компоненты.

Важная задача, которая стоит во многих физических моделях, – установить, являются ли две связности, заданные на одном многообразии своими компонентами, одинаковыми или нет, т.е. существует ли преобразование координат, которое переводит одну связность в другую. Явное нахождение преобразования координат сводится к сложной системе дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно решить только в простейших случаях. Поэтому большое значение имеет нахождение геометрических инвариантов. Например, если скалярные кривизны различны, то связности тоже.

Группа голономии является одной из важнейших характеристик связности. Алгебра Ли $\mathfrak{h}^*$ группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$) – это подалгебра $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Элементы группы голономии являются ковариантными объектами.

Проведена полная локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантную связность, описаны сами связности на каждом таком пространстве, найдены тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии указанных связностей. Эти результаты могут быть использованы при исследовании приложений однородных пространств и структур на них в математической физике.

Список литературы

1. E. Cartan. Sur une generalisation de la notion de courburu de Riemann et les aspases a torsion. Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 174:593–595, 1922.

2. F. C. Frank. On the theory of liquid crystals. Discussions Farad. Soc., 25:19–28, 1958.

3. M. O. Katanaev and I. V. Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. Ann. Phys., 216(1):1–28, 1992.

УДК 519.6 + 530.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И РАСПАД (2+1)-МЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В ОБРАЩЕННОМ ВРЕМЕНИ

INTERACTION AND DECAY OF (2+1)-DIMENSIONAL TOPOLOGICAL SOLITONS IN REVERSED TIME

Муминов Хикмат Халимович

доктор физико-математических наук, академик, зав. Сектором теоретической физики ИФТ им. С.У. Умарова АН РТ, г. Душанбе, Таджикистан

Шокиров Фарход Шамсидинович

кандидат физико-математических наук, в.н.с. Сектора теоретической физики ИФТ им. С.У. Умарова АН РТ, г. Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Проведено численное исследование процессов взаимодействия и распада топологических вихрей (2+1)-мерной суперсимметричной O(3) нелинейной сигма-модели в обращенном времени. Получены модели формирования исходного состояния системы двух взаимодействующих топологических вихрей при их начальном распаде на