В.В. ЦЕГЕЛЬНИК
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследованы аналитические свойства решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от условий, наложенных на содержащуюся в данном уравнении произвольную аналитическую функцию независимой переменной.

V.V. TSEGEL'NIK
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

ON A PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Analytical properties of solutions of a nonlinear differential equation of the second order are investigated depending on the conditions impede on an arbitrary analytical function of an independent variable contained in this equation.

Целью работы является исследование аналитических свойств решений уравнения

$$2ww'' = w'^2 + 3w^4 + 8l(z)w^3 + 4\left(\left(l^2(z) + \varepsilon\left(l'(z) + p + \frac{q}{2}\right)\right)w^2 - q^2, \qquad (1)$$

в котором $l(z)$– произвольная аналитическая функция независимой переменной z, $\varepsilon^2 = 1$, $p = -1 - \alpha\varepsilon - \frac{q}{2}$, $q^2 + 2\beta = 0$; α, β –произвольные параметры.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$w' = q + 2\varepsilon l(z)w + \varepsilon w^2 + 2\varepsilon wu,$$

$$u' = p - 2\varepsilon l(z)u - \varepsilon u^2 - 2\varepsilon wu. \qquad (2)$$

Если из (2) исключить неизвестную функцию w, то относительно uполучим уравнение

$$2uu'' = u'^2 + 3u^4 + 8l(z)u^3 + 4\left(\left(l^2(z) + \varepsilon\left(l'(z) + q + \frac{p}{2}\right)\right)u^2 - p^2. \qquad (3)$$

Теорема 1.$w = w(z, p, q, \varepsilon)$ – решение уравнения (2) при фиксированных значениях p, q, ε. Тогда функция

$$u = (w' - q - 2\varepsilon l(z)w - \varepsilon w^2)(2\varepsilon w)^{-1} \qquad (4)$$

является решением уравнения (3).

*Теорема 2.*Пусть $u = u(z, p, q, \varepsilon)$ – решение уравнения (3) при фиксированных значениях p, q, ε.

Тогда функция

$$w = (-(u' - p - 2\varepsilon l(z)u - \varepsilon u^2))(2\varepsilon u)^{-1} \qquad (5)$$

является решением уравнения (1).

Легко видеть, что уравнение (3) получается из (2) преобразованиями $u \to w,\ \varepsilon \to -\varepsilon,\ p \to q,\ q \to p$.

Таким образом, соотношения (4), (5) определяют преобразование Беклунда (прямое и обратное) уравнения (1), которое в случае $l(z) = az + b \ \ (a \neq 0)$ или $l(z) = b - const$является уравнением Пенлеве-типа [1-5].

При значениях $l(z)$, отличных от указанных выше, общее решение уравнения (1) не свободно от подвижных критических особых точек.

Список литературы

1. Э.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ. Харьков. 1939.
2. Лукашевич Н.А. // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, № 5. С. 1-6.
3. В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. Аналитические свойства уравнений Пенлеве. Университетское. Минск. 1990.
4. Hone A. N. W., Zullo F. // Random matrices: Theory and Applications. 2018. Vol. 7, № 4. 184 001 (15 pages).
5. Цегельник В. В. // Вестник НИЯУ «МИФИ». 2022. Т. 11, № 2. С. 117-121.