УДК 681.325

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Н.А. Кириенко
Старший научный сотрудник Объединенного института проблем информатики НАНБ, кандидат технических наук, доцент
kir@newman.bas-net.by

Н.А. Кириенко
Окончила Минский радиотехнический институт. Область научных интересов связана с автоматизацией процессов логического проектирования дискретных устройств, преобразованием и оптимизацией функциональных описаний логических схем.

Аннотация. Функциональные описания проектируемых цифровых устройств могут иметь сотни входных переменных и десятки тысяч уравнений. В связи с этим возникает задача эффективного представления исходных описаний цифровых устройств, которое позволит улучшить качество и сократить время синтеза цифрового устройства. Предлагается использовать полиномиальное представление систем булевых функций, которыми может описываться поведение дискретных устройств.

Рассматриваются представления системы булевых функций в виде полиномов Жегалкина и Рида-Маллера.

Описываются алгоритмы построения полиномов, исходя из различных форм задания поведения логических устройств: систем полностью определенных булевых функций, систем частично определенных булевых функций, таблиц истинности.

Ключевые слова: логическая схема, функциональное описание цифрового устройства, системы булевых функций, полином Жегалкина, полином Рида-Маллера.

Введение.

Исходное описание поведения проектируемых логических устройств удобно представлять формулами, представляющими собой композиции некоторых простых булевых функций, образующих базис синтеза и реализуемых отдельными схемными элементами. Практически важная задача минимизации числа элементов в схеме сводится к нахождению оптимальной композиции.

Наиболее распространенным базисом является трехэлементный базис «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание – И, ИЛИ, НЕ». Но с развитием микроэлектронной технологии появились элементы, реализующие многоместные дизъюнкции с исключением.

Структура таких схем описывается формулами, подобными ДНФ, в которых вместо операторов дизъюнкции используются операторы дизъюнкции с исключением, так называемые «И-исключающее ИЛИ (AND/EXOR)» формулы. Иногда такие формулы называют ESOP – exclusive sum of products [1].

Известно, что число термов в таких описаниях значительно меньше, чем в базисе И-ИЛИ-НЕ.

Кроме того, схемы AND/EXOR легче диагностируются. Поэтому развитие методов синтеза легко диагностируемых схем в базисе полиномиальных форма является актуальной задачей.

В настоящей работе представлено решение задачи построения полиномиальных форм для различных исходных заданий булевых функций.

Постановка задачи.

Рассмотрим два вида полиномиального представления булевых функций: полином Жегалкина и полином Рида-Маллера. Полином Жегалкина определяется как многоместная сумма по модулю два попарно различных элементарных конъюнкций (содержащих только положительные литералы) [2].

В виде полинома Жегалкина можно представить любую булеву функцию, эта форма является канонической.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) представляет многоместную дизъюнкцию элементарных конъюнкций (термов). ДНФ называется совершенной, если каждый терм содержит символы всех входных переменных описания.

Полином Жегалкина можно получить из дизъюнктивной нормальной формы путем последовательных эквивалентных преобразований [2]:

$$\begin{aligned} ab \vee a'c \vee bd' &= ab \vee a'c \vee a'bc'd' = ab \oplus a'c \oplus a'bc'd' = \\ &= ab \oplus (a \oplus 1)c \oplus (a \oplus 1)b(c \oplus 1)(d \oplus 1) = \\ &= ab \oplus ac \oplus c \oplus b \oplus ab \oplus bc \oplus bd \oplus abc \oplus abd \oplus bcd \oplus abcd = \\ &= ac \oplus c \oplus b \oplus bc \oplus bd \oplus abc \oplus abd \oplus bcd \oplus abcd. \end{aligned}$$

Символ «'» означает инверсию переменной, после которой он стоит.

Полином Рида-Маллера отличается от полинома Жегалкина тем, что некоторые из литералов могут быть со знаком инверсии (и тогда только с ним). Разработаны компактные векторно-матричные процедуры перехода от СДНФ к полиномам Жегалкина и Рида-Маллера, и обратно [2].

В работе рассматриваются алгоритмы и программы построения полиномиальных форм для различных исходных заданий системы булевых функций, которой описывается поведение логической схемы.

В качестве исходной формы булевых функций могут быть ДНФ, или таблицы истинности.

Алгоритмы построения полиномиальных форм.

Алгоритмы построения полиномов Жегалкина и Рида-Маллера базируются на четырех векторно-матричных процедурах, представленных в [2], реализованных на языке C++, и перечисленных в таблице 1.

Функции 1 и 2, которые представлены в таблице 1, требуют в качестве исходного задания две булевых матрицы, соответствующих системе частичных булевых функций в СДНФ. Функции 3 и 4 требуют в качестве исходного задания булев вектор, который соответствует значениям булевой функции на всех 2^n наборах булева пространства (таблица истинности).

Рассмотрим формы представления систем булевых функций, описывающих поведение логических схем. Для целей выполнения дальнейшей оптимизации и синтеза цифровых устройств актуальными являются описания в форме систем ДНФ, частичных булевых функций, систем булевых функций, определенных на таблице истинности.

Таблица 1. Векторно-матричные процедуры построения полиномов Жегалкина и Рида-Маллера

	Описание процедуры	Выполняемые действия	Вид исходного задания
1	**CSOP MinSiJ_D(CBM &BmX, CBM BmF)**	Минимизация в классе полиномов Жегалкина системы частичных булевых функций, заданных в совершенной нормальной форме.	Булева $p\times n$ матрица ***BmX*** задает p наборов n переменных, а булева $p\times m$ матрица ***BmF*** – значения m функций на этих наборах.
2	**CSOP MinSiRM_D(CBM &BmX, CBM BmF)**	Минимизация в классе общего вида полиномов Рида-Маллера системы частичных булевых функций, заданных в совершенной нормальной форме.	Булева $p\times n$ матрица ***BmX*** задает p наборов n переменных, а булева $p\times m$ матрица ***BmF*** – значения m функций на этих наборах.
3	**void MinSiJ(CBM &BmF)**	Построение системы полиномов Жегалкина, реализующей систему полностью определенных булевых функций, заданных в векторной форме.	Булева $m\times 2^n$ матрица ***BmF*** задает вектор значений функций на наборах таблицы истинности.
4	**CSOP MinFPRM(int Regime, CBM BmF, int &v, int &w, double &T1, double &T2, double &T3)**	Поиск оптимальной полярности для FPRM-представления системы полностью определенных булевых функций, заданных в векторной форме	Булева $m\times 2^n$ матрица ***BmF*** задает вектор значений функций на наборах таблицы истинности. При ***Regime***=0 ищется система полиномов Жегалкина, иначе – система полиномов Рида-Маллера. ***v*** - число термов в системе полиномов Жегалкина, ***w*** - число термов в системе полиномов Рида-Маллера. ***T*1** - время (в с) построения системы полиномов Жегалкина, ***T*2** - время (в с) построения системы полиномов Рида-Маллера, ***T*3** - время (в с) оформления разностной нормальной формы РНФ.

В таблице 2 представлены исходное структурно-функциональное описание схемы GenP в виде системы ДНФ и результирующее описание схемы в виде полинома Жегалкина (матричная и символьная формы). Описание представлено на внутреннем языке SF, который используется для описания объектов проектирования в системе логического проектирования FLC-2 [3].

Результирующее описание в матричной форме следует понимать, как «сумму по модулю два» конъюнкций, отмеченных единицей в матрице функций.

Таблица 2. Описание схемы GenP в виде системы ДНФ и полинома Жегалкина

Исходное задание	Полином Жегалкина в матричной форме	Полином Жегалкина в символьной форме
TITLE GenP FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION SDF 4 3 8 1001 001 0100 010 1100 010 1010 001 0010 101 0101 100 0011 101 0111 100 END_SDF END_FUNCTION END_GenP	TITLE GenP FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION SDF 4 3 6 ---- 001 -1-- 100 --1- 011 ---1 011 -11- 011 -1-1 010 END_SDF END_FUNCTION END_GenP	TITLE GenP FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION LOG 4 3 0 y0 = x1; y1 = x2⊕x3⊕x1*x2⊕ x1*x3; y2=1⊕x2⊕x3⊕x1*x2; END_LOG END_FUNCTION END_GenP

В таблице 3 представлено структурно-функциональное описание схемы GenP1 в виде системы частичных булевых функций и результирующее описание схемы в виде полинома Жегалкина (матричная и символьная формы).

Формы представления полиномов Рида-Маллера аналогичны формам представления полиномов Жегалкина с той разницей, что часть переменных представлена в инверсной форме (и только в ней).

Основной задачей алгоритма построения полиномов является преобразование исходного описания логической схемы к формату, воспринимаемому процедурами построения полиномиальных форм. Обращаем внимание, что система частичных булевых функций помечена комментарием /*T*/ в разделе «FUNCTION». Полином Жегалкина помечен комментарием /*G*/. Полином Рида-Маллера помечен комментарием /*RM*/.

Таблица 3. Описание схемы GenP1 в виде системы частичных булевых функций и полинома Жегалкина

Исходное задание	Полином Жегалкина в матричной форме	Полином Жегалкина в символьной форме
TITLE GenP1 FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION /*T*/ SDF 4 3 10 1001 0-1 0100 010 1100 010 1010 -01 0010 101 0101 100 0011 1-1 0111 100 0000 --- 0001 --- END_SDF END_FUNCTION END_GenP1	TITLE GenP1 FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION /*G*/ SDF 4 3 5 ---- 101 1--- 100 -1-- 111 11-- 100 -1-1 110 END_SDF END_FUNCTION END_GenP1	TITLE GenP1 FORMAT SF AUTHOR Author DATE 03.11.2020 10:28:44 PROJECT Test DCL_PIN EXT INP x0 x1 x2 x3 OUT y0 y1 y2 INTER END_PIN FUNCTION /*G*/ LOG 4 3 0 y0 = 1⊕x0⊕x1⊕x0*x1⊕ x1*x3; y1 = x1⊕x1*x3; y2 = 1⊕x1; END_LOG END_FUNCTION END_GenP1

В процессе реализации алгоритма строится 12 различных функций, представленных в таблице 4. В таблице представлены имена функций, описание построенных форм, значение специальных признаков, соответствующих каждой из функций. Признак «mode» управляет выбором процедуры построения полинома, признак «regime» соответствует выбору типа полинома (Жегалкина, или Рида-Маллера), признак «prizn_sdf» управляет формой представления полинома (матричная, или символьная).

В процессе построения функций выполняется преобразование исходных заданий систем булевых функций к форме, приемлемой для процедур построения полиномов (таблица 1). При этом система частичных булевых функций доопределяется нулевыми значениями в позициях, где она не определена. Для системы ДНФ выполняется перевод в векторную форму (система определяется на всех наборах таблицы истинности).

Таблица 4. Описание функций построения полиномов

Имя функции	Построенная форма	Значение признака «mode»	Значение признака «regime»	Значение признака «prizn_sdf»
polG_chast	Полином Жегалкина в символьной форме для частичных булевых функций	1	0	0
polG_chast_sdf	Полином Жегалкина в матричной форме для частичных булевых функций	1	0	1
polG_SOP	Полином Жегалкина в символьной форме для систем ДНФ	1	0	0
polG_SOP_sdf	Полином Жегалкина в матричной форме для систем ДНФ	1	0	1
polG_tabl	Полином Жегалкина в символьной форме для таблиц истинности	4	0	0
polG_tabl_sdf	Полином Жегалкина в матричной форме для таблиц истинности	4	0	1
polRM_chast	Полином Рида-Маллера в символьной форме для частичных булевых функций	2	1	0
polRM_chast_sdf	Полином Рида-Маллера в матричной форме для частичных булевых функций	2	1	1
polRM_SOP	Полином Рида-Маллера в символьной форме для систем ДНФ	2	1	0
polRM_SOP_sdf	Полином Рида-Маллера в матричной форме для систем ДНФ	2	1	1
polRM_tabl	Полином Рида-Маллера в символьной форме для таблиц истинности	4	1	0
polRM_tabl_sdf	Полином Рида-Маллера в матричной форме для таблиц истинности	4	1	1

Результаты экспериментального исследования. Функции построения полиномов (таблица 4) реализованы на языке C++ и включены в экспериментальную систему логического проектирования FLC2 [3], разработанную в лаборатории логического проектирования ОИПИ НАН Беларуси.

Основная задача исследования – оценить сложность схем в результате их полиномиального представления. Результаты исследования приведены в таблице 5. Исследование проведено на примерах известной серии для оценки алгоритмов (URL: http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis). Имена схем представлены в столбце 1, параметры схем (n – число входов, m – число выходов) представлены в столбце 2.

Для каждого примера выполнялась процедура построения полиномов Жегалкина и Рида-Маллера. В столбцах 3, 4, 5 представлены числа элементарных конъюнкций (термов) в исходном описании, полиноме Жегалкина, и в полиноме Рида-Маллера соответственно. В столбцах 6, 7, 8 представлены числа литералов в исходном описании, полиноме Жегалкина, и в полиноме Рида-Маллера соответственно. В столбце 9 представлены значения относительных выигрышей при представлении полиномами Жегалкина – отношения числа литералов в исходной форме и в полиномах Жегалкина. В столбце 10 представлены значения относительных выигрышей при представлении полиномами Рида-Маллера – отношения числа литералов в исходной форме и в полиномах Рида-Маллера.

Таблица 5. Исследование сложности полиномиальных форм описания функционирования логических схем

Пример	Параметры схемы *n, m*	Число термов в исходной форме	Число термов в полиноме Жегалкина	Число термов в полиноме Рида-Маллера	Число литералов в исходной форме	Число литералов в полиноме Жегалкина	Число литералов в полиноме Рида-Маллера	Выигрыш в полиноме Жегалкина	Выигрыш в полиноме Рида-Маллера
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
add6	12, 7	1092	125	125	8748	654	654	13,38	13,38
adm4	9, 8	512	196	196	11790	1050	1050	11,23	11,23
b12	15, 9	431	320	81	1923	1209	347	1,59	5,54
ex7	16, 5	123	100	100	788	563	563	1,40	1,40
f51m	8, 8	256	72	72	8192	264	264	31,03	31,03
intb	15, 7	664	3293	1915	5594	21540	12838	0,26	0,44
life	9, 1	512	183	99	1260	792	596	1,59	2,11
m4	8, 16	256	1429	410	17464	5630	2023	3,10	8,63
m181	15, 9	430	324	81	1921	1225	352	1,57	5,46
max512	9, 6	512	714	772	14544	3548	3792	4,10	3,84
rd53	5, 3	32	17	17	210	45	45	4,67	4,67
rd73	7, 3	147	60	60	876	189	189	4,63	4,63
ryy6	16, 1	112	79	63	624	624	464	1,00	1,34
sym10	10, 1	837	265	265	8370	1300	1300	6,44	6,44
t3	12, 8	152	1827	113	1630	11522	718	0,14	2,27
z4	7, 4	128	28	28	1792	89	89	20,13	20,13
z9sym	9, 1	420	209	172	3780	756	636	5,00	5,94

Заключение.

Использование полиномиальных представлений систем булевых функций для описания поведения дискретных устройств позволяет значительно сократить сложность описания устройств. Экспериментальные исследования показали, что в некоторых случаях количество литералов сокращается в 30 раз. Только в одном из 17 примеров получен проигрыш. Полиномиальные представления систем булевых функций позволяют легко синтезировать схемы в базисе элементов AND/EXOR, что позволяет сокращать число элементов в схемах. Кроме того, такие схемы считаются хорошо диагностируемыми.

Список литературы

[1] Representations of Discrete Functions (ed. by T. Sasao and M. Fujita). Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht. 1996. 332 p.

[2] Закревский А.Д., Торопов Н.Р. Полиномиальная реализация частичных булевых функций и систем / Минск: Ин-т технической кибернетики НАН Беларуси. 2001. 200 с.

[3] Бибило П.Н., Романов В.И. Система логической оптимизации функционально-структурных описаний цифровых устройств на основе продукционно-фреймовой модели представления знаний // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. – 2020. Сб. трудов / под общ. ред. акад. РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН. 2020. N 4. С. 9–16.

POLYNOMIAL IMPLEMENTATION OF SYSTEMS OF BOOLEAN FUNCTIONS IN PROBLEMS OF LOGIC DESIGN

N.A. Kirienko,
Senior Researcher of UIIP of NAS of Belarus,
PhD of Technical Sciences,
Associate Professor

The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Republic Belarus
E-mail: kir@newman.bas-net.by

Abstract. Functional descriptions of designed digital devices have hundreds of input variables and tens of thousands of equations. In this regard, the problem arises of effective representation of the initial descriptions of digital devices, which will allow obtaining a sufficiently optimal solution and reducing the time of digital device synthesis. It is proposed to use a polynomial representation of systems of Boolean functions, which, as a rule, describe the behavior of discrete devices.

The representation of the system of Boolean functions in the form of Zhegalkin and Reed-Muller polynomials is considered. Algorithms for constructing polynomials for various forms of specifying systems of Boolean functions are described: systems of disjunctive normal forms (DNFs), partial Boolean functions, and truth tables.

Keywords: logic circuit, functional description of the digital device, systems of Boolean functions, Zhegalkin polynomial, Reed-Muller polynomial.