Б. А. Лифшиц

О финальных характеристиках в стационарных моделях

Европейский университет в Санкт-Петербурге;
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Стохастика давно служит определяющей составляющей нескольких направлений в техническом образовании. Знакомство с вероятностным описанием переменных естественным образом расширяет возможности выпускников университета в различных областях современной инженерии.*

Ключевые слова: устойчивость; стационарные системы; теория возмущений; задача рассеяния; стохастический анализ; процессы Маркова; слабая зависимость

Стационарные системы и функционалы.

Стохастическое исчисление справедливо рассматривается в качестве основы многих инженерных и смежных с ними дисциплин, в особенности при исследовании разнообразных задач прогнозирования. Центральную роль в приложениях играет изучение функционалов, определяемых текущим состоянием процесса, или, в более общем случае, всей его траекторией,

$$\xi = g_s(X_s) \qquad \text{или} \qquad \eta = \Phi(X), \quad X = \{X_t\}, t \in T$$

− в соответствии с зафиксированными функциями g или Φ.

В пионерской работе [1] А.А.Марковым введен и исследован в первых примерах названный впоследствии его именем важный класс случайных процессов. Марковская простейшая однородная последовательность с матрицей переходов

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{pmatrix}$$

задает, вместе с инвариантным начальным распределением вероятностей $\pi = (p, 1-p)$ стационарный случайный процесс

$$X = \{X_t\}, \ t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Если все элементы матрицы Q отличны от нуля, то инвариантное распределение π единственно и может быть найдено как предел быстро сходящейся последовательности $\pi_n = \pi_0 Q^n$, $n \to \infty$, при произвольном выборе начального распределения вероятностей π_0. При этом, скорость сходимости Q^n к пределу определяется вторым собственным числом матрицы Q (первое собственное число равно 1):

$$\mathrm{var}(\pi_0 Q^n - \pi) \le C\delta^n, \ \left\| Q^n f - f_\infty \right\| \le C \| f \| \delta^n, \ \delta = | p_1 - p_2 |.$$

Функция $f_n = Q^n f$ позволяет вычислять прогнозы, причем предельное значение f_∞ оказывается равным постоянной функции:

$$\mathbf{E}\{ f(X_{t+n}) | X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, ... \} = f_n(X_t); \qquad f_\infty = const = \mathbf{E} f(X_k) = \pi f \ .$$

Похожие утверждения оказались справедливы для широкого класса марковских процессов. Дальнейший прогресс связан с расширением класса рассматриваемых функционалов и исследованием стационарных систем, не обязательно марковских, но близких к ним в определенном смысле [2−11]. Опишем общую постановку интересующей нас задачи, несколько выходящую за рамки стохастического анализа. Ограничимся здесь изучением стационарных последовательностей в гильбертовом пространстве **H**.

Пусть U − унитарный оператор в **H**; H_+ и H^- − замкнутые подпространства, инвариантные относительно U и U^{-1} соответственно; E_+, E^- − соответствующие ортогональные проекторы. Нам будут интересны убывающие (возрастающие) семейства подпространств и ортогональных проекторов:

$$\mathrm{H}_s = U^s \mathrm{H}_+,\ \mathrm{H}^t = U^t \mathrm{H}^-,\ E_s = U^s E_+ U^{-s},\ E^t = U^t E^- U^{-t}.$$

Убывающие семейства H_s, E_s в математической *теории рассеяния* обычно называются уходящими, возрастающие семейства H^t, E^t − приходящими. При исследовании *стохастических* систем в качестве приходящих пространств рассматривают пространства случайных величин, порожденные прошлым процесса ***X***, то есть величинами X_u, $u \le t$, а в качестве уходящих пространств − пространства, порожденные будущим процесса, то есть величинами X_u, $u \ge s$. Соответствующие проекторы оказываются условными математическими ожиданиями − операторами прогнозирования. Будем считать выполненными следующие естественные условия:

$$E_s \downarrow 0,\quad E_{-s} \uparrow I,\quad E^t \uparrow I \quad E^{-t} \downarrow 0,\quad \text{когда } s \uparrow +\infty,\ t \uparrow +\infty.$$

Таким образом, по своим свойствам операторно-значные переменные E_{-s}, E^t похожи на обычные функции распределения случайных величин. Нас будет интересовать, в первую очередь, аккуратность, с которой выполняются указанные соотношения, точнее − скорость сходимости к нулю погрешностей

$$E_s f - 0,\ E_{-s} f - f,\ E^t f - f,\ E^{-t} f - 0$$

для функционалов f, принадлежащих тому или иному специально выделенному классу. Далее мы изучим первую из этих величин, определив, следуя [6], сжимающие операторы

$$V^k = U^{-k} E_k,\ Q = B_1 = VE^0,\ B_n = V^n E^{n-1} = B_1 U^{1-n},\ S_n = B_n - V^n = V^n (I - E^{n-1})$$

и соответствующие производящие функции

$$V(\mu) = I + \sum_{k\ge1} \mu^k V^k,\quad S(\lambda) = \sum_{k\ge1} \lambda^k S_k,\quad B(\lambda) = \sum_{k\ge1} \lambda^k B_k,\quad Q(\mu) = I + \sum_{k\ge1} \mu^k Q^k.$$

Выписанные степенные ряды заведомо сходятся внутри единичного круга − их коэффициенты по норме не превосходят 1. Сходимость ряда $V(\mu) f$ в круге большего радиуса означала бы соответствующее экспоненциальное убывание величин $\left\| V^k f \right\|$.

Марковские системы.

Рассмотрим сперва случай, когда при $t \ge 0$ пространства H_s, H^{t+s} расположены "правильно" – проекторы E_s, E^{t+s} перестановочны, $\Delta_s^t = E_s E^{s+t} - E^{s+t} E_s = 0$.

В теории вероятностей такое равенство выполнено для марковских процессов и последовательностей, в математической теории рассеяния – для систем, рассмотренных П.Лаксом, и Р.Филлипсом [12]. При таком упрощающем предположении

$S_n V^k = U^{-n} E_n (E^{n-1} - I) U^{-k} E_k = S_{n+k}$, так что $S(\lambda)(V(\mu) - I) = \tilde{S}(\lambda,\mu) \equiv \sum_{k\ge1, n\ge1} S_{n+k} \lambda^n \mu^k$.

Сравнивая коэффициенты при μ^1, обнаруживаем что $Q(\lambda)(1 - S(\lambda)) = V(\lambda)$.

Если известно, что функция $Q(\mu)$ аналитична внутри круга радиуса $R>1$, а функцционал f достаточно хорошо аппроксимируется прошлым, $R^k \|S_k f\| \to 0$, то $\alpha^k \|V^k f\| \to 0$, при любом $\alpha < R$.

Замечание 1. В рассмотренном (марковском) случае основное соотношение между производящими функциями $Q(\lambda), S(\lambda), V(\lambda)$ можно легко получить из "однопараметрической" формулы $S_n V^1 = S_{n+1}$ непосредственно, без использования второй переменной, вычисляя свертку $\{Q^k\} * \{S_k\}$

Замечание 2. Если функционал f аппроксимируется прошлым без погрешности, $S(\lambda) f \equiv 0$, то производящие функции $Q(\lambda) f$, $V(\lambda) f$ совпадают и их соответствующие коэффициенты $Q^k f$, $V^k f$ тоже совпадают. Во многих случаях естественно ожидать, что $\|Q\| < 1$, однако $\|V^k\| \equiv 1$ даже в простейших примерах. Последовательность $\{V^k f\}$ будем считать возмущением последовательности $\{Q^k f\}$.

Системы, близкие к марковским.

Обратимся теперь, следуя [6], к случаю, когда при $t \ge 0$ пространства H_s, H^{t+s} расположены "почти правильно" – проекторы E_s, E^t не обязательно перестановочны, однако с ростом t допустимая "неправильность" быстро убывает:

$$r(t) = \|\Delta_s^{s+t}\| = \|E_s E^{s+t} - E^{s+t} E_s\| < Cr^t \quad \text{при некотором } r < 1.$$

Теорема. Пусть $\|Q\| = \rho < 1$, $r(t) < Cr^t$, $\beta^k \|S_k f\| \to 0$, причем $0 < 1/\beta < r < 1$.

Тогда $\alpha^k \|V^k f\| < L$ при некоторых $\alpha > 1$, $L < \infty$.

Используем производящие функции $\mathrm{K}(\lambda) = \sum_{k \ge 1} \lambda^k V^k \Delta_0^{k-1}$, $U^-(\mu) = \sum_{k \ge 1} \mu^k U^{-k}$.

Как и в марковском случае, получаются соотношения, восходящие к работам [2], [6]:

$$S_k V^n = S_{n+k} + V^{n+k} \Delta_n^{n+k-1} = S_{n+k} + V^k \Delta_0^{k-1} U^{-n}; \qquad S(\lambda)(V(\mu) - I) = \tilde{S}(\lambda, \mu) + \mathrm{K}(\lambda) U^-(\mu).$$

Радиус сходимости степенного ряда $Q(\mu)$ не меньше, чем $1/\rho$. Функция $\tilde{S}(\lambda, \mu) f$ оказывается аналитической в области $|\lambda| < \beta$, $|\mu| < \beta$. Можно обосновать аналогичное утверждение об аналитичности величин $S(\lambda) V(\mu) f$, $\lambda S_1 V(\mu) f$ в надлежащей зоне. Остается заметить, что $Q - V^1 = S_1$ и поэтому

$$(I - \mu Q) V(\mu) f = (I - \mu V^1) V(\mu) f - \mu S_1 V(\mu) f = I + \mu S_1 V(\mu) f.$$

Умножив левое выражение на $Q(\mu)$, устанавливаем аналитичность $V(\mu) f$ в круге, радиус которого строго больше 1. Показатель α, определяющий скорость убывания $\|V^k f\|$, зависит от значений параметров r, β, ρ.

Многие функционалы в стационарных моделях могут быть исследованы подобным образом. В качестве важных и давно изучаемых примеров можно указать разумно определенные интегральные характеристики процессов – в частности, времена пребывания процесса в тех или иных зонах.

Список литературы:

1. Марков А.А. Исследование замечательного случая зависимых испытаний. Изв. Акад. Наук, СПб., сер VI, т.1, 1907:3, 61–80.
2. Кузьмин Р.О. Об одной задаче Гаусса. Докл. АН СССР, 1928, 375–380.

3. Lévy P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. Bulletin de la Societé mathématique de France, 1929, v57, 178–194.

4. Doeblin W., Fortet R. Sur des chaînes à liaisons complètes. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 65 (1937), pp. 132–148.

5. Ибрагимов И.А. Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов. Теория вероятн. и ее примен., 7:4 (1962), 361–392.

6. Гордин М.И., Экспоненциально быстрое перемешивание. Докл. АН СССР, 196:6 (1971), 1255–1258.

7. Lasota A., Yorke J. On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations. Transactions of the American Mathematical Society, v.186, 1973:12, 481–488.

8. Wirsing E. On the theorem of Gauss-Kusmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces. Acta Arithmetica, 1974, v.24, 507–528.

9. Ruelle D. Dynamical zeta functions for maps of the interval. Bull. Amer. Math. Soc., 30 (1994), 212-214.

10. Гордин М.И. О Дёблине и о работе Дёблина-Форте. Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, т.441, 13–16.

11. Гордин М.И. Некоторые результаты теории стационарных случайных процессов. Ленинград, 1970, 1-175, https://viewer.rsl.ru/ru/rsl01009972593.

12. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Москва: Мир, 1971.

B. A. Lifshits

Stationary Models and Limit Characteristics

European University at St. Petersburg;
Saint Petersburg Electrotechnical University, Russia

Abstract. *The mixing rate and scattering characteristics are naturally explored in terms of stability principles and perturbation theory.*

Keywords: stability; stationary processes; perturbations; scattering; rapid mixing; Markov models; stochastic calculus