Н.П. Можей
БГУИР (Минск, Беларусь)

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Тензор Риччи задаёт один из способов измерения кривизны многообразия (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского пространства), в данной работе находятся и описываются в явном виде тензоры Риччи инвариантных связностей на трехмерных однородных пространствах.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $(M, \bar{G})$ – *однородное пространство*, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$–инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ (см., например, [1]). Необходимое условие существования инвариантной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [2]. Тензор кручения $T \in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим *тензор Риччи* $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y,z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,...,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,...,e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись *d.n*, а для нумерации пар – запись *d.n.m*, соответствующие приведенным в [3], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Рассмотрим, например, пару 2.9.1 [3] (при λ=0, μ=–1), имеющую вид

2.9.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0

,

тогда аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}, p_{1,2}, p_{2,3}, q_{1,1}, q_{2,2} \in \mathbb{R}.$$

Тензор кривизны имеет, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2} - q_{1,1}p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}q_{1,1} - q_{2,2}p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2} - p_{1,2}q_{2,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кручения – $\left(p_{1,2} - q_{1,1}, 0, 0\right), \left(0, 2p_{2,3}, 0\right), \left(0, 0, q_{1,1} - p_{1,2}\right)$. Найдем тензор Риччи $Ric(y,z) = \operatorname{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$, получаем

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор Риччи является симметрическим при $p_{2,3}(p_{1,2} - q_{1,1} + q_{2,2}) = 0$, в частности, при T=0, т.е. в случае связности без кручения.

У пары 2.9.2 [3] (μ=–1), имеющей вид

2.9.2.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-2e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
,u_2	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	$-u_2$	0	0

,

аффинная связность совпадает с выписанной для 2.9.1, а тензор Риччи Ric=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} + q_{1,1} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} - q_{1,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

он является симметрическим при $q_{1,1} = p_{2,3}(q_{1,1} - p_{1,2} - q_{2,2})$.

Рассмотрим пару 2.9.4 [3] при μ=–1 вида

2.9.4,μ=0,−1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\mu)e_2$	u_1	0	μu_3
e_2	$(\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0 ,
u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	0	u_3	0

связность совпадает со случаем 2.9.1. В данном случае тензор Риччи *Ric*=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3}-p_{2,3}q_{1,1}+p_{2,3}q_{2,2}+p_{2,3} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1}+2p_{1,2}q_{2,2}-2p_{1,2} & 0 \\ -p_{1,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1}-p_{2,3}q_{2,2}-p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае 2.21.1 [3] при $\lambda=0$ имеем

2.21.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0,
u_2	0	$-u_1$	0	0	0
u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0

аффинная связность

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}, p_{1,2} \in \mathbb{R},$$

А тензор Риччи

$$Ric=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{1,2}^2 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & 0 \\ -2p_{1,2}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями получаем тензоры Риччи инвариантных связностей на всех трехмерных однородных пространствах. Полученные результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики, а алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 33–65.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т./ Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. 2 т.

3. Можей, Н. П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, № 6 (99), 2016, с. 74–81.