О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННОЙ С УРАВНЕНИЕМ ЕРМАКОВА–ПЕНЛЕВЕ

В. В. Цегельник (Минск, Беларусь)

В работе [1] для нелинейного уравнения Шредингера вида

$$iu_t - u_{xx} - \left[a_1\frac{|u_{xx}|}{|u|} - ia_2\frac{|u_x|}{|u|^2} + a_3|u|^2 + a_4|u|^{2m} + a_5|u|^{2n}\right]u = 0. \tag{1}$$

с помощью преобразования $u = [\varphi(\xi) + i\psi(\xi)]exp(i\eta)$, $\xi = \alpha t + \beta t^2 + \gamma x$, $\eta = \gamma t^3 + \delta t^2 + \varepsilon\gamma tx + \rho t + \lambda x$ в зависимости от соотношений между действительными параметрами a_j ($j = \overline{1,5}$), m, n; $i^2 = -1$ получены нелинейные дифференциальные уравнения для амплитуды $|u|$ решения уравнения (1).

Одно из уравнений для амплитуды $|u|$ в случае $a_4 = 0$ имеет вид

$$\frac{d^2|u|}{d\xi^2} + (b_1 + b_2\xi)|u| + b_3|u|^3 = \frac{b_4}{|u|^3}, \tag{2}$$

где параметры b_1 – b_4 выражены через параметры уравнения (1) и параметры, связывающие переменные x, t с новыми переменными ξ, η. Следуя [1] уравнение (2) будем называть уравнением Ермакова – Пенлеве II. Последовательными преобразованиями $|u|^2 = T$, $\tau = \xi + b_1/b_2$ ($b_2 \neq 0$) и $T = kp(z)$, $\tau = lz$ с $2b_2l^3 = 1$, $b_3lk^2 = -1$, $2b_4k^2l^{-2} = -b^2$ уравнение (2) сводится к уравнению [2,3]

$$2pp'' = p'^2 - 2zp^2 + 4p^3 - b^2, \quad p' = \frac{dp}{dz}, \quad p'' = \frac{d^2p}{dz^2}, \tag{3}$$

решения которого выражаются через решения второго уравнения Пенлеве.

Относительно решений системы уравнений

$$p_{1-b} = -p_b + (p_b' - b)^2(2p_b^2)^{-1} + z, \quad p_b = -p_{1-b} + (p_{1-b}' + b - 1)^2(2p_{1-b}^2)^{-1} + z \tag{4}$$

с неизвестными функциями p_b, p_{1-b} переменной z справедлива

Теорема. Пусть p_b ($p_b' - b \neq 0$), p_{1-b} ($p_{1-b}' + b - 1 \neq 0$) — произвольные функции, удовлетворяющие системе (4). Тогда при условии $p_{1-b}(p_b' - b) - p_b(p_{1-b}' + b - 1) = 0$ они являются соответственно решениями уравнений

$$2p_bp''_b = p_b'^2 + 4p_b^3 - 2zp_b^2 - b^2, \tag{5}$$

$$2p_{1-b}p''_{1-b} = p_{1-b}'^2 + 4p_{1-b}^3 - 2zp_{1-b}^2 - (1-b)^2. \tag{6}$$

Уравнение (3) с точностью до преобразования $p = 2aw$, $b = 2a$ ($a \neq 0$) совпадает с уравнением XXXIV из списка [3].

Литература

1. *Rogers C., Clarkson P.A.* Ermakov–Painlevé II symmetry reduction of a Korteweg capillarity system. *SIGMA*. Vol. 13 (2017), 1–20.

2. *Громак В. И., Лукашевич Н.А.* *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве.* Минск: Университетское (1990).

3. *Айнс Э.Л.* *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ОНТИ (1939).