О СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Касабуцкий А.Ф.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

Для натурального $n \ge 2$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс n-мерных линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ которых кусочно-непрерывны на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ и ограничены. Будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in \mathcal{M}_n$.

Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

со скалярным параметром-множителем $\mu \in \mathbb{R}$.

Следующие два определения даны в работах [1] и [2] соответственно.

Определение 1. *Множеством* ES_A *экспоненциальной устойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$ называется множество всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых система (2) экспоненциально устойчива.

Определение 2. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ через $ES_A(\lambda)$ обозначим множество всех тех значений параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при которых старший показатель Ляпунова системы (2) меньше λ. Если $\lambda < 0$, то множество $ES_A(\lambda)$ назовем *множеством* λ*-экспоненциальной устойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$.

Очевидно, что $ES_A = ES_A(0) = \bigcup_{\lambda<0} ES_A(\lambda)$ и что $ES_A(\lambda_1) \subset ES_A(\lambda_2)$, если $\lambda_1 < \lambda_2$.

Как устроены множества λ-экспоненциальной устойчивости систем из $\mathcal{M}_n$? Частичный ответ на них содержится в приводимых ниже теоремах 1 и 2. Для их формулировок обозначим через $\underline{\pi}(A)$ и $\overline{\pi}(A)$ соответственно нижнее и верхнее средние значения [3, с. 534] следа матрицы $A(\cdot)$, т.е.

$$\underline{\pi}(A) = \varliminf_{t\to+\infty} \pi_A(t) \quad \text{и} \quad \overline{\pi}(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} \pi_A(t),$$

где $\pi_A(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} t^{-1}\int_0^t \mathrm{Sp}\, A(\tau)\, d\tau, \quad t \ge 0.$

Теорема 1. *Для системы* □∈ 𝒜 *при любом* □ < 0 *его множество -экспоненциальной устойчивости* □□□(□) *является* □□*-множеством.*

При этом, □□□(□) = ∅*, если* (□)(□) ≤ 0*, а* □□□(□) ⊄(□$^{-1}$(□), + ∞) *при* (□) < 0 *и* □□□(□) ⊄ (−∞, □$^{-1}$(□)) *при* (□) > 0.

Утверждение о том, что множество □□□(□) при любом □∈ R является □-множеством вещественной прямой, доказано в работе [2].

Оценки нижней при (□) < 0 и верхней при (□) > 0 границ множества -экспоненциальной устойчивости □□□(□), даваемые теоремой 1, являются неулучшаемыми в классе 𝒜, что показывает пример системы (1) с постоянной матрицей □() = = diag [□, . . . , □], где □ = 0. Тогда (□) = (□) = □ и для любого □ < 0, как легко видеть, □□□(□) = (□□$^{-1}$, +∞), если □ < 0, и □□□(□) = (−∞, □□$^{-1}$), если □ > 0. Что же касается борелевского типа множества □□□(□), то в докладе устанавливается только заметно более слабый по сравнению с утверждением теоремы 1 факт: множество □□□(□) может быть любым открытым множеством, дополнение которого до содержащей его полуоси, ограничено. Отсюда, в частности, следует существование таких систем □ ∈ 𝒜, для которых указанные в теореме 1 оценки границ множе- ства □□□(□) не только точны, но и для которых, в отличие от приведенного выше примера постоянной диагональной матрицы, не обязательно выполняется равенство (□) = (□) и множество □□□(□) является полубесконечным интервалом. Поскольку, как несложно видеть, случаи (□) > 0 и (□) < 0 сводятся один к другому заменой матрицы □(·) на противоположную ей матрицу −□(·), то теорему 2 мы формулируем только для случая (□) < 0.

Теорема 2. *Для каждого натурального* ≥ 2*, какие бы числа* □ < 0*,* ≤ < < 0 *и открытое множество* □ ⊂ (□$^{-1}$, + ∞)*, дополнение которого до* [0, +∞) *ограничено, ни зафиксировать, существует такая система* □ ∈ 𝒜*, для которой* □□□(□) = □ *и имеют место равенства* (□) = *и* (□) = .

Литература

1. Барабанов Е.А., Касабуцкий А.Ф. *Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 67–75.

2. Касабуцкий А.Ф. *О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 58–67.

3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*. М.: Наука. 1966.