Решение одной задачи одностадийного обслуживания с нежестким окном доступности для прибора в MS EXCEL

Пчельник В.К.; Ревчук И.Н.
Кафедра функционального анализа, теории функций комплексного переменного и прикладной математики;
кафедра информатики и компьютерного моделирования
Государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Республика Беларусь
irina.revchuk.54@mail.ru

***Аннотация*—Рассматривается задача теории расписаний с нежестким окном доступности для прибора. Требования поступают в систему одновременно. Заданы характеристики требований. Окно доступности прибора описывается выпуклой функцией. Необходимо оценить возможность обслуживания поступивших требований с целью минимизации суммарного штрафа за обслуживание. Для решения поставленной задачи используется надстройки «Поиск решения. Произведены вычисления для 6 и 10 требований. Исследовался пакет из 300 задач.**

Ключевые слова: расписание; окно доступности; MS EXCEL; Поиск решения.

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. На обслуживание в момент времени t=0 поступает множество требований $N=\{1,2,...,n\}$. Для каждого требования k известны длительность $t_k>0$ его обслуживания и некоторая функция $\varphi_k(x)$, выражающая в количественном отношении «штраф», который необходимо «заплатить», если обслуживание данного требования завершится в момент времени $\bar{t}_k = x,\ k = \overline{1,n}$. Если принимается решение о нецелесообразности обслуживания требования k, то назначается «штраф» $\beta_k > 0,\ k = \overline{1,n}$.

Для обслуживания требований используется один прибор. В каждый момент времени прибор может обслуживать не более одного требования. Если прибор начал обслуживание в момент $\nu \geq 0$, а завершил в момент времени $\nu+T$, то назначается «штраф» за использование прибора, равный $E(\nu)+E(\nu+T)$, где $E(x)$ – некоторая функция. Задана также неубывающая функция $\Psi(x)$, выражающая в количественном отношении «штраф», который необходимо «заплатить», если при обслуживании требований имеется суммарный простой прибора величины x. Предполагается, что $\Psi(0)=0$.

Задача состоит в определении множества $A \subseteq N$ обслуживаемых требований и построении расписания S их обслуживания, при котором суммарный «штраф» за обслуживание минимален.

Под расписанием обслуживания требований множества $A \subseteq N$, как и в [1], будем понимать кусочно-постоянную, непрерывную слева функцию $s=s(t)$, принимающую при $0 \leq t < \infty$ одно из значений $\{0 \cup A\}$. Если $s(t)=k \neq 0$, то в момент времени t прибор обслуживает требование k; если $s(t)=0$, то в момент времени t ни одно из требований множества A не обслуживается.

Каждое расписание однозначно определяет векторы $(\underline{t}_k)$ и $(\bar{t}_k)$ времен начала и завершения обслуживания требований множества A соответственно ($k \in A$). Обозначим

$$\nu = \min_{k \in A} \underline{t}_k, T = \max_{k \in A} \bar{t}_k - \nu, T_A = \sum_{k \in A} t_k \cdot$$

Тогда суммарный штраф за обслуживание требований множества A по расписанию S (и необслуживание требований множества ($N \backslash A$) выражается соотношением (1).

$$F(S) = \sum_{k \in A} \varphi_k(\bar{t}_k) + \sum_{k \in N \backslash A} \beta_k + E(\nu) + E(\nu+T) + \psi(T - T_A). \qquad (1)$$

Качество каждого расписания S определяется набором $\{\nu, (\bar{t}_k), A\}$. Из двух расписаний лучшим считается то, которому соответствует меньшее значение F(S). Ясно, что расписания с одним и тем же набором $\{\nu, (\bar{t}_k), A\}$ одинаковы по качеству.

Будем считать, что для указанных функций $\varphi_k(x)$, $E(x)$ выполняются следующие условия (одновременно все или некоторые из них):

1. $\varphi_k(x)$ – неубывающие функции для всех $k = \overline{1,n}$;
2. $\varphi_k(x)$ – выпуклые функции для всех $k = \overline{1,n}$;
3. $E(x) - E(x+\gamma) \leq \min_{1 \leq k \leq n} [\varphi_k(x+\gamma) - \varphi_k(x)]$ для любого $\gamma \geq 0$;
4. функции $\varphi_k(x)$ принадлежат одному и только одному из следующих классов:

   a). $\varphi_k(x) = a_k \cdot t_k + b_k$;

   b). $\varphi_k(x) = a_k \cdot e^{\alpha t_k} + b_k, \alpha > 0$;

   c). $\varphi_k(x) = \varphi(x) + b_k$ где $\varphi(x)$ — неубывающая выпуклая функция.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если имеет место условие 1, то для любого расписания S существует расписание $\bar{S}$ без прерываний процесса обслуживания каждого требования множества A, такое, что $F(\bar{S}) \leq F(S)$.

Теорема 2. Если имеют место условия 1 и 3, то для любого расписания S существует расписание $\bar{S}$ обслуживания тех же требований без прерывания процесса обслуживания и простоев прибора, такое, что $F(\bar{S}) \leq F(S)$.

Пусть $E(x)$ выпукла и для нее можно определить точку $\bar{x} \in [0,+\infty)$, такую, что $E(\bar{x}) < E(x)$, если $\bar{x} \le x$ и $E(\bar{x}) < E(x)$, если $\bar{x} > x$.

Теорема 3. Если $E(x)$ выпукла и имеет место условие 1, то для любого расписания S обслуживания требований множества $A \neq \varnothing$ с $\nu > \bar{x}$ существует расписание $\bar{S}$ обслуживания тех же требований без прерываний процесса обслуживания и простоев прибора, такое, что $\nu = \bar{x}$ и $F(\bar{S}) \le F(S)$.

Следствие. Если имеет место условие 1 и $E(x)$ – неубывающая функция, то существует оптимальное расписание без прерываний процесса обслуживания и простоев прибора с $\nu = 0$, $T = T_A$.

Лемма 1. Если $f(x)$ выпуклая функция, то

$$f(x + \alpha) - f(x) \le f(x + \alpha + \beta) - f(x + \beta) \qquad (2)$$

для любых $\alpha \ge 0$ и $\beta \ge 0$.

Теорема 4. Если имеют место условия 1, 2, 3, и $|A| \ge 2$, то существует оптимальное расписание S с $\nu = 0$ и $T = T_A$.

В дальнейшем в качестве $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, будем понимать функции, приведенные в условии. 4. Если функции $\varphi_k(x)$ принадлежат одному и только одному из классов, указанных в условии 4, то для них известны величины, называемые приоритетами:

a). $\varpi(k) = \dfrac{a_k}{t_k}$;

b). $\varpi(k) = \dfrac{1 - e^{\alpha \cdot t_k}}{a_k \cdot e^{\alpha t_k}}$;

c). $\varpi(k) = -t_k$.

Теорема 5. Если имеют место условия 1, 3, 4, то для любого расписания S существует расписание $\bar{S}$ обслуживания тех же требований, такое, что $F(\bar{S}) \le F(S)$, при котором обслуживание осуществляется в порядке невозрастания приоритетов $\varpi(k)$, $k \in A$.

В случае выполнения условий теоремы 5 при $|A| \ge 2$ качество искомого расписания S однозначно определяется множеством A обслуживаемых требований.

Замечание. Если $|A| = 1$, то качество искомого расписания определяется набором $\{\nu, k\}$, где $\nu \ge 0$, $k \in A$.

Рассмотрим случай, когда функция $E(x)$ выпуклая и неубывающая. В этом случае $\nu = 0$. Для решения задачи воспользуемся надстройкой «Поиск решения» в MS EXCEL. Пусть $\varphi_k(x) = a_k x + b_k$, $k = \overline{1,n}$. Исходные данные для $n=6$ приведены на рис. 1. В столбце x фиксируется факт включения требования в множество A обслуживаемых требований (1 – включается, 0 – не включается), На рис. 2 приведен результат работы надстройки.

Для эксперимента использовались исходные данные для 300 вариантов. Значения параметров формировались с помощью датчика случайных чисел. Вычислительный цикл запускается макросом, выполняющим сортировку исходных данных по столбцу ϖ_k и запуск надстройки «Поиск решения» (рис. 1,2). Для каждого варианта фиксировалось время выполнения решения. На рис. 3 приведены сводные данные по времени решения пакетов задач для 6 и 10 требований в секундах.

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		k	a_k	b_k	t_k	βk	x	время завершения обсл.	штраф	ω_k	цел.ф.
2											
3		1	9	8	3	130	1	3	35	3	853
4		2	7	2	7	106	1	10	72	1	
5		3	9	7	6	192	1	16	151	1,5	
6		4	7	1	8	130	1	24	169	0,875	
7		5	5	3	8	192	1	32	163	0,625	
8		6	6	4	5	194	1	37	226	1,2	
9											

Рис. 1 Сортировка данных

	A	B	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14		k	a_k	b_k	t_k	βk	x	время зав.обсл.	штраф	ω_k	цел.ф.
15	1	1	9	8	3	130	1	3	35	3	582
16	2	3	9	7	6	192	1	9	88	1,5	
17	3	6	6	4	5	194	1	14	88	1,2	
18	4	2	7	2	7	106	0	14	106	1	
19	5	4	7	1	8	130	0	14	130	0,875	
20	6	5	5	3	8	192	1	22	113	0,625	

Рис. 2 Результат выполнения макроса

3	Количество по полю ex	
4	ex	Итог
5	0-4	6
6	5-9	75
7	10-14	63
8	15-19	47
9	20-24	36
10	25-29	25
11	30-34	22
12	35-39	10
13	40-44	6
14	45-49	6
15	55-59	2
16	60-64	1
17	65-70	1
18	Общий итог	300

3	Количество по полю ex	
4	ex	Итог
5	0-24	11
6	25-49	85
7	50-74	84
8	75-99	62
9	100-124	26
10	125-149	14
11	150-174	7
12	175-199	6
13	200-224	1
14	225-249	1
15	250-274	1
16	275-299	1
17	350-374	1
18	Общий итог	300

Рис.3 Сводные данные по времени

[1] Танаев, В.С. Введение в теорию расписаний. / В.С.Танаев, В.В.Шкурба.– М. Наука, 1975. –256 с.