О ПРОБЛЕМЕ ОЦЕНКИ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА В ДВУНАПРАВЛЕННОЙ СЕТИ

Пилипчук Л. А., Романчук М. П.
Кафедра компьютерных технологий и систем, Белорусский государственный университет
Минск, Республика Беларусь
E-mail: {pilipchuk, fpm.romanchump}@bsu.by

Рассматривается задача локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах двунаправленной сети для сбора, обработки, анализа информации о функции потока в целях оценки потока в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Задача минимизации размера множества обозреваемых узлов (оптимальное решение) относится к классу NP-полных задач. Рассматривается задача поиска приемлемого числа обозреваемых узлов (субоптимальное решение).

Введение

Рассматривается актуальная задача расположения специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах двунаправленной сети для сбора информации о функции потока с целью оценки однородного потока в сети. Задача минимизации размера множества обозреваемых узлов, в которых локализованы сенсоры [1,2], потребует огромных вычислительных затрат, поскольку эта задача принадлежит классу NP-полных задач дискретной математики [3]. Для установления полной наблюдаемости сети относительно большой размерности осуществляется поиск приемлемого числа узлов (субоптимальное решение). Работа посвящена разработке стратегий идентификации расположения специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах сети для сбора, обработки, анализа информации о функции потока в целях оценки дуговых потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. В качестве модели потоковой сети с локализацией специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах двунаправленной сети используется разреженная недоопределенная система линейных алгебраических уравнений. Сформируем разреженную систему специального вида на основе априорной информации от сенсоров, установленных в обозреваемых узлах сети [4].

I. Модель двунаправленной сети с локализацией сенсоров в узлах

Для каждого узла $i \in I$ конечного, связного, ориентированного двунаправленного графа $G = (I, U)$ выполняются условия сохранения потока

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ 0, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_{i,j}, (i,j) \in U;\ x_i,\ i \in I^*)$ – вектор неизвестных дуговых и внешних потоков.

Для каждой дуги $(i,j) \in U$ известно численное значение $p_{i,j} \in (0,1]$, которое является долей общего потока, исходящего из узла $i \in I$:

$$x_{i,j} = p_{i,j} \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j}, \quad \sum_{j \in I_i^+(U)} p_{i,j} = 1. \tag{2}$$

Узлы $i \in M$ сети G, в которых размещены специальные программируемые устройства(сенсоры) – обозреваемые узлы, $M \subseteq I$. Дуга (i,j) – каноническая дуга узла i, если $p_{i,j} \neq 0$, $j \in I_i^+(U)$, $i \in I$. Для двунаправленного графа G при условии $p_{i,j} \in (0,1], (i,j) \in U$ существует каноническая дуга $(i,k), k \in I_i^+(U)$ с ненулевым дуговым потоком $x_{i,k}$ для каждого узла $i \in I$.

В результате размещения сенсоров в обозреваемых узлах $M \subset I$ графа G известна следующая информация о функции потока:

- численные значения $f_{i,j}$, $f_{j,i}$ дуговых потоков соответственно для исходящих и входящих дуг каждого обозреваемого узла $i \in M$:
$$x_{i,j} = f_{i,j},\ j \in I_i^+(U),$$
$$x_{j,i} = f_{j,i},\ j \in I_i^-(U),\ i \in M, \tag{3}$$
- численные значения внешнего потока f_i в узлах $i \in M \bigcap I^* \neq \emptyset$:
$$x_i = f_i,\ i \in M \bigcap I^*. \tag{4}$$
- численные значения дуговых потоков, полученные посредством известной информации, полученной от сенсоров:
$$x_{i,j} = \beta_{i,j} f_{i,k_i},\ j \in I_i^+(U) \backslash \{k_i\},$$
$$\beta_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,k_i}}, |I_i^+(U)| > 1; \tag{5}$$
$$\beta_{i,j} = p_{i,k_i} = 1,\ |I_i^+(U)| = 1.$$

II. Ненаблюдаемая часть сети

Построим граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ – ненаблюдаемую часть графа G. Удалим из графа G дуги и узлы, для которых известны численные значения (3) – (5). Система для вычисления неизвестных дуговых потоков графа $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ примет вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\overline{U})} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(\overline{U})} x_{j,i} = \begin{cases} x_i + b_i, & i \in \overline{I}^*, \\ b_i, & i \in \overline{I} \setminus \overline{I}^*, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_{i,j} = \beta_{i,j} x_{i,k_i},\ j \in I_i^+(\overline{U}) \backslash \{k\},$$
$$\beta_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,k_i}}, |I_i^+(\overline{U})| > 1;$$

где $b_i, i \in \overline{I}$ – константы, полученные на основании априорной информации (3) – (5).

Граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ – ненаблюдаемая часть графа $G = (I, U)$ – может быть несвязным. Некоторые компоненты связности графа $\overline{G}$ могут не содержать узлов из множества $\overline{I}^*$ с ненулевым внешним потоком. В этом случае базисный граф является **остовным деревом**. Для других компонент связности выполняется условие $\overline{I}^* \neq \emptyset$ и базисный граф – **лес деревьев**, со специальными свойствами.

III. Условия полной наблюдаемости сети

Разреженная система (6) может быть одного из следующих типов:

- недоопределенная
- переопределенная
- имеет единственное решение

Основные вычислительные затраты по определению типа системы (6) (является недоопределенной, переопределенной или имеет единственное решение) относятся к вычислению ранга матрицы системы (6).

Теорема 1. *Если для множества обозреваемых узлов M ранг матрицы системы* (6) *равен числу ее неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Пусть A – матрица инцидентности связного ориентированного графа G. Строки усеченной матрицы $\widetilde{A}$, образованной удалением любой строки матрицы A, линейно независимы.*

Теорема 3. *Пусть G – связный ориентированный двунаправленный граф с функцией потока (1), содержащий $k = |I^*|$ узлов с внешним потоком x_i, $k \neq 0$. Известны коэффициенты $p_{i,j}, (i,j) \in U$ разбиения потока. Для определения численных значений дуговых потоков всего графа достаточно разместить $k = |I^*|$ сенсоров в узлах множества I^*.* [4]

Верхняя граница $\overline{h}$ интервала $[\underline{h}, \overline{h}]$, где $\underline{h} = 1$, $\overline{h} = |I|$, изменения количества обозреваемых узлов графа $G = (I, U)$ субоптимального решения уменьшена до значения $\overline{h} = |I^*|$, $I^* \neq \emptyset$. Установка специальных программируемых устройств(сенсоров) в узлы множества I^* гарантирует полную наблюдаемость сети G.

Эффективный метод декомпозиции однородного потока разработан в [5, 6].

Подмножество $M \subseteq I^*$ обозреваемых узлов сети G – t-оптимальное решение задачи идентификации сенсорной конфигурации, $|M| \in [\underline{h}, \overline{h}]$, $\underline{h} = 1$, $\overline{h} = |I^*|$, если выполняются условия: $|x_i| \geq t, i \in I^*$, $x_i = 0, i \in I \backslash I^*$, $t \in [\underline{t}, \overline{t}]$ и система (6) имеет единственное решение. Для заданного внешнего потока t, $|x_i| \geq t, i \in I^*$ найти подмножество $M \subseteq I^*$ обозреваемых узлов графа G, $|M| \in [1, |I^*|]$, $|M| \leq |I^*|$, такое, что система (6) для графа $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ – ненаблюдаемой части графа G имеет единственное решение (полная наблюдаемость сети G).

Для дальнейшего уменьшения числа $|I^*|$ обозреваемых узлов и построения сенсорной конфигурации множества узлов $M \subseteq I^*$ t-оптимального решения для заданного порога интенсивности t применяются стратегии случайного поиска числа $|M|$, принадлежащего интервалу $[\underline{h}, \overline{h}]$, где $\underline{h} = 1$, $\overline{h} = |I^*|$.

Заключение

Исследованы свойства систем с различными типами разреженности, которые возникают при построении оптимальных и субоптимальных (t–оптимальных) решений задачи оценки однородного потока в сети. В синтезе с современными инновационными технологиями разреженного матричного анализа, теории графов, теоретической информатики созданы эффективные численные методы декомпозиции. Получены условия полной наблюдаемости однородного потока для случая локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) в узлах двунаправленной сети.

1. Gentile M. Locating active sensors on traffic networks / Gentile M., Mirchandani P.//Annals of Operation Research. –2006. – Vol. 144, № 1. – P. 201–234.
2. Bianko L. Combinatorial aspects of the Sensor Location Problem / Bianko L., Confessore G., Gentili M.//Annals of Operation Research. –2006. – Vol. 144, № 1. – P. 201–234.
3. Bianko L. A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates / Bianko L., Confessore G., Reverbery P.//Transportation Science. – 2001. – Vol. 35, № 1. – P. 50–60.
4. Пилипчук Л. А. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками / Пилипчук Л. А., Пилипчук А. С., Полячок Е. Н., Фаразей А. И.// Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 2. – С. 67–76.
5. Pilipchuk L. A. Algorithms of Solving Large Sparce Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure / Pilipchuk L. A., Malakhouskaya Y. V., Kincaid D. R., Lai M.// East-West J. of Mathematics. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. 191–201.
6. Пилипчук, Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений / Л. А. Пилипчук. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.