ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2020, том 9, № 4, с. 338–344

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.925.7

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ ИЛИ ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

© 2020 г. В. В. Цегельник*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220013, Беларусь

**e-mail: tsegvv@bsuir.by*

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.
После доработки 08.10.2020 г.
Принята к публикации 12.10.2020 г.

Исследованы аналитические свойства решений 4-х семейств трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями. Консервативные системы первого семейства имеют одну квадратичную нелинейность и три линейные компоненты. Системы второго семейства – консервативные системы, имеющие одну квадратичную нелинейность, две линейные компоненты и одну константу. Консервативные системы третьего семейства содержат три квадратичные нелинейности и одну линейную компоненту. К системам четвертого семейства относятся консервативные системы с тремя квадратичными нелинейностями и одним постоянным членом. Общим (с качественной точки зрения) для данных систем является отсутствие в них хаоса. Для анализа решений рассматриваемых систем использован тест Пенлеве, а также сведение систем к эквивалентным им уравнениям второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями *P*-типа. Выделены системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения таких систем выражаются через эллиптические функции, либо через функции-решения первого уравнения Пенлеве. Показано, что среди систем, общие решения которых содержат подвижные критические точки, есть такие, у которых одна из компонент решения вообще не имеет подвижных особых точек. Рассмотренные в работе системы принадлежат к классу из 7 семейств консервативных систем (с общим числом членов в правых частях, равным 4). Исследованию аналитических свойств решений систем остальных трех семейств будет посвящена отдельная статья.

Ключевые слова: консервативная система, нехаотичное поведение, тест Пенлеве, *P*-свойство, уравнения Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X20040100

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение как можно более простой хаотической системы является интересной и значимой темой в изучении динамических систем, а также практических применений в безопасной связи и широкополосной генерации сигналов. Основываясь на классических работах [1, 2], Спротт [3, 4] построил ряд простых автономных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с несколькими квадратичными нелинейностями и показал с помощью численного моделирования, что они обладают хаотическим поведением. Работы Спротта ставят вопрос, насколько простой может быть трехмерная автономная система непрерывного времени, если она хаотична. Ответ на данный вопрос был частично дан в работах [5, 6]. В [5] было показано, что все диссипативные трехмерные автономные квадратичные системы с общим числом членов в правых частях, равным 4, нехаотичны. Аналогичный результат для консервативных систем (за исключением одной) был получен в [6].

Представляет интерес исследование аналитических свойств (в частности, характера подвижных особых точек решений) в предположении, что неизвестные функции и независимая переменная являются комплекснозначными.

Для диссипативных систем [5] указанная задача решена в [7], где, в частности, было показано, что все трехмерные диссипативные квадратичные системы с общим числом членов в правых частях, равным 4 (за исключением одной), не являются системами Пенлеве-типа.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (или уравнение) является системой (уравнением) Пенлеве-типа, если подвижными (зависящими от начальных условий) ее (его) общего решения могут быть только полюсы [8]. В данном случае говорят, что система (уравнение) является системой (уравнением) P-типа или обладает P-свойством решений.

В данной работе аналогичная задача решается для трехмерных автономных консервативных систем (с общим числом членов в правых частях равным 4) с одной или тремя квадратичными нелинейностями [6] без хаоса.

2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

$$\dot{x} = y^2 + ky, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{1}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{2}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{3}$$

$$\dot{x} = yz + x, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = x. \tag{4}$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{5}$$

$$\dot{x} = yz + y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{6}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \tag{7}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \tag{8}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = x. \tag{9}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = y. \tag{10}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x + y. \tag{11}$$

В системах (1)–(11) x, y, z – неизвестные функции независимой переменной t; k – параметр. Всюду ниже будем считать переменную t комплексной.

Теорема 1. Ни одна из систем (1)–(3), (6), (7), (9), (11) не является системой P-типа.

Действительно, системы (1)–(3), (6), (7) эквивалентны уравнениям третьего порядка соответственно

$$\dddot{y} = y^2 + ky, \tag{12}$$

$$\dddot{y} = 2y\dot{y} + y, \tag{13}$$

$$\dddot{y} = y^2 + \dot{y}, \tag{14}$$

$$\dddot{y} = y\dot{y} + y, \tag{15}$$

$$\dddot{y} = 2y\dot{y} + y^2. \tag{16}$$

Система (11) также эквивалентна уравнению (14). Уравнения (12)–(16) не принадлежат к классу уравнений $\dddot{u} = P(t, u, \dot{u}, \ddot{u})$, где P – полином относительно $u, \dot{u}, \ddot{u}$ с аналитическими по t коэффициентами, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек [9]. На основании этого ни одна из систем (1)–(3), (6), (7), (9), (11) не является системой P-типа. Для исследования характера подвижных особых точек решений системы (9) применим к ней тест Пенлеве [10, 11]. Первые два шага теста Пенлеве система (9) успешно проходит, однако третий шаг, связанный с определением коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (9), не удается реализовать. Таким образом, система (9) не является системой Пенлеве-типа.

Теорема 2. Система (4) является системой P-типа. Ее общее решение не имеет подвижных особых точек.

Действительно, из второго уравнения системы $y = C_1\overline{e}^{t}$, где C_1 – произвольная постоянная. В результате для определения $x(t), z(t)$ получаем линейную систему $\dot{x} = C_1\overline{e}^{t} \cdot z + x$, $\dot{z} = x$, общее решение которой не имеет подвижных особых точек.

Теорема 3. Общие решения систем (5), (8), (10) не имеют многозначных подвижных особых точек.

Легко проверить, что система (5) имеет первый интеграл $x = \dfrac{z^2}{2} + z + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Тогда $y = \dot{z}$, где z – общее решение уравнения

$$\ddot{z} = \frac{z^2}{2} + z + C_1, \tag{17}$$

интегрируемого в эллиптических функциях.

Система (10) имеет первый интеграл $x = \dfrac{z^2}{2} + C_1$. Тогда $y = \dot{z}$, где z – общее решение уравнения (17).

Система (8) эквивалентна уравнению $\dddot{z} = \dot{z}^2 + \dot{z}$, представимому в виде

$$\dot{z} = u, \quad \ddot{u} = u^2 + u. \tag{18}$$

Общее решение второго уравнения системы (18) (интегрируемого в эллиптических функциях) есть функция мероморфная с вычетом равным нулю. Значит, z – функция однозначная. А тогда y, x $(y = \dot{z},\ x = \dot{y} - z)$ – однозначные функции. Теорема доказана.

3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ДВУМЯ ЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

$$\dot{x} = 1 + yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = y. \tag{19}$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x. \tag{20}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 1. \tag{21}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x + z, \quad \dot{z} = \varepsilon. \tag{22}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = 1 + z, \quad \dot{z} = \varepsilon x. \tag{23}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = 1 + x, \quad \dot{z} = x. \tag{24}$$

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = 1 + x. \tag{25}$$

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = 1 + y, \tag{26}$$

где $\varepsilon^2 = 1$.

Теорема 4. Каждая из систем (19), (21) редуцируется к первому уравнению Пенлеве и является системой P-типа.

Доказательство. Система (19) имеет первый интеграл $x - \dfrac{z^2}{2} = t + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Тогда из второго и третьего уравнений системы (19) находим, что

$$\ddot{z} = \frac{z^2}{2} + t + C_1. \tag{27}$$

Полагая $z = \lambda w$, $t + C_1 = \mu s$, $\lambda\mu^2 = 6$, $\mu^3 = \lambda$, относительно w получим первое уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = 6w^2 + s. \tag{28}$$

Легко показать (принимая во внимание $z = t + C_1$), что система (21) эквивалентна уравнению $\ddot{y} = y^2 + t + C_1$, которое может быть приведено, к каноническому виду (28). Теорема доказана.

Теорема 5. Система (22) является системой Пенлеве-типа. Ее общее решение имеет вид: $x = \dot{y} - z$, $z = \varepsilon t + C_1$ (C_1 – произвольная постоянная), а y – общее решение уравнения $\ddot{y} = y^2 + \varepsilon$, интегрируемого в эллиптических функциях.

Доказательство. Из третьего уравнения системы (22) имеем $z = \varepsilon t + C_1$. А из первого и второго уравнений этой системы получаем $\ddot{y} = y^2 + \varepsilon$. Что и следовало показать. Теорема доказана.

Теорема 6. Ни одна из систем (20), (23)–(26) не является системой P-типа.

Доказательство. Несложно убедиться, что система (20) эквивалентна уравнению $\dddot{y} = \varepsilon + y^2$, общее решение которого согласно [9] не свободно от подвижных критических точек. Аналогичное заключение получается и относительно системы (23).

Из второго и третьего уравнений системы (24) следует, что $y - z = t + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Тогда из третьего и первого уравнений системы получаем уравнение относительно z: $\ddot{z} = z(z + t + C_1)$. Данное уравнение не входит в список уравнений Пенлеве–Гамбье [12].

Система (25) эквивалентна уравнению $\dddot{y} = y^2$, которое согласно [9] не является уравнением P-типа.

Система (26) не проходит третий шаг теста Пенлеве. А именно, одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (26), не является совместной.

4. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = y. \tag{29}$$

$$\dot{x} = -2xy + y^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \tag{30}$$

$$\dot{x} = -2xy + yz, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \tag{31}$$

$$\dot{x} = -2xy + z^2, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x. \tag{32}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = y. \tag{33}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = x. \tag{34}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y. \tag{35}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \tag{36}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = x. \tag{37}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y. \tag{38}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y. \tag{39}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x. \tag{40}$$

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = -2xz. \tag{41}$$

$$\dot{x} = xy + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \tag{42}$$

$$\dot{x} = xy + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = -yz. \tag{43}$$

$$\dot{x} = xy + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \tag{44}$$

$$\dot{x} = -2xy + z, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{45}$$

$$\dot{x} = -2xy + z, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{46}$$

$$\dot{x} = x^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \tag{47}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{48}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{49}$$

$$\dot{x} = y^2 + y, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{50}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{51}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y^2. \tag{52}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \tag{53}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{54}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{55}$$

$$\dot{x} = y^2 + z, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{56}$$

Теорема 7. Ни одна из систем (29)–(32), (34), (36), (37), (39)–(56) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Для системы (29) не выполняется одно из условий первого шага теста Пенлеве. Она эквивалентна уравнению $2\dot{z}\dddot{z} - \ddot{z}^2 + 4z \cdot \dot{z}^3 = 0$, которое имеет один доминантный член и согласно [13] не имеет целых трансцендентных решений. Данное уравнение не имеет полиномиальных решений, отличных от постоянной. Заметим, что система (29) имеет однопараметрическое семейство решений

$$x = \frac{3}{4}\tau^{-1}, \quad y = -\frac{1}{2}z_0 \cdot \tau^{-\frac{3}{2}},$$
$$z = z_0\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad z_0^2 = \frac{21}{8}, \quad \tau = t - t_0,$$

t_0 – произвольная постоянная.

Система (30) имеет общее решение

$$x = \frac{-1}{3\tau^2} + C_1\tau^2, \quad y = -\frac{1}{\tau}, \quad z = \frac{C_1}{3}\tau^3 - \frac{1}{3}\ln\tau + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Как видно, две компоненты общего решения не имеют подвижных критических особых точек.

Система (31) редуцируется к неавтономному уравнению второго порядка $\tau\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$, которое преобразованием $x = \left(\frac{s}{2}\right)^2 u,\ \tau = \left(\frac{s}{2}\right)^2$ сводится к уравнению Бесселя $s^2u'' + su' + (s^2 - 4)u = 0$, общее решение которого содержит логарифм.

Система (32) сводится к уравнению $\ddot{z} = \frac{2}{\tau}\dot{z} + z^2, \tau = t - t_0$, не входящему в список [12] уравнений P-типа. Система (34) не проходит тест Пенлеве. Кроме того, она эквивалентна уравнению третьего порядка с одним доминантным числом и, следовательно, не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений. Это же справедливо и для систем (36), (37). Система (39) не проходит первый шаг теста Пенлеве, не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений, так как эквивалентна уравнению $z\dddot{z} - \ddot{z}^2 - \varepsilon z^4 = 0$ с одним доминантным членом. Системы (40), (41) не являются системами P-типа по той же причине, что и система (39).

Система (42) имеет первый интеграл $xz + z = C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Она редуцируется к уравнению $\ddot{y} + y\dot{y} - C_1 y = 0$, которое согласно [12] не является уравнением P-типа. Если $C_1 = 0$, то система (42) имеет двухпараметрическое семейство мероморфных решений, порождаемых общим решением уравнения Риккати $\dot{y} + \frac{1}{2}y^2 = H$, где H – произвольная постоянная. Отметим также, что система (42) имеет точное решение $x = -1,\ y = 2\tau^{-1},\ z = 2\tau^{-2}$. Для системы (43) не выполняется условие третьего шага теста Пенлеве: 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью.

Система (44) эквивалентна уравнению $\dddot{y} + 2y\ddot{y} = 0$, которое не принадлежит к классу уравнений [9] без подвижных критических особых точек.

Система (45) по переменной z редуцируется к уравнению $\tau\ddot{z} - \dot{z} + z = 0$, которое (как в случае системы (31)) сводится к уравнению Бесселя, общее решение которого содержит логарифм.

Система (46) редуцируется к уравнению второго порядка, которое не является уравнением P-типа. Система (47) не является системой P-типа, так как 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью. Сказанное справедливо относительно систем (49), (50), (53), (55).

Для системы (48) не выполняется условие третьего шага теста Пенлеве: одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы, несовместна. Сказанное справедливо и по отношению к системам (51), (52), (54).

Что касается системы (56), то корни резонансного уравнения являются целыми, причем один корень имеет кратность 2. Но ряды Лорана, представляющие формальные разложения решений системы, содержат только 2 произвольные константы.

Каждая из систем (33), (35), (38) не проходит первый шаг теста Пенлеве. Они эквивалентны уравнениям

$$z\dddot{z} - \dot{z}\ddot{z} = \varepsilon z^2(\dot{z}^2 + z\dot{z}), \tag{57}$$

$$\dddot{z}^2 = 4\ddot{z}(\dot{z}^2 + z\dot{z})^2, \tag{58}$$

$$\dddot{z}^2 = 4\ddot{z}(\dot{z}^2 + \varepsilon z^2) \tag{59}$$

соответственно, которые имеют более одного доминантного члена.

5. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ОДНИМ ПОСТОЯННЫМ ЧЛЕНОМ

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = 1. \tag{60}$$

$$\dot{x} = y^2 + yz, \quad \dot{y} = \varepsilon xz, \quad \dot{z} = 1. \tag{61}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = 1. \tag{62}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = 1. \tag{63}$$

$$\dot{x} = xy + 1, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = -yz. \tag{64}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = x^2. \tag{65}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon, \quad \dot{y} = z^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{66}$$

$$\dot{x} = yz + 1, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = xy. \tag{67}$$

$$\dot{x} = yz + 1, \quad \dot{y} = x^2, \quad \dot{z} = y^2. \tag{68}$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = x^2. \tag{69}$$

$$\dot{x} = \varepsilon + y^2, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = y^2. \tag{70}$$

$$\dot{x} = x^2 + yz, \quad \dot{y} = -2xy, \quad \dot{z} = 1. \tag{71}$$

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon z^2, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = x^2. \tag{72}$$

Теорема 8. Ни одна из систем (60)–(72) не является системой Пенлеве-типа.

Доказательство. Система (60) с учетом $z = t + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная, эквивалентна системе

$$\dot{x} = y^2 + y(t + C_1), \quad \dot{y} = x^2. \tag{73}$$

Для данной системы первые 2 шага теста Пенлеве выполняются. Но на третьем шаге произвольная константа C_2 отсутствует. Значит, система (73), а следовательно, и система (60) не является системой P-типа, хотя компонента z вообще не имеет подвижных особых точек.

Система (61) с учетом $z = t + C_1$ сводится к уравнению

$$\ddot{y} = \frac{1}{t + C_1}\dot{y} + (t + C_1)\varepsilon y^2 + y,$$

которое не содержится в списке Пенлеве–Гамбье [12]. Таким образом, система (61) не является системой Пенлеве-типа, хотя компонента z не имеет подвижных особых точек.

Система (62) сводится к системе уравнений

$$\dot{x} = y^2 + \varepsilon(t + C_1)^2, \quad \dot{y} = x^2, \tag{74}$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг), а поэтому не является системой P-типа.

Система (63), аналогично, как и система (61), эквивалентна уравнению второго порядка, которое не содержится в списке уравнений Пенлеве–Гамбье [12].

Для системы (64) не выполняется первый шаг теста Пенлеве. Она эквивалентна уравнению

$$z^2\dddot{z} = 3\dot{z}\ddot{z} - 2\dot{z}^3 - z^4, \tag{75}$$

которое не имеет полиномиальных и целых трансцендентных решений согласно [13]. На основании этого система (64) не является системой Пенлеве-типа. Для системы (65) не выполняются условия 2-го шага теста Пенлеве: 2 корня резонансного уравнения являются комплексно-сопряженными с положительной действительной частью. Значит, система (65) не является системой P-типа.

Для системы (66) (как и в случае системы (65)) не выполняются условия 2-го шага теста Пенлеве. Поэтому она не является системой Пенлеве-типа. Система (67) проходит 2 первых шага теста Пенлеве. При этом среди корней резонансного уравнения, которые являются целыми, один имеет кратность, равную 2. Но на 3-м шаге теста Пенлеве одна из систем для определения коэффициентов рядов Лорана, представляющих формальные решения системы (67), оказывается несовместной. Поэтому системы (67) не является системой P-типа.

Система (68) проходит 2 первых шага теста Пенлеве. Заметим, что корни резонансного уравнения у нее такие же, как в системе (67). Однако формальные ряды Лорана, определяющие решения системы (68) содержат только 2 произвольные константы (вместо 3-х). Таким образом, система (68) не является системой Пенлеве-типа. Доказательство отсутствия свойства Пенлеве у общего решения системы (69) проводится точно так же, как и в случае системы (68).

Система (70) имеет неавтономный первый интеграл $x - z = \varepsilon t + C_1$, который позволяет свести ее к системе второго порядка

$$\dot{y} = z^2 + (\varepsilon t + C_1)z, \quad \dot{z} = y^2, \tag{76}$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг). Следовательно, система (70) не является системой Пенлеве-типа.

Из третьего уравнения системы (71) находим $z = t + C_1$. В результате получаем неавтономную систему

$$\dot{x} = y^2 + (t + C_1)z, \quad \dot{y} = -2xy. \tag{77}$$

Система (77) эквивалентна по y нелинейному уравнению второго порядка, не содержащемуся в списке Пенлеве–Гамбье [12]. Таким образом, система (71) не является системой Пенлеве-типа, хотя компонента z не имеет подвижных особых точек.

Система (72) с учетом $z = t + C_1$ сводится к неавтономной системе

$$\dot{x} = \varepsilon z^2 + (t + C_1)^2, \quad \dot{z} = x^2, \tag{78}$$

которая не проходит тест Пенлеве (3-й шаг). Таким образом, система (72) также не является системой P-типа, хотя компонента y не имеет подвижных особых точек. Теорема полностью доказана.

Замечание. Отсутствие у систем (74), (78) решений со свойством Пенлеве следует также из результатов работы [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы аналитические свойства решений четырех семейств трехмерных автономных консервативных систем с одной или тремя квадратичными нелинейностями без хаотического поведения. Общее число членов в правых частях каждой из указанных систем равно 4. Для анализа решений использован тест Пенлеве, а также замена систем эквивалентными им уравнениями второго или третьего порядков и сравнение последних с известными нелинейными уравнениями Пенлеве-типа. Выделены системы, общие решения которых обладают свойством Пенлеве. Решения таких систем выражаются либо через эллиптические функции, либо через функции-решения первого уравнения Пенлеве. Показано, что среди систем, не являющихся системами Пенлеве-типа имеются такие, одна из компонент которых вообще не имеет подвижных особых точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
2. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1987. V. 57. P. 397–398.
3. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. P. R647–R650.
4. *Sprott J.C.* Simplest dissipative chaotic flow // Phys. Lett. A. 1997. V. 228. P. 271–274.
5. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems // Nonlinearity. 1999. V. 10. P. 1289–1303.
6. *Heidel J., Zhang Fu.* Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 617–633.
7. *Цегельник В.В.* Пенлеве-анализ решений одного класса трехмерных нелинейных диссипативных систем // Вестник НИЯУ МИФИ. 2018. Т. 7. № 2. С. 133–137.
8. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
9. *Cosgrove C.M.* Chazy classes IX–XI of third-order differential equations // Stud. Appl. Math. 2001. V. 104. № 3. P. 171–228.
10. *Громак В.И., Грицук Е.В.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз.-мат. навук. 2010. № 3. С. 25–30.
11. *Цегельник В.В.* Аналитические свойства решений автономных систем нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с хаотическим поведением // Вестник НИЯУ МИФИ. 2015. Т. 4. № 2. С. 101–106.
12. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
13. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: ГИФМЛ, 1960.
14. *Яблонский А.И.* Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических точек // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 6. С. 752–762.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2020, vol. 9, no. 4, pp. 338–344

Analytical Properties of Solutions of Three-Dimensional Autonomous Conservative Systems with One or Three Quadratic Nonlinearities without Chaotic Behavior

V. V. Tsegel'nik#

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220013 Belarus

#e-mail: tsegvv@bsuir.by

Received September 10, 2020; revised October 8, 2020; accepted October 12, 2020

Abstract—Analytical properties of solutions of four families of three-dimensional autonomous conservative systems with one or three quadratic nonlinearities are investigated. Conservative systems of the first family have one quadratic nonlinearity and three linear components. Systems of the second family are conservative systems that have one quadratic nonlinearity, two linear components, and one constant. Conservative systems of the third family contain three quadratic nonlinearities and one linear component. Systems of the fourth family include conservative systems with three quadratic nonlinearities and one constant term. The absence of chaos in these systems is their common qualitative property. To analyze the solutions of the considered systems, Painlevé test, as well as the reduction of the systems to their equivalent equations of the second or third order and the comparison of the latter with the known nonlinear *P*-type equations, has been used. The systems whose general solutions have the Painlevé properties are highlighted. The solutions of such systems are expressed in terms of elliptic functions or solutions of the first Painlevé equation. It is shown that the systems whose general solutions contain moving critical points include those in which one of the component has no moving singular points at all. The systems considered in this work belong to a class of seven families of conservative systems (with the total number of members in the right parts equal to 4). The analytical properties of solutions of the systems of the other three families will be studied elsewhere.

Keywords: conservative system, non-chaotic behavior, Painlevé test, Painlevé equations

DOI: 10.1134/S2304487X20040100

REFERENCE

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. Pp. 130–141.
2. Rössler O.E. An equation for continuous chaos. Phys. Lett. A. 1987. V. 57. Pp. 397–398.
3. Sprott J.C. Some simple chaotic flows. Phys. Rev. E. 1994. V. 50. no 2. Pp. R647–R650.
4. Sprott J.C. Simplest dissipative chaotic flow. Phys. Lett. A. 1997. V. 228. Pp. 271–274.
5. Heidel J., Zhang Fu. Nonchaotic behaviour in three—dimensional quadratic systems. Nonlinearity. 1999. V. 10. Pp. 1289–1303.
6. Heidel J., Zhang Fu. Nonchaotic behaviour in three – dimensional quadratic systems. The conservative case. 1999. V. 12. Pp. 617–633.
7. Tsegel'nik V.V. // Penleve analiz reshenii odnogo klassa trekhmernykh nelineinykh dissipativnykh system [Painleve' analysis of solutions for one class of three-dimensional nonlinear dissipative systems]. Vestnik NIYaU MIFI. 2018. Vol. 7, no. 2. Pp. 133–137 (in Russian).
8. Kudryashov N.A. Analyticheskaya teoriya nelineynykh differentsial'nykh uravnenii [Analytical theory of nonlinear differential equations] Moskau-Izhevsk, Institute computernykh issledovaniy, 2004. 360 p.
9. Cosgrove C.M. Chazy classes IX–XI of third-order differential equations. Stud. Appl. Math. 2001. V. 104, no. 3. Pp. 171–228.
10. Gromak V.I., Gritsuk E.V. K theorii nelineynykh differentsial'nykh uravnenii so svoistvom Penleve [On the theory nonlinear differential equations with Painleve' property]. Izvestiya NAN Belarusi. Seria fiz.-mat. Nauk. 2010, no. 3. Pp. 25–30 (in Russian).
11. Tsegel'nik V.V. Analiticheskie svoistva reshenii autonomnykh system nelineinykh differentsial'nykh uravnenii tret'ego i chetvertogo poryadkov s chaoticheskim povedeniem [Analytical properties of solutions to autonomous systems of nonlinear third and fourth-order differential equations with chaotic behavior]. Vestnik NIYaU MIFI. 2015, vol. 4, no. 2. Pp. 101–106 (in Russian).
12. Ince E.L. Obiknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations] Kharkov. ONTI, 1939. 720 p.
13. Wittich H. Noveishie issledovaniya po odnoznachnym analiticheskim funktsiyam [The latest research on the unique analytic functions] Moskau. M.: GIFML. 1960. 319 p.
14. Yablonskii A.I. Ob odnoi systeme differential'nykh uravnenii bez podvizhnykh kriticheskikh tochek [On one system differential equations without movable critical points] Differentsial'nye uravneniya. 1966. V. 2, no. 6. Pp. 752–762 (in Russian).