

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Кафедра радиотехнических систем

***ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КОДА
РИДА - СОЛОМОНА***

Пособие к лабораторной работе по дисциплине
КОДИРОВАНИЕ И ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ
для студентов специальностей

I-39 01 02 «Радиоэлектронные системы» и I-39 01 03 «Радиоинформатика»

Минск 2005

УДК 621. 391.25 (075.8)
ББК 32.811 я 73
И 88

Составитель:
С. Б. Саломатин

Исследование свойств кода Рида – Соломона. Пособие к лаб. работе
И 88 по дисциплине «Кодирование и защита информации» для студ. спец.
I-39 01 02 «Радиоэлектронные системы» и I-39 01 03 «Радиоинформатика»
/ Сост. С.Б. Саломатин. – Мн.: БГУИР, 2005. – 32 с.: ил.
ISBN 985-444-819-3

Пособие содержит теоретические сведения, алгоритмы, программы моделирования процессов кодирования и декодирования, а также исследования структурных свойств блочных корректирующих кодов Рида – Соломона. В лабораторной работе исследуются различные методы кодирования и декодирования во временной и спектральных областях. Оценивается эффективность кодирования информации.

УДК 621. 391. 25 (075.8)
ББК 32.811 я 73

ISBN 985-444-819-3

© Саломатин С. Б., составление, 2005
© БГУИР, 2005

Содержание

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
 2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
 - 2.1. Коды Рида – Соломона
 - 2.2. Алгоритм Берлекемпа – Месси (БМ) решения ключевого уравнения
 - 2.3. Преобразование Фурье в поле Галуа
 - 2.4. Кодирование и декодирование кода РС в частотной области
 - 2.5. Исправление ошибок и стираний
 3. ПРОГРАММЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ КОДА РС
 4. СОДЕРЖАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ
 - 4.1. Содержание работы
 - 4.2. Порядок выполнения работы
 5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА
 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
- ЛИТЕРАТУРА

Библиотека БГУИР

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Изучить методы помехоустойчивого кодирования и декодирования информации с помощью циклических блочных кодов Рида – Соломона.

2. Исследовать свойства кодов Рида – Соломона (РС) во временной и спектральных областях.

3. Изучить связь корректирующей способности кодов с конечными полями и спектральными преобразованиями Фурье – Галуа.

4. Приобрести навыки построения алгоритмов и программ кодирования и декодирования информации.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Коды Рида – Соломона

Коды Рида – Соломона являются важным подмножеством кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ), у которых мультипликативный порядок алфавита символов кодового слова делится на длину кода.

Коды Рида – Соломона обладают рядом замечательных особенностей:

- коды РС являются максимальными, т.е. при заданной длине n и размерности k имеют наибольшее кодовое расстояние $d = n - k + 1$;
- любой набор из k позиций кодового слова является информационным, т.е. позволяет восстановить все кодовое слово;
- число кодовых слов веса ω равно

$$A(w) = \binom{n}{w} (q-1) \sum_{i=0}^{w-d} (-1)^i \binom{w-1}{i} q^{w-d-1} \leq \binom{n}{w} (q-1)^{w-d+1},$$

где $\binom{n}{w}$ – число сочетаний из n по w , q – основание кода;

- класс РС-кодов используется в конструкциях альтернатных кодов, обобщенных каскадных кодов, равновесных кодов и т.д.;
- коды могут быть эффективно декодированы во временной и частотной областях.

Имеется несколько определений кодов РС. Так, код РС над полем Галуа $GF(q)$ можно определить как код, состоящий из всех слов $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ длины n , для которых выполняются $d-1$ уравнений:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i g_i^r = 0 \quad c_i \in GF(q), r_0 \leq r \leq r_0 + d - 2, \quad (1)$$

где r_0 и d – произвольные целые числа (не больше n); g_0, g_1, \dots, g_{n-1} – различные ненулевые элементы конечного поля, которые еще называют локатором i -й позиции кодового слова.

Число различных элементов g_i определяет максимальную длину кода РС, которая не превышает $q - 1$. Если длина кода равна $n < q - 1$, то код называется укороченным, если длина кода равна $n = q$ (или $q + 1$), то код является расширенным на один (или два) символа.

В матричном представлении система уравнений принимает вид

$$\mathbf{H}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = 0,$$

где \mathbf{H} – проверочная матрица кода размером $(n-k) \times n$. Принадлежность к классу максимальных кодов следует из свойств его проверочной матрицы

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} g_0^{r_0} & g_1^{r_0} & \mathbf{L} & g_{n-1}^{r_0} \\ g_0^{r_0+1} & g_1^{r_0+1} & \mathbf{L} & g_{n-1}^{r_0+1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ g_0^{r_0+m-1} & g_1^{r_0+m-1} & \mathbf{L} & g_{n-1}^{r_0+m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ g_0 & g_1 & \mathbf{L} & g_{n-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ g_0^{m-1} & g_1^{m-1} & \mathbf{L} & g_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0^{r_0} & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & g_1^{r_0} & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & g_{n-1}^{r_0} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $m = n - k$.

Левый сомножитель в произведении матриц является частью матрицы Вандермонда. Это позволяет сделать вывод, что любые m столбцов матрицы \mathbf{H} линейно независимы. Отсюда следует, что для любого заданного набора $\{\gamma_i\}$ и любых значений k символов кодового слова система линейных уравнений (1) над $GF(q)$ имеет единственное решение относительно оставшихся $m = n - k$ неизвестных.

Последовательность локаторов позиций $\{\gamma_i\}$ в (1) произвольна и может быть задана любым удобным способом.

Рассмотрим способ, приводящий к построению циклических кодов.

Циклический РС-код длиной n , равной любому делителю $(q - 1)$, задается выражением (1) и последовательностью локаторов положений вида $\gamma_i = \alpha^i$, где α – элемент порядка n в поле $GF(q)$, $\alpha = \sqrt[n]{1}$.

Циклический сдвиг влево на l позиций последовательности $\gamma_i = \alpha^i$ эквивалентен умножению локаторов на α^l : $g_i \alpha^l = \alpha^{i+l \bmod n}$, где $n|(q - 1)$.

Если некоторый вектор $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ удовлетворяет (1), то и после сдвига получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i g_i^r a^{l_r} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i g_i^r \right) a^{l_r} = 0,$$

так как $a^{l_r} \neq 0$ при любых l и r , $r_0 \leq r \leq r_0 + d$.

Проверочная матрица циклического РС-кода имеет вид

$$\mathbf{H} = \left[a^{(r_0+i)j \bmod n} \right]_{i=0, \dots, m-1, j=0, \dots, n-1}.$$

Это позволяет рассматривать умножение \mathbf{H} на вектор \mathbf{c} как вычисление значений полинома $c(x) = \sum_i c_i x^i$ в точках $\{a^{r_0+i}\}$, $i = 0, \dots, m-1$. Следовательно, циклический РС-код состоит из всех полиномов степени меньше n над $GF(q)$, корнями которых являются элементы $\{a^{r_0+i}\}$, $i = 0, \dots, m-1$, где $a \in GF(q)$, $a^n = 1$, и $n|(q-1)$.

Это свойство циклических РС-кодов интересно тем, что позволяет определить сам код и его декодирование в понятиях преобразования над конечным полем Фурье - Галуа (ПФГ). Матрица \mathbf{H} является частью матрицы ПФГ, содержащей $m = d-1$, начиная со строки r_0 .

Определение синдрома. Предположим, что на вход декодера поступает последовательность символов $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$, где $y_i = c_i + e_i$, $\{e_i\}$ – элементы вектора ошибок, $e_i \in GF(q)$. Синдромом кода называется вектор $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_{d-2})$, элементы которого определяются из выражения

$$s_j = \sum_i y_i g_i^{r_0+j}, \quad j = 0, 1, \dots, d-2. \quad (3)$$

Если все элементы синдрома равны нулю, то принятое слово считается кодовым. В противном случае принятое слово \mathbf{y} содержит ошибки. Синдром зависит только от ошибок в принятом слове.

Построим полином синдрома

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} s_j x^j = \sum_{j=0}^{m-1} x^j \sum_{i=0}^{n-1} e_i g_i^{r_0+j}, \quad m = n - k.$$

Изменим порядок суммирования

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i g_i^{r_0} \sum_{j=0}^{m-1} (x g_i)^j.$$

Используем понятие геометрической прогрессии для преобразования второй суммы:

$$\sum_j (xg_i)^j = \frac{(xg_i)^m - 1}{xg_i - 1}.$$

Тогда выражение для полинома синдрома $s(x)$ приводится к виду

$$s(x) = x^m \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e_i g_i^{r_0+m}}{xg_i - 1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e_i g_i^{r_0}}{xg_i - 1}. \quad (4)$$

Если предположить, что в принятом векторе имеются t ошибок, расположенных на позициях с номерами i_1, i_2, \dots, i_t , то выражение (4) может быть приведено к виду

$$s(x) \mathcal{S}(x) + x^m \Theta(x) = w(x), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x) &= \prod_{v=1}^t (xg_{i_v} - 1), \\ w(x) &= - \sum_{v=1}^t e_{i_v} g_{i_v}^{r_0} \sum_{m=1, m \neq v}^t (xg_{i_m} - 1); \\ \Theta(x) &= \sum_{v=1}^t e_{i_v} g_{i_v}^{r_0+m} \sum_{m=1, m \neq v}^t (xg_{i_m} - 1). \end{aligned}$$

Полином $\mathcal{S}(x)$ называют полиномом локаторов ошибок, так как его корни являются обратными величинами локаторов искаженных позиций. Степень $\mathcal{S}(x)$ равна t , если число ошибок $t < m$.

Полином $w(x)$ называется полиномом значений ошибок (полином ошибок). Степень $w(x)$ всегда меньше степени $\mathcal{S}(x)$. Полиномы $\mathcal{S}(x)$ и $w(x)$ взаимно просты.

Уравнение (5) часто используется в виде модульного сравнения

$$s(x) \mathcal{S}(x) = w(x) \pmod{x^m}, \quad (6)$$

которое называется ключевым уравнением.

Если полиномы $\mathcal{S}(x)$ и $w(x)$ известны, тогда для определения локаторов ошибок достаточно найти корни полинома $\mathcal{S}(x)$ среди обратных величин локаторов позиций кода, т.е. найти все решения уравнения $\mathcal{S}(x^{-1}) = 0$, $x \in \{\gamma_i\}$. Если $\mathcal{S}(x^{-1})$ имеет степень t и точно t различных локаторов кода являются его корнями, то можно считать, что в принятом векторе действительно t ошибок. Если же хотя бы один корень $\mathcal{S}(x^{-1})$ не является локатором кодового слова, то в принятом слове более чем $(d-1)/2$ ошибок и $\mathcal{S}(x)$ не является правильным полиномом локаторов ошибок.

Если локаторы ошибок известны, то значения ошибок равны:

$$e_{i_v} = \frac{-w(g_{i_v}^{-1})}{g_{i_v}^{r_0} \prod_{m=1, m \neq v}^t (g_{i_v}^{-1} g_{i_m} - 1)}.$$

Введем понятие формальной производной, которая определяется через выражение

$$s'(x) = \sum_{v=1}^t g_{i_v} \prod_{m=1, m \neq v}^t (xg_{i_m} - 1).$$

Используя понятие формальной производной, выражение значения ошибки можно преобразовать к виду формулы Форни:

$$e_{i_v} = \frac{-w(g_{i_v}^{-1})g_{i_v}^{-r_0+1}}{s'(g_{i_v}^{-1})}.$$

Алгебраический алгоритм декодирования кода РС (рис.1).

Исходные данные: принятое слово $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$; параметры кода – $n, k, d, m = d - 1, r_0$, локаторы кода – g_0, g_1, \dots .

1. Вычисление синдрома $s(x)$ принятого слова

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} s_j x^j, \quad s_j = \sum_{i=0}^{n-1} y_i g_i^{r_0+j}.$$

2. Решение ключевого уравнения $s(x) = w(x) \bmod x^m$. Если степень $\deg(\sigma(x)) \geq m/2$, то отказ и переход к 5.

3. Определение множества локаторов ошибок Z : $z \in Z$, если $\sigma(g_z^{-1}) = 0$. Если же не все корни являются локаторами позиций, то отказ и переход к 5.

4. Вычисление значений ошибок и исправление искаженных позиций $\hat{y}_z = y_z$,

$$\text{если } z \notin Z, \hat{y}_z = y_z - e_z \text{ для } z \in Z, e_z = \frac{-w(g_z^{-1})g_z^{-r_0+1}}{s'(g_z^{-1})}.$$

5. Восстановление информационных символов или выдача признака отказа от декодирования.

Рассмотрим некоторые примеры кодирования кодом РС.

Пример. Построим код РС в конечном поле $GF(2^m)$ характеристики 2. Каждый символ можно представить в виде набора из m бит. Выберем поле $GF(8)$, в котором существует примитивный элемент порядка 7. Зададим полином $f(x) = x^3 + x + 1$ и построим расширенное поле как

$$\alpha = z, \alpha^2 = z^2, \alpha^3 = z + 1, \alpha^4 = z^2 + z, \alpha^5 = z^2 + z + 1, \alpha^6 = z^2 + 1, \alpha^7 = 1.$$

Порождающий многочлен кода РС задается в виде произведения

$$g(x) = (x-w)(x-w^2)(x-w^3) \dots (x-w^{2^t}), \quad (7)$$

где t – требуемое количество исправляемых ошибок, w – элемент конечного поля.

Задавая $t = 1$ и выбирая $w = \alpha$, получим порождающий полином кода в виде

$$g(x) = (x-w)(x-w^2) = x^2 + a^4x + a^3$$

или, применяя форму записи элементов поля в двоичном коде,

$$g(x) = (001)x^2 + (110)x + (011).$$

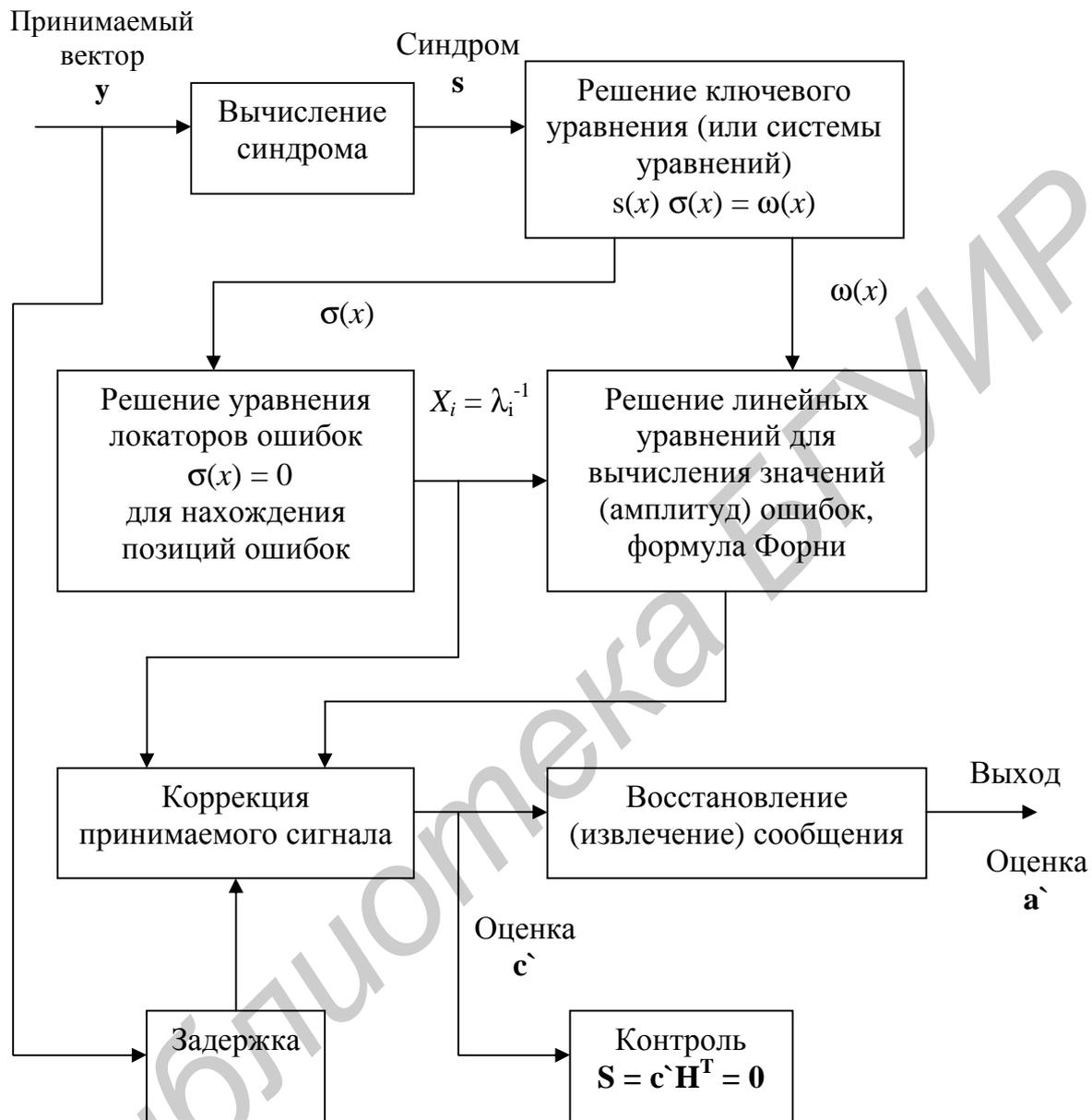


Рис. 1. Схема алгебраического декодера РС-кода во временной области

Некоторые слова несистематического кода РС (7,5) с использованием конвертирования двоичного представления символов в десятичный код приведены ниже:

$$\begin{aligned} a(x) = 0 &\rightarrow c(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \\ a(x) = 1 &\rightarrow c(x) = (0, 0, 0, 0, 1, 6, 3); \\ a(x) = \alpha &\rightarrow c(x) = (0, 0, 0, 0, 2, 7, 6); \\ a(x) = \alpha^3 &\rightarrow c(x) = (0, 0, 0, 0, 3, 1, 5), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \end{aligned}$$

весь полный список состоит из $8^5 = 2^{15}$ кодовых слов.

Пример. Пусть над полем $GF(2^4)$ с примитивным полиномом $x^4 + x + 1$ задан РС-код с параметрами $(n, k) = (15, 9)$. Данный код имеет кодовое расстояние $d = n - k + 1 = 7$, поэтому способен исправлять до трех ошибок.

Порождающий полином имеет степень $m = n - k = 6$ и находится по формуле (7).

Для $v = 1$ получается полином вида

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \prod_{i=1}^6 (x + \alpha^i) = (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6)(x + 7) = \\ &= x^6 + 11x^5 + 15x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 10x + 7. \end{aligned}$$

Для $v = 0$ получается полином вида

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \prod_{i=0}^5 (x + \alpha^i) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 7) = \\ &= x^6 + 10x^5 + 13x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha = 2$ – примитивный элемент поля $GF(2^4)$ и все вычисления поведутся по правилам этого поля. Предположим, что информационный вектор имеет вид

$$\mathbf{a} = (11, 13, 9, 6, 7, 15, 14, 12, 10).$$

Умножая его на порождающий полином $g_1(x)$, после преобразования получим несистематическое кодовое слово $\mathbf{c} = (11, 5, 3, 15, 6, 7, 7, 5, 12, 15, 14, 3, 3, 7, 1)$. Для того чтобы провести кодирование в систематической форме, надо вычислить остаток от деления сдвинутого на 6 позиций влево кодового слова на порождающий полином. Можно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} (11, 13, 9, 6, 7, 15, 14, 12, 10, 0, 0, 0, 0, 0, 0) &= (1, 11, 15, 5, 7, 10, 7) \times \\ &\times (11, 15, 9, 10, 12, 10, 10, 10, 3) + (1, 2, 3, 7, 13, 9), \text{ rem} = (1, 2, 3, 7, 13, 9). \end{aligned}$$

Кодовое слово в систематическом виде имеет вид

$$\mathbf{c} = (11, 13, 9, 6, 7, 15, 14, 12, 10; 1, 2, 3, 7, 13, 9),$$

где младшие разряды расположены справа и нумеруются от нуля.

Кодирование симметричным полиномом.

Порождающий полином РС-кода, имеющего кодовое расстояние $d = 2t + 1$ над полем $GF(2^m)$, представляется в виде

$$g(x) = \prod_{i=b}^{b+d-2} (x + a^i) = (x + a^b) \dots (x + a^{b+d-2}), \quad (8)$$

где α – примитивный элемент поля, b – некоторое положительное целое число.

Объем вычислительного процесса при кодировании можно сократить, выбрав число $b = 2^{m-1} - t$. В этом случае полином $g(x) = g_0 + g_1 x + \dots + g_{2t} x^{2t}$ является симметричным, т.е. имеет симметричные коэффициенты: $g_0 = g_{2t} = 1$, $g_i = g_{2t-i}$, $i = 1, 2, \dots, t-1$.

Пример. Пусть задан $(n, k) = (15, 11)$ – код РС над полем $GF(2^4) / (x^4 + x + 1)$. Порождающий полином кода в симметричной форме будет иметь вид

$$g(x) = (x + \alpha^6)(x + \alpha^7)(x + \alpha^8)(x + \alpha^9) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1,$$

$t = (m/2) = 2$, $b = 2^{m-1} - t = 6$, $\alpha = 2$.

2.2. Алгоритм Берлекемпа – Мессе (БМ) решения ключевого уравнения

Берлекемп предложил итерационный метод вычисления полиномов $\Lambda(z)$ и $\Omega(z)$, входящих в ключевое уравнение, по изменённому полиному $S(z)$. Мессе трактовал алгоритм Берлекемпа как процедуру построения наиболее короткого регистра с обратными связями, порождающего m компонент синдрома S . Он же нашёл вариант алгоритма, который вычисляет только полином локаторов $\Lambda(z)$, коэффициенты которого удовлетворяют заданной системе уравнений [1, 2, 6].

Задача декодера – найти полином $\Lambda(z)$ или $s(z)$ минимальной степени v , удовлетворяющий системе уравнений, где v – число ошибок, причём заранее не известно. Алгоритм Берлекемпа – Мессе позволяет строить такую последовательность полиномов $s_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, m$, в которой каждый последующий полином удовлетворяет большему числу уравнений. Одновременно итеративно вычисляется полином величин ошибок $\Omega(z)$.

Исходные данные – это m компонент синдрома S , где обычно $b = 1$. Начальные условия для полиномов $s(z), \Omega(z), C(z), D(z)$ и переменной L задаются вначале.

Алгоритм выполняется за m итераций. Если в процессе вычислений невязка $\Delta = 0$, то полиномы $s(z)$ и $\Omega(z)$ не изменяются, в противном случае осуществляется их коррекция

$$s_j(z) = s_{j-1}(z) \oplus \Delta z C_{j-1}(z);$$

$$\Omega_j(z) = \Omega_{j-1}(z) \oplus \Delta D_{j-1}(z),$$

где $C_{j-1}(z)$ и $D_{j-1}(z)$ – вспомогательные полиномы, взятые из предыдущего шага. На шаге j они формируются из следующих соображений. Если $2L_{j-1} > j-1$, то содержание регистров, хранящих эти вспомогательные полиномы, сдвигается: $C(z) = zC(z)$; $D(z) = zD(z)$, а переменная L не изменяется. При $2L_{j-1} \leq j-1$ указанные полиномы и переменная L трансформируются:

$$C_j(z) = \Delta^{-1} s_{j-1}(z), D_j(z) = \Delta^{-1} z \Omega_{j-1}(z), L_j = j - L_{j-1}.$$

По окончании m итераций целесообразно выполнить проверку: $\deg s(z) = L$; если это равенство несправедливо, то вырабатывается сигнал $FLAG = 1$ защитного отказа от декодирования, так как принятое слово содержит более чем t ошибок.

2.3. Преобразование Фурье в поле Галуа

Пусть $\mathbf{v} = \{v_i, i = 0, \dots, n-1\}$ – вектор над $GF(q)$, где n делит $q^m - 1$ при некотором m , и пусть α – элемент порядка n в поле $GF(q^m)$. Преобразование Фурье в поле Галуа (ПФГ) вектора \mathbf{v} определяется как вектор $\mathbf{V} = \{V_j, j = 0, 1, \dots, n-1\}$, задаваемый равенством

$$V_j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{ij} v_i, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Дискретный индекс i называется временем, а \mathbf{v} – временной функцией или сигналом. Аналогично индекс j можно назвать частотой, а \mathbf{V} – частотной функцией или спектром.

В качестве длины ПФГ можно выбрать произвольный делитель числа $(q^m - 1)$, но наиболее важную роль играют примитивные длины $n = (q^m - 1)$. В последнем случае α является примитивным элементом поля $GF(q^m)$.

Если m – наименьшее целое, такое, что n делит $(q^m - 1)$, то над полем $GF(q)$ существует преобразование Фурье длины n и компоненты этого преобразования лежат в поле $GF(q^m)$. Временная функция \mathbf{v} принимает значения в поле $GF(q)$, а её спектр \mathbf{V} лежит в расширении поля $GF(q^m)$. В приложениях, связанных с контролем ошибок, все связанные с декодированием действия осуществляются в большом поле $GF(q^m)$, однако начинать надо с вектора входных данных (на входе канала), т.е. в малом поле $GF(q)$.

Над полем $GF(q)$ характеристики p вектор и его спектр связаны соотношениями

$$V_j = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \alpha^{ij}, \quad v_i = (n^{-1}) \sum_{j=0}^{n-1} V_j \alpha^{-ij}.$$

В матричном виде эти соотношения запишутся как

$$\mathbf{V} = [\alpha^{ij}] \mathbf{v}^T, \mathbf{v} = [\alpha^{ij}]^{-1} \mathbf{V}^T,$$

где $[\alpha^{ij}]$, $[\alpha^{ij}]^{-1}$ – прямая и обратная матрицы преобразования Фурье, T – оператор транспонирования.

Одним из сильнейших свойств ПФГ является *свойство свертки*. Предположим, что $e_i = f_i g_i, i = 0, \dots, n-1$. Тогда

$$E_j = \left(n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} F_{((j-k))} G_k \right), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

где двойные скобки означают, что индексы вычисляются в арифметике по модулю n .

Другой замечательной особенностью ПФГ является *свойство сдвига*.

Если $\{v_i\} \leftrightarrow \{V_j\}$ является парой ПФГ, то парами ПФГ являются также

$$\{\alpha^i v_i\} \leftrightarrow \{V_{((j+1))}\} \text{ и } \{v_{((i-1))}\} \leftrightarrow \{\alpha^j V_j\}.$$

Иногда вектор \mathbf{v} задается многочленом $v(x)$. С помощью ПФГ многочлен

$$v(x) = v_{n-1} x^{n-1} + \dots + v_1 x + v_0$$

может быть преобразован в многочлен

$$V(x) = V_{n-1} x^{n-1} + \dots + V_1 x + V_0,$$

который называется спектральным многочленом или многочленом, ассоциированным с многочленом $v(x)$.

Справедливы следующие свойства спектра, связанные с корнями многочлена:

- 1) элемент α^j является корнем многочлена $v(x)$ тогда и только тогда, когда j -я частотная компонента V_j равна нулю;
- 2) элемент α^i является корнем многочлена $V(x)$ тогда и только тогда, когда i -я временная компонента v_i равна нулю.

Таким образом, если в одном случае говорят о корнях многочлена в конечном поле, а в другом – о равных нулю спектральных компонентах, то в действительности говорят об одном и том же.

Свойства ПФГ позволяют дать описание циклических кодов. Каждое слово $c(x)$ задается многочленом степени $(n-1)$. В несистематическом виде оно может быть записано как $c(x) = g(x) a(x)$, где $a(x)$ – информационный многочлен степени $(k-1)$. Во временной области это дает циклическую свертку

$$c_i = \sum_{l=0}^{n-1} g_{((i-l))} a_l.$$

Следовательно, в частотной области операция кодирования может быть записана в виде произведения

$$C_j = G_j A_j.$$

Любой удовлетворяющий этому равенству спектр задает в частотной области кодовое слово при условии, что во временной области все компоненты являются $GF(q)$ -значными. В силу произвольности информационного спектра единственная существенная роль компонент G_j состоит в том, чтобы определить частоты, в которых стоят нулевые компоненты C_j спектра кодового слова.

Спектральное определение циклического кода. Циклическим кодом называется множество таких слов над $GF(q)$, у которых все спектральные компоненты, принадлежащие заданному множеству так называемых проверочных частот j_1, \dots, j_{n-k} , равны нулю.

Хотя каждое слово циклического кода является вектором над $GF(q)$, спектр кодового слова является вектором $GF(q^m)$. Следовательно, циклический код может быть определен как множество $GF(q)$ -значных обратных преобразований Фурье множества всех спектральных векторов, компоненты которых в заданном множестве частот равны нулю. Нельзя выбирать произвольный спектральный вектор, у которого стоят нули в заданном множестве частот; обратные преобразования некоторых из таких векторов могут иметь компоненты, не принадлежащие полю $GF(q)$. Для того чтобы кодовое слово принадлежало полю $GF(q)$, выбирать нужно только спектр, который удовлетворяет следующим условиям сопряженности.

Пусть V есть n -мерный вектор с компонентами из $GF(q^m)$, где n делит $(q^m - 1)$. Тогда обратное преобразование Фурье v является вектором с компонентами из $GF(q)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$V_j^q = V_{(aj)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Чтобы применить это свойство, разобьем числа по $\text{mod } n$ на подмножества элементов циклотомических классов:

$$C_j = \{j, jq, \dots, jq^{m_j-1}\},$$

где m_j – наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее равенству $jq^{m_j} = j \text{ mod } n$.

Например, если $q = 2$, $n = 7$, то элементы циклотомических классов имеют вид $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1, 2, 4\}$, $C_2 = \{3, 6, 5\}$.

Циклотомический класс выделяет в спектре множество частот. Назовем эти частоты хордой. Тогда, если временной сигнал принимает значения в поле $GF(q)$, то значение спектра в одной из частот хорды определяет значения спектра при всех частотах этой хорды.

Пример. Вычислим прямое и обратное ПФГ над полем $GF(17)$. Зададим примитивный элемент поля $\alpha = 3$. Элементы поля образуют множество

$$[1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6].$$

Множество обратных элементов поля равно

$$\{\alpha^{-1}\} = \{6, 2, 12, 4, 7, 8, 14, 16, 11, 15, 5, 13, 10, 9, 3, 1\}.$$

Матрица прямого преобразования размером 16×16 имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 10 & 13 & 5 & 15 & 11 & 16 & 14 & 8 & 7 & 4 & 12 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & 13 & 15 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 9 & 13 & 15 & 16 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 15 & 14 & 4 & 6 & 9 & 5 & 16 & 7 & 2 & 3 & 13 & 11 & 8 & 12 \\ 1 & 13 & 16 & 4 & 1 & 13 & 16 & 4 & 1 & 13 & 16 & 4 & 1 & 14 & 16 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 6 & 13 & 14 & 2 & 10 & 16 & 12 & 9 & 11 & 4 & 3 & 15 & 7 \\ 1 & 15 & 4 & 9 & 16 & 2 & 13 & 8 & 1 & 15 & 4 & 9 & 16 & 2 & 13 & 8 \\ 1 & 11 & 2 & 5 & 4 & 10 & 8 & 3 & 16 & 6 & 15 & 12 & 13 & 7 & 9 & 14 \\ 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 \\ 1 & 14 & 9 & 7 & 13 & 12 & 15 & 6 & 16 & 3 & 8 & 10 & 4 & 5 & 2 & 11 \\ 1 & 8 & 13 & 2 & 16 & 9 & 4 & 15 & 1 & 8 & 13 & 2 & 16 & 9 & 4 & 15 \\ 1 & 7 & 15 & 3 & 4 & 11 & 9 & 12 & 16 & 10 & 2 & 14 & 13 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 \\ 1 & 12 & 8 & 11 & 13 & 3 & 2 & 7 & 16 & 5 & 9 & 6 & 4 & 14 & 15 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 15 & 13 & 9 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 15 & 13 & 9 \\ 1 & 6 & 2 & 12 & 4 & 7 & 8 & 14 & 16 & 11 & 15 & 5 & 13 & 10 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Зададим вектор сообщения в виде $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 3, 4, 1, 9, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Спектр Фурье–Галуа сообщения равен

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{V} = (14, 13, 11, 9, 9, 13, 16, 11, 7, 9, 8, 3, 1, 16, 11, 3).$$

Функция спектра ПФГ показана на рис. 2.

Обратное преобразование ФГ вычислим по формуле $a_i = \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{15} v_j a^{-ij} \text{ mod } 17$.

Проведя необходимые вычисления, нетрудно убедиться, что исходное сообщение восстанавливается полностью. Так, $a_1 = (1 / 16) [14 \cdot 1 + 13 \cdot 6 + 11 \cdot 2 + 9 \cdot 12 + 9 \cdot 4 + 13 \cdot 7 + 16 \cdot 8 + 11 \cdot 14 + 7 \cdot 16 + 9 \cdot 11 + 8 \cdot 15 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 13 + 16 \cdot 10 + 11 \cdot 9 + 3 \cdot 3] = 1 \text{ mod } 17$.

2.4. Кодирование и декодирование кода РС в частотной области

Кодирование в частотной области РС-кодами над полем $GF(q = 2^m)$ состоит в следующем (рис. 3). Информационное сообщение \mathbf{a} из $k = n - m = q - 1$ символов представляется в виде старших коэффициентов спектра \mathbf{F}_G Фурье–Галуа (ФГ), а остальные m символов этого спектра полагаются равными нулю.

Кодовое слово \mathbf{c} в несистематическом виде получается с помощью обратного n -точечного преобразования ФГ спектра \mathbf{F}_G .

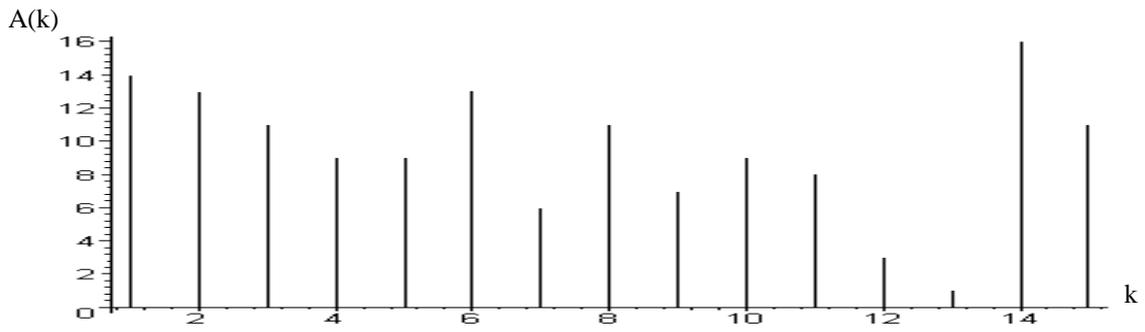


Рис. 2. Спектр кодового слова

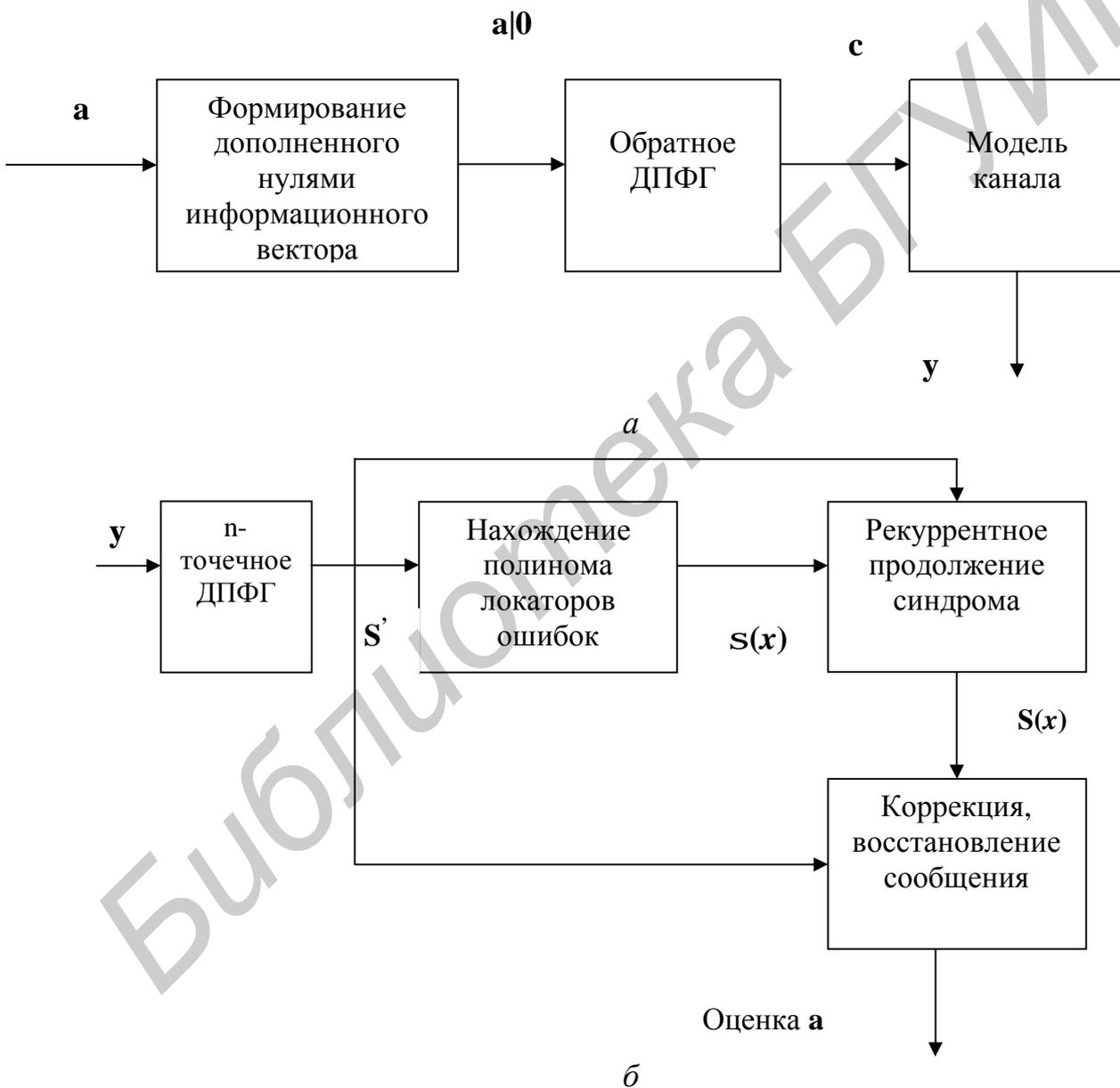


Рис. 3. Схема спектрального кодера-декодера: a – кодирование, \hat{b} – декодирование

Пример. Пусть над полем $GF(q = 2^4)$ необходимо закодировать сообщение кодом РС с параметрами $n = 15$, $k = 11$, $d = 3$. Элементы поля имеют вид $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, 1 + \alpha, \alpha + \alpha^2, \alpha^2 + \alpha^3, 1 + \alpha + \alpha^3, 1 + \alpha^2, \alpha + \alpha^3, 1 + \alpha + \alpha^2, \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha, 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3, 1 + \alpha^2 + \alpha^3, 1 + \alpha^3$.

Сообщение задано в форме $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{10}, \dots, a_1) = (13, 7, 15, 5, 9, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = [a^{13}, a^7, a^{15}, a^5, a^9, \bar{b}, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Сформируем спектр $\mathbf{V} = (\mathbf{a}; \mathbf{0}) = (13, 7, 15, 5, 9, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$, где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор длины $m = n - k$. Воспользовавшись обратным ДПФГ, найдем искомое кодовое слово

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} = \text{ДПФГ}^{-1}\{\mathbf{V}\} = (14, 0, 1, 10, 0, 5, 0, 10, 2, 0, 2, 14, 15, 0, 3).$$

Алгоритм декодирования в спектральной области

Основные этапы спектрального декодирования:

- 1) дискретное преобразование Фурье–Галуа (ДПФГ);
- 2) нахождение полинома локаторов;
- 3) рекуррентное продолжение синдрома;
- 4) коррекция и извлечение сообщения.

На первом этапе принятое слово $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$ подвергается n – точечному ДПФГ. Полученный вектор $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ соответствует спектру для суммы кодового слова и ошибки $(\mathbf{c} + \mathbf{e})\mathbf{W}_n = \mathbf{C} + \mathbf{E}$, где \mathbf{W}_n – матрица ДПФГ. Так как m составляющих вектора \mathbf{V} являются нулевыми, то соответствующие им m компонент вектора $\mathbf{s} = (s_0 = X_k, s_1 = X_{k+1}, \dots, s_{m-1} = X_{n-1})$ характеризуют конфигурацию ошибок \mathbf{e} . Другими словами, эти m компонент аналогичны синдрому во временной области, причем, если все они равны нулю, то считается, что в принятом слове нет ошибок.

Второй этап проще по сравнению с временным декодированием, так как отпадает необходимость в полном решении ключевого уравнения, а достаточно найти лишь полином локаторов $\sigma(x)$.

Третий этап сводится к вычислению спектра $\mathbf{E} = \{E_i\}$ ошибок. Для этого осуществляется рекуррентное продолжение синдрома по формуле

$$E_{(n-1-l-j)} \Psi_\lambda = E_{(n-1-j)} \Psi_{(l-1)} + \dots + E_{(n-2-j)} \Psi_1 + E_{(n-1-j)} \Psi_0,$$

где Ψ_i – коэффициент при x^i полинома локаторов ошибок $s(x)$, $j = 0, 1, \dots, (n - \lambda)$, l – степень полинома $s(x)$.

При этом m старших коэффициентов спектра \mathbf{E} совпадают с соответствующими компонентами синдрома, характеризующими ошибку \mathbf{e} :

$$E_{(n-1)} = s_{m-1}, E_{(n-2)} = s_{m-2}, \dots, E_{(k-n-m)} = s_0.$$

Коррекция на четвертом этапе состоит в сложении векторов \mathbf{Y} и \mathbf{E} , а также выделении сообщения из полученной после отбрасывания нулевого вектора $\mathbf{0}$ длины t из суммы.

Пример. Предположим, что кодовое слово имеет вид

$$\mathbf{c} = (14, 0, 1, 10, 0, 5, 0, 10, 2, 0, 2, 14, 15, 0, 3).$$

После искажения в канале принят вектор $\mathbf{y} = (0, 3, 1, 10, 0, 5, 0, 10, 2, 0, 2, 14, 15, 0, 3)$. Вектор ошибок равен $\mathbf{e} = (e_0 = 14, e_1 = 3)$.

После выполнения 15-точечного ДПФГ определяем спектр

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y} \mathbf{W}_{15} = (6, 15, 11, 4, 3, 11, 4, 11, 10, 5, 2; 0, 3, 7, 13) = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{10}; Y_{11}, \dots, Y_{14}).$$

Так как четыре правых коэффициента спектра отличны от нуля, то в принятом слове имеются ошибки.

Используя алгоритм БМ, находим полином локаторов ошибок, который равен

$$s(x) = x^2 + \alpha^3 x + \alpha^{14}.$$

Определим спектр ошибки как продолжение синдрома. Для рассматриваемого случая имеем $n = 15$, $\lambda = 2$, $\psi_0 = 15$, $\psi_1 = 4$, $E_{14} = s_3 = 13$, $E_{13} = s_2 = 7$, $E_{12} = s_1 = 3$, $E_{11} = s_0 = 0$.

Убедимся, что при $j = 0$ и $j = 1$ рекурсивные соотношения выполняются:

$$E_{12} = E_{13} \psi_1 + E_{14} \psi_0 = \alpha^7 \alpha^3 + \alpha^{13} \alpha^{14} = \alpha^3 = 3, \quad E_{11} = E_{12} \psi_1 + E_{13} \psi_0 = 3 \cdot 3 + 7 \cdot 14 = 0.$$

Для $j = 2$ находим

$$E_{10} = E_{11} \psi_1 + E_{12} \psi_0 = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 14 = 2.$$

Аналогичным образом получаем: $E_9 = 5$, $E_8 = 10$, $E_7 = 11$, $E_6 = 4$, $E_5 = 6$, $E_4 = 1$, $E_3 = 8$, $E_2 = 12$, $E_1 = 9$, $E_0 = 15$.

После сложения вектора ошибки с полученным сообщением и исключения четырех правых нулевых коэффициентов извлекаем верное сообщение.

Спектральный метод декодирования значительно проще декодирования во временной области. Однако он имеет недостаток. Сбои в блоке ДПФГ, искажающие любые несиндромные символы с номерами $i = 0, 1, \dots, k-1$, не могут быть выявлены.

2.5. Исправление ошибок и стираний

В режиме стирания фиксируются не сами оценки принятых символов, а их местоположение и им присваивается статус стёртого символа. Суть исправления и стирания состоит в том, что после декодирования можно провести восстановление стёртых символов, используя алгоритмы интерполяции. Если при декодировании использовать l стёртых символов, тогда два кода будут отличаться друг от друга по меньшей мере на $(d - l)$ позиций, где d – кодовое расстояние. Тогда в дополнение к стиранию можно будет исправлять $t_m = \lfloor (d - l - 1) / 2 \rfloor$ ошибок, где $\lfloor x \rfloor$ – это целая часть числа x . Код может исправлять все комбинации из n ошибок и l стираний в канале, для которого $2n + l < d$.

Для восстановления одного стертого символа необходим только один проверочный символ – для восстановления значения, т.к. позиция стирания принимающей стороне известна. Например, для поля Галуа $GF(256)$ РС-код (94, 88)-битовых символов имеет $n = 94$, $k = 88$ и может исправить до трех ошибок ($t = 3$) и восстановить до шести стертых символов.

Алгоритм исправления стираний. Предположим, что выполнено f стираний при приеме кодового слова, в котором имеется v ошибок.

Обозначим локаторы ошибок как $X_1 = a^{i_1}, X_2 = a^{i_2}, \dots, X_n = a^{i_n}$, а стираний – как $Y_{c,1} = a^{j_1}, Y_{c,2} = a^{j_2}, \dots, Y_{c,f} = a^{j_f}$. Декодирование ведется в следующем порядке.

1. Вычисляется полином локаторов стираний:

$$\Gamma(x) = \prod_{l=1}^f (1 - Y_{c,l} \cdot x) .$$

2. В декодируемом векторе заменяют символы с координатами стираний на нулевые символы. Для нового вектора находится полином синдрома стираний $s(x)$.

3. Определяется модифицированный полином синдрома

$$SE(x) = (\Gamma(x)[1 + s(x)] - 1) \bmod x^{2t+1} .$$

4. Вычисляется полином локаторов ошибок $s(x)$, используя для этого алгоритм БМ и значения модифицированного полинома $SE_i, i = f + 1, \dots, 2t$.

5. Определяются корни уравнения $s(x) = 0$ и координаты ошибок.

6. Составляется ключевое уравнение

$$w(x) = s(x)[1 + SE(x)] \bmod x^{2t+1}$$

и определяется полином локаторов ошибок-стираний $y(x) = s(x)\Gamma(x)$.

7. Оцениваются значения ошибок и стираний. Значения ошибок вычисляются по формуле

$$Q_{i_k} = \frac{-X_k w(X_k^{-1})}{y'(X_k^{-1})} , \text{ где } y' - \text{ формальная производная.}$$

Значения стираний вычисляются по формуле $F_{i_k} = \frac{-Y_k w(Y_k^{-1})}{y'(Y_k^{-1})}$.

Пример. Декодируется код РС (7, 3), построенный над полем $GF(8)$.

Принимаемый вектор равен

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha^4 x^6 + \alpha^5 x^5 + \alpha^2 x^4 + x^3 + \alpha^6 x^2 + \alpha^5 x + \alpha^6 = \\ &= y_6 x^6 + y_5 x^5 + y_4 x^4 + y_3 x^3 + y_2 x^2 + y_1 x + y_0 . \end{aligned}$$

Приемник выдал стирания на позициях $j_1 = 1, j_2 = 6$, что позволяет записать полином стираний как $er(x) = er_1 x + er_2 x^2$. Алгоритм декодирования:

1. $\Gamma(x) = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^6 x) = 1 + \alpha^5 x + x^2;$

2. Заменяем в $y(x)$ символы на 1-й и 6-й позициях нулями:

$$y_c(x) = \alpha^5 x^5 + \alpha^2 x^4 + x^3 + \alpha^6 x^2 + \alpha^6, \text{ после чего вычисляем синдром}$$

$$S_1 = y_c(\alpha) = \alpha; S_2 = y_c(\alpha^2) = \alpha; S_3 = y_c(\alpha^3) = \alpha; S_4 = y_c(\alpha^4) = \alpha^3;$$

$$s(x) = \alpha x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha^3 x^4.$$

3. Модифицируем полином синдрома

$$SE(x) = [(1 + \alpha^5 x + x^2)(\alpha x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha^3 x^4) - 1] \bmod x^5 =$$

$$= \alpha^6 x + \alpha^4 x^2 + \alpha^6 x^3 + \alpha^2 x^4.$$

4. Применяя алгоритм БМ, получим выражение для полинома локаторов ошибок $s(x) = 1 + \alpha^3 x$. Локатор ошибки $X_1 = \alpha^3$. Ошибка расположена на третьей позиции.

5. Ключевое уравнение равно

$$w(x) = s(x)[1 + SE(x)] \bmod x^5 =$$

$$= (1 + \alpha^3 x)(1 + \alpha^6 x + \alpha^4 x^2 + \alpha^6 x^3 + \alpha^2 x^4) \bmod x^5 = 1 + \alpha^4 x + \alpha x^2 + \alpha^2 x^3.$$

Полином $y(x) = (1 + \alpha^2 x + \alpha^3 x^2 + \alpha^3 x^3)$.

Формальная производная $y'(x) = (\alpha^2 + \alpha^3 x^2)$.

6. Вычисляем значения ошибок и стираний:

$$Q_3 = \frac{a^3 w(a^4)}{y'(a^4)} = a^6, F_1 = \frac{a w(a^6)}{y'(a^6)} = a^5, F_6 = \frac{a^6 w(a)}{y'(a)} = a^4.$$

Спектральное представление процесса исправления ошибок и стираний.

Дополнительно введем следующие обозначения:

- $\Gamma i = \{i_0, i_1, \dots, i_{r-1}\}$ - множество индексов позиций r -стираний;

- $M = \{j_0, j_1, \dots, j_{n-r-1}\}$ - множество индексов элементов декодируемого векто-ра, не затронутых процессом стирания;

- $\Gamma = (g_0, g_1, \dots, g_{r-1})$ - вектор стертых символов;

- $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-r-1}) = (c_{j_0}, c_{j_1}, \dots, c_{j_{n-r-1}})$ - кодовый вектор, в котором исключены символы, соответствующие стираемым позициям.

Определим в проверочной матрице \mathbf{H} подматрицу \mathbf{H}_x , элементы которой имеют индексы, соответствующие позициям стираний:

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ x_0 & x_1 & \mathbf{L} & x_{r-1} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ x_0^{r-1} & x_1^{r-1} & \mathbf{L} & x_{r-1}^{r-1} \end{bmatrix},$$

где $x_m = a_{i_m}$, $i_m \in \Gamma i$, $m = 0, 1, \dots, r-1$.

Символы $(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ имеют смысл локаторов стираний.

Матрица \mathbf{W} , соответствующая остальным, не стертым символам, имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ w_0 & w_1 & \mathbf{L} & w_{n-r-1} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ w_0^{r-1} & w_1^{r-1} & \mathbf{L} & w_{n-r-1}^{r-1} \end{bmatrix},$$

где $w_m = a_{j_m}$, $j_m \in \mathbf{M}$, $m = 0, 1, \dots, n-r-1$.

Модифицированный синдром можно определить из выражения

$$SE^T = (s_0, s_1, \dots, s_{r-1})^T = \mathbf{Wb}^T.$$

Если в принятом векторе заменить стертые символы нулями

$$\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad y_i = \begin{cases} 0, & i \in \Gamma \\ c_i, & i \in \mathbf{M} \end{cases},$$

то синдром может быть вычислен по формуле

$$s_i = \sum_{j=0}^{n-1} y_j a^{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n-k-1.$$

Для каждого кодового слова можно составить уравнение

$$\mathbf{H}_x \mathbf{g}^T + \mathbf{Wb}^T = 0.$$

Отсюда вектор стертых символов может быть определен как

$$\mathbf{g}^T = -\mathbf{H}_x^{-1} \mathbf{Wb}^T = -\mathbf{H}_x^{-1} SE^T.$$

Применение той или иной формы представления и декодирования диктуется техническими требованиями на декодер.

3. ПРОГРАММЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ КОДА РС

VMP := proc(v::vector, A::array, p::integer) - вычисление произведения вектора \mathbf{v} на матрицу A , $\mathbf{v}A$ по модулю $p \pmod{p}$;

GenMat:=proc(G::array, p::integer) - формирование генераторной матрицы ступенчатой формы $G \pmod{p}$ для кода, определяемого строкой матрицы G ;

DualGenMat:=proc(G::array, p::integer) - вычисление генераторной матрицы дуального кода, определяемого строкой матрицы $G \pmod{p}$ (формой генераторного полинома);

ToPoly - преобразование вектор - полином с коэффициентами, равными элементам вектора

> **ToPoly:=proc(w::array, p::integer, var::symbol)**

```

local i,n,poly;
n:=vectdim(w);
poly:=0;
for i to n do
  poly:=poly+(Normal(w[i] mod p)*var^(i-1);
end do;
RETURN(sort(poly))
end:

```

ToVector – конвертирование полинома в вектор длины n, n должно быть больше или равно величине $\text{degree}(\text{poly}, \text{var}) + 1$

> **ToVector:=proc(poly::polynom,var::symbol,n::integer,p::integer)**

```

local i,v;
v:=vector(n);
for i to n-1 do
  v[i+1]:=Normal(coeff(poly,var^i) mod p;
end do;
v[1]:=Normal(subs(var=0,poly)) mod p;
RETURN(eval(v))
end:

```

IrredPoly – выбор неприводимого полинома степени r над полем $F(p)$ путем факторизации полинома $x^{(p^r-1)}-1 \text{ mod } p$

> **IrredPoly:=proc(r::integer,p::integer)**

```

local fp,i,irr;
fp:=Factor(x^(p^r-1)-1) mod p;
for i to nops(fp) do
  if degree(op(i,fp)) = r then
    irr:=op(i,fp);
    break
  end if;
end do;
RETURN(irr)
end:

```

MinPoly – вычисление минимального полинома элемента beta^s , где $\text{beta} = \text{RootOf}(h)$ – примитивный элемент поля $\text{GF}(p^r)$, где $r = \text{deg}(h)$. Полином h должен быть неприводимым над полем $\text{GF}(p)$ и выполнено неравенство $1 \leq s \leq 2^r-2$

> **MinPoly:=proc(s::integer,h::polynom,p::integer,var::symbol)**

```

local CC,n,beta,t,mp;
beta:=RootOf(h);
n:=p^degree(h)-1;
if evalb((1 <= s) and (s <= n-1)) then
  CC:=CyclotomicCoset(s,n,p);
  mp:=1;
  for t in CC do
    mp:=mp*(var-beta^t);
  end do;
  mp:=expand(mp);
  mp:=Normal(mp) mod p;
  RETURN(sort(mp))
else
  lprint("Error -- s not in correct range 1 <= s <= 2^degree(h)-2")
end if
end:

```

RSGenPoly – нахождение генераторного полинома кода РС. Оператор "irred" – должен быть неприводимым полиномом степени r над полем F_p , корни которого являются примитивными элементами для поля $GF(p^r)$. Корнями генераторного полинома являются элементы $\beta^{(m+1)}, \dots, \beta^{(m+\delta-1)}$

```

> RSGenPoly:=proc(p::integer,r::integer,delta::integer,m::integer,
  h::polynom,var::symbol)
local i,beta,gp;
beta:=RootOf(h);
gp:=1;
for i from m+1 to m+delta-1 do
  gp := gp*(var - beta^i);
end do;
RETURN(sort(collect(Normal(expand(gp)) mod p,var))) end:

```

RSEncode – полиномиальная форма кодирования информации кодом РС. Оператор "delta" определяет минимальное кодовое расстояние; $\delta = \text{degree}(\text{gen}) + 1$. Длина информационного слова должна быть равна $p^r - \delta$. Переменная "var" должна совпадать с символикой переменной генераторного полинома

```

RSEncode:=proc(info::array,gen::polynom,var::symbol,irred::polynom,p::integer)
local r,delta,s,f,cp,i;
r:=degree(irred);
delta:=degree(gen)+1;

```

```

s:=vectdim(info);
if s = p^r-delta then
  f:=0;
  for i to s do
    f:=f+info[i]*var^(p^r-i-1);
  end do;
  cp:= f - Rem(f,gen,var) mod p;
  RETURN(ToVector(cp,var,p^r-1,p))
else
  lprint("Error -- expecting p^r - delta information symbols")
end if ; end:

```

RSBMSynPol – вычисление синдрома ошибки принятого вектора. Результат представляется в виде полинома переменной x

```

> RSBMSynPol:=proc(received::array,delta::integer,m::integer,irred::polynom,
  p::integer)

```

```

  local r,n,beta,wp,syndromes,j,sp;
  r:=degree(irred);
  n:=p^r-1;
  if evalb((vectdim(received) = n) and (modp(delta,2) = 1)) then
    beta:=RootOf(irred);
    wp:=ToPoly(received,p,x);
    syndromes:=array(m+1..m+delta-1);
    for j from m+1 to m+delta - 1 do
      syndromes[j]:=Normal(subs(x=beta^j,wp)) mod p;
    end do;
    sp:=1;
    for j to delta - 1 do
      sp:=sp+syndromes[m+j]*x^j;
    end do;
    RETURN(sp)

```

```

else
  lp("Error -- received word has incorrect length, or delta even") end if; end:

```

RSBMErrorLoc – вычисление полинома локаторов ошибок по алгоритму Берлекемпа-Месси. Минимальное кодовое расстояние "delta" определяется как нечетное число. "irred " – неприводимый полином степени r , соответствующий степени расширенного поля $GF(p^r)$. Синдром "syndromepoly" должен иметь форму полинома относительно переменной x

```

> RSBMErrorLoc:=proc(syndromepoly::polynom,delta::integer,irred::polynom,

```

```

    p::integer,verbose::boolean)    local q,pp,z,DD,cc,cd,i;
q:=array(-1..delta-1);
pp:=array(-1..delta-1);
z:=array(-1..delta-1);
DD:=array(-1..delta-1);
q[-1]:=syndromepoly;
q[0]:=simplify((syndromepoly-1)/x);
pp[-1]:=x^delta;
pp[0]:=x^(delta-1);
DD[-1]:=-1; DD[0]:=0; z[0]:=-1;
for i to delta-1 do
    cc:=Normal(subs(x=0,q[i-1])) mod p;
    if cc = 0 then
        q[i]:=simplify(q[i-1]/x);
        pp[i]:=simplify(pp[i-1]/x);
        DD[i]:=2+DD[i-1];
        z[i]:=z[i-1];
    else
        cd:= Normal( subs(x=0,q[z[i-1]]) ) mod p;
        q[i]:=Normal(simplify((q[i-1]-(cc/cd)*q[z[i-1]])/x) mod p;
        pp[i]:=Normal(simplify((pp[i-1]-(cc/cd)*pp[z[i-1]])/x) mod p;
        DD[i]:=2+min(DD[i-1],DD[z[i-1]]);
        if DD[i-1] >= DD[z[i-1]] then
            z[i]:=i-1;
        else
            z[i]:=z[i-1];
        end if;
    end if;
    if verbose then
        print("step",i,"");
        print(ToPoly(ToVector(pp[i],x,degree(pp[i])+1,p),p,x),
            ToPoly(ToVector(q[i],x,degree(q[i])+1,p),p,x));
    end if;    end do;
RETURN(ToPoly(ToVector(pp[delta-1],x,degree(pp[delta-1])+1,p),p,x))    end:
RSBMErrVal – вычисление местоположения ошибок и значений ошибок РС-кода
(p^r,delta);
> RSBMErrVal:=proc(errloc::polynom,synpoly::polynom,m::integer,delta::integer,
    irred::polynom,p::integer)
    local r,rr,e,errrev,roots,i,l,beta,errorvalues,rtinv,j;

```

```

r:=degree(irred);
beta:=RootOf(irred);
e:=degree(errloc);
errorvalues:=vector([seq(0,i=0..p^r-2)]);
roots:=array(0..p^r-2,[seq(0,i=0..p^r-2)]);
errrev:=Normal(simplify(x^e*subs(x=1/x,errloc))) mod p;
j:=0;
for i from 0 to p^r-2 do
  if Normal(subs(x=beta^i,errrev)) mod p = 0 then      roots[i]:=1;
    j:=j+1;      end if;  end do;
if j <> e then
  RETURN(FAIL)
else
  rr:=Rem(errloc*sypoly,x^delta,x) mod p;
  for i from 0 to p^r-2 do
    if roots[i] = 1 then
      rtinv:=Normal(1/beta^i) mod p;
      errorvalues[i+1]:=Normal(beta^(i*(1-m))*
        subs(x=rtinv,rr)/subs(x=rtinv,diff(errloc,x))) mod p;
    end if;  end do;
  RETURN(eval(errorvalues))  end if;  end:

```

RSBMDecode – алгоритм общего декодирования кода РС с восстановлением кодового слова;

```

RSBMDecode:=proc(rec::array,p::integer,irred::polynom,delta::integer,m::integer)
  local sp,el,errorvector;
  sp:=RSBMSynPol(rec,delta,m,irred,p);
  el:=RSBMErrLoc(sp,delta,irred,p,false);
  errorvector:=convert(RSBMErrVal(el,sp,m,delta,irred,p),vector);
  RETURN(map(y->Normal(y) mod p, matadd(rec,errorvector)));  end:

```

CHerr – оператор модели канала передачи информации. Моделирует генератор ошибок, который формирует случайным образом в заданном конечном поле вектор ошибок определенного веса, а также сумматор, который складывает в поле GF(p) элементы вектора кодового слова и вектора ошибок.

Dganal – преобразование данных, представленных в виде вектора элементов поля вида b^j , вектор десятичных чисел {j}; используется для получения функций, иллюстрирующих процессы кодирования и декодирования.

MFGT – формирование матрицы прямого ПФГ;
OMFGT – формирование матрицы обратного ПФГ;
fx – оператор-функция прямого ПФГ.

> **fx:= x-> simplify(add(fin[i]*x^(i-1), i=1..k)) mod p;**
ofx – оператор-функция обратного ПФГ
 > **ofx:= x-> simplify((1/16)*add(fin[i]*x^(-(i-1)), i=1..k)) mod p;**

Пример.

Код РС ($n = 15, d = 5$) над полем $GF(2^4 = 8)$, $p = 2, r = 4$

1. Определим неприводимый полином

> **IrredPoly(4,2);**

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

2. Вычислим генераторный полином кода РС. Корень – примитивный элемент поля "beta" является корнем неприводимого полинома.

> **alias(beta=RootOf(x^4+x+1));**

> **g:=RSGenPoly(2,4,5,0,x^4+x+1,x);**

$$g := x^4 + (b^3 + b^2 + 1)x^3 + (b^3 + b^2)x^2 + b^3x + (b^2 + b + 1).$$

3. Зададим информационный вектор a , используя для этого:

– генератор случайного полинома в конечном поле

> **h:=Randpoly(10,x,beta) mod 2;**

$$h := (b^3 + b + 1)x^{10} + (b^3 + b^2 + 1)x^9 + (b^3 + b^2 + b + 1)x^8 + \\ + (b^3 + b^2 + b)x^7 + (b^3 + b^2 + 1)x^6 + (b^2 + 1)x^5 + (b^3 + b^2 + b)x^4 + \\ (b^3 + b + 1)x^3 + (b^3 + b^2 + b)x + (b^2 + b) ;$$

– определив информационный вектор как множество

> **a:=array(1..11):**

– конвертировав случайный полином в вектор заданного размера

a:=ToVector(h,x,11,2);

$$a := [b^2 + b, b^3 + b^2 + b, 0, b^3 + b + 1, b^3 + b^2 + b, b^2 + 1, b^3 + b^2 + b, \\ b^3 + b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^3 + b + 1]$$

4. Вычислим кодовое слово $c(x)$, представленное в полиномиальной форме

> **c:=RSEncode(a,g,x,x^4+x+1,2);**

$$c := [b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^2 + 1, b^3 + b^2, b^3 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, \\ b^3 + b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b^2 + 1, b^2 + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b + 1, \\ 0, b^3 + b^2 + b, b^2 + b].$$

5. Проведем *моделирование канала передачи информации*. Воспользуемся подпрограммой **GHerr**, которая формирует случайным образом вектор ошибки "Error", вычисляет вес Хэмминга этого вектора и складывает элементы информационного вектора c с элементами вектора ошибки, формируя тем самым принимаемый вектор y :

> **y:=GHerr(c,1,x^4+x+1,15,2);**

$$Error = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b^2 + b^3, 0, 0, 0, 0, b + 1]$$

$$y := [b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^2 + 1, b^3 + b^2, b^3 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^3 + b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b^2 + 1, b^3 + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b + 1, 0, b^3 + b^2 + b, b^2 + 1]$$

Декодирование принятого сигнала

6. Вычислим полином синдрома ошибок $s(x)$

> **s:=RSBMSynPol(y,5,0,x^4+x+1,2);**

$$s := 1 + (1 + b^3)x + (b^3 + b^2 + b)x^2 + (b^3 + b)x^3 + (b^3 + b^2 + b)x^4$$

7. Вычислим полином локаторов ошибок $q(x)$

> **q:=RSBMErrLoc(s,5,x^4+x+1,2,i=1);**

$$q := (b^2 + 1)x^2 + (b^3 + b^2 + b)x^2 + (b^3 + b)x^3 + (b^3 + b^2 + b)x^4$$

8. Вычислим оценку вектора ошибок E

> **ER:=RSBMErrVal(q,s,0,5,x^4+x+1,2);**

$$ER := [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, b^3 + b^2, 0, 0, 0, 0, b + 1]$$

Вывод. Вектор ошибки и оценка вектора ошибки совпадают.

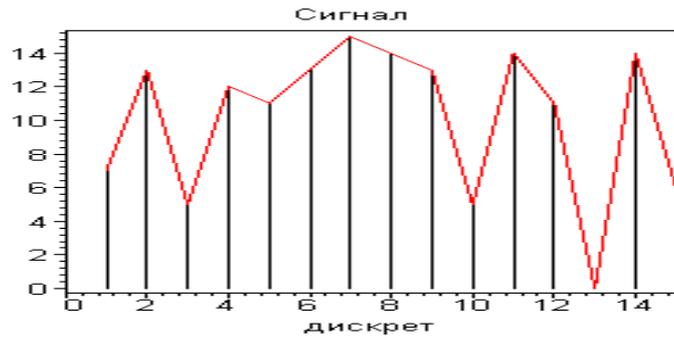
9. Выполним полное декодирование и восстановление кодового слова в виде его оценки vc . Информационная часть результата занимает $(p^r - d)$ правых позиций вектора и имеет инверсную нумерацию индекса положения относительно положений символов в кодовом слове п. 4

> **vc:=RSBMDecode(y,2,x^4+x+1,5,0);**

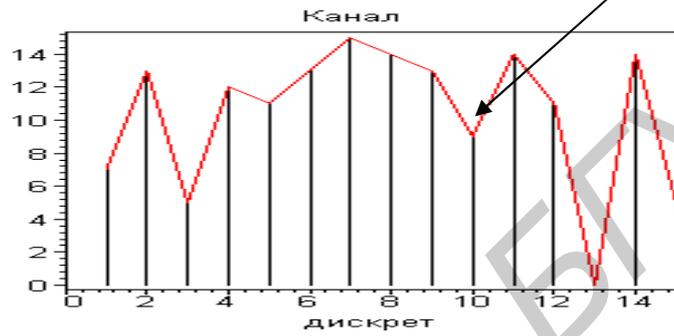
$$vc := [b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^2 + 1, b^3 + b^2, b^3 + b + 1, b^3 + b^2 + 1, b^3 + b^2 + b + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b^2 + 1, b^2 + 1, b^3 + b^2 + b, b^3 + b + 1, 0, b^3 + b^2 + b, b^3 + b^2]$$

Вывод. Код РС исправил двойную ошибку, произошедшую в канале передачи информации.

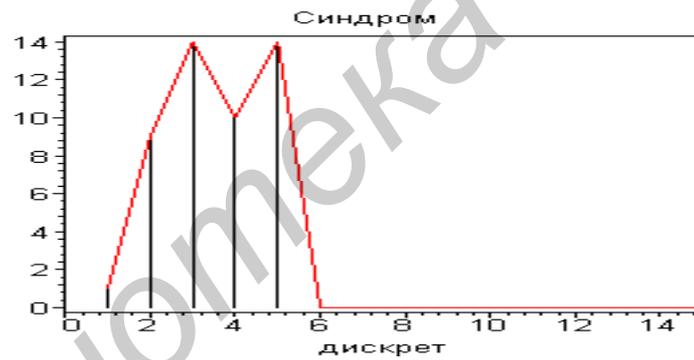
На рис.4, 5 приведены функции, иллюстрирующие процессы кодирования и декодирования с положительным и отрицательным исходами.



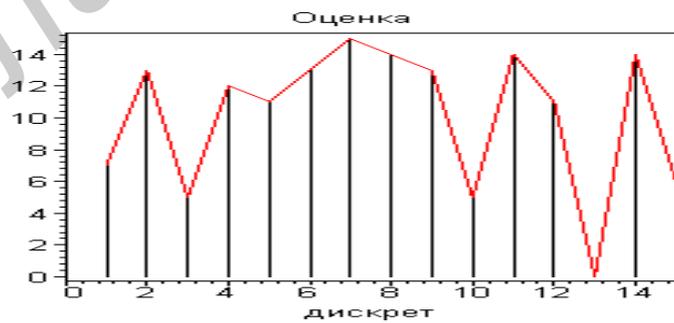
a



б



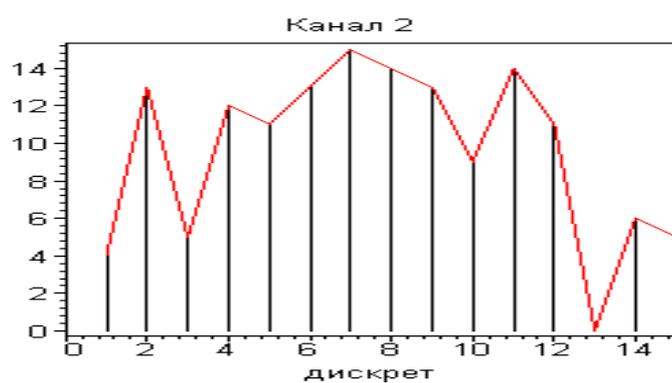
в



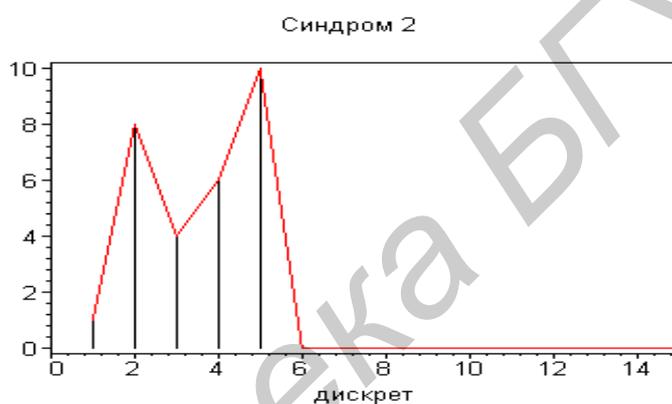
г

Ошибки

Рис. 4. Аналоговые функции, иллюстрирующие процесс кодирования и декодирования кода РС без ошибки: *a* – сигнальная функция; *б* – функция принимаемого сигнала; *в* – функция синдрома; *г* – функция результата декодирования (неверная оценка)



a



б



в

Рис. 5. Графики, иллюстрирующие процесс кодирования и декодирования кода РС с ошибкой: *a* – функция принимаемого сигнала; *б* – функция синдрома; *в* – функция оценки результата декодирования

4. СОДЕРЖАНИЕ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1. Содержание работы

1. Изучить принцип построения, свойства и алгоритмы декодирования РС-кодов.
2. Изучить правила пользования программного обеспечения к лабораторной работе и программного пакета Maple.
3. Провести моделирование алгоритмов формирования полей Галуа.
4. Провести моделирование алгоритмов преобразования Фурье–Галуа.
5. Провести моделирование с помощью программного обеспечения алгоритмов кодирования и декодирования РС-кодов во временной и спектральной областях.
6. Провести анализ спектральных и весовых характеристик кодов.
7. Оценить достоверность передачи информации с помощью РС-кодов и алгоритмическую сложность их кодирования и декодирования.

4.2. Порядок выполнения работы

Составить и отладить моделирующие алгоритмы программного обеспечения.

4.2.1. Моделирование алгоритмов формирования конечных полей .

1. Получить от преподавателя исходные данные полей, построить конструкции полей, необходимые для кодирования и декодирования сообщений.

4.2.2. Моделирование алгоритмов преобразования Фурье –Галуа .

1. Получить от преподавателя исходные данные сообщений, построить конструкции прямых и обратных ПФГ.
2. Вычислить спектры сообщений и провести восстановление данных из спектральных компонент.

4.2.3. Моделирование аддитивного канала передачи информации.

1. Построить модель канала передачи информации, задав количество ошибок.
2. Сформировать вектор ошибки и принимаемый сигнал.

4.2.4. Исследование спектральных характеристик кода.

1. Вычислить спектры с помощью обратного ПФГ нескольких информационных сообщений с различными добавленными нулевыми сегментами для вычисления синдрома и наложением вектора шума.

2. Вычислить синдромы принимаемого сигнала двумя методами: для временной области и спектральной областей, используя алгоритм Берлекемпа–Мессис, прямое ПФГ и рекуррентный алгоритм восстановления синдрома – по совокупности его компонент. Провести сравнение алгоритмов вычисления и полученных результатов.

4.2.5. Моделирование алгоритма алгебраического декодирования во временной области (АДВО) .

1. Используя данные, полученные в предыдущих пунктах, провести моделирование алгоритма декодирования РС-кода алгебраическим методом во

временной области для различного числа задаваемых ошибок. Использовать алгоритмы Берлекемпа–Месси, Форни.

2. Оценить помехоустойчивость кодирования информации кодом РС с заданными параметрами.

4.2.6. Моделирование алгоритма декодирования в частотной области .

1. Используя данные, полученные в предыдущих пунктах, провести моделирование алгоритма декодирования РС-кода спектральным методом в частотной области для различного числа задаваемых ошибок. Использовать алгоритмы ПФГ, Берлекемпа–Месси для вычисления полинома локаторов ошибок, рекурсивный алгоритм восстановления вектора ошибок.

Расчетная часть

4.2.7. Построить модель декодера, исправляющего ошибки и стирания кода РС.

1. Получить от преподавателя исходные данные для декодирования, построить алгоритм кодирования и декодирования и провести расчет этапов исправления ошибок и стираний кодера и декодера.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Формулировка цели работы.
2. Схемы алгоритмов формирования и декодирования кодов.
3. Результаты моделирования.
4. Анализ свойств исследуемых кодов и их влияние на эффективность кодирования и декодирования.
5. Оценка эффективности передачи информации с помощью РС-кодов.
6. Выводы.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Пояснить сущность метода формирования РС-кодов с помощью элементов конечного поля.
2. Что такое конечные поля Галуа и как они влияют на способность кода исправлять ошибки ?
3. Как выбрать порождающие полиномы для формирования РС-кода, обеспечивающего коррекцию t ошибок и заданную скорость передачи информации.

4. Как связаны функция синдрома ошибки и спектральная характеристика принимаемого сигнала, закодированного кодом РС?
5. Поясните принципы работы алгоритмов вычисления синдромов в частотной и временной областях.
6. Как оценить значение ошибки в спектральном методе декодирования?
7. Как изменится сложность декодирования при использовании симметричных порождающих полиномов?

ЛИТЕРАТУРА

1. Касами Т., Токура Н., Ивадари Ё., Инагаки Я. Теория кодирования: Пер. с яп. – М.: Мир, 1978.
2. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.
3. Саломатин С.Б. Кодирование информации в радиоэлектронных системах. Учеб. пособие по курсу «Кодирование и защита информации» для студ. спец. «Радиоэлектронные системы» и «Радиоинформатика». – Мн.: БГУИР, 2005.
4. Саломатин С.Б. Исследование свойств кодов БЧХ. Метод. пособие по курсу «Кодирование и защита информации» для студ. спец. «Радиоэлектронные системы» и «Радиоинформатика». – Мн.: БГУИР, 2004.
5. Мак Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.
6. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003.

Учебное издание

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КОДА РИДА – СОЛОМОНА

Пособие к лабораторной работе по дисциплине
КОДИРОВАНИЕ И ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ
для студентов специальностей I-39 01 02
«Радиоэлектронные системы» и I-39 01 03 «Радиоинформатика»

Составитель:
Саломатин Сергей Борисович

Редактор Т.Н. Крюкова
Корректор Т.П. Андрейченко

Подписано в печать 04.08.2005.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 1,4.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 150 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,09.
Заказ 129.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6