Математические структуры и моделирование
2023. № 1 (65). С. 34–45

УДК 510.2+101.1
DOI 10.24147/2222-8772.2023.1.34-45

«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА В МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКОМ АСПЕКТЕ СОВРЕМЕННОЙ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

В.А. Еровенко[1]
д-р физ.-мат. наук, профессор, e-mail: erovenko@bsu.by
Н.В. Михайлова[2]
канд. филос. наук, доцент, e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Работа посвящена философско-историческому анализу математики Евклида, привлекающей постоянное повышенное внимание в связи с поиском ответа на вопрос о том, почему древние греки не стали довольствоваться имеющимися в их распоряжении эмпирическими знаниями и вычислительными рецептами, а разработали и довели до совершенства дедуктивную систему доказательств, ставшую основным методом в математике.

Ключевые слова: «Начала» Евклида, дедуктивно-аксиоматический метод, философия математики.

Введение

Специфичность математического творчества древних греков, восходящая к античному идеалу единой науки, касается математической убедительности, которую традиционно было принято отождествлять с потенциальной убедительностью, понимаемой как истинность. В таком философском контексте нельзя не вспомнить об авторе первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике – древнегреческом математике Евклиде (ок. 365 – ок. 300 до н. э.). Все биографические сведения о его жизни и деятельности крайне скудны, известно лишь, что он родом из Афин и был учеником Платона. Гений Евклида был отчасти обязан Платону, обосновавшему в диалоге «Тимей» онтологию, благодаря чему геометрия, постигаемая созерцанием, была возведена в ранг онтологии, используя непосредственность усмотрения аксиом. Но некоторые концепции, которые традиционно считаются чисто платоновскими, вероятно, были предложены Евклидом или стали результатом совместного обсуждения. Известно, что Платон после казни Сократа был некоторое время гостем Евклида. Научная, в частности математическая, деятельность Евклида связана с Александрией, где он создал свою математическую школу, способствующую становлению александрийской математики как науки, и написал большой труд по геометрии, объединённый под общим названием «Начала».

Математика Евклида – это общепризнанная вершина древнегреческой науки, в своей работе «Начала» (в латинизированной форме – «Элементы») автор подытожил все предшествующие выдающиеся достижения древнегреческой математики. Существовала легенда, что Евклид не единственный автор дошедших до нас «Начал», поскольку он дал лишь изложение материала без доказательств, которые были добавлены греческим математиком и астрономом Александрийской школы Теоном Александрийским, издавшим «Начала» Евклида с некоторыми усовершенствованиями и дополнениями. Высшей формой науки всегда считалась «объяснительная теория», дающая не только описание, но и методологическое обоснование. Поэтому взгляды Евклида оказали прежде всего огромное влияние на историческое развитие современного математического мышления. После появления в древнегреческой математике раздела, изучающего свойства углов в треугольнике, появилась ещё необходимость в переходе от «предметной» геометрии Фалеса к «идеальной» геометрии Евклида. В контексте возникновения предпосылок возникновения дедуктивной математики «Начала» Евклида имеют сугубо теоретическую направленность. С точки зрения философии и истории математики заслуга Евклида состоит в понимании того, что не всё в математике можно доказать, поэтому некоторые её положения надо принимать как допущения и использовать далее аксиоматический метод. Около 300 г. до н. э. Евклид написал свой великий труд «Начала», содержащий практически все известные в то время математические сведения, но следует иметь в виду следующее: «Текст Евклидовых «Начал», как и подавляющее большинство других древних текстов, не сохранился в виде рукописи, написанной самим автором. До наших дней дошли лишь рукописные копии, причём не с оригинального манускрипта, а с других рукописных копий» [1, с. 305]. Опираясь на логические разработки своих предшественников, Евклид изложил основы математики в этой книге.

Значение «Начала» Евклида состоит в том, что в них в виде логически строгой системы представлены важнейшие достижения греческой математики, в частности теория отношений, теория иррациональных, теория пяти геометрически правильных тел. Заметим, что геометрия Евклида стала образцом классификации уже известного знания, а не средством его увеличения. Со времён Евклида дедуктивно-аксиоматический метод построения математического знания считался образцовым. Но философское и методологическое осознание дедуктивно-аксиоматического способа построения математической теории происходит только в XVII веке. Заметим, что поскольку единственным образцом, послужившим апробированным материалом для философско-методологической рефлексии, была геометрия Евклида, то этот метод получил название «геометрического», хотя связь реальной геометрии с геометрией Евклида – это сложный вопрос. Однако современные математические теории, следуя этому образцу, рассматривают математику как дедуктивную науку в целостном знании. Если Евклид и многие учёные после него полагали, что некоторые исходные положения теоретической аксиоматической системы представляют собой самоочевидные истины, то современные учёные понимают, что такие истины очень трудно найти, а многие постулаты математических теорий являются предположениями о более глубинных явлениях.

1. Геометрия Евклида

Самая первая книга «Начал» Евклида особенно интересна в теоретико-методологическом отношении, а также в познавательном плане становления философии математики, поскольку в ней он формулирует исходные положения геометрии, которые не могут быть доказаны, но именно на их базе получаются выводимые в дальнейшем математические положения. Евклид понял, что не все математические положения и утверждения можно доказать, поэтому некоторые из них нужно принять как допущения. Эти недоказуемые утверждения Евклид подразделяет на три группы: определения; постулаты, что означает «требования»; общие представления, или «понятия». В комментариях платоника Прокла к Евклиду первая группа положений называется «гипотезами», что есть предположения или допущения, которые не доказываются, а третья группа – «аксиомами», учение о которых было заложено Аристотелем. Но, говоря об аксиомах, Аристотель связывал этот термин в принятом сейчас употреблении исключительно с математикой, хотя сам использовал его не в математической интерпретации, а в общем логическом смысле. В математике термином «аксиома» обозначают содержательное положение, принимаемое без доказательства, причём с точки зрения методологии эти положения имеют одинаковый философско-эпистемологический статус предположения.

Развитие античной геометрии характеризуется «содержательной аксиоматикой», в завершённой форме представленной «Началами» Евклида, который излагает геометрию, опираясь на интуитивно ясные и доступные чувственному содержанию положения, описывающие определённые пространственные свойства материальных объектов и их отношений. Принято считать, что математические «Начала» Евклида представляют классический образец математики как содержательно-аксиоматического, а также ещё и конструктивно-аксиоматического построения математической теории, актуальный в наши дни. Однако именно определения первой группы в наибольшей степени были подвергнуты философской критике. Они, в свою очередь, тоже могут быть подразделены на две группы. Философско-математические определения первой группы относятся к исходным понятиям геометрии, а ко второй группе относятся определения основных геометрических фигур – прямого, тупого и острого углов, круга, треугольников и четырёхугольников, параллельных прямых. Начало аксиоматическому методу построения теории было положено в школе Пифагора на рубеже VI–V веков до н. э., а уже в «Началах» Евклида в III веке до н. э. программа аксиоматизации геометрии была завершена. Можно также заключить, что в «Началах» Евклида были учтены не только достижения пифагорейцев, но и уроки, извлечённые при решении знаменитых геометрических задач о трисекции угла, квадратуре круга, удвоении куба, благодаря чему был преодолён кризис основ древнегреческой математики того уровня.

Известно, что для полноценного математического познания нужен хороший метод. В основе изучения евклидовой геометрии на плоскости лежит дедуктивный метод, который состоит в том, что основные понятия теории не определяются, а содержательно описываются. Затем основные свойства ключевых элементов теории формулируются в виде аксиом, принимаемых без доказательств, а уже остальные утверждения теории логически выводятся из аксиом. «Слишком часто интеллектуальное предприятие, претендующее представить новую, подлинную систему организации знания, возводит свою родословную к *Началам Евклида*» [2, с. 403]. «Начала» Евклида – это первая удачная попытка дедуктивно-аксиоматического построения геометрии, оказавшая колоссальное влияние на всю последующую теоретическую математику. В связи с этим нельзя не вспомнить пятый постулат, или аксиому геометрии Евклида, например, в виде одной из формулировок вида: «Через точку, лежащую вне прямой на плоскости, можно провести одну и только одну прямую параллельную данной прямой». Заметим, что полным логическим отрицанием пятого постулата является следующее утверждение: «Нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной прямой, или можно провести более одной прямой, параллельной данной». Если говорить о пятом постулате, то Евклид, работая над «Началами», не мог предположить, что конкретные физические объекты окажутся лишь репрезентациями множества математических абстракций, а уже тем более он не ожидал, что его постулат в дальнейшем будет подвергнут сомнению. Заметим, что в философии математики выделяется «евклидианское» обоснование математики как аксиоматическое обоснование теории, суть которого состоит в том, что истина, входящая в исходные принципы общей теории, передаётся конкретным математическим утверждением по «дедуктивным каналам» трансляции истинности. Но дедуктивное построение конкретной математической дисциплины необходимо только в том случае, когда единственным способом проверки истинности её утверждений в обосновании математики является анализ воспроизведения этих выводов из основных начальных положений теории.

Даже вопрос о философских взглядах Евклида был бы менее интересен, если бы он не имел существенного значения для философского и методологического понимания его «Начал». По существу, древнегреческая геометрия отличалась от предшествующей ей восточной геометрии не системой доказательного знания о свойствах и отношениях идеальных геометрических форм, образцово представленной в «Началах» Евклида, а по способу своего реального методологического построения. Начало аксиоматическому методу построения математики было положено в школе Пифагора, а затем в «Началах» Евклида была полностью завершена грандиозная программа аксиоматизации геометрии. Фактически абстрактная математика – это отчасти эмпирическое исследование некоторых аспектов природного мира, точнее той его части, которая отражается в определённой коммуникативной деятельности сообщества математиков по созданию новых форм, позволяющей оперировать ими с помощью созданных идеальных объектов. Почему, имея перед собой выдающийся образец дедуктивного-аксиоматического изложения геометрии, воплощённый в «Началах» Евклида, в котором, даже несмотря на некоторые его недостатки, математики приблизительно до конца XVIII века видели в этих книгах идеал и образец математической строгости, они так и не смогли в итоге аксиоматически обосновать арифметику натуральных чисел? Возможно, потому, что геометрические понятия и аксиомы в то время воспринимались интуитивно и, по существу, намного легче, чем сами понятия арифметики. Заметим, что в философии математики преобладает тенденция сблизить формальную составляющую с содержательным математическим знанием, что нашло наиболее полную и адекватную реализацию в математическом и логическом построении «Начал» древнегреческого математика Евклида.

Указанная потребность способствовала постановке в философии математики фундаментальной проблемы: действительно ли формальные аксиоматические системы теории множеств являются достаточно общими конструкциями, чтобы охватить всю математическую интуицию, которая в определённом смысле не совпадает с множеством формализованных выражений, выдаваемых за её отражение? Во-первых, аксиоматический подход с точки зрения достоверности математического знания на протяжении многих веков опирался на труды Евклида. Во-вторых, в своих комментариях к книгам Евклида математик и методолог Д.Д. Мордухай-Болтовской отмечал: «Евклид не задавался целью вывести все свои положения силлогистически из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом. Его целью было лишь убедить читателя в определённых истинах, и он не считал единственным способом убеждения формально логический вывод положений из признанных читателем в начале изложения истин, но считал, что убедить можно специальной операцией, вызывая в уме образ с непосредственно очевидным свойством» [3, с. 237]. Заметим, что как переводчик «Начал» Д.Д. Мордухай-Болтовской помещал ещё свои добавления к тексту, которые считал необходимыми для понимания иногда «слишком сжатого» текста Евклида.

Кроме того, ни одна из формальных систем не адекватна тому представлению «науки о бесконечном», которого придерживаются математики. Даже Евклиду оказалось не по силам разобраться в философской сущности понятия бесконечности, что косвенно подтверждается полным отсутствием этого понятия во всех тринадцати книгах его «Начал». А как это соотносится с тем, что реальность не ограничена пределами математического мышления? Следует подчеркнуть, что «живая» математическая наука начинается не с оснований или принципов, а с непосредственно проверяемых утверждений, когда мы не знаем, а только догадываемся. Но мы можем превращать наши догадки в объекты критики или совершенствовать их. Не умаляя заслуг Евклида, необходимо сделать следующее критическое замечание. Хотя его геометрический метод изложения оказал значительное влияние на философско-математическую мысль, Евклиду было не по силам разобраться в понятии математической бесконечности. Например, есть по крайней мере более 350 различных доказательств теоремы Пифагора, но есть ещё одна знаменитая теорема, которая моложе теоремы Пифагора на 200 лет. Она была сформулирована и доказана Евклидом в книге «Начала». Формулировка этой теоремы предельно проста: «Множество простых чисел бесконечно». Доказательство Евклида хорошо известно современным школьникам, его суть состоит в том, что при предположении конечности множества простых чисел строится некоторое новое число, которое не делится ни на одно из взятых простых чисел, т. е. является неучтённым простым числом. Но сам Евклид в формулировке своей знаменитой теоремы о том, что простых чисел бесконечно много, по существу, опасался использовать бесконечные множества.

Тем не менее можно с уверенностью утверждать, что современные точные науки «выросли» из «Начал» Евклида, который систематизировал и изложил в строгой дедуктивной манере достижения древнегреческих математиков, но до него ещё несколько учёных Античности написали свои «Начала», о содержании которых практически ничего неизвестно. В частности, I–IV книги, где излагается планиметрия, представляют собой обработку «Начал» Гиппократа Хиосского, V книга посвящена теории пропорций геометрических величин, в VI книге рассматривается теория подобия, а в XII книге – круглые тела, и это является обработкой сочинений Евдокса Книдского, VII-IX книги – это теория чисел и числовых пропорций, и XI книга – это основы стереометрии, которые написаны на основе работ Архита Тарентского. Наконец, X книга, посвящённая теории иррациональных величин, и XIII книга, описывающая правильные многогранники, содержат результаты Теэтета Афинского. Хотя в те времена чёткого представления о геометрии не было, начиная с Евклида аксиоматический метод построения геометрии стал образцом «отточенности научной мысли». Говоря о проблеме аксиоматизации в «Началах» Евклида, Герман Вейль профессионально заметил: «В силу интуитивной очевидности геометрических принципов и неестественности чисто логически-дедуктивного метода стоило больших трудов полностью выявлять все геометрические аксиомы» [4, с. 49]. Следует подчеркнуть, что «Начала» Евклида нельзя трактовать только как практически первый учебник по элементарной геометрии, поскольку это ещё и выдающийся образец обоснования математического метода исследования. Ведь только с возникновением «Начал» Евклида, которые представили математику в системной форме на основе применения аксиоматического метода, математика приобрела тот научный статус, который отличает её от всех достижений предшественников, включая «раннегреческих математиков», став классическим образцом рационального математического творчества в представлении научного знания.

Анализируя своих представления о математике, Платон пришёл к выводу, что существуют два мира: мир идей, т. е. строгий, упорядоченный и гармоничный мир, и мир вещей, пусть и несовершенный, неточный и хаотичный. Принято считать, что платонизм это именно тот взгляд, которого подсознательно придерживается большинство работающих математиков, не занимающихся профессионально вопросами обоснования. В соответствии с философским учением Платона каждую реальную вещь можно интерпретировать как приближенную реализацию «идеи». А поскольку философские идеи, по существу, даже реальнее действительности, то эти представления стали методологической основой его учения, а благодаря такому философскому мировоззрению математические конструкции тоже стали, по существу, рассматриваться реальнее действительности. Если говорить о методике преподавания современной математики, то античный образец «Начал» Евклида представляет собой удивительный феномен.

С одной стороны, как говорил знаменитый математик прошлого века Соломон Бохнер, книга Евклида — это «кошмар» для современных ему теоретиков и практиков педагогики. В ней нет мотивировок и обсуждений результатов, а есть только сухой и формальный текст, состоящий из аксиом и определений, лемм и теорем без упоминания хоть каких-нибудь содержательных примеров из физики, экономики или общественной жизни. С другой стороны, «Начала» Евклида живут уже почти два с половиной тысячелетия и не собираются умирать, хотя современные школьные учебники по геометрии «тест на долголетие» не прошли.

Если Платон первым применил дедуктивный метод, а Аристотель его в дальнейшем хорошо логически разработал, то способ доказательства, которым пользовался в математике Евклид, также построен по уже известному методологическому образцу. Даже сама форма изложения в «Началах» соответствует аристотелевским принципам построения науки. Несмотря на то, что арифметика у Платона «первее» геометрии, именно геометрию Евклид считает «самой математической» из всех математических дисциплин. «Таким образом, «Начала» Евклида – не что иное, как «азбука» всякой математической эпистемы или даже вообще всякой эпистемы – если вслед за Платоном не рассматривать других специальных эпистем, кроме математических» [5, с. 139]. Хотя Платон предполагал, что математические теории существуют во вневременном смысле, для Евклида математика является единственной эпистемой, в рамках которой она имеет ещё и общефилософский характер. В объяснении законов природы постулируются универсалии, понимаемые как реальные абстрактные сущности, но это явно недействующая причинность. Поэтому платонизм, провозглашающий существование аксиом, математических объектов и структур, философски не может быть опровергнут. Но работающие математики не связывают понятие математической истины только лишь с аксиомами, хотя убедительность теорем, даже если математические объекты гипотетически не самостоятельны, обусловлена приемлемостью абстрактных систем изначальных утверждений, поэтому такой состоявшийся идеал математической теории иногда называют «квазиевклидовским».

Согласно евклидовскому идеалу математической теории, она начинается с проверки истинности некоторой системы исходных положений, или аксиом, из которой вытекает истинность остальных, дедуктивно выводимых новых утверждений. Хотя система аксиом Евклида была изначально содержательной, у математиков возникла потребность доказательства её непротиворечивости, чтобы удостовериться в том, что «тривиально истинные аксиомы» не противоречат друг другу. Кроме аксиом как косвенных определений, Евклид использовал явные определения, которые психологически стимулировали воображение. В процессе решения проблемы о независимости пятого постулата Евклида от остальных постулатов его геометрии русскому математику Николаю Лобачевскому открылась идея о том, что его невозможно доказать на основе остальных аксиом Евклида и что известные доказательства являются только объяснениями. Поэтому он взял в качестве своего постулата одно из утверждений, получаемых в результате отрицания утверждения Евклида, а немецкий математик Бернхард Риман выбрал уже другое утверждение. Ими были построены формальные аксиоматические структуры, выступавшие реализацией аксиоматического метода. Кроме того, с точки зрения современной математики изложение «Начал» Евклида является недостаточно обоснованным. Основным недостатком аксиоматики Евклида считают её неполноту, отсутствие аксиом непрерывности, движения и порядка, отчего Евклиду приходилось апеллировать к интуиции. Заметим, что выработка системы аксиом содержательной теории – это очень долгий и кропотливый процесс, включающий систематизацию, уточнение и исключение лишних либо, наоборот, обнаружение недостающих минимальных первоначальных фактов. Впервые такая редукция, или «тривиализация», была осуществлена в «Началах» Евклида, а затем уже в середине XIX века – в работах немецких математиков Карла Вейерштрасса и Рихарда Дедекинда по арифметизации анализа.

В итоге колоссальную работу по усовершенствованию и завершению построения аксиоматики евклидовой геометрии проделал великий немецкий математик Давид Гильберт, доказавший, что система аксиом геометрии Евклида является неполной. Успешно осуществив формализацию евклидовой геометрии, Гильберт ещё показал, что дедуктивно-аксиоматическое построение этой геометрической теории требует не пяти известных оригинальных аксиом Евклида, а введения двадцати аксиом. Тем не менее можно без преувеличения сказать, что все школьные курсы геометрии испытывают на себе влияние «Начал» Евклида или непосредственно, или через промежуточные звенья изложения. Геометрию изучали по Евклиду в течение двух с половиной тысячелетий, но в последнее столетие в связи с многочисленными реформами школьного математического образования «Начала» Евклида уже не играют прежней методологической роли стабильного школьного руководства. В контексте современного образования следует отметить, что Евклид занимался эвристикой. «Но в книгах «Элементов» следов эвристики не видно – по крайней мере, их не сумели разглядеть совсем не равнодушные к ценности этого сочинения люди» [6, с. 141]. Несмотря на то, что античная арифметика не знала отрицательных чисел и понятие рационального числа она заменяла понятием отношения, теоретические работы по элементарной математике в качестве своего источника, а в ряде случаев и образца имеют «Начала» Евклида. Открытие несоизмеримости нанесло тяжёлый удар по античной математике, но одновременно и стимулировало её дальнейшее развитие, и если начиная с Пифагора математические доказательства становятся надёжным способом аргументации и обретения истины в геометрии, то уже начиная с Евклида именно аксиоматический метод построения геометрии является образцом обоснованности математической мысли. Одновременно с разработкой аксиоматического метода в математике развивались также методы перехода от одних истинных утверждений к другим, при построении цепочки рассуждений, в которой математическая мысль движется дедуктивно.

Математическое доказательство позволяет иногда «формулировать новые языковые правила, когда сложные задачи не поддаются обобщению на них старых методов или проведению аналогий, игнорирующих качественные различия. Доказательства... влияют на использование языка, поскольку создают новые языковые правила» [7, с. 63]. Например, доказательство основной теоремы алгебры связано с созданием нового исчисления, поскольку формальное доказательство этой теоремы зависело ещё и от введения содержательной теории комплексных чисел. Поэтому наряду с достоинствами аксиоматического метода следует указать и на присущие ему ограничения. Во-первых, в аксиоматику могут быть введены логически не обоснованные исходные понятия, что может привести к недоразумениям и ошибкам. Во-вторых, аксиоматика раскрывает сущность понятий с вполне определённой, точнее формальной, стороны. В-третьих, несмотря на востребованность аксиоматического метода, в силу принципа неполноты формальной системы, невозможно построить всеобщую аксиоматическую систему математики, т. е. этот метод должен применяться в единстве с содержательными методами исследования. Заметим, что лишь в XVII веке Исааком Ньютоном в его грандиозном труде «Математические начала натуральной философии» была сделана дерзновенная попытка дать построение механики на основе аксиоматического метода по образцу «Начал» Евклида как строгого рационального способа построения. С этой точки зрения, если реальные методологические установки отделять от теоретических доказательств, то, не абсолютизируя эту ситуацию, можно говорить о некоторой «расчленённости» методологии и доказательства.

Безусловно, надо уметь отличать предметное содержание книги и способ преподавания этого предмета с точки зрения передачи и сохранения знания. «Надо различать книгу, излагающую предмет, и способ преподавания этого предмета. Вавилонские математические тексты были по существу задачниками с приведёнными решениями. Этот стиль преподавания жив до сих пор. Однако ни один такой решебник по долголетнему влиянию на математику и культуру в целом с «Началами» Евклида сравниться не может» [8, с. 4]. В современных условиях задачный стиль преподавания математики необычайно востребован. Однако следует отметить, что ни один «математический решебник» не может пока сравниться по долголетнему влиянию на математическую культуру с «Началами» Евклида, который в III веке до н. э. предпринял первую попытку охватить единым трактатом всю математику, а вторая попытка, на которую решились математики группы Бурбаки в трактате «Начала математики», была сделана лишь в XX веке. Лишённый примет времени стиль «Начал» Евклида отличается чёткостью, доказательностью и последовательностью изложения, раскрывая внутреннюю красоту и гармонию математики. Такой способ изложения математики вовсе не исключает творческий поиск преподавателей математики. Стиль Евклида опирается на творчество, требуя поиска путей к пробуждению интереса к математике, пониманию её места в науке и выработке навыков по применению математики ещё и в практических задачах. Хотя чрезмерное подчёркивание дедуктивно-аксиоматического характера математики, с точки зрения преподавания математики, не всегда представляется целесообразным, так как интуитивное начало и конструктивное творчество с трудом укладываются в философско-математические формулировки очень сложных абстрактных объектов.

Так что позволяет математикам говорить о философских проблемах абстрактных математических понятий в контексте единства современного математического знания и проблемы обоснования математических теорий? Почему в «Началах» Евклида геометрия строится аксиоматически, а арифметика нет? Наверное, потому, что до второй половины XIX века обоснование основных алгоритмов и утверждений арифметики можно было осуществить без её аксиоматизации, а разработка алгоритмов геометрии Евклида потребовала аксиоматизации последней. Следует заметить, что алгоритмы существуют в математике с момента её возникновения как правила сложения и умножения чисел, как геометрические решения задач на построение, даже использование вещественного числа в вычислительной практике сводится к алгоритму. Примером известного алгоритма является алгоритм Евклида для разыскания наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Долгое время не было сомнений и насчёт функций. Считалось, что они либо аналитическое выражение, либо непрерывная кривая, пока эти представления не были опровергнуты. Практически никто не замечал аналогий между функцией и последовательностью, основанной на идее бесконечного продолжения элементов. Но больше всего расхождений в математике конца XVII–XVIII веков было по поводу определений предела и понятий бесконечно малых величин. По существу, это важнейшие философские проблемы не столько гносеологии математического знания, сколько онтологии математики. Так, определение непрерывности функции на «языке эпсилондельта», несмотря на его эффективность при математическом доказательстве непрерывности отображений, весьма далеко от интуитивного представления о непрерывной кривой как «состоящей из одного куска». Дедуктивная составляющая математики, включающая рассуждения и доказательства, и алгоритмическая составляющая, связанная с вычислениями и методами решения задач, как дополнительные понятия всегда присутствовали в математической теории на всех этапах её развития. В истории математики выделяются периоды, когда предпочтение отдавалось то методам вычисления, то проблемам обоснования. Новой базой обоснования математики стала теория множеств, хотя она и не представляет собой онтологического оправдания как универсальной философско-методологической концепции аргументации математических истин. Следует отметить три значительных открытия, которые Евклид сделал в арифметике. Во-первых, он сформулировал, хотя и без доказательства, теорему о делении с остатком; во-вторых, придумал «алгоритм Евклида», который способен быстро находить наибольший общий делитель или даже общую меру соизмеримых отрезков; в-третьих, он впервые начал изучать свойства простых чисел и, в частности, доказал, что множество таких чисел бесконечно. Но, говоря о значении математики для философии в целом и философии науки в частности, нельзя не отметить, что это связывают с евклидовой геометрией и затем уже с нестандартным фактом открытия неевклидовой геометрии.

2. Заключение

Не будет преувеличением сказать, что «Начала» Евклида, написанные в соответствии с требованиями, предъявляемыми к доказательной науке того времени, явились первым вариантом обоснования математики и первым образцом системного подхода, который сейчас стал предметом математических исследований. Евклид, знакомый с работами пифагорейцев, стремясь найти выход из кризиса, попытался сформулировать надёжные основы всей геометрии, и его труд «Начала» стал настолько совершенным, что был превзойдён лишь в конце XIX века. Этот опыт математического познания показывает, что математика как особый вид интеллектуальной человеческой деятельности отражает процессы реальности. С точки зрения математического образования главной трудностью является решение задач, поэтому труд Евклида можно ещё рассматривать как «методологический прорыв», позволивший раскрыть сущность геометрии с помощью удобных задач. Овладение идеями евклидовой геометрии и её способами мышления полезно не в меньшей степени чем овладение алгебраическими методами. Существенное отличие современной математики от «евклидианской математики» проявляется в понятиях алгебраической, порядковой и топологической структур. Историческое значение «Начал» Евклида заключается в том, что впервые была сделана попытка построения геометрии на основе аксиоматики, а затем одной из центральных проблем при использовании аксиоматического метода стало доказательство полноты системы аксиом. По существу, «Начала» Евклида стали важнейшим источником новой организации математического знания, а именно с помощью определения вводился математический объект, с помощью теорем формулировались свойства такого объекта и его взаимосвязи с другими математическими объектами, а с помощью доказательств обосновывалась убедительность утверждений. «Начала» Евклида зафиксировали в истории математики «эпохальный переворот», введя в математическое познание дедукцию, и продемонстрировали реальные возможности эффективности аксиоматического метода, который впервые был практически задокументирован в Древней Элладе. Кроме того, на протяжении дальнейшего развития науки именно математика воспринималась как образец научного знания благодаря непревзойдённой строгости «Начал» Евклида, однако этому образцу не столько буквально следовали, сколько его провозглашали. В знаменитую эллинскую эпоху становления теоретической науки геометрия, как и философия, была фактически важнейшей областью чистого знания. Но в чём заключается теоретическое значение «Начал» Евклида? Во-первых, в том, что наряду с теоретическими основами геометрии в них рассматривались и другие области античной математики древних греков. Во-вторых, в них впервые было теоретически систематизировано и показано, как из изначально простых аксиом, определений и постулатов дедуктивно выводятся математические теоремы и утверждения. В-третьих, то, что было доказательством для Евклида, остаётся доказательством и в современной математике. Академик А.Д. Александров считал, что пафос современной математики проявляется в том, что сейчас опять происходит возврат к древним грекам, а его любимый лозунг по-современному звучит так: «Назад к Евклиду!». Пусть нас в дальнейшем ожидают важные математические открытия, превосходящие самые смелые предположения, но навсегда останется вера в то, что чистый, незамысловатый идеал математического познания – это тот первый шаг, который сделал Евклид и с которого начался бесконечный и прекрасный путь в понимании всего великолепия математического знания.

Литература

1. Успенский В. Аксиомы Евклида // Предисловие к математике. СПб. : Амфора, 2015. С. 303–309.
2. Хлебалин А.В. Истинность аксиоматизации геометрии: определения у Евклида и Фреге // Schole. Философское антиковедение и классическая традиция. 2016. Т. 10, № 2. С. 402–408.
3. Мордухай–Болтовской Д.Д. Комментарии к книгам I–VI «Начал Евклида» // Начала Евклида. Книги I–VI. М.; Л. : ГИТТЛ, 1950. С. 221–446.
4. Вейль Г. О философии математики. 2-е изд., стер. М. : КомКнига, 2005. 128 с.
5. Родин А.В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. М. : Наука, 2003. 211 с.
6. Шеховцов С.Г. Эвристика Евклида // Школьные технологии. 2010. № 2. С. 141–149.
7. Еровенко-Риттер В.А. «Терапевтическая функция» философии математики Л. Витгенштейна в интеллектуальной рефлексии университетского образования // Идея университета: парадоксы самоописания: сб. материалов III Междунар. науч.-практ. конф. «Университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению» (29–30 апреля 2002 г., Минск). Минск : БГУ, 2002. С. 61–71.
8. Кутателадзе С.С. Стиль Евклида и «бурбакизм» // Препринт № 154. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2005. 17 с.

"BEGINNINGS" OF EUCLID IN THE WORLDVIEW ASPECT OF MODERN PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

V.A. Erovenko[1]
Dr.Sc. (Mathematics), Professor, e-mail: erovenko@bsu.by
N.V. Michailova[2]
Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, e-mail: : n.mikhajlova@bsuir.by

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Information Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk, Belarus

Abstract. The article is devoted to the philosophical and historical analysis of Euclidean mathematics, attracting constant attention in view of the search for the answer to a question about why the ancient Greeks were not satisfied with empirical knowledge and computational recipes having at their disposal and had developed and perfected a deductive system of proofs, which became the main method in mathematics.

Keywords: Euclid's "Elements", deductive and axiomatic method, philosophy of mathematics.

Дата поступления в редакцию: 27.01.2023