Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 305–316
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 305–316
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-305-316

Научная статья
УДК 514.76

Нередуктивные пространства с эквиаффинными связностями ненулевой кривизны

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, mozheynatalya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208

Аннотация. Объект данного исследования — структуры на однородных пространствах. Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе нередуктивных однородных пространств. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность; если же существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным. В работе изучаются трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, (инвариантная) аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность, редуктивное пространство. Целью данной работы является описание эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на однородных пространствах указанного вида. В основной части работы для трехмерных нередуктивных однородных пространств (допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны) найдены и выписаны в явном виде эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. В заключении статьи изложены полученные в работе результаты, которые могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики, а алгоритмы нахождения связностей могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, тензор кривизны, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра Ли

Для цитирования: *Можей Н. П.* Нередуктивные пространства с эквиаффинными связностями ненулевой кривизны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 305–316. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-305-316

Article

Non-reductive spaces with equiaffine connections of nonzero curvature

N. P. Mozhey

Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus
Natalya P. Mozhey, mozheynatalya@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208

Abstract. The introduction of this article states the object of our investigation which is structures on homogeneous spaces. The problem of establishing links between the curvature and the structure of a manifold is one of the important problems of geometry. In general, the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of non-reductive homogeneous spaces. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. If there exists at least one invariant connection, then the space is isotropy-faithful. This work studies three-dimensional non-reductive homogeneous spaces that admit invariant affine connections of nonzero curvature only. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an (invariant) affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, an equiaffine (locally equiaffine) connection, and a reductive space are defined. The purpose of this work is the description of equiaffine (locally equiaffine) connections on such spaces. In the main part of this paper, for three-dimensional non-reductive homogeneous spaces (that admit invariant connections of nonzero curvature only) equiaffine (locally equiaffine) connections are found and written out in explicit form. The features of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them. In the conclusion, the results obtained in the work are indicated. The results can be used in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics. The algorithms for finding connections can be computerized and used for the solution of similar problems in large dimensions.

Keywords: equiaffine connection, curvature tensor, reductive space, transformation group, Lie algebra

For citation: Mozhey N. P. Non-reductive spaces with equiaffine connections of nonzero curvature. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-305-316

Введение

Интерес к трехмерным геометриям после Г. Римана, Ф. Клейна и Н. И. Лобачевского возобновился в связи с развитием других областей науки, например общей теории относительности и трехмерной топологии. У. Терстон разработал метод исследования трехмерных многообразий; широко известны гипотеза Пуанкаре и более общая гипотеза Терстона о геометризации трехмерных многообразий [1], доказательство которых предложено Г. Перельманом. После работ Э. Картана (например, [2]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии являются понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках “кривого” пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [3, с. 41]. Также связности — важнейший объект, к которому приводит геометрическая формулировка теории поля. Целью данной работы является описание инвариантных эквиаффинных (локально эквиаффинных) связностей на трехмерных нередуктивных пространствах, допускающих связности только ненулевой кривизны (с описанием таких пространств можно ознакомиться в работе [4], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее).

1. Основные определения

Пусть $(\overline{G}, M)$ — трехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ — группа Ли на многообразии M. Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \overline{G}_o$ стабилизатор точки o. Известно, что проблема классификации однородных пространств $(\overline{G}, M)$ эквивалентна классификации пар групп Ли $(\overline{G}, G)$ таких, что $G \subset \overline{G}$ (см., например, [5]). Поставим в соответствие $(\overline{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G.

Изотропный $\mathfrak{g}$*-модуль* $\mathfrak{m}$ — это $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g}) = [x,y]+\mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление — инъекция.

Между инвариантными аффинными связностями на $(\overline{G}, M)$ и линейными отображениями $\Lambda\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [6]). Будем называть такие отображения *(инвариантными) аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [7]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия.

Тензоры кручения $T \in Inv\, T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in Inv\, T_3{}^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x,y]_{\mathfrak{m}},$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y]).$$

Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки: $R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$.

Определим *тензор Риччи* $\mathrm{Ric}(y,z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (т.е. $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [8]. Действительно, $\mathrm{Ric}(y,z) - \mathrm{Ric}(z,y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x,y)z - R(x,z)y\}$. С учетом первого тождества Бьянки получаем $\mathrm{Ric}(y,z) - \mathrm{Ric}(z,y) = \mathrm{tr}\{x \mapsto -R(y,z)x\} = \mathrm{tr}R(y,z)$. Поскольку $\mathrm{Ric}(y,z) - \mathrm{Ric}(z,y) = -\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = \mathrm{tr}\Lambda([y,z])$, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\Lambda([y,z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$. Под *эквиаффинной связнос-*

тью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Того, что пара является изотропно-точной, недостаточно для существования инвариантных связностей (см., например, [9]). Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\bar{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств — алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский [10], у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [7]. Все нередуктивные пространства $\overline{G}/G$, допускающие инвариантные аффинные связности, кривизна которых не может быть нулевой, приведены в [4]. Найдем эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на таких пространствах.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2},\ u_2 = e_{n-1},\ u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную (эквиаффинную) связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), запишем тензор кручения его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d — размерность подалгебры, n — номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m — номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующий приведенному в [4].

2. Описание эквиаффинных связностей на нередуктивных пространствах

В работе [4] получен следующий результат:

Теорема 1. *I. Если нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$, допускает инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна одной из следующих подалгебр:*

$$4.21.\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u \\ & x & z \\ & & \\ \hline\end{array};\quad 3.25.\begin{array}{|ccc|}\hline & x & z \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array};\quad 3.20.\begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{c}(\lambda, \mu) = (0, 1/2); \\ (\lambda, \mu) = (1/5, 2/5);\end{array}$$

$$2.13.\begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ & & y \\ & & \\ \hline\end{array};\ 2.20.\begin{array}{|ccc|}\hline & y & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array};\ 1.5.\begin{array}{|ccc|}\hline & & x \\ & & \\ & & \\ \hline\end{array}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принимают все значения из $\mathbb{R}$, а параметры обозначаются греческими буквами, подалгебры с различными значениями параметров не сопряжены друг другу. Базис подалгебры будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

II. Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 4.21, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только *одной из пар 4.21.24, 4.21.25 ($\delta = 0, 1$ соответственно):*

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	$e_4 + u_1$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3 + \delta e_4 - u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4 - u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3 - \delta e_4 + u_2$	0

$, \alpha < -1/4.$

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.20.22, 3.20.27:

3.20.22.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	$e_3 - u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3 + u_3$	0

,

3.20.27.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

.

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.25, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.25.25, 3.25.26 (при $\delta = 0, 1$ соответственно):

3.25.25(26).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	0	0	u_1
e_3	e_2	0	0	0	0	$-e_3 + u_2$
u_1	0	0	0	0	0	$\alpha e_2 + (1+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	0	$\delta e_2 + \alpha e_3 + \beta u_2$
u_3	$-e_1$	$-u_1$	$e_3 - u_2$	$-\alpha e_2 - (1+\beta)u_1$	$-\delta e_2 - \alpha e_3 - \beta u_2$	0

,

$$\alpha < -(\beta+1)^2/4.$$

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.13, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только *одной из пар 2.13.7, 2.13.8, где*

2.13.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	e_2+u_1
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$\beta e_1+\alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2-u_1$	$-\alpha u_1$	$-\beta e_1-\alpha u_2$	0

$, \quad \beta \neq 1/4-\alpha/2,$

а 2.13.7 совпадает с 2.13.8 кроме $[u_2,u_3]=(1-\alpha)e_1+e_2+\alpha u_2$, $\alpha\neq 3/2$.

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *типа 2.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8, 2.20.9, 2.20.12, 2.20.14, 2.20.22:*

2.20.3, 2.20.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	e_1+u_1	0
e_2	0	0	0	δe_1+e_2	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$-e_1-u_1$	$-\delta e_1-e_2$	$-2u_1$	0	e_2-u_3
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2+u_3$	0

$, \quad \delta=0,1,$

2.20.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	e_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

,

2.20.12, 2.20.14.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	δe_1	$-e_2+u_1$
u_1	0	0	0	0	$-3u_1$
u_2	$-u_1$	$-\delta e_1$	0	0	e_2-u_2
u_3	$2e_1$	e_2-u_1	$3u_1$	u_2-e_2	0

,

$\delta=\pm 1,$

2.20.9.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1+\alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1-\alpha u_2$	0

,

2.20.22.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha-1)u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	$-u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

.

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *типа 1.5, допускающая инвариантные аф-*

финные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна 1.5.21, где

1.5.21.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	u_1	$-e_1$
u_2	$-e_1$	$-u_1$	0	0
u_3	$-u_1$	e_1	0	0

Доказательство теоремы приведено в [4].

Используя приведенную классификацию трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих связностей нулевой кривизны, найдем эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на пространствах указанного вида.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — *трехмерное нередуктивное однородное пространство, допускающее инвариантные связности только ненулевой кривизны (приведенное в теореме 1). Локально эквиаффинные связности (без кручения) на* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *имеют вид, приведенный в табл. 1 (здесь и далее* p_{ij}, q_{ij}, $r_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$).

Таблица 1 / Table 1

Локально эквиаффинная связность / Locally equiaffine connection

Пара *Pair*	*Локально эквиаффинная связность* *Locally equiaffine connection*
4.21.24, 4.21.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}+1 \end{pmatrix}$
3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}-2 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.25.25, 3.25.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-\beta-1 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-\beta-1 \end{pmatrix}$
2.13.7, 2.13.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-\alpha & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-\alpha+1/2 & 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}-\alpha+1 \end{pmatrix}$
2.20.3($\delta = 0$) 2.20.8($\delta = 1$)	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-2 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2}-1 & 0 \\ 0 & \delta & p_{1,2}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
2.20.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.9	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-2\alpha & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}-\alpha & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 2p_{1,3}-\alpha+1 \end{pmatrix}$, *при* $\alpha \neq 0$, $p_{1,2} = 0$

Окончание табл. 1 / Table 1 (continued)

Пара *Pair*	*Локально эквиаффинная связность* *Locally equiaffine connection*
2.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}-\alpha+1 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}+2 \end{pmatrix}$
2.20.12($\delta=1$) 2.20.14($\delta=-1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}+3 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}+2 \end{pmatrix}$
1.5.21	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}-1 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & q_{2,3} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$

Эквиаффинные связности имеют вид, приведенный в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Эквиаффинная связность / Equiaffine connection

Пара *Pair*	*Эквиаффинная связность* *Equiaffine connection*
3.25.25 3.25.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\beta/4{+}1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\beta/4{+}1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta/4{-}1/2 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & -\beta/4{+}1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta/2 \end{pmatrix}$
2.13.7 2.13.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\alpha/4{-}3/8 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 3\alpha/4{+}1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha/4{-}3/8 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & -\alpha/4{+}1/8 & 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & \alpha/2{+}1/4 \end{pmatrix}$
2.20.3 ($\delta=0$) 2.20.8 ($\delta=1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.20.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.20.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha-1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & \alpha-1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha-1/4 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1/2 \end{pmatrix}$
2.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4\alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/4\alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/4\alpha & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 1/4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\alpha \end{pmatrix}$
2.20.12 ($\delta=1$) 2.20.14 ($\delta=-1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
1.5.21	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2}{-}1 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & -2p_{1,2}{+}3 & -3p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2}{-}2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & -3p_{1,3} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$

В случаях 4.21.24, 4.21.25, 3.20.27, 3.20.22 $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *не допускает эквиаффинных связностей.*

Доказательство. Для каждой пары, приведенной в теореме 1, найдем эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности. Например, в случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения в случаях 4.21.24, 4.21.25 принимает вид $(0,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(2q_{1,3},p_{1,3}-r_{1,1},0)$. Соответственно, $T=0$ при $r_{1,1}=p_{1,3}$, $q_{1,3}=0$. В этих случаях связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$. Связность не является эквиаффинной при любых значениях параметров, так как даже $\lambda(\mathfrak{g})$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Аналогично в случае 3.20.27 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой; связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$; связность не является эквиаффинной, так как даже $\lambda(\mathfrak{g})$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1}+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,q_{1,1}+2-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}-2$, тогда связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$; связность не является эквиаффинной, так как даже $\lambda(\mathfrak{g})$ не принадлежит $\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Аффинная связность в случаях 3.25.25, 3.25.26 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(0,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-1-\beta,0,0)$, $(2q_{1,3},p_{1,3}-r_{1,1}-1-\beta,0)$. Соответственно, $T=0$ при $r_{1,1}=p_{1,3}-\beta-1$, $q_{1,3}=0$, связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$. Связность является эквиаффинной при $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, т.е. при $3r_{1,1}+p_{1,3}+1=0$, следовательно, $4p_{1,3}-3\beta-2=0$.

Аффинная связность в случаях 2.13.7, 2.13.8 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1/2 & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix},$$

тензор кручения — $(0,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha,0)$. Соответственно, $T=0$ при $r_{1,1}=p_{1,3}-\alpha$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, связность является локально эквиаффинной, поскольку $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$. Связность является эквиаффинной при $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, т.е. при $3r_{1,1}+p_{1,3}+3/2=0$, следовательно, $4p_{1,3}-3\alpha+3/2=0$.

Аффинные связности для пар типа 2.20 имеют следующий вид:
2.20.3 ($\delta=0$), 2.20.8 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+1 & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}+1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},\quad \delta=0,1,$$

2.20.6

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 1 & q_{1,1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9 ($\delta=0$), 2.20.22 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}+\alpha & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+\alpha+1\end{pmatrix},\quad \delta=0,1,$$

2.20.12 ($\delta=1$), 2.20.14 ($\delta=-1$)

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}-2 & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}-1\end{pmatrix},\quad \delta=\pm1.$$

Тензор кручения в случаях 2.20.3, 2.20.8 имеет вид $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}+2-p_{1,2})$, аналогично вышеизложенному $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}-2$, $r_{1,1}=p_{1,3}$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, связность является локально эквиаффинной, если, кроме того, $3r_{1,1}+p_{1,3}=0$, поскольку $[u_2,u_3]=e_2-u_3$, тогда $\mathrm{tr}\Lambda(e_2-u_3)=0$, т.е. $p_{1,3}=0$; связность является эквиаффинной при $3q_{1,1}+p_{1,2}+2=0$, $3r_{1,1}+p_{1,3}=0$, т.е. при $p_{1,3}=0$, $p_{1,2}=1$.

В случае 2.20.6 тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2}$, $p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $r_{1,1}=p_{1,3}$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, тогда связность является локально эквиаффинной; связность является эквиаффинной при $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, $3r_{1,1}+p_{1,3}=0$, т.е. при $p_{1,3}=0$, $p_{1,2}=0$.

В случае 2.20.9 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-2\alpha,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-$ $-2\alpha,q_{1,1}-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $r_{1,1}=p_{1,3}-2\alpha$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, тогда при $\alpha=0$ связность является локально эквиаффинной, а при $\alpha\neq0$ — только если $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, т.е. при $p_{1,2}=0$; связность является эквиаффинной при $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, $3r_{1,1}+p_{1,3}+2\alpha+1=0$, т.е. $p_{1,3}=\alpha-1/4$, $p_{1,2}=0$.

В случаях 2.20.12, 2.20.14 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}+3,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2}$, $p_{1,3}-r_{1,1}+3,q_{1,1}-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $r_{1,1}=p_{1,3}+3$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, связность является локально эквиаффинной, если, кроме того, $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, т.е. $p_{1,2}=0$;

связность является эквиаффинной при $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, $3r_{1,1}+p_{1,3}-3=0$, т. е. при $p_{1,3}=-3/2$, $p_{1,2}=0$.

В случае 2.20.22 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,1,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,q_{1,1}-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}$, $r_{1,1}=p_{1,3}-\alpha+1$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, связность является локально эквиаффинной, если, кроме того, $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, т. е. $p_{1,2}=0$; связность является эквиаффинной при $3q_{1,1}+p_{1,2}=0$, $3r_{1,1}+p_{1,3}+2\alpha+1=0$, т. е. $p_{1,3}=\alpha/4-1$, $p_{1,2}=0$.

Аффинная связность в случае 1.5.21 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1}-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

а тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},q_{2,3}-r_{2,2},q_{1,1}+1-p_{1,2})$, $T=0$ при $q_{1,1}=p_{1,2}-1$, $r_{1,1}=p_{1,3}$, $p_{2,3}=0$, $r_{1,2}=q_{1,3}$, $r_{2,2}=q_{2,3}$, тогда связность является локально эквиаффинной; связность является эквиаффинной при $2q_{1,1}+q_{2,2}-1=0$, $2r_{1,1}+r_{2,2}+p_{1,3}=0$, т. е. при $q_{2,2}=-2p_{1,2}+3$, $q_{2,3}=-3p_{1,3}$, таким образом, связности имеют вид, приведенный в теореме. □

Заключение

В работе для всех трехмерных нередуктивных однородных пространств (допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны) найдены и выписаны в явном виде эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности. Полученные результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в теории представлений, а также в других разделах современной математики и в теоретической физике, методы, изложенные в работе, могут быть применены для анализа физических моделей, а алгоритмы нахождения связностей могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

Список литературы

1. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. Москва : Мир, 1986. 163 с.
2. *Cartan E.* La géométrie des espaces de Riemann. Paris : Gauthier-Villars et C°, 1925. 64 p. (Mémorial des sciences mathématiques ; fascicule 9).
3. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Серия : Современные проблемы математики. Фундаментальное направление. Москва : ВИНИТИ, 1988. Т. 28. С. 5–289.
4. *Можей Н. П.* Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 381–393. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393
5. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. Москва : Физматлит, 1995. 384 с.
6. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // American Journal of Mathematics. 1954. Vol. 76, № 1. P. 33–65. https://doi.org/10.2307/2372398
7. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry : in 2 vols. Vol. 2. New York : John Wiley and Sons, 1969. 488 p.
8. *Nomizu K., Sasaki T.* Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions. Cambridge ; New York : Cambridge Univ. Press, 1994. 264 p.

9. *Можей Н. П.* Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 413–421. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421
10. *Рашевский П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. № 8. С. 82–92.

References

1. Skott P. *Geometrii na trekhmernykh mnogoobraziyakh* [Geometries on Three-dimensional Manifolds]. Moscow, Mir, 1986. 163 p. (in Russian).
2. Cartan E. *La géométrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars et C°, 1925. 64 p. (Mémorial des sciences mathématiques; fascicule 9) (in French).
3. Alekseyevskiy D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya: Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya*. Moscow, VINITI, 1988, vol. 28, pp. 5–289 (in Russian).
4. Mozhey N. P. Connections of nonzero curvature on three-dimensional non-reductive spaces. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 381–393 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393
5. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of Transitive Transformation Groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
6. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65. https://doi.org/10.2307/2372398
7. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*. Vol. 2. New York, John Wiley and Sons, 1969. 488 p.
8. Nomizu K., Sasaki T. *Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions*. Cambridge, New York, Cambridge University Press, 1994. 264 p.
9. Mozhey N. P. Three-dimensional homogeneous spaces, not admitting invariant connections. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 413–421 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421
10. Rashevski P. K. Symmetric spaces of affine connection with torsion. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis], 1969, vol. 8, pp. 82–92 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 14.09.2020
Принята к публикации / Accepted 14.01.2021
Опубликована / Published 31.08.2021