О СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Цегельник В.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
tsegvv@bsuir.by

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$p_{1-b} = -p_b + \frac{(p_b' - b)^2}{2p_b^2} + t, \tag{1}$$

$$p_b = -p_{1-b} + \frac{(p_{1-b}' + b - 1)^2}{2p_{1-b}^2} + t \tag{2}$$

с квадратичной нелинейностью производной неизвестных функций p_b, p_{1-b} независимой переменной t и произвольным параметром b.

Пусть $p_b = p(t,b)$, $p_{1-b} = p(t, 1-b)$ – две произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2) при значении параметра b. Исключая из (1), (2) независимую переменную t, получим условие

$$p_{1-b}(p_b' - b) - \varepsilon p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

1. При $\varepsilon = 1$ имеем условие

$$p_{1-b}(p_b' - b) - p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0. \tag{3}$$

Исключая в (3) с помощью (1) функцию p_{1-b} и полагая $p'_b - b \neq 0$, относительно p_b получим уравнение

$$2p_b p''_b = p'^2_b + 4p^3_b - 2tp^2_b - b^2. \tag{4}$$

Если в (3) с помощью (2) исключить p_b, то относительно p_{1-b} (при условии $p'_{1-b} + b - 1 \neq 0$) получим уравнение

$$2p_{1-b}p''_{1-b} = p'^2_{1-b} + 4p^3_{1-b} - 2tp^2_{1-b} - (1-b)^2, \tag{5}$$

т.е. уравнение (4), в котором $b \to 1-b$.

Отметим следующее свойство решений уравнения (4): если $p_b = p(t,b)$ – решение (4), то $p_{-b} = p(t,-b)$ также является его решением.

Теорема 1. *Пусть* p_b $(p'_b - b \neq 0)$, p_{1-b} $(p'_{1-b} + b - 1 \neq 0)$ *– произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2). Тогда при выполнении условия (3) они являются решениями уравнений (4), (5) соответственно.*

Уравнение (4) с точностью до преобразования $p_b = 2\alpha w$, $b = 2\alpha$, $\alpha \neq 0$ совпадает с уравнением XXXIV из списка [1].

2. В случае $\varepsilon = -1$ имеем условие

$$p_{1-b}(p'_b - b) + p_b(p'_{1-b} + b - 1) = 0. \tag{6}$$

Исключая в (6) с помощью (1) функцию p_{1-b} относительно p_b $(p'_b - b \neq 0)$ получим уравнение

$$2p_b p''_b = 3p'^2_b - 4bp'_b + 2tp^2_b + b^2. \tag{7}$$

Исключая в (6) с помощью (2) функцию p_b приходим к уравнению p_{1-b} $(p'_{1-b} + b - 1 \neq 0)$:

$$2p_{1-b}p''_{1-b} = 3p'^2_{1-b} - 4(1-b)p'_{1-b} + 2tp^2_{1-b} + (1-b)^2, \tag{8}$$

т.е. к уравнению (7), в котором $b \to 1-b$.

Отметим, что если $p(t,b)$ – решение уравнения (7), то $-p(t,-b)$ также решение этого уравнения.

Теорема 2. *Пусть* p_b $(p'_b - b \neq 0)$, p_{1-b} $(p'_{1-b} + b - 1 \neq 0)$ *– произвольные функции, удовлетворяющие системе (1), (2). Тогда при выполнении условия (6) они являются решениями уравнений (7), (8) соответственно.*

Таким образом, формулы (1), (2) определяют прямое и обратное преобразование Беклунда как уравнения (4), так и уравнения (7).

Уравнение (7) в случае $b = 0$ подстановкой $p_b = u^{-2}$ приводится к уравнению Эйри $u'' = -tu/2$.

Подстановка $p_b = b \cdot v^{-1}$ $(b \neq 0)$ преобразует (7) в уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - 2tv^2 - v^4. \tag{9}$$

Полагая в (9)

$$v = T'T^{-1} \tag{10}$$

относительно функции T получим уравнение

$$2T'T''' = T''^2 - 2tT'^2. \tag{11}$$

После дифференцирования (11) получаем линейное уравнение

$$T^{IV} = -2tT'' - T'.$$

Теорема 3. *Уравнение (7) является уравнением Пенлеве-типа. Его общее решение есть рациональная функция постоянных интегрирования.*

Рассмотрим уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(t)v^2 - \gamma, \tag{12}$$

где $F(t)$ – произвольная аналитическая функция; γ – произвольный параметр.

Введением в (12) замены (10), а также дифференцированием полученного уравнения приходим к уравнению

$$T^{IV} = 2FT'' + F'T' - \gamma T. \tag{13}$$

Следовательно, общее решение уравнения (12) на основании (10), (13) есть рациональная функция постоянных интегрирования.

Уравнение (9) совпадает с (12) при $F(t) = -t$, $\gamma = 0$. В случае $\gamma = 1$ уравнение (12) есть XXVII каноническое уравнение в случае $m = 2$ из списка [1].

Преобразование Беклунда для уравнения (12) в случае $F(t) = 2(t^2 + \alpha)$, $\gamma = -2\beta$ (α – произвольный параметр) получено в [2].

Литература

1. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИУ, 1939.

2. Цегельник В.В. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа.* Мн.: Издательский центр БГУ, 2007.