АЛГОРИТМ ШТРАССЕНА И ВЫБОР РАЗМЕРА ВХОДА ПРОЦЕССОРА

Русак Х.В.

Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Мацкевич И.Ю. – старший преподаватель

Аннотация. Реализован алгоритм Штрассена умножения матриц с применением программного математического приложения MathLab. Произведен анализ эффективности этого алгоритма в зависимости от размера входа процессора.

Для решения задачи обработки сигналов за требуемое техническим заданием время чаще всего используют линейные алгоритмы вместо NP-трудных. На практике можно также применять алгоритмы, приспособленные для процессоров сравнительно небольшого участка входа N. Это касается тех задач, которые решаются на двоичных множествах.

Многие реальные задачи в области современных информационных систем являются NP-трудными и не выполняются за требуемое реальное время, тогда используются алгоритмы, позволяющие уменьшить асимптотическую вычислительную сложность $O(N^k)$. Если размер обрабатываемых данных является степенью двойки, т.е. $N = 2^i$, то вместо традиционных алгоритмов используют алгоритмы, связанные с умножением матриц на вектор-столбец (для обработки 1-D сигналов или для обработки 2-D сигналов, когда требуется уже перемножение двух или трех матриц). Произведение трех матриц используется для эффективного описания и представления 2-D процессов – изображение с помощью ортогональных Фурье-подобных преобразований. При применении традиционных скалярно-векторных умножений вычислительная сложность равна функции роста пропорциональности $O(2N^3)$.

В представленной статье рассмотрено использование для специальных процессоров сравнительно небольшой размерности алгоритма Штрассена, который имеет меньшую вычислительную сложность как по мультипликативной, так и по аддитивной операциям. Идея алгоритма Штрассена состоит в том, что для реализации умножения матрицы большей размерности используются матрицы 2-порядка.

Например, матрица 4-порядка будет состоять из $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ меньших матриц. Очевидно, что чем меньше размерность матриц, тем меньше временных затрат.

Вычисляются следующие 7 произведений:

$$d_1 = (a_{11}+a_{22})(b_{11}+b_{22}),$$
$$d_2 = (a_{21}+a_{22})b_{11},$$
$$d_3 = a_{11}(b_{12}-b_{22}),$$
$$d_4 = a_{22}(b_{21}-b_{11}),$$
$$d_5 = (a_{11}+a_{12})b_{22},$$
$$d_6 = (a_{21}-a_{11})(b_{11}+b_{12}),$$
$$d_7 = (a_{12}-a_{22})(b_{21}+b_{22}).$$

Тогда искомое произведение АС выражается так:

$$c_{11} = d_1 + d_4 + d_7 - d_5$$
$$c_{12} = d_3 + d_5$$
$$c_{21} = d_2 + d_4$$
$$c_{22} = d_1 + d_3 + d_6 - d_2$$

Первоначально матрицы n×n представляются в виде блочных матриц, состоящих из четырёх подматриц размера $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ каждая.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} A_{11}\times B_{11}+A_{12}\times B_{21} & A_{11}\times B_{12}+A_{12}\times B_{22} \\ \hline A_{21}\times B_{11}+A_{22}\times B_{21} & A_{21}\times B_{12}+A_{22}\times B_{22}\end{array}\right)$$

Поскольку матрицы размера $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ над кольцом сами образуют кольцо, здесь записано произведение двух матриц размера 2×2 над этим кольцом. Согласно лемме, в которой утверждается, что если A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ – две матрицы размера 2×2 над кольцом R, то их произведение AB = $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ можно вычислить за 7 умножений и 18 сложений в R, вычисление этого произведения сводится к умножению семи пар матриц вдвое меньшего размера, а также некоторому количеству сложений таких матриц.

Глубина рекурсии: $\log_2 n$. Задач размера n – одна. Задач размера $\frac{n}{2}$ – семь. Задач размера $\frac{n}{2^i}$ – всего 7^i. Для каждой задачи размера $\frac{n}{2^i}$, её внутреннее время работы, не считая рекурсивных вызовов, составляет O($(\frac{n}{2^i})^2$) шагов.

Всего:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} 7^i\left(\frac{n}{2^i}\right)^2 = n^2\sum_{i=0}^{\log_2 n}\left(\frac{7}{4}\right)^i = n^2\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{1+\log_2 n}-1}{\frac{7}{4}-1} = O\left(n^2\cdot\frac{7^{\log_2 n}}{4^{\log_2 n}}\right) = O\left(n^2\cdot\frac{n^{\log_2 7}}{n^2}\right) = O\left(n^{\log_2 7}\right)$$

Если размерность степень двойки, то выигрыш будет уже у метода Штрассена.

Теорема. Пусть R – кольцо, пусть k $\geq$ 0, и пусть A и B – две матрицы $2^k\times 2^k$ над R. Тогда произведение AB можно вычислить за 7^k умножений и $\theta(7^k)$ сложений.

Отсюда матрицы размера n×n можно перемножить за время O($n^{\log_2 7}$).

Вывод: в работе с использованием программного математического приложения MathLab проведены экспериментальные исследования для оценки эффективности данного алгоритма по сравнению с быстрыми алгоритмами на бинарном умножении.

Список использованных источников:

1. Кормен, Т.Х., Алгоритмы: построение и анализ. / Т.Х. Кормен [и др.] / 2-е издание. – М: Пер. с анг. Изд-во «Вильямс», 2009.

2. Лосев, В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: учеб. пособие. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990.

3. Совершенный алгоритм. Жадные алгоритмы и динамическое программирование. — СПб.: Питер, 2020 — 256 с.: ил. — (Серия «Библиотека программиста»).