

УДК 625

## ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МЕЖКОМПОНЕНТНЫХ ФАЗОВЫХ ОТНОШЕНИЙ



**Д.А. Кечик**

Ассистент кафедры информационных радиотехнологий БГУИР, магистр технических наук  
[ya.dan.kechik@yandex.by](mailto:ya.dan.kechik@yandex.by)



**И.Г. Давыдов**

Доцент кафедры информационных радиотехнологий БГУИР, кандидат технических наук, доцент  
[davydov\\_ig@bsuir.by](mailto:davydov_ig@bsuir.by)

### **Д.А. Кечик**

Окончил Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов связана с построением алгоритмов обработки сигналов вибрации с целью диагностики оборудования.

### **И.Г. Давыдов**

Окончил Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов связана с построением алгоритмов обработки сигналов вибрации с целью диагностики оборудования.

**Аннотация.** В настоящей работе представлена аппроксимация распределения межкомпонентных фазовых отношений (МКФО) составляющих полигармонического сигнала зашумлённого гауссовским шумом. Показано, что для высоких отношений сигнал-шум закон распределения МКФО близок к нормальному.

**Ключевые слова:** межкомпонентные фазовые отношения, цифровая обработка сигналов, статистика, тест Колмогорова-Смирнова.

### **Введение.**

Один из способов существенного повышения эффективности производства – внедрение обслуживания оборудования по его фактическому состоянию. Состояние работающего агрегата оценивается методами неразрушающего контроля, в том числе методами виброакустической диагностики.

Затраты производства снижаются за счёт уменьшения времени простоя оборудования, предотвращения его внезапных отказов, уменьшения числа ошибок монтажа при сборке за счёт удлинения межремонтного интервала, своевременного выявления подобных ошибок [1].

Одной из распространённых проблем сборки оборудования, приводящая к значительному росту частоты отказа его узлов, является расцентровка соединяемых валов [2]. Выделяют два вида расцентровок: угловая и параллельная.

В первом случае, оси соединяемых валов представляют собой пересекающиеся прямые, во втором – параллельные.

Наличие обоих видов расцентровки приводит к скреживающимся осям валов.

В работе [3] предложено использовать МКФО для различения вида и степени расцентровки валов. Показано, что среднее значение МКФО зависит от величины их смещения, а эмпирическое распределение МКФО близко к нормальному.

Цель данной работы – получить теоретическое распределение некоторых МКФО, построить зависимость СКО МКФО от отношения сигнал-шум (ОСШ) и длины реализации. Это поможет в дальнейшем построить алгоритм принятия решения о виде и степени дефекта, оценить его параметры.

### Статистические распределения фазы.

Представим вибрационный сигнал диагностируемого оборудования в виде:

$$x(t) = \sum_{h=1}^H A(h) \cos(2\pi h F_0 t + \phi(h)) + n(t) = \sum_{h=1}^H A(h) \cos(2\pi h F_0 t + \hat{\phi}(h)), \quad (1)$$

$$\phi(h) = h\phi_0 + \theta(h) = E[\hat{\phi}(h)]$$

где  $H$  – число квазигармонических колебаний,  $A(h)$  – амплитуда  $h$ -го колебания,  $\phi_0$  – начальная постоянная фаза компонентов вибрации, обусловленная случайным моментом начала записи.  $\theta(h)$  – постоянная величина, обусловленная запаздыванием возникновения кинематических сил, порождающих колебания на разных частотах. Значения  $A(h)$  и  $\theta(h)$  могут быть получены путём решения системы дифференциальных уравнений, составленных с учётом кинематической схемы дефектного узла. Здесь эти значения считаются априори известными, как и дисперсия шума  $\sigma$ .

Рассмотрим распределение спектральных отсчётов  $X(hF_0)$ ,  $h = 1, 2, \dots, H$ :

$$X(f) = \sum_{t=0}^{T-1} x(t) \cdot \exp(-2\pi j f \cdot t). \quad (2)$$

В силу линейности преобразования Фурье (ПФ),  $X(hF_0) = A(h) + N(hF_0)$ , где  $N(hF_0)$  – ПФ шума:

$$N(f) = \sum_{t=0}^{T-1} n(t) \cdot \exp(-2\pi j f \cdot t). \quad (3)$$

Согласно [4], мнимые и действительные части спектральных отсчётов  $N(f)$  при условии стационарности  $n(t)$  распределены асимптотически по нормальному закону:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N [0, T \cdot P(f)] \quad (4)$$

где  $T$  – дискретное время,  $P(f)$  – спектральная плотность мощности, определяемая как:

$$P(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi j f \tau) \cdot c(\tau) \quad (5)$$

$$c(\tau) = \text{cov}[X(t+\tau), X(t)], \text{cov}(X, Y) = E[X - E(X)] \overline{E[Y - E(Y)]} \quad (6)$$

Т.к.  $n(t)$  – белый гауссов шум, то  $c(\tau) = \sigma^2 \delta(0)$ , соответственно,  $P(f) = P_0 = \sigma^2 / F_s$ , где  $\sigma^2$  – мощность шума,  $F_s$  – частота дискретизации, тогда:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N [0, T \cdot P_0] \quad (7)$$

Если  $X(f)$  нормировать по числу отсчётов  $T$ , дисперсия Фурье-отсчётов уменьшится в  $T^2$  раз:

$$D(\Re[N(f)]) = D(\Im[N(f)]) = N [0, \sigma_s^2], \sigma_s^2 = T^{-1} \cdot P_0 \quad (8)$$

Распределение аргумента комплексной величины  $X(hF_0)$  рассчитывается через совместное распределение мнимой и действительной частей [6]:

$$D(\Re[X(hF_0)], \Im[X(hF_0)]) = (2\pi\sigma_s^2)^{-1} \cdot \exp[-(\Re[X(hF_0)] - a)^2 + (\Im[X(hF_0)] - b)^2] / (2\sigma_s), a = A(h)\cos(\phi(h)), b = A(h)\sin(\phi(h)) \quad (9)$$

которое после преобразования декартовых координат в полярные с учётом

$$\begin{aligned} \Re[X(hF_0)] &= r(h)\cos\hat{\phi}(h), \\ \Im[X(hF_0)] &= r(h)\sin\hat{\phi}(h), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $r, \nu$  – амплитуда и фаза Фурье-отсчёта  $h$ -й гармоники соответственно, преобразуется в совместное распределение амплитуды и фазы:

$$D(r(h), \hat{\phi}(h)) = r(2\pi\sigma_s^2)^{-1} \cdot \exp[-(r(h)\cos\hat{\phi}(h))^2 + (r(h)\sin\hat{\phi}(h) - b)^2] / (2\sigma_s) \quad (11)$$

откуда распределение фазы получено интегрированием (11) по амплитуде:

$$D(\hat{\phi}(h)) = \int_0^\infty D(r(h), \hat{\phi}(h)) dr = \frac{\exp(-A^2(h)/2\sigma_s^2)}{2\pi} + \frac{A\cos u}{2\sigma_s\sqrt{2\pi}} \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{A\cos u}{\sqrt{2\sigma_s}}\right) \right] \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\sin^2 u\right), u = \hat{\phi}(h) - \phi(h) \quad (12)$$

Согласно [5], при условии  $(A/\sigma_s)\cos(\phi - \hat{\phi}(h)) > 3$  возможно аппроксимировать распределение (12):

$$D(\hat{\phi}(h)) \approx \frac{A}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} \cdot \cos u \cdot \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\sin^2 u\right]. \quad (13)$$

При условии малого отклонения фазы этот закон приближается нормальным распределением с СКО  $\sigma_\phi(h)$  и средним  $\phi(h)$ :

$$D(\hat{\phi}(h)) \approx \frac{A(h)}{\sigma_{\phi} \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{A(h)^2}{2\sigma_{\phi}^2}(\hat{\phi}(h) - \phi(h))^2\right], \quad (14)$$

$$\sigma_\phi(h) = \sigma_s / A(h) = P_0 / (\sqrt{T} \cdot A(h)). \quad (15)$$

### Статистические распределения МКФО.

Существуют линейные комбинации фаз составляющих сигнала (1), не зависящие от момента начала отсчёта  $t_0$ .

Такие комбинации называются межкомпонентными фазовыми отношениями (МКФО). Запишем общее выражение МКФО:

$$\begin{aligned}\Theta(k) &= \sum_{h=0}^H k(h) \cdot \hat{\phi}(h) = \sum_{h=1}^H k(h) \cdot (h\phi_0 + \theta(h) + \gamma(h)) = \\ &= \phi_0 \cdot \sum_{h=1}^H k(h)h + \sum_{h=1}^H k(h) \cdot (\theta(h) + \gamma(h))\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь  $k \in Z$  – коэффициенты линейной комбинации,  $\gamma(h) = \hat{\phi}(h) - \phi(h)$ . Выражение (16) не зависит от  $\phi_0(h) = 2\pi \cdot hF_0 \cdot t_0$  при условии

$$\sum_{h=1}^H k(h)h = 0 \quad (17)$$

Известно, что распределение суммы  $Z$  независимых нормальных случайных величин  $X, Y$  также нормальное с дисперсией, равной сумме дисперсий исходных величин:  $D(Z) = D(X) + D(Y)$ . Кроме того,  $D(C \cdot X) = C^2 D(X)$ . Отсюда распределение  $\Theta(k)$ :

$$D(\Theta(k)) = \frac{1}{\sigma_{\Theta}(k)\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\Theta(k) - \Theta_0(k))^2}{2\sigma_s^2}\right], \quad (18)$$

$$\Theta_0(k) = \sum_{h=1}^H k(h) \cdot \theta(h), \quad (19)$$

при этом СКО  $\Theta(k)$  выражается через длину реализации, значения амплитуд гармоник и спектральной плотности мощности шума:

$$\sigma_{\Theta}(k) = \sqrt{\sum_{h=1}^H \sigma_{\phi}^2(h)} = \sqrt{\sum_{h=1}^H P_0^2 / (T \cdot A(h))^2} = \sqrt{P_0 / (T) \cdot \sum_{h=1}^H A^{-2}(h)} \quad (20).$$

### Результаты.

Эмпирические распределения МКФО были получены путём моделирования. Сигналы вида (1) генерировались при заданных значениях амплитуд, фаз, уровня шума,  $H = 3$ .

Эмпирические и теоретические распределения  $\hat{\phi}(h), \Theta(k)$  при  $k = \{2, -1, 0\}$  и  $k = \{1, 1, -1\}$  приведены на рисунках 1-3 а-в соответственно. СКО теоретического распределения  $\phi(h)$  рассчитывалось по формуле (15), распределения  $\Theta(k)$  – по формуле (20).

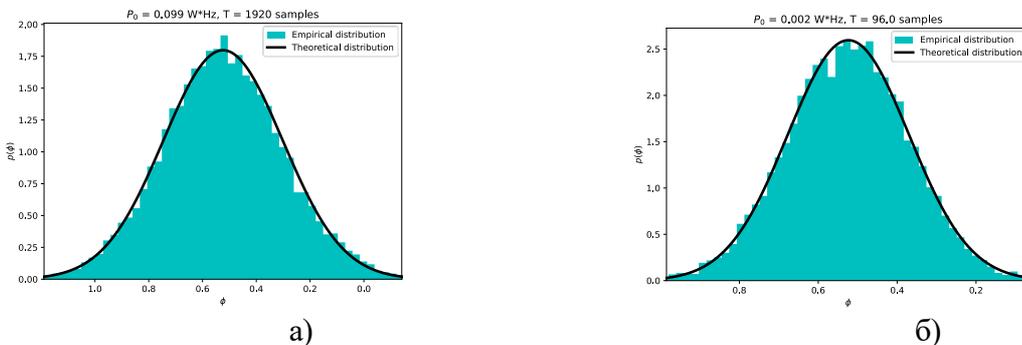


Рисунок 1. Распределения начальной фазы первой гармоники: а)  $P_0 = 0.099, T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002, T = 96$

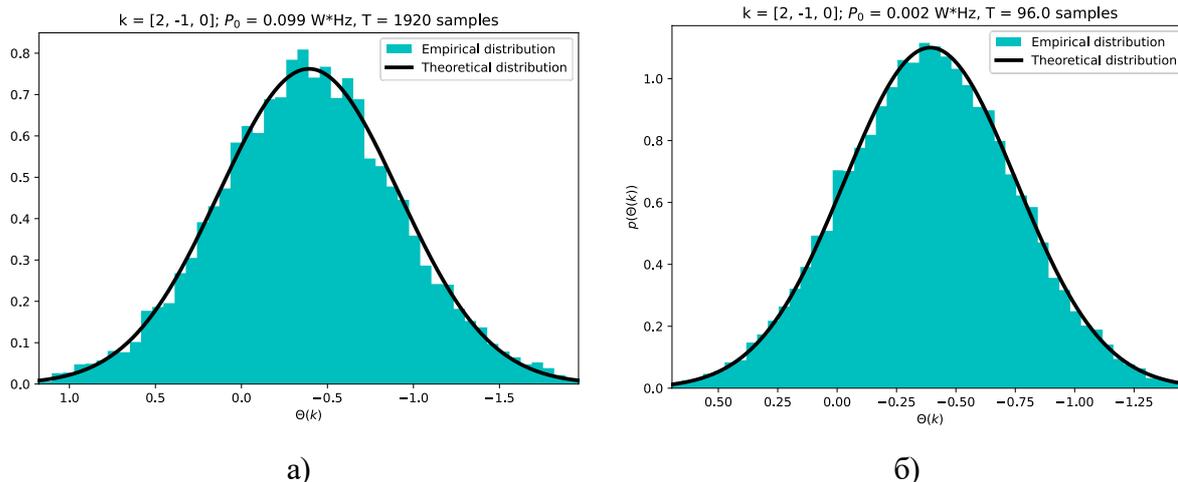


Рисунок 2. Распределения  $\Theta(k)$ ,  $k = [2, -1, 0]$ : а)  $P_0 = 0.099$ ,  $T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002$ ,  $T = 96$

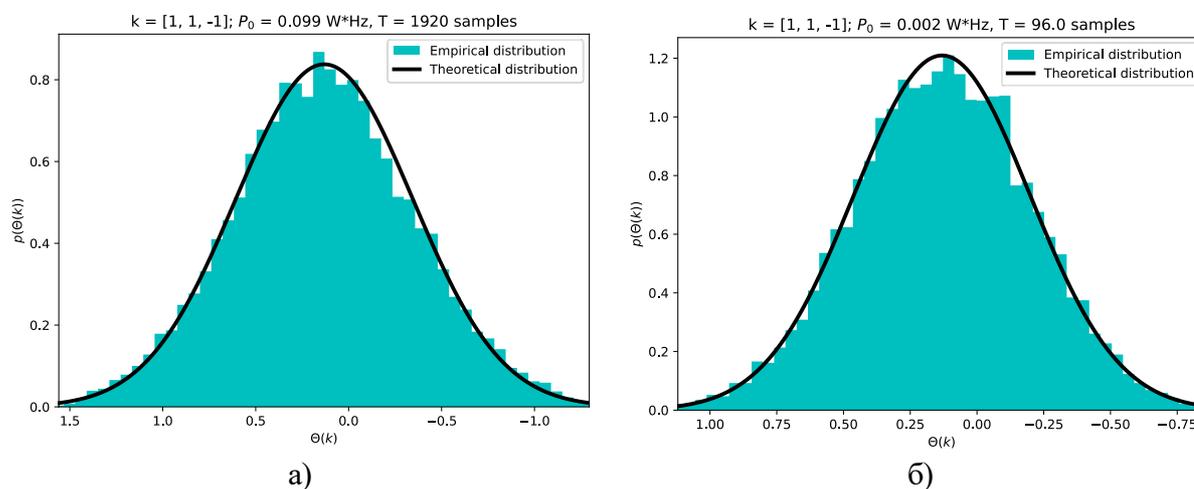


Рисунок 3. Распределения  $\Theta(k)$ ,  $k = [1, 1, -1]$ : а)  $P_0 = 0.099$ ,  $T = 1920$ ; б)  $P_0 = 0.002$ ,  $T = 96$

Соответствие эмпирического и теоретического распределений проверялась при помощи теста Колмогорова-Смирнова. Суть теста заключается в оценке статистики

$$S_n = \sup_{|x| < \infty} |\hat{F}(x) - F(x)|, \quad (21)$$

где  $\hat{F}(x)$  – эмпирическая функция распределения,  $F(x)$  – теоретическая.

Нулевая гипотеза не отвергается, если выполняется неравенство  $p = P(S > S_n) > \alpha$ , где  $S$  – критическое значение статистики для уровня значимости  $\alpha$ . Нулевая гипотеза была сформулирована как:

- $D(\hat{\phi}(h)) = N[\phi(h), \sigma_\phi^2(h)]$
- $D(\Theta(k)) = N[\Theta_0(k), \sigma_\Theta^2(k)]$

Проверялась нулевая гипотеза при  $A = \{1, 0.8, 0.7\}$ ,  $F_0 = 10$  Гц,  $F_s = 960$  Гц.

Проводилось два теста: при постоянной СПМ  $P_0=0.002$  Вт/Гц и  $T = [96...960]$  отсчётов,  $T = 1920$ ,  $P_0 = [0.002...0.2]$  Вт/Гц. При спектральной плотности мощности шума  $P_0 \leq 0.1$  Вт/Гц и  $T=1920$   $p \geq 0.05$ , что не позволяет отвергнуть  $H_0$  в этих случаях.

Полученный результат свидетельствует о том, что при высоких ОСШ распределение МКФО можно считать нормальным со средним (19) и СКО (20).

### **Заключение.**

Межкомпонентные фазовые отношения, вычисленные для Фурье-коэффициентов сигнала вибрации, при высоких ОСШ распределены по нормальному закону.

Соответствие эмпирического распределения теоретическому закону проверялась тестом Колмогорова-Смирнова.

Получены аналитические выражения расчёта среднего и дисперсии МКФО, учитывающие длину реализации, значения амплитуд и уровень шума.

### **Список литературы**

- [1]. Абрамов, И.Л. Вибродиагностика энергетического оборудования / И.Л. Абрамов. – Кемерово : КузГТУ, 2011. – 81 с.
- [2]. Hariharan, Dr.V. Vibration analysis of misaligned shaft – ball bearing system / Dr.V. Hariharan // Indian J. Sci. Technol. – 2009. – Т. 2. – С. 45-50.
- Кечик, Д.А. Различение неисправностей оборудования при помощи межкомпонентной фазовой обработки сигналов / Д.А. Кечик, И.Г. Давыдов. – 2022.
- [3]. Brillinger, D.R. Time Series: Data Analysis and Theory / D.R. Brillinger. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. – 564 p.
- [4]. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – Изд. 3. – М. : Радио и связь, 1989.
- [5]. Bennett, W. Methods of Solving Noise Problems / W. Bennett // Proc. IRE. – 1956. – Vol. 44, № 5. – P. 609-638.

## **PROBABILITY DENSITIES OF INTER-COMPONENT PHASE RELATIONS**

**Д.А. Кечик**

Ассистент кафедры информационных радиотехнологий БГУИР, магистр технических наук  
*ya.dan.kechik@yandex.by*

**И.Г. Давыдов**

Доцент кафедры информационных радиотехнологий БГУИР, кандидат технических наук, доцент  
*davydov\_ig@bsuir.by*

*Department of Information Radiotechnologies  
Faculty of Radiotechnics and Electronics  
Belarusian State University of computer science and Radio Electronics, Republic of Belarus  
E-mail: ya.dan.kechik@yandex.by*

**Abstract.** Approximation of inter-component phase relations (ICPR) of components of corrupted by additive gaussian noise polyharmonic signal has been presented in this paper. ICPR probability distribution law has been shown to be close to normal.

**Key words:** inter-component phase relations, digital signal processing, statistics, Kolmogorov-Smirnov test.