Н.П. Можей
Беларусь, Минск, БГУИР

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУР НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Работа посвящена исследованию трехмерных однородных пространств и структур на них. Особенностью представленных методик является применение чисто алгебраического подхода для описания структур на однородных пространствах, а также соединение различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации пар групп Ли ($\bar{G}$, G), где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G} / G$ (см., например, [1]). Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна). Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность и линейное представление изотропии для G всегда точное. *Симметрическое* пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o. Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), все симметрические пространства также являются изотропно-точными. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [3]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. *Тензор кручения* $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. *Алгебра* Ли $\mathfrak{h}^*$ группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \ldots$, где V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

Получена в явном виде полная локальная классификация трехмерных однородных пространств, допускающих инвариантную аффинную связность; выделены редуктивные и симметрические пространства; описаны сами аффинные связности; выписаны канонические связности и естественные связности без кручения на редуктивных и симметрических пространствах; найдены тензоры кривизны, кручения, алгебры голономии указанных связностей. Предложенные методики в совокупности с результатами, полученными с их помощью, представляют собой существенное продвижение в решении проблемы изучения трехмерных однородных пространств и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Методы, использованные в работе, могут быть применены для анализа физических моделей, а алгоритмы классификации однородных пространств, нахождения аффинных связностей на этих пространствах, тензоров кривизны, кручения, алгебр голономии могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований/ А. Л. Онищик. – М.: Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.

3. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.