

УДК 628.336.42

СПОСОБ РАСЧЁТА СПЕКТРА МОЩНОСТИ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ БЛЭКМАНА

Бабич П.О.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Данейко Т.М. – старший преподаватель кафедры ИКТ

В докладе рассказывается про один из способов расчёта спектра мощности сигналов, о преимуществах пользования данным методом Блэкмана, и его актуальность на сегодняшний день.

Этот метод позволяет получать оценку спектральной плотности мощности через преобразование Фурье оценки корреляционной функции. Следует отметить, что метод Блэкмана-Тьюки (коррелограммный метод) был разработан в 1958 г., тогда как алгоритм БПФ для эффективного вычисления ДПФ не был опубликован до 1965 г. Кроме того, этот метод имеет некоторые преимущества по сравнению с методом периодограмм. Например, метод Блэкмана-Тьюки характеризуется большей добротностью. К тому же, корреляционную функцию теперь можно вычислять с помощью ДПФ посредством быстрой корреляции.

Одна из возможных оценок спектральной плотности мощности, получаемая на основе несмещённой оценки корреляционной функции $\hat{K}_x(m)$, которая вычисляется при временном сдвиге с максимальными значениями в интервале $\pm L$, определяется выражением

$$\hat{P}_{\text{BT}}(f) = \Delta t \sum_{m=-L}^L \hat{K}_x(m) \exp(-j2\pi f m \Delta t).$$

Данная оценка определяется для интервала частот $-\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t}$. Максимальное значение временного сдвига L , как правило, меньше числа отсчетов N выборки исходных данных. Использовать максимальное значение $L \simeq N/10$ было предложено Блэкманом и Тьюки. Выбор такого максимального значения основывался на стремлении исключить большие значения дисперсии, связанные с оценками корреляционной функции при больших временных сдвигах, поскольку такие значения дисперсии давали менее устойчивую оценку СПМ.

Математическое ожидание оценки можно вычислить обычным образом:

$$M[\hat{P}_x(f)] = \Delta t \sum_{m=-L}^L M[\hat{K}_x(m)] \exp(-j2\pi f m \Delta t) = \Delta t \sum_{m=-L}^L K_x(m) \exp(-j2\pi f m \Delta t) = P_x(f) * W_L(f),$$

где $W_L(f)$ – преобразование Фурье прямоугольного окна (ядро Дирихле).

Несмотря на то, что оценка СПМ вычисляется с использованием несмещённых оценок корреляционной функции, она будет смещённой оценкой истинной спектральной плотности мощности. Неявное присутствие прямоугольного окна при конечной корреляционной последовательности приводит к оценке, которая, по сути, является сверткой истинной спектральной плотности мощности с преобразованием Фурье дискретно-временного прямоугольного окна.

Для уменьшения эффекта просачивания из-за неявного присутствующего прямоугольного окна, а следовательно, и для уменьшения смещения оценки необходимо использовать $(2L + 1)$ -точечное корреляционное окно $w(n)$ нечетной длины на интервале $-L \leq m \leq L$, симметричное относительно начала отсчета. Наиболее общая форма корреляционного метода оценивания СПМ в этом случае принимает следующей вид:

$$\hat{P}_{\text{BT}}(f) = \Delta t \sum_{m=-L}^L \hat{K}_x(m) w(n) \exp(-j2\pi f m \Delta t)$$

где должна использоваться несмещенная оценка корреляционной функции.

Выражение и определяет оценку, которая была предложена Блэкманом и Тьюки, о чем свидетельствует подсрочный индекс *BT*. Окно здесь нормируется так, чтобы $w(0) = 1$, поэтому оценка $\hat{K}_x(0)$ будет несмещенной, мощность отсчетов сохраняется, а следовательно, оценка $\hat{P}_{BT}(f)$ будет правильно промасштабирована как оценка СПМ. Если необходимо, чтобы не площадь под кривой оценки Блэкмана и Тьюки была пропорциональна мощности истинной СПМ, а пики этой оценки были пропорциональны мощности импульсов в спектре, то выражение следует промасштабировать величиной $1/N\Delta t$. Не следует применять корреляционные окна, Фурье-образ которых меньше нуля, поскольку это приводит к получению отрицательных значений СПМ, что противоречит ее физическому смыслу. Не все весовые функции удовлетворяют данным критериям. Например, им не удовлетворяют функции Хемминга и Ханна, Кайзера и прямоугольное окно. С увеличением числа значений оценки $\hat{K}_x(m)$ коррелограммный метод дает асимптотически несмещенные оценки СПМ. Блэкман и Тьюки рекомендовали использовать число оцениваемых значений корреляционной последовательности примерно равным 10 % числа имеющихся отсчетов данных.

Дисперсия оценки Блэкмана и Тьюки определяется выражением:

$$D[\hat{P}_{BT}(f)] \approx \left[\frac{1}{N} \sum_{m=L}^L w^2(m) \right] \cdot P_x^2(f).$$

Очевидно, что при $N/L \rightarrow \infty$ $D[\hat{P}_{BT}(f)] \rightarrow 0$, так что при данных условиях оценка Блэкмана и Тьюки является состоятельной.

Для вычисления оценки СПМ, определяемой выражением, на сетке из $(N + 1)$ частот $f_k = k/N\Delta t$, где используют алгоритмы БПФ. Значение N здесь может быть произвольным, но обычно $N \gg L$, а это значит, что полученная оценка будет сохранять тонкие детали спектра. При использовании значений временного сдвига от $L + 1$ до N отсчеты имеющихся данных необходимо дополнить нулями.

Сравнивая процедуру Блэкмана и Тьюки с периодограммным методом, нетрудно заметить, что в этом случае сглаживание достигается не за счет усреднения нескольких периодограмм, а за счет усредняющего эффекта процесса корреляции.