

FRACTAL ANALYSIS OF DETERMINISTIC ECONOMIC PROCESSES

The article proposes to consider exchange rates of currencies as a Weierstrass — Mandelbrot function with fractal properties. In this case, the fractal dimension of the exchange rate dynamics calculated from the Fourier spectrum of this function can serve as an indirect measure of the degree of disequilibrium of economic conditions. Fractal dimension is considered as an indicator of economic processes and an exchange forecasting tool.

Keywords: exchange rates; mathematical modeling; Weierstrass — Mandelbrot function; Fourier spectrum; fractal analysis.

O. С. Киселевский
БГУИР (Минск)

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В статье предлагается рассматривать биржевые курсы валют как обладающую фрактальными свойствами функцию Вейерштрасса — Мандельброта. В этом случае рассчитанная из Фурье-спектра этой функции фрактальная размерность динамики курса может служить косвенной мерой степени неравновесности экономических условий. Фрактальная размерность рассматривается как индикатор экономических процессов и инструмент прогнозирования биржи.

Ключевые слова: курсы валют; математическое моделирование; функция Вейерштрасса — Мандельброта; Фурье-спектр; фрактальный анализ.

Одной из современных задач цифровой экономики является разработка инструментов эконометрического анализа с целью мониторинга экономических систем, прогнозирования их поведения, принятия управленческих решений [1]. Регулярного обновления

существующих подходов и математических моделей требует проблема анализа природы ценообразования на фондовых рынках. Успех той или иной модели определяется ее ограничениями и эффективностью в отношении краткосрочных и долгосрочных прогнозов. Наиболее востребованными являются модели, которые позволяют оперативно и с высокой достоверностью выявить зарождающиеся тенденции биржевого курса. Кроме того, немаловажно, чтобы предоставляемый аналитической моделью количественный параметр однозначно трактовался и обладал очевидным физическим смыслом.

На протяжении двух последних десятилетий в качестве перспективного метода анализа диссипативных систем и процессов выделяют фрактальный анализ. Известно, что понятие фрактала сформулировано в конце 1970-х гг. Бенуа Мандельбротом. Используется это понятие для моделирования и исследования самоподобных структур и процессов, протекающих в неравновесных условиях. Бенуа Мандельброт также является соавтором научных трудов [2], посвященных фрактальному анализу временных рядов, в том числе графиков биржевых курсов.

Согласно сложившимся на данный момент представлениям, фрактальные свойства рынка постулируют детерминированность будущих цен прошлыми изменениями. На данный момент доказанными и общепринятыми являются следующие свойства фракталов в их экономическом приложении:

- рыночные диаграммы описываются функцией Вейерштрасса — Мандельброта и обладают фрактальной размерностью. Фрактальная размерность рыночной диаграммы D заключается в диапазоне от 1 до 2;
- рыночные диаграммы обладают свойством масштабной инвариантности. Разные временные интервалы масштабно самоподобны;
- рыночные фракталы обладают «памятью» и детерминированы «начальными условиями».

Свойства масштабной инвариантности и детерминированности рыночного процесса связывают с количественным параметром — фрактальной размерностью временного ряда D . При вычислении этого параметра чаще всего прибегают к R/S -методу [3], который заключается в исследовании соотношения размаха ряда R к стандартному отклонению S и вычислению на основании этого соотношения параметра Херста H .

В данной работе мы предлагаем для вычисления фрактальной размерности финансовых рядов использовать способ быстрого преобразования Фурье, также применяющийся для исследования функции Вейерштрасса — Мандельброта. Кроме того, рекомендуем рассматривать рыночные диаграммы детерминированными не только начальными, но и внешними условиями. Саму же фрактальную размерность ряда, а также ее изменения мы предлагаем рассматривать как косвенную количественную меру степени неравновесности условий рынка.

Методика математического анализа. Ранее автором данной статьи было опубликовано детальное исследование [4] зависимости размерности D функции Вейерштрасса — Мандельброта от показателя α крутизны ее частотного спектра мощности $G(f)$

$$G(f) = k / f^\alpha = k / f^{2H+1}, \quad (1)$$

где α — коэффициент наклона графика зависимости спектра мощности функции Вейерштрасса — Мандельброта $G(f)$, построенного в логарифмических координатах; H — параметр Херста.

На основании многочисленных численных экспериментов показано, что коэффициент α находится в следующей зависимости с фрактальной размерностью D функции Вейерштрасса — Мандельброта:

$$D = 2 \exp\left(-\frac{2\alpha}{3}\right) + 1. \quad (2)$$

В работе [5] предлагается рассматривать фрактальную размерность случайных диссипативных процессов и явлений как косвенную меру степени неравновесности условий, в которых эти процессы протекают. Изменения степени неравновесности условий закономерно приводят к новой самоорганизации процесса с новым фрактальным параметром.

Эксперимент. В данной статье предлагается продемонстрировать справедливость этих двух утверждений в отношении биржевых финансовых рядов. В качестве объекта исследований выбран курс доллара США к российскому рублю в период сильной нестабильности в марте 2020 г. Нестабильность биржевого курса валют в выбранный период была обусловлена непрогнозируемыми мерами правительства по предотвращению эпидемиологической ситуации, связанной с пандемией вируса SARS-CoV-2. В качестве данных использована открытая информация фондовой биржи Forex (рис. 1). На графике заметны два характерных участка:

- участок относительной стабильности курса (с начала месяца по 9 марта);
- участок неравновесности, со значительно большими амплитудами колебаний (с 9 марта до конца месяца).



Рис. 1. Курс доллара США к российскому рублю в период с 1 по 31 марта 2020 г.

Источники: разработано авторами.

Если рассматривать этот график как функцию Вейерштрасса — Мандельброта, то ее Фурье-спектр мощности выражается графиком, показанным на рис. 2, а. Коэффициент наклона графика линейной корреляции этого графика составляет $\alpha = 4,2$ в доверительном интервале $\pm 1,2$, что соответствует фрактальной размерности $D = 1,19 \pm 0,18$.

Детальное исследование функции Вейерштрасса — Мандельброта на ее локальных участках: 1 — с 4 по 6 марта, 2 — с 9 по 12 марта и 3 — с 26 по 31 марта 2020 г. (рис. 3) позволило выявить динамику изменения ее спектра мощности и, соответственно, фрактальной размерности D .

Для более спокойного участка графика в период до 6 марта (рис. 3, а) характерен круто падающий спектр мощности с коэффициентом наклона $\alpha = 5,0 \pm 0,3$ (рис. 2, б). Этот наклон спектра мощности функции Вейерштрасса — Мандельброта соответствует фрактальной размерности $D = 1,12 \pm 0,03$. Фрактальные функции с размерностью, близкой к 1, характерны стационарным равновесным процессам с низкой степенью диссипации.

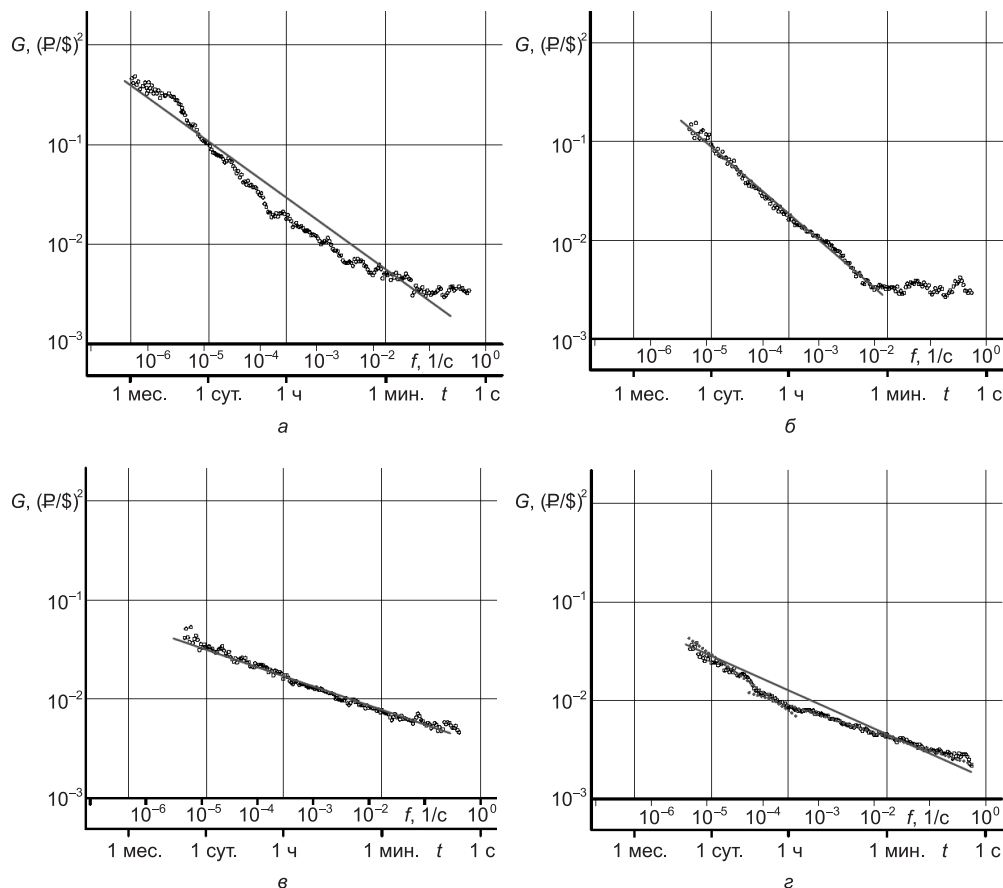


Рис. 2. Спектры мощности рыночного курса российского рубля к доллару США:

а — в период с 1 по 31 марта 2020 г., $\alpha = 4,2 \pm 1,2$, $D = 1,19 \pm 0,18$; б — в период с 4 по 6 марта 2020 г., $\alpha = 5,0 \pm 0,3$, $D = 1,12 \pm 0,03$; в — в период с 9 по 12 марта 2020 г., $\alpha = 2,2 \pm 0,4$, $D = 1,47 \pm 0,11$; г — в период с 26 по 31 марта 2020 г., $\alpha = 2,4 \pm 0,9$, $D = 1,41 \pm 0,19$

Источники: разработано авторами.

На последующих участках с 9 по 12 марта (рис. 2, в) и с 26 по 31 марта (рис. 2, г) характер спектра мощности функции Вейерштрасса — Мандельброта более пологий, коэффициент наклона составляет $\alpha = 2,2 \pm 0,4$ и $\alpha = 2,4 \pm 0,9$ соответственно. Фрактальная размерность составляет $D = 1,47 \pm 0,11$ для первого и $D = 1,41 \pm 0,19$ для второго периода. Высокие значения фрактальной размерности свидетельствуют о неравновесности экономических процессов, влияющих на биржевой курс. Кроме того, высокое статистическое отклонение параметра α и размерности D в период с 26 по 31 марта 2020 г. может быть связано с переходными процессами, протекавшими в этом периоде. Эти переходные процессы также могут быть связаны с изменением внешних условий рынка. Идентифицировать их помогает математический аппарат фрактального анализа.

С меньшей точностью, но с большей оперативностью фрактальный анализ биржевых курсов можно производить и на более коротких временных промежутках. Такой пример приведен на рис. 4. Также фрактальный анализ биржевых курсов в сочетании с вейвлет-анализом можно производить в онлайн-режиме. В этом случае в течение 10–20 мин



Рис. 3. Курс доллара США к российскому рублю в кратковременные периоды:
 а — 4–6 марта 2020 г.; б — 9–12 марта 2020 г.; в — 26–31 марта 2020 г.

Источник: разработано авторами.

после кардинального изменения стационарного характера функции обновляемых данных становится достаточно, чтобы зафиксировать изменения фрактальной размерности и принять решения, касающиеся поиска причин и ответных действий.

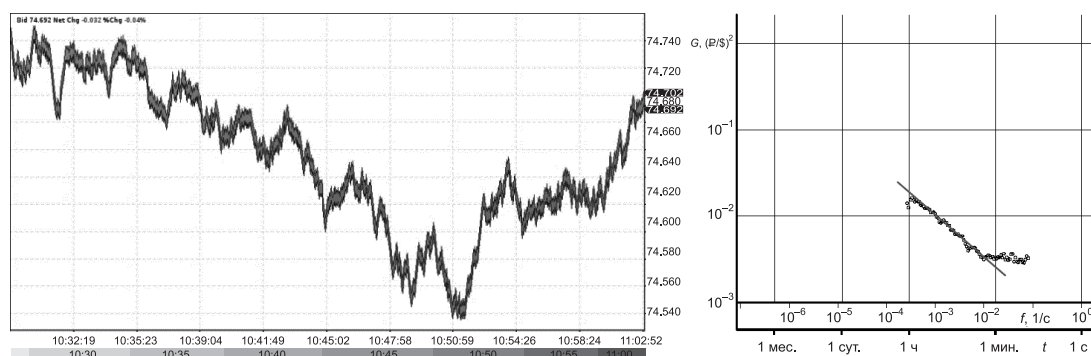


Рис. 4. Фрагмент графика курса валют продолжительностью 0,5 ч (а) и соответствующий спектр мощности функции (б)

Источник: разработано авторами.

Заключение. Таким образом, на примере анализа динамики курса доллара США к российскому рублю показана возможность расчета фрактальной размерности графика изменения курса валют во времени методом его Фурье-анализа. Предлагается рассматривать фрактальную размерность графиков фондовых котировок в качестве косвенной меры неравновесности экономических процессов, детерминированных внешними условиями. Рекомендуется использовать данный метод для анализа и прогнозирования рынка.

Источники

1. *Беляцкая, Т. Н.* Эконометрический анализ экосистемы электронной экономики на основании латентного синтетического показателя / Т. Н. Беляцкая // Экономика и предпринимательство. — 2017. — № 8-1. — С. 1014–1020.
2. *Belyatskaya, T. N.* Econometric Analysis of the E-Economy Ecosystem Based on a Latent Synthetic Indicator / T. N. Belyatskaya // Economy and Entrepreneurship. — 2017. — № 8-1. — P. 1014–1020.
3. *Mandelbrot, B.* The (mis)behavior of markets : a fractal view of risk, ruin, and reward / B. Mandelbrot, R. Hudson. — New York : Basic Bk., 2004. — 317 p.
4. *Peters, E.* Fractal Market Analysis: applying chaos theory to investment and economics / E. Peters. — New York [et al.] : John Wiley & Sons, Inc., 1994. — 167 p.
5. *Киселевский, О. С.* Фурье-анализ профилей сверхгладких фрактальных поверхностей / О. С. Киселевский, В. П. Казаченко // Доклады НАН Беларуси. — 2007. — Т. 51, № 4. — С. 95–97.
6. *Kiselevski, O. S.* Fourier analysis of the profiles of super-smooth fractal surfaces / O. S. Kiselevski, V. P. Kazachenko // Reports of the Nat. Acad. of Sciences of Belarus. — 2007. — Vol. 51, № 4. — P. 95–97.
7. *Триботехнические характеристики и механизм изнашивания пленочных электролитических нанокомпозитов никель-смешанный оксид вольфрама и молибдена / О. С. Киселевский [и др.] // Трение и износ. — 2007. — Т. 28, № 3. — С. 269–275.*
8. *Tribotechnical characteristics and wear mechanism of electrolytic film nanocomposites nickel-mixed oxide of tungsten and molybdenum / O. S. Kiselevski // Friction and Wear. — 2007. — Vol. 28, № 3. — P. 269–275.*

Статья поступила в редакцию 10.12.2021 г.