Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра информатики

А. В. Борзенков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. MATLAB

Конспект лекций

для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Минск БГУИР 2009

УДК 517.2(076)+004.43
ББК 22.161.1я7
Б82

Р е ц е н з е н т:
профессор кафедры высшей математики БГУИР
Р. М. Жевняк

Борзенков, А. В.
Б82 Дифференциальные уравнения в частных производных. MATLAB: конспект лекций для студ. всех спец. БГУИР днев. формы обуч. / А. В. Борзенков. – Минск : БГУИР, 2009. – 120 с.: ил.
ISBN 978-985-488-429-5

Издание посвящено дифференциальным уравнения в частных производных, подходам к их моделированию, аналитическим и некоторым численным методам их решения. Подробно разобраны примеры компьютерного моделирования в среде MATLAB.

УДК 517.2(076)+004.43
ББК 22.161.1я7

ISBN 978-985-488-429-5

СОДЕРЖАНИЕ

От автора

В пособии рассмотрены три основных линейных дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка – параболическое, гиперболическое, эллиптическое. И соответственно постановки краевых задач и задач Коши для этих уравнений. В качестве общего аналитического подхода для исследования краевых задач выбран метод разложения решения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Для исследования задач Коши на состояниях параболического и гиперболического уравнений рассмотрены метод интегрального преобразования Фурье и метод Д'Аламбера соответственно. Для линейных уравнений в частных производных первого порядка и задачи Коши разобран метод характеристик.

Теоремы существования и единственности решений краевых задач приведены в классическом понимании. Однако, поскольку классическое решение предъявляет очень высокие требования к гладкости контура и функций, было рассмотрено понятие обобщенного решения и обобщенных производных. Задачи, полученные моделированием реальных процессов, а не идеализированные модели, исследуются именно в терминах обобщенных решений.

Отдельное внимание уделено подходам к моделированию дифференциальных уравнений. Наряду с примерами прямого моделирования параболического и гиперболического уравнений рассмотрен вариационный подход к моделированию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Собственно, появление второй главы, посвященной вариационным задачам, во многом обусловлено именно этим. Кратко рассмотрена задача оптимального управления. Применение принципа максимума Понтрягина для поиска решения задач данного класса вновь приводит к появлению дифференциальных уравнений и их систем.

За всеми математическими результатами и внешне сухими формулами всегда стоят конкретные люди. Поэтому было сочтено необходимым кратко изложить биографии математиков, чьи имена приведены в пособии.

Из численных подходов к решению дифференциальных уравнений кратко приведен метод прямых, позволяющий свести задачи для уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Также приведен метод Ритца сведения краевой задачи с самосопряженным оператором к численному решению вариационной задачи.

Отдельное внимание уделено исследованию дифференциальных уравнений в среде программирования MATLAB и ее инструментария PDE (Partial Differential Equations). Материал каждой главы рассмотрен на специальных примерах программирования.

Автор признателен сотрудникам редакторской группы Тамаре Николаевне Крюковой и Елене Николаевне Батурчик за плодотворное сотрудничество. Автор благодарен Светлане Митрахович за помощь в компьютерном оформлении материала.

А. В. Борзенков

УДК 517.2(076)+004.43
ББК 22.161.1я7
Б82

Р е ц е н з е н т:
профессор кафедры высшей математики БГУИР
Р. М. Жевняк

Борзенков, А. В.
Б82 Дифференциальные уравнения в частных производных. MATLAB: конспект лекций для студ. всех спец. БГУИР днев. формы обуч. / А. В. Борзенков. – Минск : БГУИР, 2009. – 120 с.: ил.
ISBN 978-985-488-429-5

Издание посвящено дифференциальным уравнения в частных производных, подходам к их моделированию, аналитическим и некоторым численным методам их решения. Подробно разобраны примеры компьютерного моделирования в среде MATLAB.

УДК 517.2(076)+004.43
ББК 22.161.1я7

ISBN 978-985-488-429-5

СОДЕРЖАНИЕ

От автора

В пособии рассмотрены три основных линейных дифференциальных уравнения в частных производных второго порядка – параболическое, гиперболическое, эллиптическое. И соответственно постановки краевых задач и задач Коши для этих уравнений. В качестве общего аналитического подхода для исследования краевых задач выбран метод разложения решения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Для исследования задач Коши на состояниях параболического и гиперболического уравнений рассмотрены метод интегрального преобразования Фурье и метод Д'Аламбера соответственно. Для линейных уравнений в частных производных первого порядка и задачи Коши разобран метод характеристик.

Теоремы существования и единственности решений краевых задач приведены в классическом понимании. Однако, поскольку классическое решение предъявляет очень высокие требования к гладкости контура и функций, было рассмотрено понятие обобщенного решения и обобщенных производных. Задачи, полученные моделированием реальных процессов, а не идеализированные модели, исследуются именно в терминах обобщенных решений.

Отдельное внимание уделено подходам к моделированию дифференциальных уравнений. Наряду с примерами прямого моделирования параболического и гиперболического уравнений рассмотрен вариационный подход к моделированию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Собственно, появление второй главы, посвященной вариационным задачам, во многом обусловлено именно этим. Кратко рассмотрена задача оптимального управления. Применение принципа максимума Понтрягина для поиска решения задач данного класса вновь приводит к появлению дифференциальных уравнений и их систем.

За всеми математическими результатами и внешне сухими формулами всегда стоят конкретные люди. Поэтому было сочтено необходимым кратко изложить биографии математиков, чьи имена приведены в пособии.

Из численных подходов к решению дифференциальных уравнений кратко приведен метод прямых, позволяющий свести задачи для уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Также приведен метод Ритца сведения краевой задачи с самосопряженным оператором к численному решению вариационной задачи.

Отдельное внимание уделено исследованию дифференциальных уравнений в среде программирования MATLAB и ее инструментария PDE (Partial Differential Equations). Материал каждой главы рассмотрен на специальных примерах программирования.

Автор признателен сотрудникам редакторской группы Тамаре Николаевне Крюковой и Елене Николаевне Батурчик за плодотворное сотрудничество. Автор благодарен Светлане Митрахович за помощь в компьютерном оформлении материала.

А. В. Борзенков

Глава 1. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Коши

Постановка задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Формула Коши. Сопряженная система. Структура матрицы Коши. Пример использования формулы Коши. Понятие о методе прямых.

§1. Постановка задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t),\ldots,$ $x_n(t)$ – непрерывно дифференцируемые действительные функции; $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ и $a_{11}(t)$, $a_{12}(t),\ldots,$ $a_{1n}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t),\ldots,$ $a_{2n}(t)$, $a_{n1}(t),\ldots,$ $a_{mn}(t)$ – непрерывные действительные функции, $t\in[t_0,t^*]\in R$.

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t)=a_{11}(t)\cdot x_1+a_{12}(t)\cdot x_2+\ldots+a_{1n}(t)+f_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t)=a_{21}(t)\cdot x_1+a_{22}(t)\cdot x_2+\ldots+a_{2n}(t)+f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t)=a_{n1}(t)\cdot x_1+a_{n2}(t)\cdot x_2+\ldots+a_{nn}(t)+f_n(t). \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$X=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))^T,\ f=(f_1(t),f_2(t),\ldots,f_n(t))^T,$$

$$\mathrm{A}=[a_{ij}(t),i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}]=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{2n}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}(t) & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений систему (1.1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}X=A(t)\cdot X+f(t),\ t\in]\ t_0,t^*\ ],\qquad t\in R,\ f\in R^n,\ X\in R^n. \qquad (1.1.2)$$

Данное векторное уравнение имеет сколь угодно много решений. Для выделения единственного решения к уравнению необходимо добавить начальные условия для вектора состояния $X(t)$ – условия Коши.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X=A(t)\cdot X+f(t),\ t\in]\ t_0,t^*\ ], \\ X(t_0)=X_0, \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

где $X_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)^T\in R$.

Замечание 1. Из общей теоремы Коши о существовании и единственности решения нормальной системы дифференциальных уравнений сразу следует, что если функции $A(t),\ f(t)$ непрерывны на интервале $]\,t_0,t^*[$, то на нем существует единственное решение задачи Коши (1.1.3).

Замечание 2. Теорема Коши дает достаточные условия существования и единственности, т.е. задача Коши может иметь единственное решение и при невыполнении какого-либо условия теоремы.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Коши Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis) (1789 – 1857) – выдающийся французский математик. Родился в Париже. В 1816 – 1830 гг. преподавал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. С 1848 г. в Парижском университете и в Коллеж де Франс. Кавалер ордена Почетного легиона. Огюстен Коши написал свыше 800 работ. Коши впервые ввел строгие определения основных понятий математического анализа. Курсы анализа Коши, основанные на использовании определении предела, послужили образцом для учебников позднейшего времени. В теории дифференциальных уравнений Огюстену Коши принадлежат постановка одной из основных задач качественной теории – задачи Коши, доказательства основных теорем существования и единственности решений, методы интегрирования уравнений с частными производными первого порядка.

§2. Формула Коши

Наряду с неоднородной системой (1.1.3) будем рассматривать однородную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X = A(t)\cdot X, t\in[t_0,t^*], \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Пусть $F^i(t,t)$ – решение векторного уравнения $\frac{d}{dt}F^i(t,t) = A(t)\cdot F^i(t,t)$ с начальным условием $F^i(t_0,t_0) = e^i$, где $e^i = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},\ldots,0,\ldots,0)$ – нулевой вектор с единицей на i-м месте.

Обозначим через $F(t,t)$ $n\times n$ матричную функцию, составленную из $F^i(t,t)$ как из столбцов, где i принимает значения от 1 до n.

Функция $F(t,t)$ однозначно определена для любого значения аргумента t. Эта функция абсолютно непрерывна и удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(t,t) = A(t)\cdot F(t,t), \\ F(t_0,t_0) = E. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Здесь Е – единичная матрица.

Замечание. Функции типа $F(t,t)$ называют функциями Коши (функциями Грина) или функциями точечного источника. Они имеют следующий физический смысл. Каждый i-й столбец функции $F^i(t,t)$ представляет собой отклик в момент времени t однородной системы (1.2.1), которую возмутили в момент времени t_0 единичным вектором $X_0 = e^i$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t). \tag{1.2.3}$$

Здесь $X_1(t)$, $X_2(t)$ – решения следующих задач Коши соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X_1 = A(t) \cdot X_1, \\ X_1(t_0) = X_0; \end{cases} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X_2 = A(t) \cdot X_2 + F(t), \\ X_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Нетрудно заметить, что функция (1.2.3) является решением неоднородной системы уравнений (1.1.3). Действительно,

$$\frac{d}{dt}(X(t)) = \frac{d}{dt} X_1(t) + \frac{d}{dt} X_2(t) = A(t) \cdot X_1 + A(t) \cdot X_2 + f(t) =$$
$$= A(t) \cdot (X_1(t) + X_2(t)) + f(t) = A(t) \cdot X + f.$$

Функция (1.2.3) удовлетворяет также начальным условиям:

$$X(t_0) = X_1(t_0) + X_2(t_0) = X_0.$$

Поскольку векторы e^i, $i = \overline{1,n}$, образуют базис в пространстве R^n, то любой вектор $X_0 \in R^n$ может быть представлен в виде (разложен по базису):

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e^i, \qquad X_i = (a_1, a_2, \ldots., a_n)^T.$$

Введем функцию $Y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot F^i(t, t_0)$. Продифференцировав ее, получаем

$$\frac{d}{dt} Y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_n \cdot \frac{d}{dt} F^i(t,t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_n \cdot A(t) \cdot F^i(t,t_0) = A(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot F^i(t,t_0) = A(t) \cdot Y_1,$$

$$Y_1^0(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_n \cdot F^i(t_0, t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e^i = X_0.$$

Таким образом, функция $Y_1(t)$ удовлетворяет тому же уравнению и тому же начальному условию, что и функция $X_1(t)$. Поэтому в силу существования и единственности решения задачи Коши (1.2.1) эти функции совпадают друг с другом:

$$X_1(t) = Y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_n \cdot F^i(t, t_0) = F(t, t_0) \cdot X_0. \tag{1.2.6}$$

Введем функцию $Y_2(t) = \int_{t_0}^{t} F(t, t) \cdot f(t) dt$. Продифференцировав ее, получаем

$$\frac{d}{dt} Y_2 = F(t,t) \cdot f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} F(t,t) dt = f(t) + \int_{t_0}^{t} A(t) \cdot F(t,t) \cdot f(t) dt = f(t) +$$
$$+ A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} F(t,t) \cdot f(t) dt = f(t) + A(t) \cdot Y_2(t).$$

Очевидно, что $Y_2(t_0) = 0$.

Таким образом, функция $Y_2(t)$ удовлетворяет тому же уравнению и тому же начальному условию, что и функция $X_2(t)$. Поэтому в силу существования и единственности решения задачи Коши (1.2.5) функции $X_2(t)$ и $Y_2(t)$ совпадают.

Подставляя функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ в выражение (1.2.3), получаем знаменитую формулу Коши для аналитического представления решения линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений (1.1.3) через матрицу влияния Коши:

$$X(t)=F(t,t_0)\cdot X_0+\int_{t_0}^{t}F(t,t)\cdot f(t)dt\ . \tag{1.2.7}$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Грин Джордж (Green George) (1793 – 1841) – выдающийся английский математик. В своей работе «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828) Д. Грин впервые ввёл понятие потенциала. Опираясь на найденное им соотношение между интегралами по объёму и поверхности, ограничивающей объём, получил знаменитые формулы Грина. В этой же работе была введена функция, которая впоследствии получила название функции Грина. Ее часто называют также функцией точечного источника. Она лежит в основе принципа суперпозиции линейных дифференциальных систем. В 1839 г. выполнил важную работу по отражению и преломлению света в кристаллических средах, в которой разработал метод вывода дифференциальных уравнений теории упругости.

§3. Сопряженная система. Структура матрицы Коши

Вновь рассмотрим систему (1.1.3). Относительно $X(.)$ проделаем следующие действия.

Продифференцируем функцию $X(t)$ по t, домножим слева на некоторую матрицу $F(t,t)$ и проинтегрируем на промежутке решения задачи:

$$\int_{t_0}^{t}F(t,t)\frac{d}{dt}X(t)dt=\int_{t_0}^{t}F(t,t)\cdot A(t)\cdot X(t)\cdot tdt+\int_{t_0}^{t}F(t,t)\cdot f(t)dt\ . \tag{1.3.1}$$

Преобразуем левую часть (1.3.1), используя формулу интегрирования по частям:

$$\int_{t_0}^{t}F(t,t)\frac{d}{dt}X(t)dt=F(t,t)\cdot X(t)\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial F(t,t)}{\partial t}\cdot X(t)dt\ . \tag{1.3.2}$$

Приравнивая правые части (1.3.1) и (1.3.2), получаем

$$\int_{t_0}^{t} F(t,t)\cdot A(t)\cdot x\cdot t dt+\int_{t_0}^{t} F(t,t)\cdot f(t)dt=$$

$$=F(t,t)\cdot X(t)-F(t,t_0)\cdot X(t_0)-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial F(t,t)}{\partial t}\cdot X(t)dt\,. \qquad (1.3.3)$$

Введем функцию $F(t,t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(t,t)}{\partial t}=-F(t,t)\cdot A(t),\\ F(t,t)=E.\end{cases} \qquad (1.3.4)$$

Подставляя в формулу (1.3.3) и приводя подобные, получаем хорошо известную нам формулу Коши:

$$X(t)=F(t,t_0)\cdot X_0+\int_{t_0}^{t} F(t,t)\cdot f(t)dt\,. \qquad (1.3.5)$$

Замечание. Система (1.3.4) называется сопряженной системой для подсчета фундаментальной матрицы $F(t,t)$. Напомним, что прямая система определяется соотношениями (1.2.2).

Вновь рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений (1.2.1). Общее решение линейной однородной системы представимо в следующем виде: $X(t)=F(t)\cdot C,$ где $F(t)$ – фундаментальная матрица, столбцами которой являются элементы фундаментальной системы решений (ФСР) $F(t)=(X_1(t),X_2(t),...,X_n(t));$ С – вектор произвольных постоянных $C=(C_1,C_2,...,C_n),$ $C\in R^n$.

Классическим методом решения дифференциальных уравнений и систем является метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу решение неоднородной системы (1.1.3) ищется в виде

$$X(t)=F(t)\cdot C(t)\,, \qquad (1.3.6)$$

где $C=(C_1(t),C_2(t),...,C_n(t))$ – вектор неизвестных функций.

Подставляя (1.3.6) в уравнение системы (1.1.3), получаем: $A(t)\cdot F(t)\cdot C(t)+F(t)\cdot C^{'}(t)=A(t)\cdot F(t)\cdot C(t)+f(t)$, поскольку каждый столбец матрицы $F(t)$ является решением однородной системы (1.2.1).

Упрощая, получаем $\dfrac{d}{dt}C(t)=F^{-1}(t)\cdot f(t);\quad C(t)=\int_{t_0}^{t} F^{-1}(t)\cdot f(t)dt+C_1.$

Тогда общее решение $X(t)=F(t)\cdot C(t)$ неоднородной линейной системы выпишется в следующем виде:

$$X(t)=F(t)\cdot C_1+\int_{t_0}^{t} F^{-1}(t)\cdot f(t)dt+C\,. \qquad (1.3.7)$$

Подставляя $t=t_0$ и учитывая начальные условия $X(t_0)=X_0$, получаем: $X(t_0)=F(t_0)\cdot C_1=X_0;\quad C_1=F^{-1}(t_0)\cdot X_0$. Производим подстановку в (1.3.7) и окончательно получаем единственное решение, удовлетворяющее исходной системе дифференциальных уравнений (1.1.3):

$$X(t)=F(t)\cdot F^{-1}(t_0)\cdot X_0+\int\limits_{t_0}^{t}F(t)\cdot F^{-1}(t)\cdot f(t)dt\ . \qquad (1.3.8)$$

В силу теоремы о существовании и единственности решения дифференциальной системы, получаем следующее представление для структуры матрицы Коши:

$$F(t,t)=F(t)\cdot F^{-1}(t). \qquad (1.3.9)$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis) (1736 – 1813) – великий французский математик и механик. Член Парижской Академии Наук, член Берлинской Академии Наук. С 1795 г. был профессором Нормальной школы, с 1797 г. – Политехнической школы. Наиболее важные труды Лагранжа относятся к вариационному исчислению и аналитической механике. Разработал основные понятия вариационного исчисления, предложил фундаментальный аналитический метод – метод вариаций решения бесконечномерных экстремальных задач. Лагранжу принадлежат выдающиеся результаты в области математического анализа – формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов конечномерных экстремальных задач. В теории дифференциальных уравнений им построена общая теория особых решений, предложен фундаментальный метод вариации произвольных постоянных решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений.

§4. Пример использования формулы Коши

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с дополнительными условиями: $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=x+t$, $\dfrac{\partial x(0)}{\partial t}=1$, $x(0)=1$. Сведем его к задаче Коши для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial t}=y,\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial t}=x+t,\end{cases}\qquad \begin{cases}x(0)=1,\\ y(0)=1.\end{cases}$$

Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{d}{dt}X_1(t)\\[2mm] \dfrac{d}{dt}X_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}X_1(0)\\X_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Решим ее по формуле Коши. Для этого подсчитаем матрицу $F(t,t)=F(t)\cdot F^{-1}(t)$, $F(t)$ – составлено из векторов ФСР. Выпишем общее решение, соответствующее однородной системе уравнений, т.е. найдем векторы ФСР.

Общее решение вычисляется через собственные числа и соответствующие им векторы матрицы A. Получаем: $A \cdot x = l x$; $Ax - lEx = 0$; $(A - l\,E)x = 0$; $\det(A - lE) = 0$. Отсюда: $l^2 - 1 = 0$, $l_1 = 1$, $l_2 = -1$. Найдем собственный вектор x_1, соответствующий собственному значению l_1. Для этого решаем систему линейных алгебраических уравнений $(A - л_1 E)x_1 = 0$. Получаем $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow l_1 = 1$. Для второго вектора аналогично: $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow l_2 = -1$. Выписываем общее решение соответствующей однородной дифференциальной системы: $x(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^t + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$. Переписываем в матричной форме относительно c_1 и c_2 и получаем: $x(t) = \begin{bmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Следовательно, $F(t) = \begin{bmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$ и $F^{-1}(t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{bmatrix}$. Поскольку $F(t,t) = F(t) \cdot F^{-1}(t)$, то получаем $F(t,t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} e^{t-t} + e^{-(t-t)} & e^{t-t} - e^{-(t-t)} \\ e^{t-t} - e^{-(t-t)} & e^{t-t} + e^{-(t-t)} \end{bmatrix}$. Таким образом, матрица $F(t,t)$ Коши (Грина) построена и можно применить формулу Коши $X(t) = F(t,t_0) \cdot X_0 + \int_{t_0}^{t} F(t,t) \cdot f(t)dt$. С учетом того что $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, окончательно получаем формульное решение задачи Коши:

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \cdot \begin{bmatrix} e^{t-t} + e^{-(t-t)} & e^{t-t} - e^{-(t-t)} \\ e^{t-t} - e^{-(t-t)} & e^{t-t} + e^{-(t-t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} dt$$

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -2 + e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Приведем скрипт в среде MATLAB построения матрицы $F(t)$.

```
%начальные условия
A=[0 1;1 0];
syms lmd t temp x1 x2;
 %поиск собств. значений матрицы A
ASymb=sym(A);
for i=1:1:2
ASymb(i,i)=ASymb(i,i)-lmd;
end;
self_v=solve(det(ASymb));
%формируем матрицы частных решений: решение уравнения (A-v*E)*x=0
E=eye(2,2);
Z=[0;0];
%поиск частного решения X1
K1=A-self_v(1)*E;
tX1=sym(K1)*[x1;x2];
```

```
X1=K1\Z;
ta1=K1(1,:)+K1(2,:);
if(ta1(1)*ta1(2)==0)
X1=~double(ta1);
else
X1(1)=1; X1(2)=subs(solve(tX1(1),x2),x1,1); end;
%поиск частного решения X2
K2=A-self_v(2)*E;
tX2=sym(K2)*[x1;x2];
X2=K2\Z;
ta2=K2(1,:)+K2(2,:);
if(ta2(1)*ta2(2)==0)
X2=~double(ta2);
else
X2(1)=1;  X2(2)=subs(solve(tX2(1),x2),x1,1);  end;
%формируем матрицу F(t) из частных решений X1 и X2
Ft=sym(zeros(2));
Ft(:,1)=X1*exp(self_v(1)*t);
Ft(:,2)=X2*exp(self_v(2)*t);
%упрощаем и выводим
Ft=simplify(Ft); disp('F(t) ='); disp(Ft);
```

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Моулер Клив (Moler Cleve Barry) – знаменитый специалист в области прикладного численного программирования. Специализируется на математических проблемах численного анализа. Является председателем компании MathWorks Incorporated. Около двадцати лет работал профессором математики и информатики в университете Мичиган, Стэндфордском университете и университете Нью-Мексико. В конце 1970-х годов Клив Моулер разработал пакет численных методов MATLAB. Вскоре новая среда быстро распространилась среди других университетов США. В настоящее время MATLAB является мощной средой численной и символьной математики, включающей в себя средства структурного, объектного и визуального программирования, оснащенной мощными конверторами и специализированными инструментариями ToolBox. В 1997 г. Клив Моулер был избран в Национальную Инженерную Академию США. В январе 2007 г. Клив Моулер вступил в должность президента СИАМ (SIAM).

§5. Понятие о методе прямых

Кратко рассмотрим эффективный подход, позволяющий сводить краевые задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных к исследованию линейных дифференциальных систем (1.1.3) первого порядка.

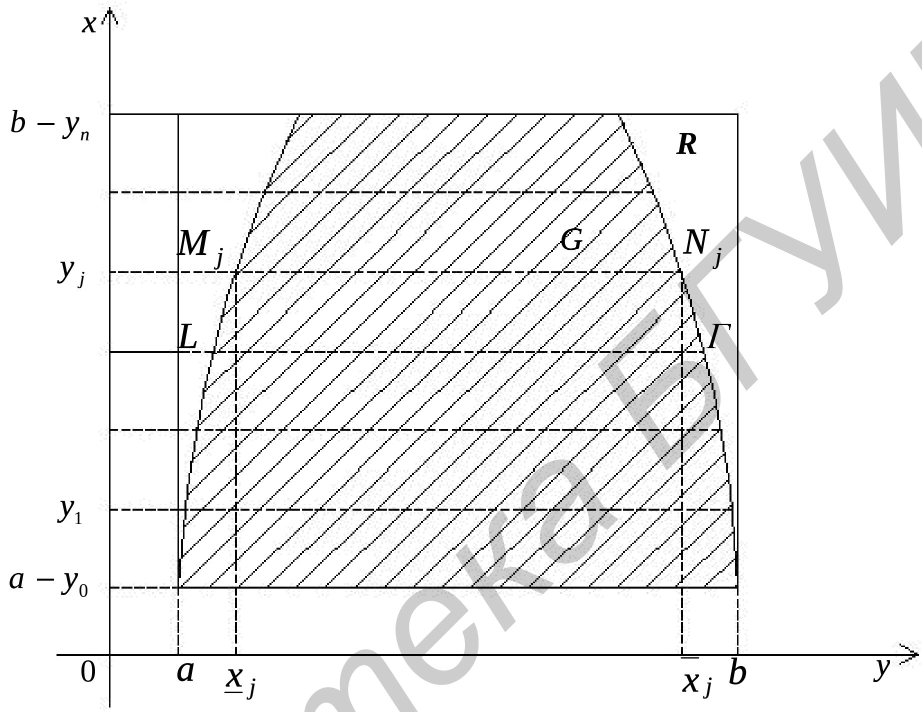
Пусть в плоскости Oxy (см. рисунок) задана трапециевидная область G, основания которой лежат на прямых $y = a$ и $y = b$, $(a < b)$, а по бокам эта область ограничена аналитическими кривыми $x = g_0(y)$ (L), $x = g_1(y)$ (Γ), $(a \le y \le b;\ g_0(y) < g_1(y))$. Пусть область G целиком помещается в минимальном прямоугольнике $R=\{\,(x,y):a\le x\le b; a\le y\le b\,\}$. В области G требуется найти решение $u=u(x,y)$ линейного дифференциального уравнения

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y), \qquad (1.5.1)$$

которое удовлетворяет на границе области G следующим краевым условиям:

$$u(x;a)=j_0(x), u(x,b)=j_1(x),\ u(g_0(y),y)=y_0(y), u(g_1(y),y)=y_1(y). \qquad (1.5.2)$$



Будем предполагать, что коэффициенты и правая часть уравнения (1.5.1) определены и аналитичны в замкнутом прямоугольнике R, причём

$$A(x,y)\ne 0, C(x,y)\ne 0,\ \ (x,y)\in R. \qquad (1.5.3)$$

Допустим также, что функции $j_0(x)$ и $j_1(x)$ являются аналитическими на всём отрезке $[a,b]$, а функции $y_0(y)$ и $y_1(y)$ – аналитическими на отрезке $[a,b]$ и выполнены условия согласованности:

$$j_0(g_j(a))=y_j(a), j_1(g_j(b))=y_j(b), j=0,1. \qquad (1.5.4)$$

Для получения по методу прямых приближённого решения краевой задачи (1.5.1) – (1.5.2) разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей с помощью точек $y_j=y_0+jh$ $(y_0=a, y_n=b)$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $j=0,1,2,...,n$ и через внутренние точки деления проведём семейство параллельных прямых $y=y_j, j=0,1,2,...,n-1$. На каждой такой прямой дифференциальное уравнение (1.5.1) приближенно заменим обыкновенным дифференциальным уравнением для искомых функций $u(x,y_j)$. Для этого в (1.5.1) избавимся от частного дифференцирования по y с помощью формул численного дифференцирования:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_j} \approx \frac{1}{2h}[u(x,y_{j+1})-u(x,y_{j-1})],\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{y=y_j} \approx \frac{1}{2h}[u'_x(x,y_{j+1})-u'_x(x,y_{j-1})],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=y_j} \approx \frac{1}{h^2}[u(x,y_{j+1})-2u(x,y_j)+u(x,y_{j-1})],\quad j=1,2,...,n-1. \qquad (1.5.5)$$

Введём обозначения: $u(x,y_j)=u_j(x)$, $\dfrac{\partial u(x,y_j)}{\partial x}=u'_j(x)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,y_j)}{\partial x^2}=u''_j(x)$, $A(x,y_j)=A_j(x)$, … Тогда подставляя выражения (1.5.5) в уравнение (1.5.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_j(x)u''_j(x)+\frac{B_j(x)}{h}[u'_{j+1}(x)-u'_{j-1}(x)]+\frac{C_j(x)}{h^2}[u_{j+1}(x)-2u_j(x)+u_{j-1}(x)]+$$
$$+a_j(x)u'_j(x)+\frac{b_j(x)}{2h}[u_{j+1}(x)-u_{j-1}(x)]+a_j(x)u_j(x)=f_j(x),\ j=0,1,2,...,n-1. \qquad (1.5.6)$$

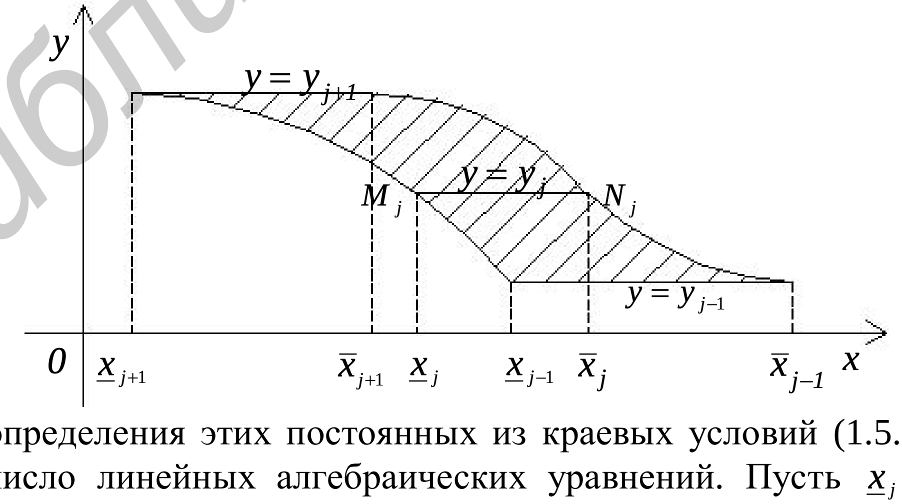
Кроме того, в силу краевых условий (1.5.2) получаем

$$u_0(x)=j_0(x),\ u_n(x)=j_1(x) \qquad (1.5.7)$$

и, следовательно, $u'_0(x)=j'_0(x)$, $u'_n(x)=j'_1(x)$.

Таким образом, от линейного дифференциального уравнения (1.5.1) с частными производными мы перешли к системе (1.5.6) из n–1 обыкновенных дифференциальных уравнений с n–1 неизвестными функциями $u_1(x),u_2(x),...,u_{n-1}(x)$, где $u_0(x)$ и $u_n(x)$ определяются формулами (1.5.7).

Так как коэффициенты и правые части линейной системы (1.5.6) аналитичны, а следовательно, непрерывны на отрезке $[a,b]$, старшие коэффициенты $A_j(x)\neq 0$, $a\le x\le b$, то общее решение $u_j(x)=j_j(x;C_1,C_2,...,C_{2n-2})$, $j=1,2,...,n-1$ системы (1.5.6) определено на отрезке $[a,b]$ и содержит $2n-2$ произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_{2n-2}$, входящих в функции j_i линейно.



Для определения этих постоянных из краевых условий (1.5.2) получаем такое же число линейных алгебраических уравнений. Пусть $\underline{x}_j=g_0(y_j)$ и $\overline{x}_j=g_1(y_j)$ – проекция на ось Ox концов отрезка M_jN_j, лежащего на прямой $y=y_j$. Тогда на основании формул (1.5.2) получаем граничные условия:

$$u_j(\underline{x}_j)=y_0(y_j),\ u_j(\overline{x}_j)=y_1(y_j),\ a\le\underline{x}_j<\overline{x}_j\le b,\ (j=1,2,\ldots,n-1). \qquad (1.5.8)$$

Таким образом, задача (1.5.1) – (1.5.2) сводится к решению краевой задачи (1.5.6) – (1.5.8) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи (1.5.6) – (1.5.8) может быть выражено формульно или получено с помощью приближённых методов. Причём функции $u_j(x)$ должны определяться на всём отрезке $[a,b]$. После этого мы будем знать приближённые значения искомой функции $u(x,y)$ на семействе параллелей $y=y_j,\ j=0,1,2,\ldots,n$. Значения функции $u(x,y)$ в промежуточных точках области G могут быть найдены методами интерполирования.

Отметим следующую особенность краевой задачи (1.5.6) – (1.5.8). Каждую из искомых функций $u_j(x)$ нужно определить на всём отрезке $[a,b]$, зная её значения в двух, вообще говоря, внутренних точках $\underline{x}_j$ и $\overline{x}_j$ этого отрезка. Если мы найдём некоторую функцию $u_j(x)$ лишь при $\underline{x}_j\le x\le\overline{x}_j$, этого может оказаться недостаточным для решения задачи, поскольку проекция на ось Ox отрезка M_jN_j прямой $y=y_j(\underline{x}_j\le x\le\overline{x}_j)$ в общем случае не покрывает проекций на эту ось соседних прямых $y=y_{j-1}(\underline{x}_{j-1}\le x\le\overline{x}_{j-1})$ и $y=y_{j+1}(\underline{x}_{j+1}\le x\le\overline{x}_{j+1})$. В этом случае для нахождения из системы (1.5.6) функций $u_{j-1}(x)$ и $u_{j+1}(x)$ нужно знать значения функции $u_j(x)$ вне отрезка $[\underline{x}_j,\overline{x}_j]$.

Пример 1. Исследование параболической системы методом прямых

Пусть в области $R=\{(x,t),\ \ 0<x<3;\,0<t<3\}$ задано неоднородное параболическое уравнение вида $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x+t$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=0$ и граничным условиям $u(0,t)=0,\ u(3,t)=0$. Методом прямых найдем решение данного уравнения. Положим для простоты $h=1$ и проведём прямые $x=1$ и $x=2$. Используя метод прямых, будем искать приближённое решение $u_j(t)=u(t,x_j)$, $j=1,2$ на прямых $x=x_1=1$ и $x=x_2=2$. Избавляясь от частных производных по x с помощью формулы численного дифференцирования:

$\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_j}\approx\dfrac{1}{h^2}[u(t,x_{j+1})-2u(t,x_j)+u(t,x_{j-1})],\ j=1,2$, получаем систему

$$\begin{cases}u_1'(t)=u_0(t)-2u_1(t)+u_2(t)+t+1,\\ u_2'(t)=u_1(t)-2u_2(t)+u_3(t)+t+2.\end{cases}$$

Из краевых условий следует, что $u_0(t)=u_3(t)=0$. Поэтому система запишется в следующем виде:

$$\begin{cases}u_1'(t)=-2u_1(t)+u_2(t)+t+1,\\ u_2'(t)=u_1(t)-2u_2(t)+t+2.\end{cases}$$

Краевые условия преобразуются следующим образом: $u_1(t) = u_2(t) = 0$. Переписывая в матричной форме, окончательно получаем

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = A \cdot U(t) + F(t), \\ U(t_0) = U_0, \end{cases}$$

где приняты обозначения $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов, $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ – вектор переменных, $F(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}$, $U(t_0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$, $U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Таким образом, исследование параболического уравнения с соответствующими начальным и граничными условиями свелось к исследованию системы линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Используем формулу Коши (1.2.7).

Пример 2. Исследование гиперболической системы методом прямых

Пусть в области $R = \{ (x,t),\ \ 0 < x < 3; 0 < t < 3 \}$ задано неоднородное гиперболическое уравнение вида: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + t$, удовлетворяющее граничным $\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(3,t) = 0 \end{cases}$ и начальным условиям $\begin{cases} u(x,0) = u\big|_{t=0} = x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x. \end{cases}$ Методом прямых найдем решение этого уравнения. Положим $h = 1$ и проведём прямые $x = 1$ и $x = 2$. Будем искать приближённое решение $u_j(t) = u(t, x_j)$, $j = 1,2$ на прямых $x = x_1 = 1$ и $x = x_2 = 2$. Получим систему в матричной форме:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x_j) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x_j) + F(t,x_j), \quad U(t,x_j) = \begin{bmatrix} u(t,x_1) \\ u(t,x_2) \end{bmatrix},\ F(t,x_j) = \begin{bmatrix} t + x_1 \\ t + x_2 \end{bmatrix}.$$

Избавляясь от дифференцирования по x с помощью формулы $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=x_j} \approx \dfrac{1}{h^2}[u(t,x_{j+1}) - 2u(t,x_j) + u(t,x_{j-1})],\ j = 1,2$, с учетом условий $u(0,t) = u(3,t) = 0$, получаем $\begin{cases} u_1''(t) = -2u_1(t) + u_2(t) + t + 1, \\ u_2''(t) = u_1(t) - 2u_2(t) + t + 2. \end{cases}$ Либо то же самое в матричной форме:

$$\frac{d^2}{dt^2}U(t) = A \cdot U(t) + F(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},\ F(t) = \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}.$$

Причем данное уравнение будет иметь следующие начальные условия:

$$U_0=U(t_0)=U(t)\big|_{t_0=0}=\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ U_0'=\frac{d}{dt}U(t)\big|_{t_0=0}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}u_1(0)\\\frac{d}{dt}u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Таким образом, получили систему: $\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}U(t)=A\cdot U(t)+F(t),\\U(t_0)=U_0,\\\dfrac{d}{dt}U(t_0)=U_0'.\end{cases}$

К полученной системе вновь можно применить метод прямых по t и избавиться от второй производной $\dfrac{d^2}{dt^2}U(t)$, оставив первую $\dfrac{d}{dt}U(t)$, и получим систему первого порядка. Но поступим иначе. Введем новые переменные: $u_1'(x)=u_3(x)$, $u_2'(x)=u_4(x)$, $u_3'(x)=-2u_1(x)+u_2(x)+t+1$, $u_4'(x)=u_1(x)-2u_2(x)+t+2$. С учетом введенных обозначений получаем систему первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\tilde{U}(t)=\tilde{A}\cdot\tilde{U}(t)+\tilde{F}(t),\\\tilde{U}(t_0)\big|_{t_0=0}=\tilde{U}_0,\end{cases}\quad \text{где}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&1&0&0\\1&-2&0&0\end{bmatrix},\tilde{U}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\\u_4(t)\end{bmatrix},\tilde{F}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\t+1\\t+2\end{bmatrix},\tilde{U}(t_0)=\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\\u_3(0)\\u_4(0)\end{bmatrix},\ \tilde{U}_0=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Далее данная система исследуется как система линейных обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью формулы (1.2.7).

Замечание. Несмотря на кажущуюся простоту метода прямых, для корректного численного исследования системы нужно постоянно учитывать погрешности приближения численного дифференцирования.

Глава 2. Моделирование обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных второго порядка

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ. ВАРИАЦИЯ КРИВОЙ, ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА. ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА. ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ. ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. УРАВНЕНИЕ ОТСТРОГРАДСКОГО. ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка принято классифицировать на линейные, квазилинейные и нелинейные. В линейные уравнения искомая функция и ее частные производные входят линейным образом.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными в прямоугольной декартовой системе координат будем называть уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial u}{\partial y}\right)+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,y),\ (x,y)\in\Omega.$$

Здесь $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$, $C=C(x,y)$, $D=D(x,y)$, $E=E(x,y)$, $F=F(x,y)$, $G=G(x,y)$ – некоторые известные функции с заданными свойствами, $\in R^2$.

Часто в приложениях уравнение записывают и в следующей форме:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G(x,y),\ (x,y)\in\Omega$$

либо

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G(x,y),\ (x,y)\in\Omega. \qquad (2.1.1)$$

Уравнения, в которых A,B,C,D,E,F являются константами, называются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных с постоянными коэффициентами.

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка (2.1.1) относятся к одному из трёх типов:

1. Параболические – уравнения описывают процессы теплопроводности, диффузионный перенос поля либо вещества. Определяются условием $B^2-4AC=0$.

2. Гиперболические – описывают волновое движение, колебательные системы. Определяются условием $B^2-4AC>0$.

3. Эллиптические – описывают стационарные диффузионные процессы (либо очень близкие к ним). Определяются условием $B^2-4AC<0$.

Приведем три основных уравнения с постоянными коэффициентами, которые, собственно, и будут исследованы далее.

Уравнение теплопроводности – уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\ t\in[t_0,t^*],\ x\in[a,b]. \qquad (2.1.2)$$

Коэффициенты уравнения (2.1.2) имеют следующий вид: $A=1, B=0, C=0, D=0, E=-1, F=0$, поэтому получаем $B^2-4AC=0$.

Уравнение колебаний – уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\qquad t\in[t_0,t^*],\qquad x\in[a,b]. \qquad (2.1.3)$$

Коэффициенты уравнения (2.1.3) имеют следующий вид: $A=1, B=0, C=-1, D=E=F=G=0$, поэтому получаем $B^2-4AC=4>0$.

Уравнение Лапласа в R^2 – уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0;\qquad x\in[a,b],\ y\in[c,d]. \qquad (2.1.4)$$

Коэффициенты уравнения (2.1.4) имеют следующий вид: $A=1,\ B=0,\ C=1,\ D=E=F=G=0$, поэтому получаем $B^2-4AC=-4<0$.

Общим решением дифференциального уравнения в частных производных называется функция, которая, будучи подставленной в уравнение, обращает это уравнение в тождество по всем независимым переменным в рассматриваемой области. Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения в частных производных называется интегрированием этого уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных зависит от произвольных функций, число которых равно порядку этого уравнения. Любое решение дифференциального уравнения в частных производных, входящих в состав общего решения, называется частным решением этого уравнения.

Для того чтобы найти интересующее нас решение дифференциального уравнения в частных производных, надо присоединить к уравнению некоторые дополнительные условия, которым оно удовлетворяет. Поскольку дифференциальные уравнения в частных производных допускают особые решения, то эта задача может иметь не единственное решение.

§2. Постановка вариационной задачи

Вариационная задача – это бесконечномерная экстремальная задача, т.е. обобщение на бесконечномерный случай конечномерной задачи на экстремум.

Рассмотрим следующую простейшую вариационную задачу. Среди функций $y=y(x)$, $y\in C^{(1)}(x_0,x_1)$, принимающих значения $y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$, найти такую функцию $y(x)$, которая доставит минимум функционалу следующего вида: $I(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y_x)\,dx$. Здесь $F=F(x,y(x),y'(x))$ – некоторая заданная функция переменных x, $y(x)$, $y'(x)$ из класса $C^{(2)}[x_0,x_1]$ по совокупности своих аргументов. Таким образом, простейшая задача вариационного исчисления имеет вид

$$\begin{cases} I(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y_x)dx \to min, \\ y(x_0)=0, y(x_1)=0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Если на допустимой кривой $y(x)$ ($y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$), удовлетворяющей условию $|\tilde{y}(x)-y(x)|\le e$, выполняется $I(\tilde{y})\ge I(y)$, то говорят, что функционал $I(y(x))$ (2.2.1) достигает сильного минимума.

Когда выполнены не только два вышеприведенных предположения, но и требование $|\tilde{y}_x(x)-y_x(x)|\le e$, то говорят, что на кривой $y=y(x)$ достигается слабый минимум.

Все необходимые условия слабого минимума будут и необходимыми условиями сильного минимума, но не наоборот.

§3. Вариация кривой. Вариация функционала

Предположим, что на минимум исследуется допустимая кривая $y=y(x)$ (удовлетворяющая граничным условиям, $x\in[x_0,x_1]$). Другие допустимые кривые можно представить в виде

$$\tilde{y}(x)=y(x)+e\,h(x),\ e\in R,\ h(x_0)=h(x_1)=0, \tag{2.3.1}$$

$$\tilde{y}'_x(x)=y'_x(x)+e\,h_x(x). \tag{2.3.2}$$

Потребуем, чтобы $h(x)\in c^{(1)}(x_0,x_1)$. Функцию $d(y(x))=e\,h(x)$ назовём вариацией допустимой кривой.

Вариация функционала – одно из центральных понятий при изучении бесконечномерных экстремальных задач, т.е. нелинейных функционалов. Оно играет ту же роль, что и дифференциал для нелинейных функций.

Замена приращения функции на дифференциал функции обозначает линеаризацию приращения функции при малом изменении аргумента. Дифференциал нелинейной функции равен главной линейной части её приращения.

Вариация нелинейного функционала равна главной линейной части его приращения. Замена приращения функционала на его вариацию также означает процесс линеаризации.

Вычислим приращение функционала: $I(y)\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y_x)dx$ на допустимых кривых $y(x),y_x(x)$:

$$\Delta I(y)=I(\tilde{y})-I(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,\tilde{y},\tilde{y}_x)dx-\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y_x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}(F(x,\tilde{y},\tilde{y}_x)-F(x,y,y_x))dx.$$

С учётом представления (2.3.1) и (2.3.2) при зафиксированных функциях $h(x)$, $y(x)$ приращение функционала $\Delta I(y)$ является функцией числового параметра e и может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (F(x,\tilde{y},\tilde{y}_x) - F(x,y,y'_x))\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F(x, y+eh, y'_x+eh_x) - F(x,y,y_x))\,dx =$$

$$= \Bigg[\Delta F(x,y,y'_x) = dF(x,y,y'_x) + \frac{1}{2} d^2 F(x,y,y'_x) + o(e^2)\,;$$

$$dF(x,y,y'_x) = e\,(\frac{\partial F(x,y,y'_x)}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y'_x)}{\partial y_x} h_x)\,;$$

$$\frac{1}{2} d^2 F(x,y,y_x) = \frac{1}{2}(dF(x,y,y_x))^2 =$$

$$= \frac{e^2}{2}(\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} hh_x + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} h_x^2) \Bigg] =$$

$$= e \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h'_x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2} e^2 \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} hh_x + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial {y_x}^2} {h_x}^2)\,dx +$$

$$+ o(e^2)\,.$$

Вводя обозначения dI для первой и $d^2 I$ для второй вариаций функционала $I(y)$, сразу получаем следующее представление приращения функционала $\Delta I(y)$:

$$\Delta I = e\,dI + \frac{1}{2} e^2 d^2 I + o(e^2)\,,$$

$$dI = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y} h + \frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x} h'_x)\,dx\,, \tag{2.3.3}$$

$$d^2 I = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y \partial y_x} hh_x + \frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial {y_x}^2} h_x^2)\,dx\,. \tag{2.3.4}$$

Для фактического подсчёта dI и $d^2 I$ удобно использовать следующие формулы: $dI = \frac{d}{de} I(y+eh)\Big|_{e \to 0}$, $d^2 I = \frac{d^2}{de^2} I(y+eh)\Big|_{e \to 0}$. Таким образом, вычисление вариации функционала можно свести к вычислению производной функции одной переменной.

Действительно, подсчитаем первую вариацию функционала $I(y)$ по вышеприведенной формуле и сравним с известным результатом (2.3.3):

$$dI(y,h) = \frac{d}{de}(\mathrm{I}(y + e\,h))\bigg|_{e \to 0} = \frac{d}{de}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y + e\,h, y' + e\,h'_x)dx\bigg|_{e \to 0} =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{de} F(x, y + e\,h,\, y'_x + e\,h'_x)\,dx\bigg|_{e \to 0} =$$

$$= \int_a^b (F'_y(x, y + e\,h, y' + e\,h')h + F'_{y_x}(x, y + e\,h, y' + e\,h')h'_x)dx\bigg|_{e \to 0} =$$

$$= \int_a^b (F'_y(x, y, y')h + F'_{y_x}(x, y, y')\,h'_x)\,dx\,.$$

Окончательно получаем знакомую формулу $d\;I(y,h) = \int_a^b (F'_y h + F'_{y_x} h'_x)dx$.

Теорема: для того чтобы допустимая кривая $y(x)$ доставляла слабый минимум в задачу вариационного исчисления, необходимо, чтобы выполнялись условия: $d\;I(y(x)) = 0$, $d^2 I(y(x)) \ge 0$.

Доказательство: проведем от противного. Пусть $d\,y(x) = a \ne 0$. Тогда $\Delta I = e\,(a + \frac{e}{2} d^2 I + ...)$. Выбираем знак e противоположным знаку a и малым по модулю. Тогда, с одной стороны, функции $|\tilde{y}(x) - y(x)| \le |e||h(x)|$, $|\tilde{y}_x(x) - y_x(x)| \le |e||h_x(x)|$ будут сколь угодно малы. С другой стороны, получаем $\Delta I(y(x)) < 0$, что противоречит определению слабого минимума. Предположим далее, что $d^2 I(y) = a < 0$. Тогда $\Delta I = {}^2[\frac{1}{2}\;+ ...]$, где многоточием обозначены члены с первой и выше степенями e. При достаточно малых e знак квадратной скобки совпадает со знаком a и поэтому опять получаем неравенство $\Delta I(y(x)) < 0$, которое противоречит предположению о достижении слабого минимума на функции $y = y(x)$.

§4. Уравнение Эйлера

Получим дифференциальное уравнение, решение которого $y = y(x)$ превращает в ноль первую вариацию $d\,I(y)$:

$$d\,I(y) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} h + \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x} h_x \right) dx =$$

$$= \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F(x, y, y_x) h_x}{\partial y_x} dx = \right.$$

$$=\frac{\partial F(x,y,y_x)h(x)}{\partial y_x}\Bigg|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)h_x}{\partial y}\right)h(x)dx,\ h(x_0)=h(x_1)=0\ \Bigg]=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}\right)\right)h(x)dx,\ h(x)\neq 0,\ x\in(x_0,x_1).$$

Отсюда следует новое представление для первой вариации:

$$dI(y,h)=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}\right)h(x)\right)dx. \qquad (2.4.1)$$

Дифференциальное уравнение, обращающее в нуль первую вариацию, имеет вид

$$\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y_x}\right)=0. \qquad (2.4.2)$$

Перепишем дифференциальное уравнение (2.4.2) в развернутом виде:

$$\frac{\partial F(x,y,y_x)}{\partial y}-\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial x\partial y_x}-\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y\partial y_x}y_x-\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial {y_x}^2}y_{xx}=0. \qquad (2.4.3)$$

Теорема (Эйлера)

Для того чтобы допустимая кривая $y=y(x), x\in[x_0,x_1]$ доставляла слабый минимум функционалу $I(y)$ простейшей вариационной задачи (2.2.1), необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера (2.4.2) или (2.4.3).

Рассмотрим случаи, когда уравнение Эйлера может быть проинтегрировано в квадратурах.

1. Функция F не зависит от $y': F=F(x,y)$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_y(x,y)=0$. В данном случае это алгебраическое уравнение. Оно определяет конечное число кривых, которые могут не удовлетворять граничным условиям.

2. Функция F зависит от y' линейно $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$. Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0$. Полученное уравнение является алгебраическим уравнением. Решения могут не удовлетворять граничным условиям.

3. Функция F зависит только от y': $F=F(y_x)$. Уравнение Эйлера принимает вид $y''\cdot F_{y'y'}=0$. Откуда следует $y''=0$ и его решениями является семейство прямых $y=c_1x+c_2$. Коэффициенты c_1 и c_2 находятся из граничных условий.

4. Функция F не зависит от y: $F=F(x,y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$. Отсюда сразу получаем первый интеграл уравнения: $F_{y'}(x,y')=c$, где c – произвольная константа. Данное уравнение интегрируется путем разрешения его относительно y' или по правилам для интегрирования уравнений, не разрешенных относительно производной (введение параметра и др.)

5. Функция $F(.)$ не зависит явно от x : $F=F(y,y')$. Уравнение Эйлера принимает вид: $F_y - F_{yy'}\cdot y' - F_{y'y'}\cdot y''=0$. После домножения левой и правой частей уравнения на y' в левой части уравнения получается полная производная функции по x: $\dfrac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=0$. Получаем первый интеграл уравнения: $F-y'F_{y'}=c$, $c\in R$. Интегрируется путем разрешения относительно производной или как в предыдущем пункте.

Задачи для решения. Составить и решить уравнение Эйлера для следующих функционалов:

1. $\int\limits_0^1 (1+x)y_x^2dx \to \min$ 2. $\int\limits_{-1}^1 x^2y_x^2dx \to \min$ 3. $\int\limits_{-1}^1 (y_x^3+y_x^2)dx \to \min$ 4. $\int\limits_0^1 y_x e^{y_x}dx \to \min$

5. $\int\limits_0^1 y_x^3dx \to \min$ 6. $\int\limits_0^2 yy_x^2dx \to \min$ 7. $\int\limits_1^3 y\sqrt{1+{y_x}^2}dx \to \min$

8. $\int\limits_1^3 (y_x + y_x^2\sin^2 x + e^{2x})dx \to \min$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Эйлер Леонард (Euler Leonhard) (1707 – 1783) – выдающийся немецкий математик и механик. Родился в 1707 г. в Базеле. В 1720 – 1724 гг. в Базельском университете слушал лекции по математике Иоганна Бернулли. Почти полжизни Л.Эйлер провёл в России, где энергично помогал создавать российскую науку. В 1726 г. был приглашён работать в Санкт-Петербург. В 1731 – 1741 гг. и начиная с 1766 г. был академиком Петербургской Академии Наук. В 1741 – 1766 гг. работал в Берлине, оставаясь почётным членом Петербургской Академии. Важнейший вклад Леонарда Эйлера в науку – монография «Введение в анализ бесконечно малых» (1748). В 1755 г. выходит дополненное «Дифференциальное исчисление». В 1768 – 1770 гг. – три тома «Интегрального исчисления». В совокупности этот фундаментальный курс является родоначальником всех современных учебников. Леонард Эйлер заложил начало нескольким новым математическим дисциплинам – теории чисел, вариационному исчислению, теории комплексных функций, дифференциальной геометрии поверхностей, специальным функциям. Благодаря Леонарду Эйлеру в математику вошли общая теория рядов, полная теория непрерывных дробей, многочисленные приёмы интегрирования дифференциальных уравнений, число ***e***, обозначение ***i*** для мнимой единицы.

Приведем скрипт в среде MATLAB решения задач данного класса.

Решаем следующую задачу: $\int\limits_0^2 (xy+y^2-2y^2y'_x)dx \to min;\ y(0)=0, y(2)=-1$.

```
syms x y Dy D2y dy d2y; %объявляем переменные
F = x*y+y^2-2*y^2*Dy; % функционал (Dy – первая производная, вторая - D2y)
%используем развёрнутую формулу Эйлера
T = diff(F, y)-diff(diff(F, x), Dy)-diff(diff(F, y), Dy)*Dy-diff(F, Dy, 2)*D2y;
T = strcat(char(T), ' = 0');  disp(T); %выводим полученное уравнение
% видоизменяем переменные для последующей проверки уравнения
S = subs(subs(T, Dy, dy), D2y, d2y);
%проверка уравнения на наличие производных, если они отсутствуют, решаем %алгебраическое уравнение, если присутствуют, решаем дифференциальное уравнение
if strcmp(char(T), char(S)) = = 1
res = solve(T,'y');   %решение алгебраического уравнения (выражаем y через x)
else
res = dsolve(T,'x');  %решение дифференциального уравнения (выражаем y через x)
end;  disp(res); %выводим результат
```

§5. Моделирование обыкновенного дифференциального уравнения

В общем случае вариационный принцип Гамильтона утверждает: для некоторого класса задач с некоторыми определенными условиями из всех возможных состояний реализуется такое состояние, которое придает минимальное значение функционалу, характерному для данного процесса. Функционал системы, как правило, формируется через полную энергию системы.

Пусть материальная точка массой m движется по оси OX. В процессе движения на нее воздействует сила $f(x,t)$ вдоль оси OX. Функция $f(x,t)$ считается заранее известной. Тогда закон $x(t)$ движения точки, как известно, удовлетворяет уравнению Ньютона:

$$m\ddot{x} = f(x,t). \tag{2.5.1}$$

Обозначим первообразную по x для функции $-f(x,t)$ через U:

$$U = -\int\limits_a^b f(x,t)\,dx. \tag{2.5.2}$$

Это потенциальная энергия рассматриваемого механического силового поля. Кинетическая энергия движущейся точки запишется в виде

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{2.5.3}$$

Во введенных обозначениях через потенциальную и кинетическую энергию (2.5.2), (2.5.3), уравнение (2.5.1) можно записать в следующем виде:

$$U'_x - \frac{d}{dt}T'_{\dot{x}} = 0. \tag{2.5.4}$$

Отдельно отметим, что функция U не зависит от $\dot{x}$, функция T не зависит от x.

Введем следующее обозначение:

$$L(t,x,\dot{x}) = T - U. \tag{2.5.5}$$

Данный функционал – полная энергия системы – традиционно называется функцией Лагранжа для рассматриваемой механической системы.

В терминах функции Лагранжа уравнение (2.5.4) перепишем в виде

$$L'_x - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}} = 0 \cdot$$

Данное дифференциальное уравнение, как нетрудно убедиться, является уравнением Эйлера для функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt \ , \qquad (2.5.6)$$

который для рассматриваемой механической системы по традиции называется «действие».

Таким образом, дифференциальный закон движения Ньютона (2.5.1) в терминах вариационного принципа Гамильтона можно сформулировать следующим образом.

Когда заданы начальные и конечные состояния системы $x(t_0) = a$, $x(t_1) = b$, то из всех законов движения системы реализуется тот, для которого вариация функционала «действие» (2.5.6) системы равна нулю, т.е. функционал (2.5.6) принимает минимальное значение.

§6. Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина

Стремительное развитие технических приложений вариационного исчисления в середине двадцатого века привело к появлению нового класса задач. Их принято называть задачами оптимального управления.

Простейшей задачей оптимального управления является задача терминального управления со свободным правым концом.

Пусть движение некоторого объекта описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ t \in T = [t_0, t_1],\ x(t_0) = x_0, \qquad (2.6.1)$$

где x – n-вектор; u – r-вектор; t – скаляр; $\dot{x} = dx/dt$. Относительно функции $f(x,u,t)$ будем предполагать, что она непрерывна по аргументам вместе с функцией $\partial f(x,u,t)/\partial x$.

Допустимым управлением назовем r-мерную кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, принимающую значения из заданного множества U r-мерного пространства

$$u(t) \in U,\ t \in T. \qquad (2.6.2)$$

Каждому допустимому $u(t)$, $t \in T$, соответствует некоторое решение $x(t)$, $t \in T$, (допустимая траектория) уравнения (2.6.1). Качество процесса $x(t)$, $t \in T$, оценивается величиной

$$I(u) = \varphi(x(t_1)), \qquad (2.6.3)$$

где $\varphi(x)$ – скалярная функция из класса $C^{(1)}$. Функцию (2.6.3) назовем критерием качества процесса.

Сформулируем простейшую задачу оптимального управления. Среди допустимых управлений (2.6.1), (2.6.2) найти то, на котором критерий качества (2.6.3) достигает минимального значения.

Решение задачи оптимального управления (2.6.1) – (2.6.3) – управление $u^0(t)$, $t \in T$, – называется оптимальным управлением, траектория $x^0(t)$, $t \in T$, системы (2.6.1), соответствующая оптимальному управлению $u^0(t), t \in T$ – оптимальной траекторией.

Поскольку критерий качества задачи определен на конечных состояниях $x(t_1)$ системы (2.6.1), простейшая задача оптимального управления (2.6.1) – (2.6.3) часто называется задачей терминального управления, или задачей управления конечным состоянием системы.

Наряду с системой (2.6.1) рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений, которую принято называть сопряженной системой:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f'(x,u(x,\psi,t),t)}{\partial x}\psi, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Система интегрируется справа налево, ее решение – вектор $\psi(t)$, $t \in T$ называется вектором сопряженных переменных.

Введем функцию

$$H(x,\psi,u,t) = \psi \cdot f(x,u,t), \quad t \in T,$$

которая по традиции называется гамильтонианом системы (2.6.1). В терминах гамильтониана сопряженная система может быть переписана в виде

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0,\psi,u^0,t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}.$$

Теорема (Принцип максимума Понтрягина). Пусть $u^0(t)$, $t \in T$ – оптимальное управление простейшей задачи (2.6.1) – (2.6.3), $x^0(t)$, $t \in T$ – оптимальная траектория, $\psi^0(t)$, $t \in T$ – решение уравнения

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0,\psi,u^0,t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}. \qquad (2.6.4)$$

Тогда выполняется условие максимума

$$H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t) = \max_{u \in U} H(x^0(t),\psi^0(t),u,t), \; t \in T. \qquad (2.6.5)$$

Отдельно отметим, что, несмотря на то что оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, может оказаться кусочно-непрерывной функцией, функция $H(t) = H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)$ непрерывна на отрезке T.

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности. Если исключить управление $u(t)$ из условия максимума (2.6.5), т.е. найти такую функцию $u = u(x,\psi,t)$, что

$$H(x,\psi,u(x,\psi,t),t) = \max_{u \in U} H(x,\psi,u,t),$$

и подставить результат в уравнения (2.6.1) и (2.6.4), то получим следующую краевую задачу для системы из $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x,u(x,\psi,t),t), \quad x(t_0) = x_0,$$

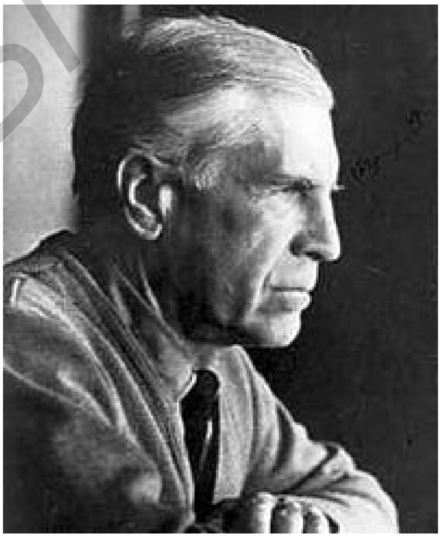
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f'(x,u(x,\psi,t),t)}{\partial x}\psi, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \qquad (2.6.6)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, если задача (2.6.1) – (2.6.3) имеет решение, то оптимальная траектория находится среди решений краевой задачи (2.6.6). В сведении задачи минимизации функционала к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и состоит конечный результат применения принципа максимума к задаче оптимального управления.

В общем случае принцип максимума не является достаточным условием оптимальности: ему могут удовлетворять и неоптимальные управления.

Можно показать, что для многих технических приложений, моделируемых задачами оптимального управления, принцип максимума доставляет и достаточные условия оптимальности.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



Понтрягин Лев Семенович (1908 – 1988) – великий советский математик. Родился 3 сентября 1908 г. в Москве. В возрасте 14 лет в результате несчастного случая потерял зрение. Окончил Московский университет (1929). С 1939 г. заведующий отделом Института математики им. В. А. Стеклова АН СССР, одновременно с 1935 г. профессор МГУ. В топологии открыл общий закон двойственности и построил теорию характеров непрерывных групп. В теории колебаний главные результаты относятся к асимптотике релаксационных колебаний. Л. С. Понтрягин является создателем новой области математики – математической теории оптимальных процессов, в основе которой лежит знаменитый принцип максимума Понтрягина («Математическая теория оптимальных процессов», 1961). Лев Семенович получил фундаментальные результаты по дифференциальным играм. Работы Л. С. Понтрягина и его школы оказали очень большое влияние на развитие теории управления и вариационного исчисления во всём мире. И пробудили большой интерес к математике в целом.

В Беларуси развитие области оптимального управления неразрывно связано с именами Р. Ф. Габасова и Ф. М. Кирилловой. Ими предложен и обоснован новый подход к решению экстремальных задач с линейным, квадратичным, нелинейным критериями качества. Это дало эффективный выход к мощным численным процедурам построения оптимального управления, синтеза оптимального управления, стабилизации управления. А фактически к появлению нового направления, получившего название конструктивной оптимизации. Исследованы задачи управления и наблюдения в условиях неопределенности. Белорусская школа конструктивной оптимизации и управления получила признание мирового научного сообщества.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Кириллова Фаина Михайловна – доктор физико-математических наук (1967), профессор (1972), член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси по специальности «Математическая кибернетика» (1996), заслуженный деятель науки Республики Беларусь (2002). Окончила Уральский госуниверситет (Свердловск, 1954). С 1970 г. заведующая отделом Института математики НАН Беларуси. Фаина Михайловна стала первой в истории Беларуси женщиной-математиком, удостоенной высокого научного звания член-корреспондент НАН Беларуси.

Габасов Рафаил Федорович. Родился в 1935 г. (Магнитогорск, Россия). Рафаил Габасов окончил Уральский госуниверситет (Свердловск, 1958). Доктор физико-математических наук (1970), профессор (1971). Заслуженный деятель науки БССР (1982), член Петровской Академии Наук и Искусств (Санкт-Петербург, 1993), почетный доктор наук Иркутского государственного университета (1995). В Минске, после безвременной кончины своего наставника академика АН БССР Барбашина Евгения Алексеевича Рафаил Габасов возглавил кафедру прикладной математики математического факультета БГУ. В 1970 г. на базе кафедры был создан факультет прикладной математики (ФПМ). Сама кафедра вошла в состав нового факультета и была переименована в кафедру методов оптимального управления (МОУ), которой Р. Ф. Габасов руководил до июля 2000 г. В настоящее время – профессор кафедры МОУ ФПМИ БГУ.

§7. Функционалы от функций нескольких переменных. Постановка вариационной задачи

Выше мы рассматривали функционалы, зависящие от функций одного переменного. В большинстве приложений встречаются функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Ограничимся для простоты случаем функции $u(x,y)$ двух независимых переменных.

Рассмотрим функционал вида

$$J(u)=\iint\limits_G F\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\ . \qquad (2.7.1)$$

На функцию $F\left(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$, определенную в некоторой пространственной области $F(\cdot)\in\Omega\in R^3$, наложено следующее требование: $F(\cdot)\in C^{(2)}(\Omega)$ по совокупности её переменных $x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Пусть Γ – замкнутая пространственная кривая, на которую «натянута» поверхность $u(x,y)$. Проекция Γ на плоскость OXY есть простой замкнутый контур ∂G, ограничивающий область $G\in R^2$. Потребуем, чтобы $u(x,y)$ была определена в односвязной ограниченной области $G\in R^2$, $u(x,y)\in C^{(2)}(G)$, $G\in R^2$ по совокупности переменных. Граничное условие состоит в том, что значение функции $u(x,y)$ задано на контуре ∂G, ограничивающем область G .

Сформулируем следующую задачу. Среди функций $u = u(x, y)$, удовлетворяющих вышеперечисленным условиям, найти такую $u(x, y)$, которая доставляет минимум функционалу вида (2.7.1). Геометрически это означает, что сравниваются между собой всевозможные поверхности вида $u = u(x, y)$ и «натянутые» на один и тот же контур ∂G, ограничивающий область G .

Таким образом, задача вариационного исчисления имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &J(u)=\iint_G F\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \to min,\\ &u(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial G}=j\,(x,y). \end{aligned}\right\} \qquad (2.7.2)$$

Если на допустимой поверхности $u(x, y)$ (поверхности, подчиненной ограничениям на ∂G), удовлетворяющей условию $|\tilde{u}(x,y)-u(x,y)| \le e$, $(x, y)\in G$ выполняется $J(\tilde{u}) \ge J(u)$, то говорят, что функционал $J(u(x, y))$ (2.7.2) достигает на $(x, y)\in G$ сильного минимума.

§8. Вариация поверхности. Вариация функционала

Пусть на минимум исследуется допустимая поверхность, которая удовлетворяет граничным условиям. Другие допустимые поверхности можно представить в виде

$$\tilde{u}(x,y)=u(x,y)+e\,h(x,y), \qquad (2.8.1)$$

$$h(x, y)\Big|_{(x, y)\in\partial G} \equiv 0\,. \qquad (2.8.2)$$

Пусть $\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + e\,h(x, y)$ – некоторая функция, полученная из заданной функции $u(x, y)$. Функцию $d\,(u(x, y)) = e\,h(x, y)$ назовём вариацией допустимой поверхности $u(x, y)$. Вариация $d\,J(u)$ нелинейного функционала $J(u)$ – это главная линейная часть его приращения $\Delta J(u)$ при переходе от $u(x, y)$ к близкой функции $\tilde{u}(x, y) = u(x, y) + e\,h(x, y)$.

При переходе от $u(x, y)$ к $\tilde{u}(x, y)$ функционал (2.7.1) получит приращение

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \iint_G F(\tilde{u})dxdy - \iint_G F(u)dxdy = \iint_G (F(\tilde{u}) - F(u))dxdy\,.$$

С учётом представления (2.8.1) приращение функционала $\Delta J(u)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta J(u) = \iint_G (F(\tilde{u}) - F(u))dxdy =$$

$$= \iint_G (F\,(x, y, u + eh, u'_x + eh'_x, u'_y + eh'_y) - F\,(x, y, u, u'_x, u'_y))\,dxdy \;=$$

$$=\Big[\,\Delta F(x,y,u,u'_x,u'_y)=dF(x,y,u,u'_x,u'_y)+\frac{1}{2}d^2F(x,y,u,u'_x,u'_y)+o(e^2)\,;$$

$$dF\ (x,y,u,u'_x,u'_y) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial u'_x}h_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}h_y\right)e\ ;$$

$$\frac{1}{2}d^2F(x,y,u,u'_x,u'_y) =$$

$$=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_x)^2}(h'_x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_y)^2}(h'_y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_x}hh'_x+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_y}hh'_y+2\frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\partial u'_y}h'_xh'_y\right)\frac{e^2}{2}\Bigg]=$$

$$= e\iint\limits_G\left(\frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial u'_x}h_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}h_y\right)dxdy\ + \frac{e^2}{2}\iint\limits_G\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h^2dxdy\ +$$

$$+\frac{e^2}{2}\iint\limits_G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_x)^2}(h'_x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_y)^2}(h'_y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_x}hh'_x+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_y}hh'_y+2\frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\partial u'_y}h'_xh'_y\right)dxdy+$$
$$+o(e^2)\,.$$

Вводя обозначения dJ для первой и d^2J для второй вариаций функционала $J(u)$:

$$dJ = \iint\limits_G\left(\frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial u'_x}h_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}h_y\right)dxdy\ , \qquad (2.8.3)$$

$$d^2J=\iint\limits_G d^2F=\iint\limits_G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_x)^2}(h'_x)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial (u'_y)^2}(h'_y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_x}hh'_x+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_y}hh'_y+\frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\partial u'_y}h'_xh'_y\right)dxdy\ ,$$

получаем, что приращение функционала $\Delta J(u)$ является функцией числового параметра e и может быть представлено в виде: $\Delta J(u)=e\,d\,J+\frac{1}{2}e^2d^2J+o(e^2)$.

Для фактического подсчёта $d\ J$ и d^2J удобно использовать следующие формулы: $d\,J=\frac{d}{de}J(u+e\,h)\Big|_{\to 0}$; $d^2J=\frac{d^2}{de^2}J(u+e\,h)\Big|_{e\to 0}$. Действительно, подсчитаем первую вариацию функционала $J(u)$ по вышеприведенной формуле и сравним с известным результатом (2.8.3):

$$dJ = \frac{d}{de}(J(u+eh))\Big|_{e\to 0} = \frac{d}{de}\iint\limits_G F(x,y,u+eh,u'_x+eh'_x,u'_y+eh'_y)dxdy\Big|_{e\to 0} =$$

$$= \iint\limits_G\frac{d}{de}F(x,y,u+eh,u'_x+eh'_x,u'_y+eh'_y)dxdy\ \Big|_{e\to 0} =$$

$$= \iint\limits_G\frac{d}{de}F(x,y,u,u'_x,u'_y)dxdy\ =$$

$$=\iint\limits_G(F'_u(x,y,u,u'_x,u'_y)h+F'_{u'_x}(x,y,u,u'_x,u')h'_x+F'_{u'_y}(x,y,u,u'_x,u')h'_y)dxdy\ .$$

То есть получили уже знакомую формулу $d\ J=\iint\limits_G(F'_uh+F'_{u'_x}h'_x+F'_{u'_y}h'_y)\,dxdy$.

§9. Уравнение Остроградского

Решение вариационной задачи (2.7.2) возможно только вдоль тех поверхностей, на которых первая вариация $d\,J(u)$ функционала $J(u)=\iint\limits_G F\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$ обращается в нуль, т.е. $d\,J(u)=0$, $\forall h(x,y)$, удовлетворяющих (2.8.2). Получим дифференциальное уравнение, решение которого $u=u(x,y)$ превращает в нуль первую вариацию функционала: $d\,J(u)=0$.

$$dJ(u)=$$

$$=\iint\limits_G\left(\frac{\partial F(x,y,u,u'_x,u'_y)}{\partial u}h+\frac{\partial F(x,y,u,u'_x,u'_y)}{\partial u'_x}h'_x+\frac{\partial F(x,y,u,u'_x,u'_y)}{\partial u'_y}h'_y\right)dxdy\;=$$

$$=\left[\int F'_{u'_x}h'_x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=F'_{u'_x}h'_x\;,\;du=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'_x}\right)\\ dv=h'_x\,dx\;,\;v=h\end{array}\right]=\right.$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)h-\int h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)dx\;;$$

$$\int F'_{u'_y}h'_y\,dy=\left[\begin{array}{l} u=F'_{u'_y}h'_y\;,\;du=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\\ dv=h'_y\,dy\;,\;v=h\end{array}\right]=$$

$$\left.=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)h-\int h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)dy\;\right]=$$

$$=\iint\limits_G(F'_u h)dxdy\;+\int\limits_{G_y}\left(F'_{u'_x}h\big|_G-\int\limits_{G_x}h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)dx\right)dy\;+$$

$$+\int\limits_{G_x}\left(F'_{u'_y}h\big|_G-\int h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)dy\right)dx=0\;.$$

Из условия (2.8.2) следует, что $h\big|_{\partial G}=0$, поэтому полученный результат перепишем в следующем виде:

$$dJ(u)=\iint\limits_G(F'_u h)dxdy\;-\iint\limits_G h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)dxdy\;-\iint\limits_G h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)dxdy\;=$$

$$=\iint\limits_G h\left(F'_u-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\right)dxdy\;=0\,. \qquad (2.9.1)$$

Из формулы (2.9.1) в силу произвольного выбора h, не равного нулю, сразу следует формула

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0. \qquad (2.9.2)$$

Уравнение (2.9.2) – нелинейное уравнение в частных производных второго порядка с непостоянными коэффициентами. Оно называется уравнением Остроградского (было впервые получено М. В. Остроградским в 1834 г.).

Выпишем уравнение Остроградского в развернутой форме:

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u'_x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\partial u'_x}\frac{\partial u'_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u'_y\partial u'_x}\frac{\partial u'_y}{\partial x}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial u'_y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial u'_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u'_y\partial u'_y}\frac{\partial u'_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\partial u'_y}\frac{\partial u'_x}{\partial y}\right)=0.$$

Искомая функция $u(x,y)$ определяется как решение уравнения Остроградского и дополнительно должна удовлетворять условию вдоль границы

$$u(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial G}=j\,(x,y)\ .$$

Для того чтобы поверхность $u(x,y),(x,y)\in G$, $u(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial G}=j\,(x,y)$ доставляла сильный минимум функционалу $J=J\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)$, необходимо, чтобы $u(x,y)$ удовлетворяла условию Остроградского (2.9.2).

Задачи для решения. Составить и решить уравнение Остроградского для следующих функционалов:

1. $\iint\limits_G\left(u_x^2+u_y^2+2xyu\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 2;\\0\le y\le 1;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{100}.$

2. $\iint\limits_G\left(3u_x^2+u_y^2+2xu\cos y\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 2;\\-1\le y\le 1;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2}{200}-\frac{y}{100}.$

3. $\iint\limits_G\left(3u_x^2-u_y^2+2u\sin px\sin\frac{py}{2}\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 1;\\0\le y\le 2;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2-2y}{200}.$

4. $\iint\limits_G\left(u_x^2-2u_y^2+2xu\sin py\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 2;\\0\le y\le 1;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2}{200}-\frac{y}{50}.$

5. $\iint\limits_G\left(u_x^2+2u_y^2+u^2+2xu\cos y\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 2;\\-1\le y\le 1;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2}{100}-\frac{y}{60}.$

6. $\iint\limits_G\left(2u_x^2+u_y^2+u^2+2yu\cos x\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}-1\le x\le 1;\\0\le y\le 1;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x^2}{100}+\frac{y}{60}.$

7. $\iint\limits_G\left(u_x^2+5u_y^2+u^2+2x^2yu\right)dxdy\to min;\quad G:\ \begin{cases}0\le x\le 2;\\0\le y\le 2;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x}{100}+\frac{y^2}{160}.$

Приведем скрипт в среде MATLAB решения данной задачи, используя инструментарий ToolBox PDE (Partial Differential Equations).

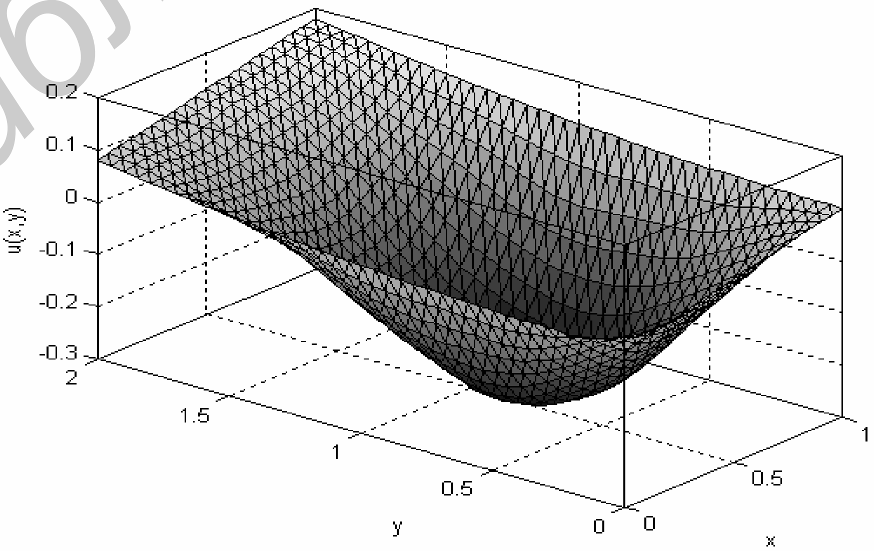
Решаем вариационную задачу $J(z)=\iint\limits_G\left(u_x^2-2u_y^2+2yu\left(\sin px+\frac{x}{5}\right)\right)dxdy\to\min;$

$$G:\begin{cases}0\le x\le 1;\\ 0\le y\le 2;\end{cases}\quad \partial G=\frac{x}{10}+\frac{y^2}{50}.\ \text{Введем обозначения: } u=u(x,y),\ p=\frac{\partial u}{\partial x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

```
syms x y u Dux Duy D2ux2 D2uxy D2uy2 % переменные
F = Dux^2-2*Duy^2+2*y*u*(sin(pi*x)+x/5);  % подынтегральная функция
uc = x/10+y^2/50;  % функция граничных условий
x1=0;  x2=1;  y1=0;  y2=2;  % координаты ограничивающего прямоугольника
fprintf('Подынтегральная функция: F=%s\n',char(F))
fprintf('Граничное условие на контуре: u=%s\n',char(uc))
fprintf('Область: %d<=x<=%d;  %d<=y<=%d\n',x1,x2,y1,y2)
% ----------------------------------------------------------------------------------------
dFdu = diff(F,u); dFdp = diff(F,Dux); dFdq = diff(F,Duy);%поиск частных производных
% ----------------------------------------------------------------------------------------
% формируем полные производные ∂Fp/∂x и ∂Fq/∂y
d_dFdp_dx = diff(dFdp,x); d_dFdp_du = diff(dFdp,u); d_dFdp_dp = diff(dFdp,Dux);
d_dFdp_dq = diff(dFdp,Duy);
dFpdx = d_dFdp_dx + d_dFdp_du*Dux + d_dFdp_dp*D2ux2 + d_dFdp_dq*D2uxy
d_dFdq_dy = diff(dFdq,y); d_dFdq_du = diff(dFdq,u); d_dFdq_dp = diff(dFdq,Dux);
d_dFdq_dq = diff(dFdq,Duy);
dFqdy = d_dFdq_dy + d_dFdq_du*Duy + d_dFdq_dp*D2uxy + d_dFdq_dq*D2uy2
% ----------------------------------------------------------------------------------------
% Формируем уравнение Остроградского
Ost = dFdu-dFpdx-dFqdy
OstR = -subs(Ost,{u,D2ux2,D2uy2,D2uxy},{0,0,0,0});  % правая часть
OstL = Ost+OstR;  % левая часть
deqOst = [ char(OstL) '=' char(OstR) ];  % уравнение
fprintf('Уравнение Остроградского:\n%s\n',deqOst)
% ----------------------------------------------------------------------------------------
% для решения используем специальный инструментарий – Partial Differential Equation
%Toolbox (PDE), в котором используется метод конечных элементов (FEM). Для
%применения PDE нужно привести ДУ к виду: – div(C grad u) + au = f и дополнить его
%граничными условиями типа Дирихле: hu = r или Неймана: div (C grad u) + qu = g .
% Задаем геометрию (область решения), формируем треугольную FEM-сетку и
рисуем %её.Печатаем количество узлов и элементов.
del=min(x2-x1,y2-y1)/20  % размер элемента
nx=round((x2-x1)/del);   ny=round((y2-y1)/del);
[p,e,t]=poimesh('squareg',nx,ny);  % формируем FEM-сетку
p(1,:)=(p(1,:)+1)/2*(x2-x1)+x1;
p(2,:)=(p(2,:)+1)/2*(y2-y1)+y1;  % приводим к прямоугольной
np=size(p,2);  nel=size(t,2);  % число узлов и элементов
fprintf('Число узлов сетки разбиения np=%d\n',np)
fprintf('Число конечных элементов nel=%d\n',nel)
pdemesh(p,e,t)  % рисуем сетку
da=daspect;  da(1:2)=min(da(1:2)); % находим текущие масштабы осей и выравниваем их
daspect(da);  % устанавливаем одинаковые масштабы
% ----------------------------------------------------------------------------------------
% Формируем *.m-файл для вычисления граничных условий Дирихле (boundary M-file),
%который должен иметь структуру: [q,g,h,r]=pdebound(p,e,u,time). Формируем строки для
%записи в файл и записываем их. Файл должен быть размещён в каком-либо каталоге,
%доступном системе MATLAB – у нас это каталог  C:\MATLAB701\work\
s{1}='function [q,g,h,r]=boundmem(p,e,u,time)';  % заголовок
s{2}='nb=size(e,2);';  % определили размерности
```

```
s{3}='q=zeros(1,nb);  g=zeros(1,nb);';  % задали массивы условий Неймана
s{4}='h=ones(1,2*nb);  r=zeros(1,2*nb);';  % задали массивы условий Дирихле
s{5}='xb=[p(1,e(1,:)),p(1,e(2,:))];';  % столбец координат x
s{6}='yb=[p(2,e(1,:)),p(2,e(2,:))];';  % столбец координат y
ucf=subs(uc,{x,y},{sym('xb'),sym('yb')});  % формула для подстановки
s{7}=['r=' vectorize(ucf) ';'];
disp('Текст файла граничных условий boundmem.m:')
fprintf('%s\n',s{:})
fid = fopen ('C:\MATLAB701\work\boundmem.m', 'w' );
fprintf(fid,'%s\n',s{:});
fclose(fid);  % закрываем файл
% -----------------------------------------------------------------------------------------
% Подготовка коэффициентов (C, a) для решения ДУ методом конечных элементов. %Вычисляем правую часть уравнения Остроградского сначала аналитически, а потом в %центрах тяжести конечных элементов.
a=eval(subs(OstL,{u,D2ux2,D2uxy,D2uy2},{1,0,0,0}))
c11=-eval(subs(OstL,{u,D2ux2,D2uxy,D2uy2},{0,1,0,0}));
c12=-eval(subs(OstL,{u,D2ux2,D2uxy,D2uy2},{0,0,1,0}))/2;
c22=-eval(subs(OstL,{u,D2ux2,D2uxy,D2uy2},{0,0,0,1}));
c=[c11;c12;c12;c22]
fp = subs(OstR,{x,y},{p(1,:),p(2,:)});  % f в узлах
f = (fp(t(1,:))+fp(t(2,:))+fp(t(3,:)))/3;  % f в ц.т. конечных элементов
% -----------------------------------------------------------------------------------------
% Решаем уравнение и рисуем график решения
z = assempde('boundmem',p,e,t,c,a,f); % решили
pdeplot(p,e,t,'xydata',z,'zdata',z,'mesh','on','colorbar','off');  % рисуем
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('u(x,y)');  % оси
v = axis;  % границы осей
da = daspect;  % масштаб осей
da(1:2) = min(da(1:2));
daspect(da)  % выравняли масштаб осей
axis(v); % оставили границы
colormap(gray)  % выбрали палитру
grid on;  box on;  % показали сетку и внешний контур
```

Ниже на рисунке приведен график поверхности, являющейся решением задачи.



ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Остроградский Михаил Васильевич (1801 – 1861) – выдающийся русский математик и механик, член Петербургской Академии Наук. Кавалер высших орденов России. Окончил курс математического факультета в Харьковском университете. Во Франции, в Париже посещал лекции в Сорбонне и в College de France. Труды Михаила Остроградского посвящены самым разнообразным отделам математики и механики. Исследования Остроградского по механике обосновали понимание вариационных принципов с математической точки зрения. Поэтому интегрально-вариационный принцип, сформулированный Гамильтоном, справедливо называется принципом Гамильтона – Остроградского. Доказал теорему в области интегральной теории поля, известную ныне как формула Остроградского. Написал ряд учебников по высшей математике.

§10. Пример моделирования линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

Отметим следующую особенность вариационного принципа моделирования. Он формулируется в терминах потенциальной и кинетической энергии изучаемой системы. Это дает возможность распространить принцип Гамильтона на физические поля, для которых имеются аналоги в математическом описании. Например, малые колебания струны – материя в форме вещества и электромагнитом колебании – материя в форме поля, описываются одним и тем же гиперболическим дифференциальным уравнением в частных производных.

Выведем уравнения малых поперечных колебаний струны. Струна располагается между точками O и L на оси x и совершает малые колебания около этого положения. Обозначим $U(x,t)$ – профиль струны в момент времени t, когда концы струны O и L закреплены $U(O,t)=U(L,t)=0$.

Кинетическая энергия струны, как сумма кинетических энергий её частиц, выражается интегралом: $T=\int_0^L U_t^2 \frac{1}{2} m dx$, где $m=m(x)$ – плотность струны в точке x, $m \cdot dx$ – масса элемента струны, отвечающая интервалу dx на оси x.

Выражение потенциальной энергии следует из механического определения струны. Струна – однородная механическая система, поэтому потенциальная энергия для каждого её участка пропорциональна растяжению по сравнению с положением равновесия $dU=p(x)\left(\sqrt{1+U_x^2}dx-dx\right)$, где $p=p(x)$ – модуль упругости струны – модуль Юнга. Будем считать, что U_x – достаточно малая величина, настолько, что можно пренебречь U_x^4. В этом случае справедлива следующая эквивалентность: $(\sqrt{1+U_x^2}-1)dx \approx \frac{1}{2}U_x^2 dx$, откуда получаем $U = \int_0^1 \frac{p(x)}{2} U_x^2 dx$. Функционал Лагранжа $L = T - U$ в нашем случае имеет следующий вид: $L = \frac{1}{2}\int \left(mU_t^2 - pU_x^2\right)dx$. Поэтому функционал Гамильтона $\int L dt$ будет двойным интегралом следующего вида: $\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t (mU_t^2 - pU_x^2)dxdt$. Выпишем уравнение Эйлера – Остроградского $-\frac{\partial}{\partial t}(mU_t) + \frac{\partial}{\partial x}(pU_x) = 0$. Предположим что коэффициенты p и m – постоянны, т.е. струна однородна по плотности и упругости. Тогда сразу получаем следующее уравнение:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.10.1)$$

Это уравнение малых поперечных колебаний струны – линейное гиперболическое уравнение в частных производных второго порядка.

Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПРЯДКА. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ.

Дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение следующего вида:

$$F(x_1,\mathbf{K},x_n,\,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\mathbf{K},\frac{\partial u}{\partial x_n})=0\,.$$

Здесь $x_1,\mathbf{K},x_n$ – независимые переменные, $u(x_1,\mathbf{K},x_n)$– искомая функция, F– заданная функция.

Линейным ДУ в ЧП первого порядка называется уравнение вида

$$A_1(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\mathbf{K}+A_n(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=B(x_1,\mathbf{K},x_n)u+f(x_1,\mathbf{K},x_n)\ ,$$

где $A_i(i=\overline{1,n}),B,u,f$ – некоторые заданные функции, u – искомое решение; функции $B,A_i\,(i=\overline{1,n})$ – не зависят от u, это коэффициенты уравнения.

Обобщением линейного уравнения является квазилинейное уравнение

$$A_1(x_1,\mathbf{K},x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\mathbf{K}+A_n(x_1,\mathbf{K},x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,\mathbf{K},x_n)\,.$$

Оно линейно относительно $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. В квазилинейном уравнении коэффициенты зависят от u, но не зависят от производных.

§1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$A_1(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\mathbf{K}+A_n(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=B(x_1,\mathbf{K},x_n)u+f(x_1,\mathbf{K},x_n)\,.$$

(3.1.1)

Считают, что уравнение задано в области D переменных $x_1,\mathbf{K},x_n$. Функции $A_i(i=\overline{1,n}),B,\ u\ f$ непрерывно дифференцируемы в этой области, не все равные нулю одновременно ($\sum_{i=1}^{n}A_i^2\neq 0$, $\forall(x_1,\mathbf{K},x_n)\in D$).

Уравнению (3.1.1) сопоставим следующую систему ОДУ:

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,\mathbf{K},x_n)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,\mathbf{K},x_n)}=\mathbf{K}=\frac{dx_n}{A_n(x_1,\mathbf{K},x_n)}\,.$$

(3.1.2)

Уравнения (3.1.2) определяют кривые для координат $x_1,\mathbf{K},x_n$. Кривые проходят через любую точку области D, нигде не пересекаясь. Эти кривые называются характеристиками уравнения (3.1.1).

Характеристики примечательны тем, что выражение в левой части уравнения (3.1.1) представляет собой производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции u по направлению l вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить (3.1.1) как ОДУ, описывающее поведение u вдоль характеристики.

Обоснуем данный подход. Первым интегралом системы (3.1.2) является функция $y\ (x_1, \mathbf{K}, x_n)$, сохраняющая постоянное значение на решении системы (3.1.2). Существует ровно $(n-1)$ независимых первых интегралов (3.1.2):

$$\left.\begin{aligned} &y_1\ (x_1,\mathbf{K},x_n)=c_1,\\ &y_2\ (x_1,\mathbf{K},x_n)=c_2,\\ &\mathbf{L}\ \ \mathbf{L}\ \ \mathbf{L}\\ &y_{n-1}(x_1,\mathbf{K},x_n)=c_{n-1}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.3)$$

Здесь $x_1, \mathbf{K}, x_n$ – решения (3.1.2), $c_1,\mathbf{K},c_{n-1}$ – произвольные постоянные.

Отметим, что часто сами соотношения $y_i\ (x_1, \mathbf{K}, x_n)=c_i$ называются первыми интегралами (3.1.2). Функции $y_i\ (x_1,\mathbf{K},x_n)$ часто удается определить из (3.1.2).

Будем рассматривать параметрическое задание характеристики как решения системы

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,\mathbf{K},x_n)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,\mathbf{K},x_n)}=\mathbf{K}=\frac{dx_n}{A_n(x_1,\mathbf{K},x_n)}=dt\ , \qquad (3.1.4)$$

полагая, что изменение переменной t помещают точку с координатами $(x_1, \mathbf{K}, x_n)$ по характеристике. Решение системы (3.1.4) (характеристика, определяемая параметрами $c_1, \mathbf{K}, c_{n-1}$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1\,(t\ ,c_1\,,\mathbf{K}\ ,c_{n-1}),\\ &x_2 = x_2\,(t\ ,c_1\,,\mathbf{K}\ ,c_{n-1}),\\ &\mathbf{L}\ \ \ \mathbf{L}\ \ \ \mathbf{L}\\ &x_n = x_n\,(t\ ,c_1\,,\mathbf{K}\ ,c_{n-1}).\end{aligned}$$

(3.1.5)

Введем следующие функции переменной t и параметров $c_1, \mathbf{K}, c_{n-1}$:

$$\left.\begin{aligned} n(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}) &= u(x_1,\mathbf{K},x_n)\Big|_{x_i=x_i(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}),} \\ b(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}) &= B(x_1,\mathbf{K},x_n)\Big|_{x_i=x_i(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}),} \\ F(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}) &= f(x_1,\mathbf{K},x_n)\Big|_{x_i=x_i(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}),} \end{aligned}\right\} \quad i=\overline{1,n}. \qquad (3.1.6)$$

Дифференцируя первое из соотношений (3.1.6) и учитывая (3.1.4), получаем

$$\frac{dn}{dt}=\frac{du}{dt}\Big|_{x_i=x_i(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1})}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t}+\mathbf{K}+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot A_1+\mathbf{K}+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot A_n.$$

Видно, что исходное уравнение (3.1.1) с учетом полученного теперь соотношения может быть записано в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t}=b(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1})n+F(t,c_1,\mathbf{K},c_{n-1}). \qquad (3.1.7)$$

Уравнение (3.1.7) описывает изменение n как функции от t при любом фиксированном наборе параметров $c_1,\mathbf{K},c_{n-1}$, т.е. на любой характеристике.

Уравнение (3.1.7) – линейное неоднородное ОДУ первого порядка. Как известно, существует формульное представление решения данного уравнения методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной). Оно имеет следующий вид:

$$n=e^{\int b\,dt}\,[\,q+\int Fe^{-\int b\,dt}\,dt\,]. \qquad (3.1.8)$$

Функции b,F зависят от $c_1,\mathbf{K},c_{n-1}$, как от параметров, постоянная q – произвольная функция тех же параметров: $q=q(c_1,\mathbf{K},c_{n-1})$.

Возвращаемся к исходным переменным, учитывая, что $n=u(x_1,\mathbf{K},x_n)$, $c_i=y_i(x_1,\mathbf{K},x_n)$, $i=\overline{1,n-1}$, и выражая t через $x_1,\mathbf{K},x_n$ с помощью (3.1.4).

Таким образом, решение уравнения (3.1.1) определено с точностью до q:

$$q=q(y_1(x_1,\mathbf{K},x_n),\mathbf{K},y_{n-1}(x_1,\mathbf{K},x_n)),$$

где $q(.)$ – произвольная функция от $n-1$ первых интегралов системы для характеристик (3.1.2).

Если рассмотреть частный случай, когда $B=0$, $f=0$, то для уравнения

$$A_1(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\mathbf{K}+A_n(x_1,\mathbf{K},x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (3.1.9)$$

получаем соотношение $\frac{du}{dt}\Big|_{C_1,\mathbf{K},C_{n-1}}=\frac{du}{dv}=0$.

Это соотношение выражает закон постоянства решения вдоль характеристики. Отсюда сразу получаем общее решение уравнения:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=q\,(y_{\,1}(x_1,\ldots,x_n),\mathbf{K},y_{\,n-1}(x_1,\ldots,x_n))\,.$$

Здесь $q\,(.)$ – некоторая произвольная функция своих аргументов. Значение u зависит лишь от того, на какой характеристике лежит точка $x=(x_1,\mathbf{K},x_n)$.

Решение уравнения (3.1.9) так же, как и решение исходного уравнения (3.1.1), определено с точностью до произвольной функции n–1 первых интегралов системы (3.1.3).

Пример. Решим следующее линейное уравнение в частных производных первого порядка $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=y\cdot e^x$. Составляем уравнение характеристик: $\dfrac{dx}{e^x}=\dfrac{dy}{y^2}$. Решаем уравнение и находим первый интеграл: $e^{-x}-\dfrac{1}{y}=c$. Вводим параметр t вдоль характеристики согласно (3.1.4), получаем: $dt=\dfrac{dy}{y^2}$. Вновь интегрируя данное уравнение, получаем (обозначая константу через t_0): $y=\dfrac{1}{t_0-t}$. Из выражения для первого интеграла находим: $e^{-x}=c+\dfrac{1}{y}=c+t_0-t$, $\dfrac{y}{e^{-x}}=\dfrac{1}{t_0-t}\cdot\dfrac{1}{t_0-t+c}$. Получаем уравнение (3.1.7) в следующем виде: $\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{1}{t_0-t}\cdot\dfrac{1}{t_0-t+c}=(\dfrac{1}{t_0-t}-\dfrac{1}{t_0-t+c})\cdot\dfrac{1}{c}$. Интегрируя, находим:

$$v=\int(\frac{1}{t_0-t}-\frac{1}{t_0-t+c})\frac{1}{c}dt=(-\ln(t_0-t)+\ln(t_0-t+c))\frac{1}{c}+F(c)=\frac{1}{c}\ln\frac{t_0-t+c}{t_0-t}+F(c)\,.$$

Здесь $F(.)$ – некоторая произвольная функция. Возвращаясь к исходным переменным x и y, получаем общее решение нашего уравнения:

$$u(x,y)=\frac{1}{e^{-x}-\frac{1}{y}}\cdot\ln(\frac{e^{-x}}{\frac{1}{y}})+F(e^{-x}-\frac{1}{y})=\frac{\ln y-x}{e^{-x}-\frac{1}{y}}+F(e^{-x}-\frac{1}{y})\,.$$

Приведем скрипт в среде MatLab для решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

% Рассматриваем уравнение для функции от двух переменных u=u(x,y) вида

$A_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+A_2\dfrac{\partial u}{\partial y}=f$, где $A_1 = A_1(x,y)$, $A_2 = A_2(x,y)$, f = f(x,y).

```
function LinSolve(A1,A2,f);
syms u x y t c n dn;
% уравнения характеристик
int1 = int(A1^(-1),'x');
```

```
int2 = int(A2^(-1),'y');
int1 = int1+c; % добавляем константу после интегрирования
str = int1+int2;
str = strcat( char(str),'=0' ); % первый интеграл
% вводим параметр t вдоль характеристики, связываем x и t
if ( diff(int1,'x') ~= 0 )
eqx = strcat( char(int1),'=t' );
else
eqx = strcat( char(int2),'=t' ); end;
x = solve( eqx, 'x' ); % выражаем x через t
x = simplify(x);
disp('x = '); disp( char(x) ); disp(' ');
% связываем y и введенный параметр t
if ( diff(int1,'y') ~= 0 )
eqy = strcat( char(int1),'=t' );
else
eqy = strcat( char(int2),'=t' ); end;
y = solve( eqy, 'y' ); % выражаем y через t
y = simplify(y);
disp('y = '); disp( char(y) ); disp(' ');
% полагаем левую часть уравнения равной dn/dt, выражаем функцию n
dn = f;
dn = eval(dn); % подставляем переменные, выраженные через t
n = int(dn,'t'); % выражаем n
n = simplify(n);
disp('n = '); disp( strcat( char(n),'+Q' ) ); disp(' ');
% выражаем константу c из первого интеграла
c = solve( str, 'c' );
c = simplify(c);
disp('c = '); disp( char(c) ); disp(' ');
% возвращаемся к исходным переменным через полученную константу c
t = solve(eqx,'t'); % выражаем t через c
n = eval(n); % подставляем t в n
n = n+c;
n = simplify(n);
disp('u = '); disp( char(n) ); disp(' '); % выводим результат
```

Замечание. Вызов функции LinSolve(. , . , .) осуществить самостоятельно.

Задачи для решения. Решить следующее уравнение в частных производных первого порядка. Построить частное решение и проверить его:

1. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}-x\dfrac{\partial u}{\partial x}=u$. 2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy+u$. 3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$. 4. $x^3\dfrac{\partial u}{\partial x}-x^2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{3}{2}uy$.

§2. Задача Коши для линейного уравнения

Пусть требуется найти решение уравнения (3.1.1) в области D изменения переменных $x_1,\ldots,x_n$ при дополнительном условии

$$u\big|_S=F(x_1,\ldots,x_n). \tag{3.2.1}$$

В этом случае говорят, что задана задача Коши, которую записывают так:

$$\begin{cases} A_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\mathbf{K}+A_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=B\cdot u+f, \\ u\big|_S=F(x_1,\mathbf{K},x_n). \end{cases}$$

(3.2.2)

Здесь S – гладкая поверхность, лежащая в D, заданная следующим уравнением $S: j\,(x_1,\mathbf{K},x_n)=0$. Коэффициенты $A_i,\ i=\overline{1,n},\ B,\ f,F$ – непрерывно дифференцируемые функции; $\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \neq 0$.

Теорема: пусть поверхность S удовлетворяет следующему условию: любая характеристика, лежащая в D, пересекает S один и только один раз; причем в точке пересечения характеристика не является касательной к S. Тогда решение задачи Коши (3.2.2) существует и единственно.

Доказательство: через точку $x=(x_1,...,x_n)$, в которой мы хотим найти решение, проходит единственная характеристика Г уравнения (3.1.1). Эта характеристика пересекает поверхность S в некоторой однозначно определенной точке $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)$. Поэтому получаем на характеристике Г :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=b\cdot v+F, \\ v\big|_{t=t_0}=\Phi(x_1^*,...,x_n^*). \end{cases} \qquad (3.2.3)$$

Здесь t_0 – значение переменной t в точке пересечения характеристики Г с поверхностью S. Находим $v(t)$, а следовательно, и функцию $u(x_1,...,x_n)$ на всей кривой Г, в том числе в точке x.

При наложенных на функции A_i, B, f условиях, функция u будет иметь непрерывные частные производные и удовлетворять уравнению (3.2.2). Что и требовалось доказать.

Опишем схему решения задачи (3.2.2):

1) из уравнения характеристик (3.1.2) находим $n-1$ первый интеграл $y_1,\mathbf{K},y_{n-1}$;

2) фиксируем произвольную точку $x=(x_1,\mathbf{K},x_n)$, в которой ищется решение;

3) фиксируем значения функций y_i в точке x: $y_i(x_1,\mathbf{K},x_n)=c_i,\ i=\overline{1,n-1}$;

4) в точке $x^*=(x_1^*,\mathbf{K},x_n^*)$ имеем те же значения первых интегралов: $y_i(x_1^*,\mathbf{K},x_n^*)=c_i,\ i=\overline{1,n-1};\ x^*\in S$. Кроме того, x^* принадлежит поверхности S.

5) Отсюда получаем n уравнений для определения n координат точки x^*:

$$\begin{cases} y_i(x_1^*,\mathbf{K},x_n^*)=y_i(x_1,\mathbf{K},x_n), i=\overline{1,n-1}, \\ j\,(x_1^*,\mathbf{K},x_n^*)=0. \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

Система (3.2.4) позволяет найти точку x^*, тем самым определяя дополнительное условие в задаче (3.2.3). Решая задачу, находим v.

Возвращаясь от $c_1, \mathbf{K}, c_n, t$ к исходным переменным $x_1, \mathbf{K}, x_n$, находим искомое решение $u(x_1, \mathbf{K}, x_n)$.

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + k_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = j\ (x). \end{cases} \qquad (3.2.5)$$

В области $-\infty < x < \infty, t > 0$, $k_0 = const$; $j\ (x)$ – заданная функция; $u = u(x,t)$.

Уравнение характеристик для (3.4.1) имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\,x}{\mathrm{k}_0}. \qquad (3.2.6)$$

Интегрируя (3.2.6), находим первый интервал уравнения характеристик: $x - k_0 \cdot t = c$. Функция $y\ (x,t) = x - k_0 \cdot t$ сохраняет постоянное значение, если переменные x, t связаны уравнением (3.2.6). Общее решение уравнения (3.2.5) будет иметь следующий вид: $u(x,t) = F(y\ (x,t)) = F(x - k_0 \cdot t)$, где $F(.)$ – произвольная функция. По своему физическому смыслу выражение $F(x - k_0 \cdot t)$ описывает движение со скоростью k_0 фиксированного профиля $F(x)$ в сторону больших значений x (поэтому уравнение (3.2.5) называется уравнением конвективного переноса). При $t = 0$ имеем: $u(x,0) = F(x)$. С другой стороны, из начальных условий: $u(x,0) = j\ (x) \Rightarrow F(x) = j\ (x)$. Ответ: $u(x,t) = j\ (x - k_0 \cdot t)$.

Глава 4. Линейные параболические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка

Прямое моделирование уравнения теплопроводности. Краевая задача Штурма – Лиувилля. Краевые задачи для уравнений параболического типа. Метод решения однородной задачи Дирихле путем разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Решение задачи Коши методом интегрального преобразования Фурье. Сопряженные краевые системы для уравнений параболического и эллиптического типов. Обобщенные решения. Задача оптимального управления параболической системой.

§1. Прямое моделирование уравнения теплопроводности

Проведем прямое моделирование процесса теплопроводности. Рассмотрим однородный стержень длиной l. Будем предполагать, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и во всех точках поперечного сечения стержня температура одинакова. Изучим процесс распространения тепла в стержне. Расположим ось Ox так, чтобы один конец стержня совпадал с точкой $x=0$, а другой с точкой $x=l$. Пусть $u(x,t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент t. Опытным путем установлено, что количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой x за единицу времени, определяется формулой

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial x}S, \tag{4.1.1}$$

где S – площадь сечения рассматриваемого стержня; k – коэффициент теплопроводности. Рассмотрим фрагмент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами x_1 и x_2 $(x_2-x_1=\Delta x)$. Количество тепла, прошедшего через сечение с абсциссой x_1 за время Δt, будет равно

$$\Delta Q_1=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}S\,\Delta t, \tag{4.1.2}$$

то же самое с абсциссой x_2:

$$\Delta Q_2=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}S\,\Delta t. \tag{4.1.3}$$

Приток тепла $\Delta Q_1-\Delta Q_2$ в элемент стержня за время Δt будет равняться:

$$\Delta Q_1-\Delta Q_2=\left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}S\,\Delta t\right]-\left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}S\,\Delta t\right]\approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\,\Delta t. \tag{4.1.4}$$

Этот приток тепла за время Δt затратился на повышение температуры элемента стержня на величину Δu: $\Delta Q_1-\Delta Q_2=cr\,\Delta x S\,\Delta u$ или, что то же самое:

$$\Delta Q_1-\Delta Q_2\approx cr\,\Delta x\,S\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t, \tag{4.1.5}$$

где c – теплоемкость стержня; r – плотность стержня ($r\,\Delta x S$ – масса элемента стержня). Приравнивая выражения (4.1.4) и (4.1.5) для одного и того же количества тепла $\Delta Q_1-\Delta Q_2$, получим

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\,\Delta t = cr\,\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cr}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Окончательно получаем $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $\dfrac{k}{cr} = a^2$.

Это и есть уравнение распространения тепла – уравнение теплопроводности в однородном теплоизолированном стержне.

§2. Краевая задача Штурма – Лиувилля на собственные значения и соответствующие им собственные функции

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для функции $u(x)$ на отрезке $x \in [a,b]$:

$$\begin{cases} Lu + l\cdot r(x)u = 0, x \in]a,b[\,, \\ a_1u'(a) + b_1u(a) = 0, \\ a_2u'(b) + b_2u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Здесь $l \in R$ – параметр задачи; L – линейный дифференциальный оператор второго порядка следующего вида:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial}{\partial x}) - q(x)u. \tag{4.2.2}$$

Здесь a, b – заданные константы: $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$; функция $p(x)$ предполагается непрерывно-дифференцируемой на [a;b]; функции $q(x), r(x)$ непрерывны. Для определенности будем считать $p(x) > 0,\ r(x) > 0$.

Значения параметра l, для которого существует нетривиальное решение задачи (4.2.1), называются собственными значениями задачи Штурма – Лиувилля, а сами нетривиальные решения называются собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля.

Теорема 1. Задача Штурма – Лиувилля (4.2.1) имеет бесконечное (счетное) число собственных значений.

Теорема 2. Каждому собственному значению задачи (4.2.1) соответствует единственная (определенная с точностью до произвольного множителя) собственная функция. Другими словами, ранг каждого собственного значения задачи (4.2.1) равен 1.

Теорема 3. Собственные функции задачи Штурма – Лиувилля (4.2.1), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу с весом $r(x)$, т.е.

$$\int_a^b r(x)u_i(x)u_j(x)dx = 0,\ i \neq j,\ (l_i \neq l_j). \tag{4.2.3}$$

Собственные функции $u_i(x)$ могут быть нормированы с весом $r(x)$, т.е. для них будет выполнено $\int_a^b r(x)u_i^2(x)dx = 1,\ i = 1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 4. В случае $a_1 \cdot b_1 \leq 0$, $a_2 \cdot b_2 \geq 0$, $q(x) \geq 0$ все собственные значения задачи (4.2.1) неотрицательны, т.е. $l_n \geq 0$, $n=1,2,\ldots$ В случае простейших граничных условий $u(a)=u(b)=0$, $q(x)\geq 0$, все собственные значения задачи (4.2.1) строго положительны $l_n > 0$, $n=1,2,\ldots$.

Теорема 5 (**теорема Стеклова**). Пусть $f(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(a)=f(b)=0$. Тогда $f(x)$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся на [a;b] ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля (4.2.1), т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\cdot u_n(x)dx, \tag{4.2.4}$$

$$f_n(x)=\int_a^b f(x)\cdot u_n(x)dx. \tag{4.2.5}$$

Пример. Определим собственные значения и соответствующие им собственные функции в следующей задаче Штурма – Лиувилля:

$$y'' + l\cdot y = 0,\ y(0)=0,\ y(l)=0\,. \tag{4.2.6}$$

Здесь $q(x)\equiv 1, p(x)\equiv 1$. Согласно изложенным выше теоремам собственные значения l положительны. Проверим это непосредственно. Пусть $l=-m^2<0$. Тогда общее решение уравнения (4.2.6) запишется в виде: $y(x)=A\cdot e^{m\cdot x}+B\cdot e^{-m\cdot x}$. Подставляем решение в граничное условие и получаем систему:

$$\begin{cases} y(0)=A+B, \\ y(l)=A\cdot e^{m\cdot l}+B\cdot e^{-m\cdot l}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим: $B=-A$, из второго уравнения находим: $A(e^{m\cdot l}-e^{-m\cdot l})=0$. Отсюда сразу следует: $A=0$ (поскольку выражение в скобках отлично от нуля). Получаем, что при l <0 имеется только тривиальное, т.е. нулевое решение. В случае l =0 общее решение (4.2.6) будет иметь следующий вид: $y=B\cdot x+A$. Из граничных условий получаем $A=B=0$. Вновь существует лишь тривиальное решение задачи (4.2.6). Рассмотрим случай l >0. Выпишем общее решение уравнения (4.2.6): $y''(x)+l\cdot y(x)=0, p^2+l=0, p_{1,2}=\pm i\sqrt{l}$, $y(x)=A\cdot\sin\sqrt{l}\cdot x+B\cdot\cos\sqrt{l}\cdot x$. Подставляя в граничные условия, получаем: $y(0)=B=0, y(l)=A\cdot\sin\sqrt{l}\cdot l+B\cdot\cos\sqrt{l}\cdot l=A\cdot\sin\sqrt{l}\cdot l=0$. Отсюда следует: $\sin\sqrt{l}\cdot l=0$. Последнее равенство возможно, если $\sqrt{l}\cdot l=p\cdot n,\ n=1,2\ldots$.

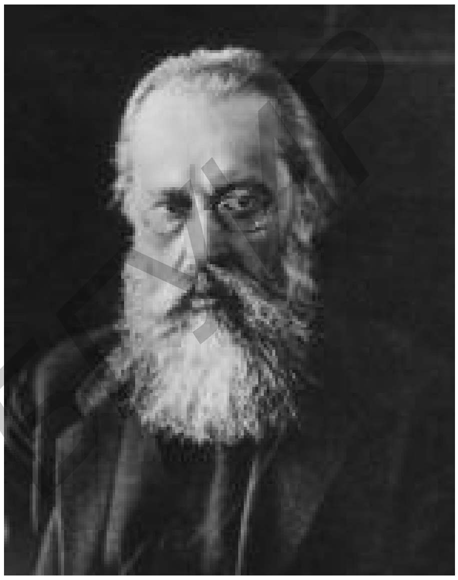
Получаем окончательный ответ. Собственными числами задачи (4.2.6) являются: $l_n=\left(\frac{p\cdot n}{e}\right)^2, n=1,\ 2\ \ldots$. Собственными функциями задачи (4.2.6), соответствующими собственным числам, будут функции: $y_n(x)=A\cdot\sin\left(\frac{p\cdot n}{e}\cdot x\right), n=1,\ 2,\ \ldots$. Эти функции образуют полную систему линейно независимых, попарно ортогональных функций с весом 1:

$$\int_0^l y_i(x)\cdot y_j(x)dx=\begin{cases}1,\ i=j, \\ 0,\ i\neq j,\ \ i,\ \ j=1,\ 2\ldots\end{cases}$$

Задачи для решения. Решить задачу Штурма – Лиувилля – найти собственные значения и соответствующие им собственные функции:

$$\begin{cases} y''+l\cdot y=0, \\ y(0)=0, \\ y(1)=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+l\cdot y=0, \\ y'(0)=0, \\ y(1)=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+l\cdot y=0, \\ y(0)=0, \\ y'(1)=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+l\cdot y=0, \\ y'(0)=0, \\ y'(1)=0. \end{cases}$$

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



СТЕКЛОВ Владимир Андреевич (1863 – 1926) – выдающийся русский математик, член Петербургской Академии Наук. С 1919 г. вице-президент Российской Академии Наук. Окончил физико-математический факультет Харьковского университета (1887). С 1906 г. В. А. Стеклов – профессор кафедры математики Петербургского университета. В 1912 г. избирается академиком. По инициативе Стеклова при Академии Наук организован физико-математический институт (1921), который он возглавил. С 1926 г. физико-математический институт носит имя В. А. Стеклова. Основные труды ученого посвящены исследованию математических проблем, связанных с задачами математической физики. Его работы по уравнениям в частных производных относятся к электростатике, колебаниям упругих и квазиупругих тел, задачам распространения тепла. Он дал полное теоретическое обоснование решений задачи о распространении тепла в неоднородном стержне, а также задачи о колебании неоднородного стержня. Задача о распространении тепла была исследована для трёхмерного случая. Большая заслуга В. А. Стеклова состоит в создании теории замкнутости ортогональных систем функций. Стеклов посвящает много работ вопросам разложимости по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Ему принадлежат многие идеи теории интерполяции функций. В настоящее время имя В. А. Стеклова носит Институт математики Российской Академии Наук (ИМ РАН).

§3. Краевые задачи для дифференциальных уравнений параболического типа

Как было отмечено ранее, простейшим одномерным уравнением параболического типа принято считать уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (4.3.1)$$

Здесь $u=u(x,t); x\in[a,b]; t\in[t_0,t^*]$. Это уравнение связывает между собой две величины. Скорость изменения температуры по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ и вогнутость температурного профиля $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Вогнутость температурного профиля служит мерой отличия температуры в данной точке от средней температуры в соседних точках.

Чтобы однозначно определить процесс переноса (вещества или поля), помимо самого уравнения необходимы дополнительные условия. Они определяют состояние процесса на границах и носят название граничных условий.

В настоящее время принято 3 способа классификаций граничных условий.

1. **Условие I рода** – условие Дирихле:

$$u|_{(x,y)\in \Gamma} = u|_{\Gamma} = g(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\ \Gamma = \partial\Omega \ – \qquad (4.3.2)$$

на границе области задана температура.

2. **Условие II рода** – условие Неймана:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{(x,y)\in \Gamma} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\ \Gamma = \partial\Omega \ – \qquad (4.3.3)$$

задан поток тепла через границу области Ω, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к контуру Γ, ограничивающего область Ω.

3. **Условие III рода**:

$$(\frac{\partial u}{\partial l} + l \cdot u)|_{\Gamma} = g(x,y),\ (x,y)\in\Omega,\ \Gamma = \partial\Omega \ – \qquad (4.3.4)$$

задан закон теплообмена с окружающей средой, $\frac{\partial u}{\partial l}$ – производная по произвольному направлению вдоль контура Γ.

Граничные условия (4.3.2), (4.3.3), (4.3.4) устраняют неопределенность решения по пространственным переменным. Чтобы устранить неопределенность по временной переменной, также следует добавить некоторое условие. Принято добавлять условие, задающее состояние в начальный момент времени. Простейшим из условий является следующее:

$$u(x,0) = y\ (x), \quad x\in[a,b]. \qquad (4.3.5)$$

Соответственно во все три типа краевых задач должно быть добавлено условие (4.3.5). Таким образом, простейшая краевая задача Дирихле в одномерном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ x\in\,]a,b[;\, t\in\,]0,t^*],\\
&u(x,0) = j\ (x),\, x\in\,]a,b[,\\
&u(a,t) = g_1(t),\\
&u(b,t) = g_2(t),\ t\in\,]0,t^*].
\end{aligned} \qquad (4.3.6)$$

По аналогии формулируются вторая и третья краевые задачи. После формулировки краевых задач встает вопрос о существовании и единственности их решения.

Конкретизируем некоторые виды уравнений переноса.

Уравнение теплообмена через боковую поверхность имеет следующий вид: $u_t = a^2\cdot u_{xx} - b(u - u_0)$.

Уравнение с наличием внутреннего источника тепла $f(x,t)$, расположенного вдоль стержня и действующего в течение всего процесса: $u_t = a^2\cdot u_{xx} + f(x,t)$.

Уравнение с конвективной диффузией: $u_t = a^2\cdot u_{xx} - g\cdot u_x$, где u_x – скорость конвекции (переноса) тепла для одномерного случая.

Выпишем общее уравнение диффузионного типа для одномерного случая:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - b\,u + f(x,t). \qquad (4.3.7)$$

Здесь $a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – диффузионное слагаемое; $g \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$ – конвективное слагаемое; $b\,u$ – теплообмен через боковую поверхность; $f(x,t)$ – неоднородность (источник либо сток тепла).

Приведем скрипт в среде MATLAB инструментария ToolBox PDE решения краевой задачи Дирихле (4.3.6), полагая $j = x\cdot(1-x)\cdot(100\cdot x\text{^}19-50\cdot x\text{^}10+15\cdot x\text{^}2-8\cdot x+2)$**,** $a=0$, $b=1$**,** $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$**.**

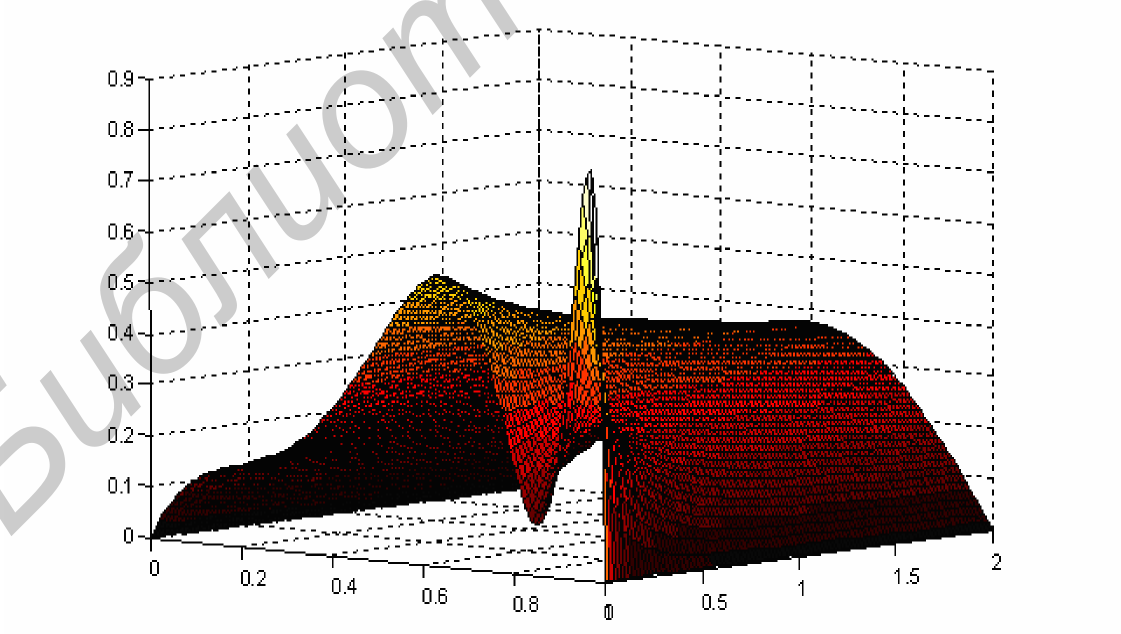
```
%решаем следующую задачу средствами MatLab PDE toolbox
%du/dt=(alpha^2)*(d2u/dx2) – параболическое уравнение
% u(x,0)=fi(x), 0<=x<=1 – начальное условие, любая функция заданная пользователем
% u(0,t)=0, u(1,t)=0, 0<=t<=t_max – граничные условия
echo off;
syms fi x;
%Начальное распределение температуры, задаётся пользователем:
fi=x*(1-x)*(100*x^19-50*x^10+15*x^2-8*x+2);
%Коэффициент alpha, задаётся пользователем:
alpha=0.1;
%Максимальное время, задаётся пользователем:
t_max=2;
%Количество интервалов времени, задаётся пользователем:
nsteps=100;
%Количество интервалов по координате, задаётся пользователем:
n_razb_x=100;
%Генерация сетки:
[p,e,t]=poimesh('squareg',n_razb_x,1);
%Преобразование сетки из [-1,1] в [0,1] по x и по y:
p(1,:)=(p(1,:)+1)/2;
p(2,:)=(p(2,:)+1)/2;
%Количество узлов сетки:
np=size(p,2);
%Инициализация массива начальных значений в узлах сетки:
u0=zeros(np,1);
%Подстановка начальных значений в узлы сетки:
u0(:,1)=subs(fi,x,p(1,:));
%Массив значений времени:
tlist=linspace(0,t_max,nsteps+1);
%Решение параболического уравнения:
u=parabolic(u0,tlist,'bn',p,e,t,alpha^2,0,0,1);
%Задаём координатную сетку:
[X,T]=meshgrid(linspace(0,1,n_razb_x+1),tlist);
%Инициализируем матрицу значений функции (матрицу графика):
u2=zeros(size(T,1),size(X,2));
%Заполняем матрицу значений функции, учитывая то,
%каким образом данные хранятся в u.
for xx=1:1:size(u2,2)
```

```
for tt=1:1:size(u2,1)
u2(tt,xx)=u(xx,tt);
%берём нужное значение из u и ставим его в нужное место матрицы графика.
end; end;
%Рисуем:
surf(X,T,u2)
%Задаем палитру:
colormap hot;
```

файл bn.m задания граничных условий------------------------------------

```
% задание граничных условий для нашей задачи – хранятся в файле bn.m
function [q,g,h,r]=pdebound(p,e,u,time)
%Определение числа рёбер в границе:
nb=size(e,2);
%Инициализация массивов:
q=zeros(1,nb);
g=zeros(1,nb);
h=zeros(1,2*nb);
r=zeros(1,2*nb);
for i=1:1:nb
%Из всех рёбер в границе выбираем только те, которые
%лежат на границе стержня (x=0 или x=1):
if ((p(1,e(1,i))==0) && (p(1,e(2,i))==0)) || ((p(1,e(1,i))==1) && (p(1,e(2,i))==1))
%Для этих рёбер задаём условие Дирихле u=0 (hu=r => h=const, r=0)
h(1,i)=1;
h(1,nb+i)=1;
end; end;
```

Ниже приведена визуализация полученного решения



§4. Метод решения однородной задачи Дирихле путем разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля

Кратко рассмотрим схему данного подхода. Условно подход можно разделить на 3 этапа:

I этап. Решение исходной краевой задачи Дирихле формально представляют в следующем виде:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

(4.4.1)

Функция $X(x)$ зависит только от x, функция $T(t)$ – только от t. Представление (4.5.1) подставляем в уравнение краевой задачи и выписываем получившуюся систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $X(x)$ и $T(t)$. Выписываем общий вид решения для $T(t)$.

II этап. Формируем задачу Штурма – Лиувилля, т.е. среди всех $X(x)$, удовлетворяющих уравнению краевой задачи, находим удовлетворяющие граничным условиям. На этом этапе возникает набор собственных значений и соответствующих им собственных функций задачи Штурма – Лиувилля.

III этап. Используя найденные $T(t)$ и $X(x)$, выписываем схематическое представление решения $u(x,t)$ через ортогональный ряд. Данные подставляем в начальные условия и устраняем соответствующие неопределенности.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in]0,1[,\ t \in]0,t^*], \tag{4.4.2}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0,\ t \in]0,t^*], \\ u_x(1,t) - hu(1,t) = 0, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

$$u(x,0) = j\ (x),\ x \in]0,1[. \tag{4.4.4}$$

Отметим, что граничное условие (4.4.3) описывает процесс теплообмена с окружающей средой.

Последовательно выполним 3 этапа:

I этап. Полагаем $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ и подставляем в (4.4.2). Получаем

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t). \tag{4.4.5}$$

Собираем в каждой части одну переменную:

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{4.4.6}$$

Приравниваем правую и левую часть равенства (4.4.6) к некоторой константе m и получаем следующую систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = m\ ,$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = m\ .$$

Отсюда следуют два линейных однородных дифференциальных уравнения:

$$T'(t) - ma^2 T(t) = 0\ , \tag{4.4.7}$$

$$X''(x) - mX(x) = 0\ . \tag{4.4.8}$$

Исследуем константу разделения m. Решаем уравнение (4.4.7). Выписываем характеристический полином: $p-m\cdot a^2=0$. Полином имеет один корень ma^2. Решение уравнения примет вид

$$T(t)=A\cdot e^{ma^2t},\ A-const. \tag{4.4.9}$$

Пусть $m>0$. Анализируя (4.4.9), видим, что в данном случае температура бесконечно возрастает. Физически это невозможно. Решение отбрасываем.

Пусть $m=0$. Тогда, решая уравнение (4.4.8), получаем, что

$$X''=0;\quad X(x)=Bx+C.$$

Но на наше решение наложено следующее граничное условие:

$$\begin{cases} u(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0\ , \\ u_x(1,t)+hu(1,t)=X'(1)T(t)+hX(1)T(t)=0\ . \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} X(0)=0\ , \\ X'(1)+hX(1)=0. \end{cases}$$

Следовательно, $B=C=0$. Данное решение вновь отбрасываем как тривиальное.

Пусть $m<0$. Полагаем $m=-l^2,\ l\in R$. Тогда решение представимо в виде

$$T(t)=Ae^{-l^2a^2t}. \tag{4.4.10}$$

Данное решение согласуется с физическим смыслом.

II этап. Формируем задачу Штурма – Лиувилля, полагая $m=-l^2, l\in R$:

$$X''+l^2X=0\ , \tag{4.4.11}$$

$$\begin{cases} X(0)=0\ , \\ X'(1)+hX(1)=0\ . \end{cases} \tag{4.4.12}$$

В задаче Штурма – Лиувилля (4.4.11), (4.4.12) уравнение (4.4.11) получается из уравнения (4.4.8), граничные условия (4.4.12) получаются из граничных условий (4.4.3).

Решаем уравнение (4.4.11). Находим корни характеристического полинома $p^2+l^2=0,\ p^2=-l^2,\ p=\pm\sqrt{-l^2};\ p_1=il,\ p_2=-il$. Отсюда сразу выписываем общее решение (4.4.11):

$$X(x)=B\cdot\sin(l\ x)+C\cdot\cos(l\ x). \tag{4.4.13}$$

Подставляем полученное решение в (4.4.12):

$$\begin{gathered} C\cdot\cos(0\cdot x)=0\Rightarrow C\equiv 0\ , \\ X(x)=B\cdot\sin(l\ x)\ , \end{gathered} \tag{4.4.14}$$

$$X(x)=B\cdot l\cdot\cos(l)+h\cdot B\cdot\sin(l)=0\Rightarrow tg\, l=-\frac{l}{h}\ . \tag{4.4.15}$$

В силу периодичности тангенса уравнение (4.4.15) будет иметь бесконечное множество решений. Неявное уравнение (4.4.15) решается численно.

III этап. Построим решение, удовлетворяющее начальному условию (4.4.4). У нас уже построено (см. (4.4.10), (4.4.14)) множество функций

$$u_n(x,t) = T_n(t) \cdot X_n(x) = e^{-(l_n a)^2 t} \cdot \sin(l_n x). \qquad (4.4.16)$$

Все функции (4.4.16) удовлетворяют уравнению (4.4.2) и граничным условиям (4.4.3), но не удовлетворяют условию (4.4.4). Добьемся, чтобы (4.4.4) также выполнялось. Решение всей краевой задачи (4.4.2) – (4.4.4) будем искать в виде ортогонального ряда следующего вида:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(l_n a)^2 t} \cdot \sin(l_n x). \qquad (4.4.17)$$

Следует подобрать коэффициенты a_n так, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (4.4.4): $u(x,0) = j(x) = x$.

Коэффициенты a_n определяются из соотношения $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(l_n x)$. Левую и правую части тождества умножаем на $\sin(l_m x)$ и интегрируем от 0 до 1 по dx:

$$\int_0^1 x \cdot \sin(l_m x)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(l_n x) \cdot \sin(l_m x)\, dx .$$

В силу ортогональности собственных функций задачи Штурма – Лиувилля:

$$\int_0^1 a_m \sum_{m=1}^{\infty} \cdot \sin(l_n x) \cdot \sin(l_m x)\, dx = a_m \int_0^1 \sin^2(l_m x)\, dx = a_m \left(\frac{l_m - \sin(l_m) \cdot \cos(l_m)}{2 \cdot l_m}\right),$$

$$\int_0^1 x \cdot \sin(l_m x)\, dx = a_m \left(\frac{l_m - \sin(l_m) \cdot \cos(l_m)}{2 \cdot l_m}\right),\ m = 1,\ 2,\ \dots \qquad (4.4.18)$$

Из соотношения (4.4.18) сразу получаем

$$a_n = \left(\frac{2\, l_n}{l_n - \sin(l_n) \cdot \cos(l_n)}\right) \cdot \int_0^1 x \cdot \sin(l_n x)\, dx,\ n = 1,2,\dots . \qquad (4.4.19)$$

Коэффициенты a_n в (4.4.19) считаются непосредственно – зная, собственные значения l_n, находим коэффициенты a_n.

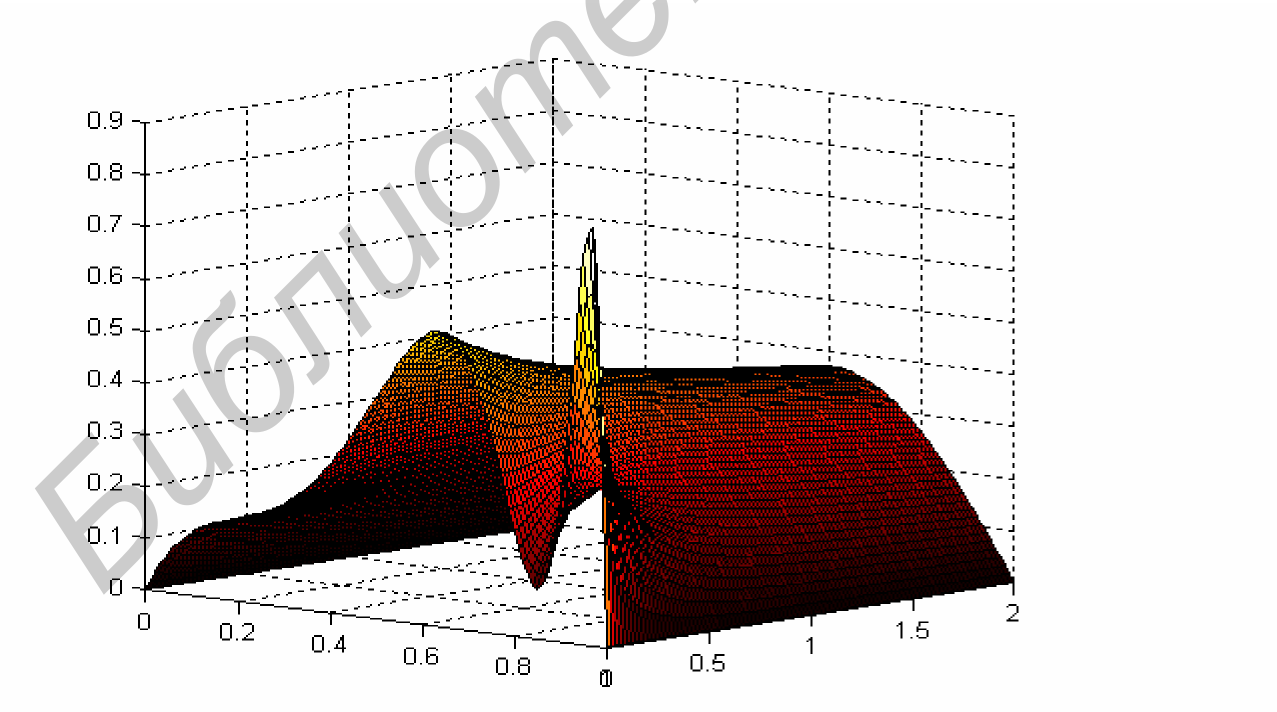
$l_1 \approx 2{,}02; a_1 \approx 0{,}24;\ l_2 \approx 4{,}91; a_2 \approx 0{,}22;\ l_3 \approx 7{,}98; a_3 \approx -0{,}03;\ l_4 \approx 11{,}08; a_4 \approx -0{,}11, \dots$.

Теорема. Если функция $j(x)$ на отрезке [0;1] дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную, то существует единственное решение $u(x,t)$ граничной задачи (4.4.2) – (4.4.4). Функция $u(x,t)$, определяемая рядом (4.4.17), в котором коэффициент a_n вычисляется по формуле (4.4.19), имеет непрерывные производные по x первого порядка и по t второго порядка. Причем возможно почленное дифференцирование ряда (4.4.17) по x один раз и t дважды. При этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно для $0 \le x \le 1,\ t \ge 0$.

Приведем скрипт в среде MATLAB решения задачи Дирихле (4.3.6).

```
syms fi x xx t u n a_n;
%Начальное распределение температуры, задаётся пользователем:
fi=x*(1-x)*(100*x^19-50*x^10+15*x^2-8*x+2);
%Коэффициент alpha, задаётся пользователем:
alpha=0.1;
%Максимальное время, задаётся пользователем:
t_max=2;
%Количество интервалов времени, задаётся пользователем:
nsteps=100;
%Количество интервалов по координате, задаётся пользователем:
n_razb_x=100;
%количество членов ряда в разложении функции, задаётся пользователем:
n_max=50;
%Задаём массив – координатную сетку:
[X,T]=meshgrid(linspace(0,1,n_razb_x+1),linspace(0,t_max,nsteps+1));
%Формула коэффициента для разложения fi(x) в ряд Фурье по
%собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля:
a_n=2*int(sin(n*pi*x)*fi,x,0,1);
%Находим функцию распределения температуры u(x,t):
u=symsum(a_n*exp(-t*(pi*n*alpha)^2)*sin(n*pi*xx),n,1,n_max);
%Вычисляем значения функции u(x,t) в каждой точке:
U=subs(u,{t,xx},{T,X});
surf(X,T,U) %Рисуем
colormap hot;  %Палитра
```

Ниже приведена визуализация полученного решения



Задачи для решения. Решить следующие параболические краевые задачи.

1. $\begin{array}{l} U'_t = U'_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U(0,t)=0, \\ U(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=1. \end{array}$ **2.** $\begin{array}{l} U'_t = U_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U(0,t)=0, \\ U(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=\sin(p\, x). \end{array}$ **3.** $\begin{array}{l} U'_t = U'_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U(0,t)=0, \\ U(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=\sin(2p\, x)+\frac{1}{3}\sin(4p\, x). \end{array}$

4. $\begin{array}{l} U'_t = U'_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U(0,t)=0, \\ U(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=x-x^2. \end{array}$ **5.** $\begin{array}{l} U'_t = U'_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U'(0,t)=0, \\ U_x(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=x. \end{array}$ **6.** $\begin{array}{l} U'_t = U'_{xx}, \\ \left.\begin{array}{l} U'_x(0,t)=0, \\ U'_x(1,t)=0, \end{array}\right\} \\ u(x,0)=x. \end{array}$

§5. Решение задачи Коши методом интегрального преобразовании Фурье

Рассмотрим еще один мощный метод решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью операции интегрального преобразования Фурье. Для этого напомним некоторые факты из теории интегральных преобразований Фурье.

После применения прямого преобразования Фурье к функции $f(x)$, определенной на $-\infty < x < \infty$, мы получаем новую функцию $F(x)$ по формуле $\mathsf{F}[f] = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-tx\,x}dx$. Если теперь к функции $F(x)$, которая определена для $-\infty < x < \infty$, применить обратное преобразование Фурье $\mathsf{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{tx\,x}dx$, то получаем исходную функцию $f(x)$.

Если преобразование Фурье выполняется по переменной x и если преобразование проводится над частной производной функции $u(x,t)$ по этой же переменной x, то справедливы формулы преобразования производных:

$$\mathsf{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t)e^{-tx\,x}dx = t\ \ x\ \ \mathsf{F}[u];\quad \mathsf{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t)e^{-tx\,x}dx = -x^2\ \ \mathsf{F}[u].$$

С другой стороны, если выполнить преобразование над частной производной $u_t(x,t)$ (переменная интегрирования в преобразовании, как и прежде, будет x), получаем следующие формулы:

$$\mathsf{F}[u_{\ t}] = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)e^{-tx\,x}dx = \frac{\partial}{\partial\ \ t}\mathsf{F}[u];\quad \mathsf{F}[u_{\ tt}] = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{\ tt}(x,t)e^{-tx\,x}dx = \frac{\partial^2}{\partial\ \ t^2}\mathsf{F}[u].$$

Каждое интегральное преобразование обладает свойством свертки. Поскольку Фурье-образ произведения двух функций, вообще говоря, не равен произведению Фурье-образов этих функций, т.е. $\mathsf{F}[f(x)g(x)] \neq \mathsf{F}[f]\mathsf{F}[g]$, в теории интегральных преобразований определена операция, называемая сверткой функций f и g (обозначается $f*g$), для которой справедливо соотношение

$$\mathrm{F}[f * g] = \mathrm{F}[f]\mathrm{F}[g]. \qquad (4.5.1)$$

Свертка по Фурье двух функций $f * g$ определяется формулой

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi) g(\xi) d\xi . \qquad (4.5.2)$$

Например, если даны функции $f(x) = x, \quad g(x) = e^{-x^2}$, то их свертка равна $(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\xi) e^{-\xi^2} d\xi = x/\sqrt{2}$ (воспользовались известной формулой $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$).

Важность понятия свертки (4.5.2) состоит в том, что часто при решении уравнений с частными производными возникает необходимость применить обратное преобразование Фурье к выражению, которое является произведением двух Фурье-образов, т.е. следует найти

$$\mathrm{F}^{-1}\{\mathrm{F}[f]\mathrm{F}[g]\}. \qquad (4.5.3)$$

Применяя обратное преобразование к обеим частям (4.5.1), получим

$$f * g = \mathrm{F}^{-1}\{\mathrm{F}[f]\mathrm{F}[g]\}. \qquad (4.5.4)$$

Следовательно, для определения (4.5.3) следует найти прообразы каждого из сомножителей, т.е функции f и g, а затем вычислить их свертку.

Рассмотрим теперь задачу о распространении тепла в бесконечном стержне, если задана начальная температура $u(x,0) = \varphi(x)$. Эту задачу принято называть задачей Коши для уравнения теплопроводности или задачей с начальными условиями

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \qquad (4.5.5)$$

Решение задачи можно разбить на три основных этапа.

I этап. Применение интегрального преобразования Фурье. Поскольку пространственная переменная x изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, мы применим к уравнению и начальному условию (4.5.5) преобразование Фурье по переменной x (x – переменная интегрирования в преобразовании). Получим $\mathrm{F}[u_t] = a^2 \mathrm{F}[u_{xx}]$; $\mathrm{F}[u(x,0)] = \mathrm{F}[\varphi(x)]$.

Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= -a^2 \xi^2 U(t), \\ U(0) &= \Phi(\xi), \end{aligned} \qquad (4.5.6)$$

где $U(t) = \mathrm{F}[u(x,t)]$; Φ – Фурье-образ функции φ. Отметим, что функция $U(t)$ на самом деле зависит не только от t, но и от ξ, но поскольку в дифференциальном уравнении (4.5.6) величина ξ играет роль константы, будем считать, что $U = U(t)$.

II этап. Решаем преобразованную задачу – задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Поскольку новая переменная играет роль константы в задаче (4.6.6), решение задачи легко находится: $U(t)=\Phi(x)e^{-a^2x^2t}$.

III этап. Применение обратного преобразования Фурье. Искомое решение $u(x,t)$ находится по формуле

$$u(x,t)=\mathsf{F}^{-1}\left[U(x,t)\right]=\mathsf{F}^{-1}[\Phi(x)e^{-a^2x^2t}].$$

Используя теорему о свертке функций, получаем

$$u(x,t)=\mathsf{F}^{-1}\left[\Phi(x)e^{-a^2o^2t}\right]=\mathsf{F}^{-1}\left[\Phi(x)\right]*\mathsf{F}^{-1}\left[e^{-a^2x^2t}\right]=$$

$$=j\,(x)*\left[\frac{1}{2a\sqrt{pt}}e^{-x^2/4a^2t}\right]=\frac{1}{2a\sqrt{pt}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}j\,(x)e^{-(x-x)^2/4a^2t}dx.$$

Значения сверток можно посмотреть в специальной таблице либо воспользоваться средой MATLAB.

Таким образом,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{p\,t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}j\,(x)e^{-(x-o)^2/4a^2t}\,dx. \qquad (4.5.7)$$

Формула (4.5.7) даёт решение нашей исходной задачи Коши. Проанализируем полученный результат. Подынтегральная функция состоит из двух сомножителей:

I. начальной температуры $j\,(x)$;

II. функции $G(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{pt}}e^{-(x-o)^2/4a^2t}$, которая называется функцией Грина или функцией точечного источника.

Можно показать, что функция точечного источника $G(x,t)$ описывает отклик системы на начальный температурный единичный импульс. Функция Грина $G(x,t)$ описывает распределение температуры в стержне в момент времени t, если на точку $x=x$ подействовал единичный тепловой импульс.

Формуле (4.5.7) можно дать следующую интерпретацию. Начальную температуру $u(x,0)=j\,(x)$ можно представлять как континуальное множество точечных импульсов, каждый величины $j\,(x)$ (в точке $x=x$). Каждый точечный импульс дает распределение температуры $j\,(x)G(x,t)$. Результирующее распределение $u(x,t)$ находится суммированием, т.е. интегрированием температур точечных источников по формуле (4.5.7). Это одно из проявлений общего принципа суперпозиции для линейных дифференциальных уравнений и их систем. Отдельно отметим, что мы уже с этим сталкивались, когда в первой главе получали формулу Коши.

Напомним также, что преобразование Фурье можно применять не для всех функций $f(x)$, так как несобственный интеграл $\mathrm{F}[f]=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-tx\,x}dx$ может расходиться. Фурье-образ имеют только те функции, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $|x|\to\infty$. Кроме того, нельзя применять преобразование Фурье по времени для решения задач с начальными условиями, т.е. для граничных задач, поскольку $0<t<\infty$.

§6. Сопряженные краевые системы для уравнений параболического и эллиптического типов. Обобщенные решения

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства полученных краевых задач в более общей формулировке и укажем формальные подходы для их решения. Строгое, в смысле сходимости, обоснование формальных методов решения представляет собой отдельную сложную задачу.

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n векторов $x=\{x_1,\mathbf{K},x_n\}$, а S – граница этой области. Множества

$$Q=\{0\le t\le T,\ x\in\Omega\},\ Q_0=\{t=0,\ x\in\Omega\},\ Q_s=\{0\le t\le T,\ x\in S\} \qquad (4.6.1)$$

соответственно назовем цилиндром в $(n+1)$-мерном пространстве переменных t и x, нижним основанием цилиндра Q, боковой поверхностью Q. На Q определим дифференциальный оператор

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u,\ x\in\Omega, \qquad (4.6.2)$$

в котором $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ – заданные вещественные функции.

Дифференциальный оператор L называется эллиптическим на Ω, если:

I. $a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,\mathbf{K},n$;

II. существует положительная постоянная $\boldsymbol{\gamma}$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)a_i a_j\ge g\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\quad x\in\Omega+S, \qquad (4.6.3)$$

для любых вещественных чисел $a_1,\mathbf{K},a_n,\sum a_i^2\ne 0$. Если L – эллиптический оператор, то уравнение следующего вида

$$Lu=-f(x),\quad x\in\Omega \qquad (4.6.4)$$

является эллиптическим уравнением, а уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(t,x),\quad x\in\Omega,\quad t\ge 0\ – \qquad (4.6.5)$$

параболическим уравнением.

Таким образом, нестационарные процессы теплопроводности и диффузии описываются линейными дифференциальными уравнениями параболического типа. Коэффициенты теплопроводности и диффузии не должны зависеть от искомой функции и должны иметь положительные нижние грани. Установившиеся (стационарные) процессы теплопроводности и диффузии описываются линейными уравнениями эллиптического типа.

Для однозначного определения решения каждого из уравнений (4.6.4) и (4.6.5) следует указать дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция u на границе рассматриваемой области. Рассмотрим уравнение (4.6.4).

I. Условие Дирихле. На границе области Ω функция $u(x)$ удовлетворяет условию

$$u(x) = j\,(x), \quad x \in S, \tag{4.6.6}$$

где $j\,(x)$ – заданная функция. Задача отыскания решения уравнения (4.6.4) среди функций некоторого заданного класса (например, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и непрерывных в $\Omega + S$), которое удовлетворяет условию (4.6.6), называется задачей Дирихле.

II. Условие Неймана. На кусочно-гладкой границе S области Ω функция $u(x)$ должна удовлетворять условию

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i) + hu = j\,(x), \quad x \in S, \tag{4.6.7}$$

где $h(x)$ и $j\,(x)$ – заданные функции, n – единичный вектор внешней нормали к S. Задача отыскания решения уравнения (4.6.4) среди функций некоторого класса, удовлетворяющих условию (4.6.7), называется задачей Неймана.

Для решения каждой их этих краевых задач вводится понятие сопряжённых краевых задач, которые определяем, используя формулу Грина. Выпишем формулу Гаусса – Остроградского $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_{S} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cos(n, x_i) dx$, которая справедлива в предположении, что S – кусочно-гладкая замкнутая поверхность, функции A_i непрерывны в $\Omega + S$ и кусочно-непрерывно дифференцируемы в Ω. Предположим, что коэффициенты оператора L непрерывны в $\Omega + S$. Тогда для любых функций $u(x)$ и $v(x)$, непрерывных в $\Omega + S$ и имеющих кусочно-непрерывные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ в Ω, согласно формуле Гаусса – Остроградского, справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} \left(vLu - uL^* v\right) dx = \int\limits_{S} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + b_i uv \right\} \cos(n, x) dS, \tag{4.6.8}$$

В данном тождестве оператор L^*, определённый формулой $L^* v = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv$, называется оператором, сопряжённым к L. Если $b_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \mathbf{K}, n$, то $L = L^*$, и этом случае оператор L называется самосопряжённым оператором. Введем следующие обозначения:

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) + hu, \tag{4.6.9}$$

$$Qv = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} - b_i v \right) \cos(n, x_i) + hv \,. \qquad (4.6.10)$$

Тогда формулу Грина (4.8.8) можно переписать в следующем виде:

$$\int_{\Omega} (vLu - uL^* v) dx = \int_{S} (vPu - uQv) dS \,. \qquad (4.6.11)$$

Соответственно вторая краевая задача формулируется следующим образом. В заданном классе функций требуется найти функцию $u(x)$, которая внутри области Ω удовлетворяет уравнению (4.6.4), а на границе S – условию

$$Pu = j(x) \,, \; x \in S \,, \qquad (4.6.12)$$

где $j(x)$ – заданная функция.

Задача отыскания функции $v(x)$, удовлетворяющей соотношениям

$$L^* v = f_1(x), \quad x \in \Omega \,, \qquad (4.6.13)$$

$$Qv = y(x), \quad x \in S \,, \qquad (4.6.14)$$

называется задачей, сопряжённой с (4.6.4), (4.6.12). Здесь f_1 и y – заданные функции. Для первой краевой задачи (4.6.4), (4.6.6) сопряжённой является задача отыскания функции v, удовлетворяющей уравнению (4.6.13) и дополнительному условию

$$v = y(x), \quad x \in S \,. \qquad (4.6.15)$$

Как нам уже известно, в одномерном случае один из наиболее эффективных способов решения параболической краевой задачи основывается на аппарате собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Приведем аналогичные сведения для многомерного случая. Значение действительного параметра l, при котором краевая задача

$$\left. \begin{aligned} Lu &= -l\, u(x), \; x \in \Omega, \\ Pu &= 0, \; x \in S \end{aligned} \right\} \qquad (4.6.16)$$

имеет ненулевое решение $u_l(x)$, называется собственным значением этой краевой задачи, а само решение $u_l(x)$ называется собственной функцией краевой задачи, соответствующей собственному значению. В силу однородности задачи (4.6.16) можно считать $\int_{\Omega} u_l^2(x) dx = 1$. Функции $u_l(x)$, удовлетворяющие данному условию, называются нормированными.

Если понимать под решением задачи (4.6.16) дважды непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных x_i функцию, то для самосопряжённого оператора $L \; (L = L^*)$ при достаточно общих ограничениях на коэффициенты a_{ij}, c и границу S будут иметь место следующие утверждения.

I. Существует счётная система собственных значений краевой задачи (4.6.16). Все они вещественны и обладают свойством $0 < l_1 < \mathbf{K} < l_n < \mathbf{K}, \; l_n \to \infty, \; n \to \infty$.

II. Каждому собственному значению l_n соответствует собственная функция $u_n(x)$ такая, что

$$\int_{\Omega} u_i(x) u_j(x) dx = d_{ij}, \text{ где } d_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \quad (4.6.18)$$

Система функций $\{u_n(x)\}$, удовлетворяющая условиям (4.6.18), называется ортонормированной.

Ш. Система всех собственных функций $\{u_i(x)\}$ полна в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е. любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $\int_{\Omega} f^2(x) dx < \infty$, однозначно представима в виде разложения в ортогональный ряд по собственным функциям $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, u_i(x)$. При этом знак равенства понимается в смысле $\int_{\Omega} \left[f(x) - \sum_{i=1}^{N} f_i u_i(x) \right]^2 dx \to 0$ при $N \to \infty$. Коэффициенты f_i ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i\, u_i(x)$ определяются по формуле $f_i = \int_{\Omega} f(x) u_i(x) dx$, а сам ряд называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Аналогичные утверждения имеют место и для задачи Дирихле.

Если найдена полная ортонормированная система собственных функций, то формальное решение краевой задачи $Lu = f(x)$, $x \in \Omega$, $Pu = 0$, $x \in S$, можно найти следующим образом. Разлагаем $f(x)$ в ряд Фурье $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i(x)$; $f_i = \int_{\Omega} f(x) u_i(x) dx$. Решение краевой задачи $u(x)$ ищем в следующем виде: $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$. Тогда формально находим $Lu = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L u_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n u_n$, и, следовательно, согласно уравнению $Lu = f(x)$ получаем

$$Lu = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L u_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n u_n(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x).$$

Отсюда следует, что $-a_n = f_n l_n^{-1}$, и функция $u(x)$, подсчитанная согласно

$$u(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{l_n} u_n(x) \quad (4.6.19)$$

формально удовлетворяет уравнению $Lu = f(x)$. Так как $u_n(x)$ удовлетворяет условию $Pu = 0$, то функция (4.6.19) также формально удовлетворяет и этому условию.

Для корректного обоснования данного подхода в каждом конкретном случае требуется доказать, что ряд в полученном представлении решения (4.6.19) сходится и его можно почленно дифференцировать необходимое число раз в каждой точке области и на её границе S. Именно это представляет основную трудность.

Аналогичным способом можно построить формальное решение краевой задачи Неймана:

$$\left.\begin{aligned} Lu = 0, \quad x \in \Omega, \\ Pu = j(x), \quad x \in S. \end{aligned}\right\} \tag{4.6.20}$$

Пусть u_0 – решение этой задачи и

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x), \text{ где } a_n = \int_{\Omega} u_0(x) u_n(x) dx. \tag{4.6.21}$$

Так как по предположению оператор L является самосопряжённым ($L = L^*$), то формула (4.6.11) примет следующий вид:

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv) dx = \int_{S} (vPu - uPv) dS. \tag{4.6.22}$$

Полагая $u = u_0$, $v = u_k$ и учитывая, что $Lu_k = -l_k u_k$, $Pu_k = 0$, из (4.6.22) сразу получаем $l_k \int_{\Omega} u_0(x) u_k(x) dx = \int_{S} j(x) u_k(x) dx$, или, что то же самое, $l_k a_k = \int_{S} j(x) u_k(x) dS$.

Таким образом, решение (4.6.22) имеет вид

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)}{l_n} \int_{S} j(x) u_n(x) dS. \tag{4.6.23}$$

Из этой формулы легко видеть, что даже если ряд (4.6.23) сходится и его можно почленно дифференцировать, то функция $u_0(x)$ не будет удовлетворять условию $Pu = j$ в обычном смысле, поскольку $Pu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} \int_{S} j(x) u_n(x) dS \cdot Pu_n = 0$.

Однако условию $Pu = j$ можно придать такой смысл, в терминах которого ряд (4.6.23) будет удовлетворять этому условию.

Например, если исследуется распространение тепла в стержне длиной $l\ (0 \le x \le l)$, которое описывается уравнением теплопроводности с граничными условиями $u(0,t) = j_0(t)$ и $u(l,t) = j_1(t)$, тогда под $u(0,t)$ и $u(l,t)$ можно понимать следующие предельные значения функции: $u(0,t) = \lim_{x \to l+0} u(x,t)$, $u(l,t) = \lim_{x \to l-0} u(x,t)$.

Отдельно отметим, что даже если задача (4.6.20) имеет дифференцируемое решение, то разложение этого решения в ряд Фурье по формуле (4.6.23) может оказаться недифференцируемым. Поскольку, несмотря на то что, например, функция $f(x) = 1$ имеет производную любого порядка внутри отрезка $[0, 1]$, её ряд Фурье нельзя дифференцировать почленно даже один раз.

Полученные результаты по формальному решению второй краевой задачи без существенных изменений можно получить и для задачи Дирихле.

Теперь рассмотрим постановку краевых задач для параболического уравнения (4.6.5) и подход к построению их формального решения.

Для однозначного определения решения $u(t,x)$ необходимо указать, кроме граничных условий, которые выполняются на боковой поверхности цилиндра $Q=\{0\le t\le T,\, x\in\Omega\}$, ещё одно условие, определяющее начальное значение функции $u(t,x)$,

$$u(0,x)=u_0(x), \quad x\in\Omega\,, \tag{4.6.24}$$

где $u_0(x)$ – заданная функция. Граничные условия будем брать в форме Дирихле или Неймана. Таким образом, речь будет идти об отыскании формального решения уравнения (4.6.5), удовлетворяющего начальному условию (4.6.24) и одному из граничных условий (4.6.6) или (4.6.7). Ограничимся анализом второй краевой задачи. Пусть оператор L является самосопряжённым ($L=L^*$, т.е. в (4.6.2) коэффициенты $b_i(x)\equiv 0,\, i=1,2,\mathbf{K},n$), и требуется построить формальное решение следующей краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(t,x),\ x\in\Omega,\ t>0,\\&Pu=j\,(t,x),\ x\in S,\ t\ge 0,\\&u(0,x)=u_0(x),\ x\in\Omega,\end{aligned}\right\} \tag{4.6.25}$$

где $f(t,x)$, $u_0(x)$ и $j\,(t,x)$ – заданные функции, а оператор P определён формулой (4.6.9). Пусть $\{u_i(x)\}$ – полная ортонормированная последовательность собственных функций задачи (4.6.16), а $\{l_i\}$ – соответствующая последовательность собственных значений. Решение задачи (4.6.25) будем искать в следующем виде:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)u_n(x), \tag{4.6.26}$$

где $v_n(t)=\int\limits_\Omega u(t,x)u_n(x)dx$. Отсюда следует интегральное тождество

$$\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-Lu-f(t,x)\right]u_n(x)dx\,dt=0\,.$$

Так как оператор L самосопряжён, то согласно формуле (4.6.22) получаем

$$\int\limits_\Omega u_n(x)Lu(t,x)dx=\int\limits_\Omega u(t,x)Lu_n(x)dt+\int\limits_S(u_nPu-uPu_n)dS\,.$$

По определению функций $u(t,x)$ и $u_n(x)$ получаем $Pu(t,x)=j\,(t,x)$; $Pu_n=0$; $Lu_n=-l_nu_n(x)$. Поэтому $\int\limits_\Omega u_n(x)\cdot Lu(t,x)dx=\int\limits_S j\,(t,x)u_n(x)dS-l_nv_n(t)$.

Полагая $f_n(t)=\int\limits_{\Omega} f(t,x)u_n(x)dx$ и учитывая, что $\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}u_n(x)dx=\frac{dv_n}{dt}$, из приведенного выше тождества $\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-Lu-f(t,x)\right]u_n(x)dx\,dt=0$ получаем уравнения

$$\frac{dv_n}{dt}+l_n v_n=\int\limits_S j(t,x)u_n(x)dS+f_n(t), \quad n=1,2,\mathbf{K}\ . \qquad (4.6.27)$$

Соотношения (4.6.27) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $v_n(t)$. Поскольку функция (4.6.26) должна удовлетворять начальному условию $u(0,x)=u_0(x)$, то

$$v_n(0)=u_n^0, \quad u_n^0=\int\limits_{\Omega}u_0(x)u_n(x)dx, \quad n=1,2,\mathbf{K}\ . \qquad (4.6.28)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (4.6.27) с учетом (4.6.28), получаем

$$v_n(t)=e^{-l_n t}\left\{u_n^0+\int\limits_0^t e^{l_n t}\left[\int\limits_S j(t,x)u_n(x)dS+f_n(t)\right]dt\right\}. \qquad (4.6.29)$$

Совокупность формул (4.6.26) и (4.6.29) определяет формальное решение задачи (4.6.25). Подставляя значение $v_n(t)$ из (4.6.29) в (4.6.26), получаем

$$u(t,x)=\int\limits_{\Omega}G(x,x,t)u_0(x)dx+$$

$$+\int\limits_0^t\left[\int\limits_{\Omega}G(x,x,t-t)f(t,x)dx+\int\limits_S G(x,x,t-t)j(t,x)dS\right]dt\ , \qquad (4.6.30)$$

где $G(x,x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-l_n t}u_n(x)u_n(x)$ – функция Грина для нашей задачи.

Таким образом, предполагая существование полной ортонормированной системы собственных функций краевой задачи (4.6.16) и принадлежность функций $u_0(x)$, $f(t,x)$ и $j(t,x)$ к функциональному пространству L_2, всегда можно формально получить представление (4.6.30) функции $u(t,x)$. Это можно сделать при более слабых требованиях к данным задачи (4.6.16). Однако процедура получения функции (4.6.30) не позволяет утверждать, что $u(t,x)$ является решением краевой задачи (4.6.25). Для этого нужно строго определить, что будет пониматься под решением. Затем доказать, что выражение, стоящее справа в (4.6.30), удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к такому решению.

При анализе решений краевых задач приходится пользоваться понятиями обобщённых решений. Приведем некоторые сведения.

Под классическим решением краевой задачи типа (4.6.25) понимается функция $u(t,x)$, которая, будучи подставленной в соотношения (4.6.25), обращает их в тождества. Такая функция должна обладать производными необходимого порядка внутри области Ω и на её границе.

При неоднородных граничных условиях построенное формальное решение часто не удовлетворяет этим требованиям. Более того, если граничное условие однородно ($j \equiv 0$), нельзя говорить о классическом решении задачи в случае $f(t,x) \in L_2(Q)$, поскольку для такой функции f её значение в точке однозначно не определяется. В приложениях наибольший интерес представляют именно те случаи, когда $f \in L_2$ или $j \not\equiv 0$.

Чтобы определить одно из понятий обобщённого решения, проделаем следующие преобразования. Пусть $u^0(t,x)$ – классическое решение задачи (4.6.25) при соответствующих предположениях относительно всех данных задачи. Подставляя его в (4.6.25), получим тождества:

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} \equiv Lu^0 + f(t,x), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{4.6.31}$$

$$u^0(0,x) \equiv u^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.6.32}$$

$$Pu^0 \equiv j(t,x), \quad x \in \Omega, \quad 0 \le t \le T. \tag{4.6.33}$$

Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} \Phi\left[\frac{\partial u^0}{\partial t} - Lu^0 - f(t,x)\right] dx\,dt = 0 \tag{4.6.34}$$

для любой функции $\Phi = \Phi(t,x) \in L_2(Q)$, $Q=\{0 \le t \le T, x \in \Omega\}$ и любых t_0 и t_1 из отрезка $[0,T]$. Если Φ имеет первые производные по t и x, принадлежащие $L_2(Q)$, то, проинтегрировав по частям, из (4.6.34) получаем

$$\int_{\Omega}\left(\Phi u^0\right)_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[u^0\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + f\Phi\right] dx\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{S}\Phi\left(Pu^0 - hu^0\right) dS\,dt = 0.$$

Здесь предполагается, что оператор L является самосопряжённым, т. е. $L = L^*$. Поскольку u^0 удовлетворяет условию (4.6.33), то последнее равенство можно записать в виде

$$\int_{\Omega}\left(\Phi u^0\right)_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[u^0\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + f(t,x)\Phi\right] dx\,dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_{S}\Phi\left(j - hu^0\right) dS\,dt = 0. \tag{4.6.35}$$

Таким образом, если u^0 – классическое решение задачи (4.6.25), то оно удовлетворяет тождеству (4.6.35) для любой дифференцируемой функции $\Phi\ \left(\partial\Phi/\partial t \in L_2, \partial\Phi/\partial x_i \in L_2\right)$ и начальному условию $u(0,x) = u_0(x)$.

Справедливо также и обратное утверждение. Если выполняются следующие условия:

1) имеет место тождество (4.6.35),

2) справедливо равенство $u^0(0,x) = u_0(x)$,

3) функция $u^0(t,x)$ имеет непрерывные производные второго порядка $\partial^2 u^0/\partial x_i \partial x_j$,

4) производные $\partial u^0/\partial t$ и $\partial a_{ij}/\partial x_i$ непрерывны,

то $u^0(t,x)$ является классическим решением краевой задачи (4.6.25).

Чтобы доказать это, достаточно тождество (4.6.35) преобразовать к виду (4.6.34).

Это показывает, что если (4.6.35) рассматривать как уравнение относительно u^0 (при любой функции Φ из указанного класса) вместе с начальным условием $u^0(0,x)=u_0(x)$, то оно в некотором смысле эквивалентно исходной краевой задаче (4.6.25). Однако (4.6.25) не содержит $\partial u^0/\partial t$ и $\partial^2 u^0/\partial x_i \partial x_j$. Расширим класс функций Φ в (4.6.35), поступив следующим образом.

Пусть $\{\Phi_n\}$ – произвольная функциональная последовательность из выбранного класса (т.е. $\Phi_n \in L_2$, $\partial\Phi_n/\partial t \in L_2$, $\partial\Phi_n/\partial x_i \in L_2$), обладающая следующими свойствами:

I. $\int\limits_0^T\int\limits_\Omega [\Phi_n-\Phi_m]^2\, d\Omega\, dt \to 0$ при $n,m\to\infty$,

II. $\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\right]^2 d\Phi\, dt \to 0,\quad \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_i}\right] d\Omega\, dt \to 0$ при $n,m\to\infty$.

Тогда в силу полноты пространства L_2 существуют такие функции $\Psi(t,x)$, $v(t,x)$ и $v_i(t,x)$ из L_2, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega [\Phi_n-\Psi]^2\, dx dt=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}-v\right]^2 dx dt=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_i}-v_i\right]^2 dx dt=0\,.$$

Функции v и v_i называют обобщёнными производными функции Ψ и обозначают $v(t,x)=\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, $v_i(t,x)=\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}$. Множество тех и только тех функций $\Psi(t,x)$, которые удовлетворяют перечисленным условиям и для которых скалярное произведение определено следующей формулой:

$$(\Psi_1,\Psi_2)=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left(\Psi_1\Psi_2+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_i}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)dx\,dt\,,$$

образует пространство Соболева W_2^1.

Следовательно, определяя классическое решение $u^0(t,x)$ через тождество (4.6.35), можно вместо функции Φ брать любую функцию $\Psi\in W_2^1(Q)$ и тем самым определить решение следующим образом.

Функция $u^0(t,x)$ называется классическим решением краевой задачи (4.6.25), если она

I. непрерывна в замкнутой области $\overline{Q}=\{0\le t\le T,\, x\in\overline{\Omega}\}$;

II. внутри области Q имеет непрерывные производные $\frac{\partial u^0}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i\partial x_j}$, $i,j=1,\mathbf{K},n$;

III. на границе $s=\{0\le t\le T, x\in S\}$ имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial u^0}{\partial x_i}$;

IV. удовлетворяет начальному условию $u(0,x)=u_0(x)$ и интегральному тождеству (4.6.36):

$$\int_{\Omega}\left(\Psi u^0\right)_{t_0}^{t_1}dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[u^0\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}+f\Psi\right]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{S}\Psi\left(j-hu^0\right)dS\,dt=0 \qquad (4.6.36)$$

для любой функции $\Psi\in W_2^1(Q)$ и любых t_0 и t_1 из отрезка $[0,T]$.

Для существования такого решения нужно предполагать непрерывную дифференцируемость коэффициентов a_{ij} и гладкость поверхности S.

Первые три пункта требуются для того, чтобы от (4.6.36) перейти к (4.6.34). В определении обобщённого решения этого не требуется. В основу кладётся интегральное тождество (4.6.36) и от этого решения требуется лишь, чтобы тождество (4.6.36) имело место и в некотором смысле выполнялось начальное условие.

Обобщённым решением краевой задачи (4.6.25) называется функция $u(t,x)$, суммируемая с квадратом ($u(t,x)\in L_2(Q)$), имеющая обобщённые производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L_2,\quad i=1,\mathbf{K},n$, и которая

I. удовлетворяет интегральному тождеству (4.6.36) для любой функции $\Psi\in W_2^1(Q)$ и любых t_0 и t_1 из отрезка $[0,T]$;

II. удовлетворяет начальному условию $u(0,x)=u_0(x)$ в том смысле, что $\int_{\Omega}[u(t,x)-u_0(x)]\Psi(x)dx\to 0$ при $t\to +0$ для любой функции $\Psi(x)\in L_2(\Omega)$.

С прикладных инженерных позиций такие решения представляют безусловный интерес. Они крайне важны при исследовании задач оптимального управления и вариационного исчисления, поскольку позволяют строго математически обосновать задачи управления процессами, которые можно описать уравнениями в частных производных параболического и эллиптического типов.

Особенно важно то, что существование и единственность такого решения $u(t,x)$ удаётся доказать при достаточно слабых ограничениях на функции a_{ij}, j, f и границу S, т.е. для задач, полученных практическим моделированием реальных процессов. При этом очень важно, что решение $u(t,x)$ можно получить в виде интегрального представления (4.6.30).

Соболев Сергей Львович (1908 – 1989) – выдающийся советский математик. Академик АН СССР. По окончании Ленинградского университета в 1929 г. работал в Сейсмологическом институте АН СССР. В 1932 – 1943 гг. – в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1943 – 1957 гг. работал в институте атомной энергии. С 1957 г. С. Л. Соболев – директор института математики Сибирского отделения АН СССР и профессор Новосибирского университета. Основные труды С. Л. Соболева принадлежат теории уравнений с частными производными, математической физике, функциональному анализу и вычислительной математике. С. Л. Соболевым впервые начато систематическое применение функционального анализа в теории уравнений с частными производными. Им введён класс функциональных пространств – пространств Соболева. Исследованы соотношения вложения для этих пространств. Введены понятия обобщённых решений уравнений с частными производными, обобщенных производных, дано первое строгое определение обобщённых функций. С помощью этих понятий С. Л. Соболев изучил большой класс краевых задач для уравнений с частными производными. В области вычислительной математики С. Л. Соболевым введено понятие замыкания вычислительных алгоритмов, дана точная оценка норм погрешности кубатурных формул.

§7. Задача оптимального управления параболической системой

Приведем результат для поиска решения в задаче оптимального управления дифференциальным уравнением параболического типа. Задачи такого типа часто встречаются в практических приложениях управления процессами переноса и тепломассообмена.

Пусть E^n – евклидово пространство векторов $x=(x_1,\ldots,x_n)$, а G – ограниченная область в E^n с границей Γ, $X_i(x)$ – направляющие косинусы внешней нормали границы Γ. Пусть в области G задан эллиптический оператор $L=(L_1,\ldots,L_m)$, определяемый формулой

$$L_i y=\sum_{p=1}^{m}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{ip}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{4.7.1}$$

где функции $a_{jk}^{ip}(x_1,\ldots,x_n)$ в области $G+\Gamma$ принадлежат классу $C^{(2)}$. Обозначим через $M=(M_1,\ldots,M_m)$ оператор, определяемый формулой

$$M_i z=\sum_{p=i}^{m}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}^{pi}\frac{\partial z_p}{\partial x_k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(l_j^{pi} z_p\right), \quad i=1,\ldots,m, \text{ где } \quad l_j^{pi}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}^{pi}}{\partial x_k}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{G}\left(z_i L_i y - y_i M_i z\right)dx =$$
$$= \sum_{i,\,p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{\Gamma}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{ip}\left(z_i\frac{\partial y_p}{\partial x_k} - y_p\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right) + l_j^{ip} y_p z_i\right] X_j(x)\,ds\ .$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{G}\left(z_i L_i y - y_i M_i z\right)dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma}\left(z_i P_i y - y_i Q_i z\right)ds\ , \tag{4.7.2}$$

где

$$P_i y = \sum_{p=1}^{m}\left[a_l^{ip}\frac{dy_p}{dl_{ip}} + b_{ip} y_p\right], \qquad Q_i z = \sum_{p=1}^{m}\left[a_l^{pi}\frac{dz_p}{d\,l_{ip}} + d_{ip} z_p\right]. \tag{4.7.3}$$

В формулах (4.7.3) направления l_{ip} выбираются произвольно, при условии что $\cos(n, l_{ip}) > 0$ (n – внешняя нормаль к Γ) и их направляющие косинусы принадлежали классу $C^{(1)}$ на границе Γ. Направления l_{ip} выбираются в зависимости от l_{ip}.

Будем считать, что коэффициенты в операторе L зависят ещё и от переменной t, $0 \le t \le T$, т.е. будем рассматривать управляемые системы, поведение которых описывается системой уравнений параболического типа:

$$L_i y = f(t, x, y, y_x, u), \quad o \le t \le T, \quad x \in G \qquad \left(L_{il} y = \frac{\partial y_i}{\partial t} - L_i y\right), \tag{4.7.4}$$

где функция $f = (f_1, \mathbf{K}, f_m)$ непрерывна по t и дважды непрерывно дифференцируема по остальным аргументам, а параметр u принимает значения из некоторой выпуклой (открытой или замкнутой) области U p-мерного эвклидова пространства.

Далее предположим, что функция $y(t,x) = (y_1, \mathbf{K}, y_m)$, определяемая системой уравнений (4.7.4), удовлетворяет ещё условиям

$$\left.\begin{aligned} &P_i(t, x)y = j_i(t, x, y, v), \quad x \in \Gamma, \quad 0 \le t \le T,\\ &y(0, x) = a(x), \quad x \in G, \end{aligned}\right\} \tag{4.7.5}$$

где операторы P_i определены формулами (4.7.3), в которых функции $a_l^{is}(t,x)$, $b_{ip}(t,x)$ и $a(x)$ непрерывны, j_i удовлетворяет тем же условиям, что и f_i, а параметр v принимает значения из выпуклой (открытой или замкнутой) области V q-мерного эвклидова пространства.

Функцию $w(t,x) = (u(t, x), v(t, x))$ будем называть допустимым управлением, если все её компоненты кусочно-непрерывны, а $u(t, x)$ и $v(t, x)$ принимают значения соответственно из областей U и V. Кроме того, будем предполагать, что поверхности разрыва допустимых управлений являются гладкими и каждая из них либо ортогональна оси t, либо в окрестности любой её точки можно ввести невырожденное преобразование координат $t = t, \quad x_i = x_i(t, x), \quad i = 1, \mathbf{K}, n$, такое, что поверхность разрыва переходит в кусок плоскости $x_n = 0$.

Если разрывы некоторого допустимого управления удовлетворяют первому условию, то краевая задача (4.7.4) – (4.7.5), соответствующая этому управлению, распадается на несколько таких же задач в областях, примыкающих друг к другу по поверхностям разрыва управления. В этом случае задача (4.7.4) – (4.7.5) имеет единственное непрерывное решение. Это решение не подчинено никаким дополнительным условиям гладкости на поверхностях разрыва управления.

Если же эти поверхности удовлетворяют второму условию, то под решением задачи (4.7.4) – (4.7.5) понимается вектор-функция $y(t, x)$, удовлетворяющая системе уравнений (4.7.4), условиям (4.7.5) и некоторым условиям гладкости на поверхностях разрыва управления. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что заданные функции в уравнениях (4.7.4) и условиях (4.7.5), кроме перечисленных выше свойств, удовлетворяют ещё условиям, при которых каждому допустимому управлению соответствует единственное решение задачи (4.7.4) – (4.7.5).

Пусть $w(t, x)$ – некоторое допустимое управление, а $y(t, x)$ – соответствующее ему решение задачи (4.7.4) – (4.7.5), и пусть задан функционал

$$S = \sum_{i=1}^{m} \left[\int_G a_i(x) y_i(T, x) dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^T \int_G b_i(t, x) y_i(t, x) dx\, dt + \int_0^T \int_\Gamma g_i(t, x) y_i(t, x) ds\ dt \right], \qquad (4.7.6)$$

где a_i, b_i и g_i – заданные непрерывные функции.

Ставится задача: среди всех допустимых управлений найти управление $w(t, x)$ (если оно существует) такое, чтобы соответствующее ему решение задачи (4.7.4.7) – (4.7.5) реализовало бы минимум функционала S.

Допустимое управление $w(t, x)$, на котором функционал S достигает своего максимального (минимального) значения, будем называть max-оптимальным (min-оптимальным) по S. Функционалы более общего вида будут рассмотрены в конце параграфа.

Здесь мы рассматриваем задачу, когда управление процессом может осуществляться одновременно с помощью управлений, входящих и в уравнения, и в граничные условия. Отдельно отметим, что к виду (4.7.6) можно привести функционал

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \int_G \left[g_i(t, x) y_i(t, x) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t, x) \frac{\partial y_i}{\partial x_k} + b_i(t, x) \frac{\partial y_i}{\partial t} \right] dx\, dt,$$

где a_{ik} и b_i – непрерывно дифференцируемые функции.

Чтобы сформулировать условия оптимальности, введём вспомогательную функцию $z(t, x)$ с помощью сопряжённой с (4.7.4) – (4.7.5) краевой задачи

$$M_{it} z = -\sum_{s=1}^{m} \left[\frac{\partial f_s(t, x, y, y_x, u)}{\partial y_i} z_s - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial f_s(t, x, y, y_x, u)}{\partial y_{ix_k}} z_s \right) \right] + b_i(t, x), x \in G, \tag{4.7.7}$$

$$Q_i(t, x) z = \sum_{s=1}^{m} \left[\frac{\partial j_s(t, x, y, v)}{\partial y_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s(t, x, y, y_x, v)}{\partial y_{ix_k}} X_k(x) \right] z_s - g_i(t, x), \quad x \in \Gamma, \tag{4.7.8}$$

$$z_i(T, x) = -a_i(x), \quad x \in G, \quad i = 1, \mathbf{K}, m,$$

где $M_{it} z = \dfrac{\partial z_i}{\partial t} + M_i z$, операторы Q_i определены соотношениями (4.7.3), функции a_i, b_i и g_i входят в определение функционала S, а $X_k(x)$ – направляющие косинусы внешней к G нормали границы Γ. Для того чтобы краевая задача (4.7.7) – (4.7.8) была разрешима, необходимо, чтобы функции a_i и g_i были связаны условиями согласования. В дальнейшем предполагается, что эти условия выполнены.

Введём обозначения:

$$w = \left(z_1, \mathbf{K}, z_m, y_1, \mathbf{K}, y_m, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \mathbf{K}, \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \right), \; p = (z_1, \mathbf{K}, z_m, y_1, \mathbf{K}, y_m),$$

$$H(i, x, w, u) = \sum_{i=1}^{m} z_i f_i(t, x, y, y_x, u), \; h(t, x, p, v) = \sum_{i=1}^{m} z_i j_i(t, x, y, v).$$

Тогда краевые задачи (4.7.4) – (4.7.5) и (4.7.7) – (4.7.8) можно записать в следующем виде:

$$L_{it} y = \frac{\partial H(t, x, w, u)}{\partial z_i}, \quad y_i(0, x) = a_i(x), \quad x \in G,$$

$$P_i y = \frac{\partial h(t, x, p, v)}{\partial z_i}, \quad x \in \Gamma, \tag{4.7.9}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&M_{it}z=-\frac{\partial H(t,x,w,u)}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial H(t,x,w,u)}{\partial y_{ix_k}}\right)+b_i(t,x),\\
&z_i(T,x)=-a_i(x),\\
&Q_i z=\frac{\partial h(t,x,p,v)}{\partial y_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H(t,x,w,u)}{\partial y_{ix_k}}X_k(x)-g_i(t,x),\quad x\in\Gamma.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.7.10)
$$

Используя формулу (4.7.2), легко установить, что для любых дважды кусочно-непрерывных дифференцируемых функций $y_i(x,t)$ и $z_i(t,x)$ справедлива формула Остроградского – Грина:

$$
\sum_{i=1}^{m}\int_0^T\int_G(z_iL_{it}y+y_iM_{it}z)dx\,dt=-\sum_{i=1}^{m}\left[\int_0^T\int_\Gamma(z_iP_iy-y_iQ_iz)ds\ dt-\int_G y_i\,z_i\Big|_{t=0}^{T}dx\right].\qquad(4.7.11)
$$

Пусть $w(t,x)=(u(t,x),v(t,x))$ – некоторое допустимое управление, а $y(t,x)$ и $z(t,x)$ – соответствующие ему решения краевых задач (4.7.9) и (4.7.10). Будем говорить, что допустимое управление $w(t,x)$ удовлетворяет условиям максимума, если

$$
H(t,x,w(t,x),u(t,x))\ \ (=)\ \sup_{u\in U}H(t,x,w(t,x),u),\ x\in G,\qquad 0\le t\le T,
$$

$$
h(t,x,p(t,x),v(t,x))\ (=)\ \sup_{v\in V}h(t,x,p(t,x),v),\quad x\in\Gamma,\quad 0\le t\le T,
$$

где символ $(=)$ означает равенство, справедливое всюду, кроме множества точек нулевой меры. Условие минимума определяется аналогично. Сформулируем следующую теорему.

Принцип максимума (А. И. Егорова). Для того чтобы допустимое управление $w(t,x)=(u(t,x),v(t,x))$ было min-оптимальным (max-оптимальным), необходимо, чтобы оно удовлетворяло условиям максимума (минимума).

Эта теорема формально не даёт достаточных условий оптимальности, однако служит мощным практическим инструментом для отыскания оптимальных управлений и соответствующих им решений краевой задачи (4.7.4) – (4.7.5). Можно показать, что для многих технических приложений, моделируемых рассмотренной задачей управления, принцип максимума доставляет и достаточные условия оптимальности.

Таким образом, соответствующая вариационная задача на траекториях параболической системы сводится к решению параболических дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Егоров Александр Иванович. Известный российский математик. Доказал принцип максимума Понтрягина теории оптимального управления для краевых задач на состояниях линейных эллиптических, параболических и гиперболических уравнений в частных производных второго порядка. Получил фундаментальные результаты в прикладных задачах управления для распределенных дифференциальных и интегродифференциальных систем. Написал ряд монографий по проблемам теории управления и качественной теории дифференциальных уравнений – «Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений», «Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями» и др. Научная школа профессора А. И. Егорова получила признание в мире.

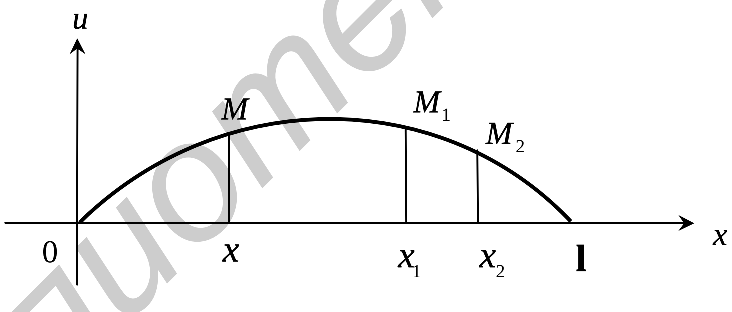
Глава 5. Линейные гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка

Прямое моделирование уравнения малых колебаний. Приведение уравнения к каноническому виду. Начальные и граничные условия для гиперболических уравнений. Решение краевой гиперболической задачи методом разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Метод характеристик решения задачи Коши гиперболического уравнения.

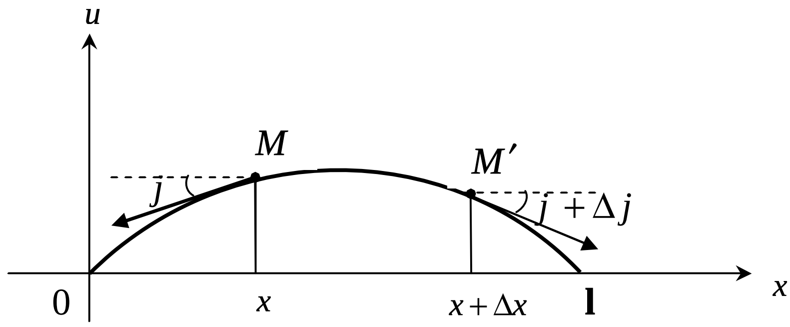
§1. Прямое моделирование уравнения малых колебаний

Проведем прямое моделирование уравнения колебаний струны. Под струной будем понимать гибкую, упругую нить. Пусть струна длиной $\mathbf{l}$ в начальный момент направлена по отрезку оси Ох от 0 до $\mathbf{l}$. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x=0$ и $x=\mathbf{l}$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения. Говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны и определении закона движения каждой точки струны в любой момент времени.

Рассмотрим малые поперечные отклонения точек струны от начального положения. В силу предположения движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox и в одной плоскости. Процесс колебания струны описывается функцией $u(x,t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t (см. рисунок).



Поскольку мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x,u), то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup M_1M_2$ равняется ее проекции на ось Ox, т.е. $\cup M_1M_2 = x_2 - x_1$ (пренебрегаем величиной малости $u_x'^2$ и выше по сравнению с 1, т.е. $\cup M_1M_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x'^2}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(1+\frac{1}{2}u_x'^2 - \mathbf{K}\right)dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_2}dx = x_2 - x_1$). Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаково; обозначим его через T. На рисунке ниже рассмотрим элемент струны MM'.



На концах этого элемента по касательным к струне действуют силы T. Пусть касательные образуют с осью Ox углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент MM', будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $\operatorname{tg}\varphi\approx\sin\varphi$. Получаем

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx T\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-T\operatorname{tg}\varphi=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=$$

$$=T\frac{\partial^2 u(x+\xi\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x\approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,\ 0<\xi<1$$

(к выражению в квадратных скобках применили теорему Лагранжа).

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть ρ – линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет равна $\rho\Delta x$. Ускорение элемента равно $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера получаем $\rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Сокращая на Δx и обозначив $\dfrac{T}{\rho}=a^2$, выписываем уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5.1.1)$$

Это и есть простейшее волновое уравнение – уравнение малых поперечных колебаний струны. Оно совпадает с полученным ранее уравнением (2.10.1).

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Дирихле Петер Густав Лежён (Dirichlet Peter Gustav Lejeune) (1805 – 1859) – известный немецкий математик, член Берлинской и Парижской Академий Наук, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии Наук. В 1831 – 1855 гг. профессор Берлинского, с 1855 г. Гёттингенского университета. Основные труды принадлежат теории чисел, теории функций и математического анализа. Дирихле впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций. Значителен вклад Дирихле в исследование проблем механики и уравнений математической физики, в частности, в теорию потенциала дифференциальных уравнений в частных производных.

§2. Приведение уравнений к каноническому виду

Если искомая функция зависит от двух независимых переменных x и y, то уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y), \qquad (5.2.1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c – коэффициенты, являющиеся вещественными числами или функциями от x и y; $f(x,y)$ – правая часть уравнения.

Будем считать, что a_{11}, a_{12}, a_{22} – либо вещественные числа, либо функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно в области задания уравнения.

Пусть в области Р задано уравнение (5.2.1). Как нам известно, оно в этой области является уравнением: гиперболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$; параболического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$; эллиптического типа, если $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$.

Для того чтобы привести уравнения (5.2.1) к каноническому виду, надо составить его характеристическое уравнение:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0, \qquad (5.2.2)$$

которое распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a_{11}}(a_{12}+(a_{12}^2-a_{11}a_{22})^{1/2}); \qquad (5.2.3)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a_{11}}(a_{12}-(a_{12}^2-a_{11}a_{22})^{1/2}) \qquad (5.2.4)$$

и найти общие интегралы этих дифференциальных уравнений. Интегральные кривые уравнения (5.2.2) или, что то же самое, уравнений (5.2.3) и (5.2.4) называются характеристиками уравнения (5.2.1).

Если уравнение (5.2.1) – гиперболического типа, то интегралы $j(x,y)=C_1$, $y(x,y)=C_2$ уравнений (5.2.3) и (5.2.4) вещественны и различны. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик уравнения (5.2.1). С помощью замены переменных $x=j(x,y)$, $h=y(x,y)$ уравнение (5.2.1) приводят к каноническому виду уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h}=\Phi_1(x,h,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}).$$

Если уравнение (5.2.1) – параболического типа, то уравнения (5.2.3) и (5.2.4) совпадают, и мы получаем один общий интеграл характеристического уравнения (5.2.2): $j(x,y)=C$, определяющий одно семейство вещественных характеристик уравнения (5.2.1). Произведя замену переменных по формулам $x=j(x,y)$, $h=y(x,y)$, где $y(x,y)$ – такая функция, что якобиан $\frac{D(x,h)}{D(x,y)}\neq 0$ в рассматриваемой области, приведём уравнение (5.2.1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}=\Phi_2(x,h,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}),$$

называемому каноническим видом уравнения параболического типа.

Наконец, если уравнение (5.2.1) – эллиптического типа, то общие интегралы уравнений (5.2.3) и (5.2.4) – комплексно-сопряжённые:

$$j(x,y)+iy(x,y)=C_1;\quad j(x,y)-iy(x,y)=C_2,$$

где $j(x,y)$, $y(x,y)$ – вещественные функции, определяющее два семейства мнимых характеристик уравнения (5.2.1). Произведя замену переменных по формулам $x=j(x,y)$, $h=y(x,y)$, приведём уравнение (5.2.1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}=\Phi_3(x,h,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial h}),$$

называемому каноническим видом уравнения эллиптического типа.

Примеры. Приведем к каноническому виду следующее дифференциальное уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$. В нашем случае $a_{11}=1$, $a_{12}=1$, $a_{22}=-3$. Так как $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4>0$, то данное уравнение является уравнением гиперболического типа на всей плоскости Oxy. Составим характеристическое уравнение: $dy^2-2dxdy-3dx^2=0$. Оно распадается на два: $\frac{dy}{dx}=3$, $\frac{dy}{dx}=-1$. Интегрируя их, соответственно получаем: $y=3x+C_1$, $y=-x+C_2$. Введём новые переменные по формулам $x=y-3x$, $h=x+y$.

Вычислив производные: $\frac{\partial u}{\partial x}=-3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial h}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial h}$, найдём:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}.$$

Подставив в исходное уравнение найденные значения производных, получаем $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial h} = 0$.

Приведем к каноническому виду следующее уравнение:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$, то данное уравнение является уравнением параболического типа на всей плоскости Oxy. Запишем характеристическое уравнение: $x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = 0$, откуда $xdy + ydx = 0$. Решив его, получим только одно семейство характеристик $j(x, y) \equiv xy = C$. Положим $y(x, y) = y$. Проведя замену переменных по формулам $x = xy$, $h = y$, будем иметь: $\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}.$$

Подставив найденные значения в исходное уравнение, найдём $\frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0$. Проинтегрировав его, получим $u = \Phi(x)h + y(x)$. Заменив x на xy, найдём общее решение исходного уравнения: $u(x, y) = \Phi(xy)y + y(xy)$.

Приведем к каноническому виду следующее уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Так как $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$, то данное уравнение является уравнением эллиптического типа на всей плоскости Oxy. Приведём его к каноническому виду. Запишем характеристическое уравнение: $dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0$, откуда $\frac{dy}{dx} = -2 + i$, $\frac{dy}{dx} = -2 - i$. Найдём общий интеграл первого уравнения: $(y+2x)-ix=C_1$. Произведя замену переменных по формулам $x=2x+y$, $h=-x$, получим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2}=0$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Джон фон Нейман (John von Neumann) (1903–1957) – выдающийся американский математик. Родился в Будапеште. В 1926 г. окончил Будапештский университет, получил степень доктора философии. Продолжил математические исследования в Гёттингене, Берлине и Гамбурге. Нейман внес значительный вклад в развитие многих областей математики. Первые его работы посвящены основаниям математики. Позже фон Нейман занялся функциональным анализом и его приложениями к квантовой механике. Фон Нейману принадлежит строгая математическая формулировка принципов квантовой механики, ее вероятностная интерпретация. В 1932 г. фон Нейман доказал эквивалентность волновой и матричной механики. Исследование оснований квантовой механики привело его к созданию теории неограниченных операторов. Творчество фон Неймана оказало влияние также на такую область науки, как теория вычислительных машин и аксиоматическая теория автоматов. Настоящей вершиной его достижений являются сами компьютеры, принципы действия которых были разработаны именно фон Нейманом частично совместно с Г. Голдстайном.

Задачи для решения. Привести к каноническому виду дифференциальные уравнения и, если возможно, найти их общие решения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0$;

б) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+y^2)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y}+4=0$.

Приведем скрипт в среде MATLAB задачи приведения к каноническому виду эллиптического, параболического, гиперболического линейных уравнений в частных производных.

```
syms x y D2u_x D2u_y D2u_xy Du_y Du_x u
syms Dy Dx Du_l Du_g D2u_l D2u_g D2u_lg
% задаем исследуемое дифференциальное уравнение
func = D2u_x-2*sin(x)*D2u_xy-cos(x)^2*D2u_y-cos(x)*Du_y+4;
%-----------------------------------
type = 1/3;    %флаг типа, инициализируем неизвестным значением
Ja = 0;        %Якобиан перехода, инициализируем нулём
%из функции получаем коэффициенты a11,a12,a22 и f(x,y)
f   = subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y','Du_x','Du_y','u'},{0,0,0,0,0,0});
a11 = subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y','Du_x','Du_y','u'},{1,0,0,0,0,0})-f;
a22 = subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y','Du_x','Du_y','u'},{0,0,1,0,0,0})-f;
a12 = subs(func,{'D2u_x','D2u_xy','D2u_y','Du_x','Du_y','u'},{0,1/2,0,0,0,0})-f;
D = a12^2-a11*a22;  %считаем дискриминант хар. ур-ния
try
D = double(D);  %пытаемся получить число
%в зависимости от числа, определяем тип
if (D > 0)
type = 1; %гиперболического типа
elseif(D < 0)
type = -1;%эллиптического типа
elseif(D = = 0)
type = 0; %параболического типа
end;
catch %если D - функция D(x,y)
v = cell(1,2);  %создаём вектор, и заменяем x на v(1), y на v(2)
temp = subs(D,{'x','y'},{'v(1)','v(2)'});
temp = inline(char(temp),'v');
[m, fmin] = fminsearch(temp,[0 0]); %ищем минимум D(v(1),v(2))
if (fmin > 0)   %если min(D) > 0, то уравнение гип. типа
type = 1;
else    %ещё можно проверить уравнение на эллиптический тип
%функции для поиска максимума нет, обойдёмся минимумом ф-ции -D
temp = subs(-D,{'x','y'},{'v(1)','v(2)'});
temp = inline(char(temp),'v');
[m, fmin] = fminsearch(temp,[0 0]);
if (fmin > 0)   %если min(-D) > 0, то уравнение эл. типа
type = -1;
end; end; end;
% приняты обозначения для новых переменных l – кси, g – эта
%-----------------------------------
if (type = = 1)   %гиперболический тип
dydx = simple((a12+D^(1/2))/a11);   %1-я хар-ка dy/dx
temp = strcat(char(Dy/Dx-dydx), '=0');
temp= dsolve(temp);     %решаем ДУ dy/dx = a12+D^(1/2)/a11;
temp = solve(temp,'C1');%выражаем из решения ДУ произвольную константу
l = subs(temp,{'x(t)','y(t)'},{x,y});%1-я замена для l(x,y)
dydx = simple((a12-D^(1/2))/a11); %2-я хар-ка dy/dx
temp = strcat(char(Dy/Dx-dydx), '=0');
temp = dsolve(temp);    %решаем ДУ dy/dx = a12-D^(1/2)/a11;
temp = solve(temp,'C1');%выражаем из решения ДУ произвольную константу
g = subs(temp,{'x(t)','y(t)'},{x,y});%2-я замена для g(x,y)
%подсчитаем якобиан перехода
```

```
Ja = simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-diff(l,'y')*diff(g,'x'));
%----------------------------------
elseif (type = = -1) %эллиптический тип
dydx = simple((a12+sqrt(-1)*(-D)^(1/2))/a11); %хар-ка dy/dx
temp = strcat(char(Dy/Dx-dydx), '=0');
temp = dsolve(temp);%решаем ДУ dy/dx = a12+D^(1/2)/a11;
temp = solve(temp,'C1');%выражаем из решения ДУ произвольную константу
temp = subs(temp,{'x(t)','y(t)'},{x,y});
l  = subs(temp,{'i','j','sqrt(-1)'},{0,0,0});%1-я замена для l(x,y)
g = subs((temp-l),{'i','j','sqrt(-1)'},{1,1,1});%2-я замена для g(x,y)
%высчитаем якобиан перехода
Ja = simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-diff(l,'y')*diff(g,'x'));
%----------------------------------
elseif (type = = 0)  %параболический тип
dydx = a12/a11; %хар-ка dy/dx
temp = strcat(char(Dy/Dx-dydx), '=0');
temp = dsolve(temp);    %решаем ДУ dy/dx = a12/a11;
temp = solve(temp,'C1');%выражаем из решения ДУ произвольную константу
l = subs(temp,{'x(t)','y(t)'},{x,y}); %1-я замена для l(x,y)
%вторую замену вводит пользователь
%принимаем её, если якобиан перехода не равен нулю
disp(sprintf('\n\t уравнение параболического типа'));
disp(sprintf('\n\t возможно выразить только одну замену l(x,y):'));
disp(sprintf('         l(x,y) = %s',char(l)));
disp(sprintf('\n\t введите вторую замену g(x,y):'));
g = input('        g(x,y) = ');
Ja = simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-diff(l,'y')*diff(g,'x'));
while (Ja = = 0)
disp('Якобиан перехода = 0');
g = input('Введите другое g(x,y)=');
Ja = simple(diff(l,'x')*diff(g,'y')-diff(l,'y')*diff(g,'x'));
end; end;
%----------------------------------
if (Ja ~= 0)
%выражаем дифференциалы по x и y, используя известные формулы
Du_x   = Du_l*(diff(l,'x')) + Du_g*(diff(g,'x'));
Du_y   = Du_l*(diff(l,'y')) + Du_g*(diff(g,'y'));
D2u_x  = D2u_l*(diff(l,'x')^2) + 2*D2u_lg*(diff(l,'x')*diff(g,'x')) + D2u_g*(diff(g,'x')^2) +
  Du_l*(diff(diff(l,'x'),'x')) + Du_g*(diff(diff(g,'x'),'x'));
D2u_y  = D2u_l*(diff(l,'y')^2) + 2*D2u_lg*(diff(l,'y')*diff(g,'y')) + D2u_g*(diff(g,'y')^2) +
  Du_l*(diff(diff(l,'y'),'y')) + Du_g*(diff(diff(g,'y'),'y'));
D2u_xy = D2u_l*(diff(l,'x')*diff(l,'y')) + D2u_lg*(diff(l,'x')*diff(g,'y') + diff(l,'y')*diff(g,'x')) +
  D2u_g*(diff(g,'x')*diff(g,'y')) + Du_l*(diff(diff(l,'x'),'y')) + Du_g*(diff(diff(g,'x'),'y'));
%подставим найденные значения в исходную функцию
temp =
  subs(func,{'Du_x','Du_y','D2u_x','D2u_y','D2u_xy'},{Du_x,Du_y,D2u_x,D2u_y,D2u_xy});
temp = simple(temp);    %упростим полученное уравнение
%из произведённых замен выразим x и y через кси и эта
[x,y] = solve(strcat(char(l),'=l'),strcat(char(g),'=g'),'x','y');
%для каждой пары x,y получим канонический вид исходного уравнения
canon = cell(length(x),3);
for i=1:length(x)
```

```
canon(i,1) = simple(subs(temp,{'x','y'},{x(i),y(i)}));
canon(i,2) = x(i);
canon(i,3) = y(i);
end; end;
%----------------------------------
printresult; %вызываем m-файл, описанный отдельно, для вывода результата
```

Файл обработки результата для вывода

```
clc; % приняты обозначения новых переменных переменных l - кси, g - эта
disp(sprintf('\n____________________________________________________________'));
disp(sprintf('\t*******Приведение уравнения к каноническому виду*******'));
disp(sprintf('\n\t\t%s = 0\n',char(func)));
if (type == 1)
disp(sprintf('\t- уравнение гиперболического типа'));
elseif (type = = -1)
disp(sprintf('\t- уравнение эллиптического типа'));
elseif (type = = 0)
disp(sprintf('\t- уравнение параболического типа'));
end;
if (Ja ~= 0)
disp(sprintf('\t____________________________________________'));
disp(sprintf('\tПроизведём замену:'));
disp(sprintf('\tl  = %s',char(l)));
disp(sprintf('\tg  = %s',char(g)));
disp(sprintf('\t____________________________________________'));
disp(sprintf(strcat('\tякобиан перехода = ',char(Ja))));
disp(sprintf('\t____________________________________________'));
for i=1:length(x)
disp(sprintf('\n\t\t%s = 0\n',char(canon(i,1))));
disp(sprintf('\t – канонический вид данного уравнения для пары x,y:'));
disp(sprintf('\t\t            x = %s',char(canon(i,2))));
disp(sprintf('\t\t            y = %s',char(canon(i,3))));
end;
else
disp(sprintf('\t  не удалось получить канонический вид для исходного уравнения'));
disp(sprintf('\t  \tВозможные причины:'));
if (type == 1/3)
disp(sprintf('\t  не удалось определить тип уравнения'));
else
disp(sprintf('\t  -не удаётся выразить замену'));
end;  end;
disp(sprintf('\n____________________________________________________________'));
```


§3. Начальные и граничные условия для гиперболических уравнений

Как мы установили, простейшим гиперболическим уравнением является следующее: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. В механической интерпретации данное уравнение описывает малое колебание струны. В дальнейшем будем иметь дело в основном с этим уравнением. Полученное уравнение является однородным. Среди неоднородных уравнений отметим следующее:

$$u_{tt}+b\,u_t=a^2u_{xx}+g\,u_x+f(x,t)\,. \qquad (5.3.1)$$

Уравнение (5.3.1) часто называется телеграфным уравнением. Оно описывает колебания электрического тока в проводе, получается из закона Кирхгофа.

Так как волновое уравнение (5.3.1) содержит производную по времени второго порядка, то для получения единственного решения необходимо задать два начальных условия, которые мы будем рассматривать в следующем виде:

$$u(x,0)=f_1(x),\ x\in[0,L], \qquad (5.3.2)$$

$$u_t(x,0)=f_2(x),\ x\in[0,L]. \qquad (5.3.3)$$

Отметим физический смысл данных условий. Уравнение (5.3.2) задает начальный профиль струны; уравнение (5.3.3) задает начальное ускорение струны.

Для единственности построения решения помимо самого уравнения (5.3.1) и начальных условий (5.3.2), (5.3.3) необходимо добавить два граничных условия. Будем рассматривать три основных типа граничных условий:

Граничное условие **I рода.** На концах струны задан режим жесткого закрепления: $\left.\begin{array}{l} u(0,t)=g_1(t), \\ u(L,t)=g_2(t). \end{array}\right\}$

Граничное условие **II рода**. На концах заданы силы, которые воздействуют на струну: $\left.\begin{array}{l} u_x(0,t)=g_1(t), \\ u_y(L,t)=g_2(t). \end{array}\right\}$

Граничное условие **III рода**. На концах струны задано упругое закрепление: $\left.\begin{array}{l} u_x(0,t)+g_1(0,t)=g_1(t), \\ u_y(L,t)+g_2(L,t)=g_2(t). \end{array}\right\}$

Еще раз приведем перечень типов волн, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями гиперболического типа: звуковые, электромагнитные, колебания твердых тел – продольное, поперечное, крутильное.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Штурм Шарль Франсуа (Sturm Charles-François) (1803 – 1855) – французский математик. Родился в Женеве. В 1836 г. был избран членом Парижской академии наук. С 1840 г. – профессор Политехнической школы в Париже, где стал преемником С. Пуассона. Работы Штурма посвящены математической физике. С его именем связано развитие теории колебаний струны, в рамках которой он совместно с Ж. Лиувиллем решил проблему нахождения собственных значений и собственных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Штурма – Лиувилля). Посвятил много работ методам интегрирования уравнений динамики.

§4. Решение краевой гиперболической задачи методом разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля

Рассмотрим следующую краевую задачу для гиперболического уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, t \in \left]0,\infty\right[, x \in \left]0,L\right[, \tag{5.4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \\ &u(L,t) = 0, t \in \left]0,\infty\right[, \end{aligned}\right\} \tag{5.4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x,0) = f(x), \\ &u_t(x,0) = g(x), x \in [0,L]. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.3}$$

Решение будем искать в виде бесконечного ряда $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$. Решение является суперпозицией простейших колебательных движений $X_n(x)T_n(y)$. Пространственная часть простейшего колебания $X_n(x)$, как и ранее, является собственной функцией соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Поэтому метод и называется методом разложения по собственным функциям данной задачи Штурма – Лиувилля.

I этап. Полагаем $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. По аналогии с ранее изложенным получаем два обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнения:

$$T'' - a^2 l T = 0, \tag{5.4.4}$$

$$X'' - lX = 0. \tag{5.4.5}$$

Здесь l – константа разделения. Среди всевозможных l следует отбросить те, которым соответствуют тривиальное решение и решения, не имеющие физического смысла.

Пусть $l = 0$: $T''(t) = 0 \Rightarrow T(t) = At + B$. Как можно заметить, при $t \to +\infty \Rightarrow T(t) \to \infty$, что физически невозможно. Колебания неограниченно возрастают. Исключаем $l = 0$ из дальнейшего рассмотрения.

Пусть $l > 0$. Полагаем $l = b^2$; $T''(y) - (ab)^2 T(t) = 0$. Решаем это уравнение, как линейное однородное второго порядка с постоянными коэффициентами: $T(t) = Ae^{abt} + Be^{-abt}$. Как видно, при $t \to +\infty \Rightarrow T(t) \to \infty$, что физически невозможно. Исключаем $l > 0$ из дальнейшего рассмотрения.

Пусть $l < 0$. Полагаем $l = -b^2$; $T'' + a^2 b^2 T = 0$. Это вновь линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Выписываем характеристический полином уравнения: $p^2 + (lb)^2 = 0$; $p = \pm i l b$. Выписываем решения уравнения:

$$T(t) = A\sin(ab\,t) + B\cos(ab\,t). \tag{5.4.6}$$

Анализируя структуру функции (5.4.6), видим, что она ограничена и поэтому правдоподобна. Для дальнейшего анализа решения считаем $l = -b^2$.

II этап. Подсчитаем собственные числа и соответствующие им собственные функции Штурма – Лиувилля. Для этого выписываем задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + b^2 X = 0, & (5.4.7) \\ X(0) = 0, & (5.4.8) \\ X(L) = 0. & (5.4.9) \end{cases}$$

Характеристический полином имеет следующий вид: $p^2 + b^2 = 0, \quad p = \pm b i;$ Выписываем решение уравнения (5.4.7): $X(x) = C \sin b\, x + D \cos b\, x.$ Необходимо найти коэффициенты, для этого подставляем решение в формулу (5.4.8): $X(0) = D = 0 \Rightarrow D = 0;\ X(x) = C \sin b\, x.$ Подставим решение в уравнение (5.4.9) и получим $X(L) = C \sin bL = 0 \Rightarrow bL = pn,\ b = \dfrac{pn}{L}, n = 1, 2, \ldots.$ Окончательно получаем: числа $b_n = \dfrac{pn}{L},\ n = 1,\ 2,\ \ldots$ являются собственными числами задачи Штурма – Лиувилля. Функции $X_n(x) = \sin(\dfrac{pn}{L} x)$ являются собственными функциями задачи Штурма– Лиувилля, соответствующими данным собственным числам.

Теперь можно выписать формулу элементарного колебания, удовлетворяющего гиперболическому уравнению (5.4.1) и граничным условиям (5.4.2)

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \sin(\frac{pn}{L} x)(A_n \sin(a \frac{pn}{L} t) + B_n \cos(a \frac{pn}{L} t)) . \qquad (5.4.10)$$

III этап. Находим суперпозицию элементарных колебаний, которая должна удовлетворять начальным условиям (5.4.3) нашей краевой задачи. В этом случае мы формально получим решение краевой задачи (5.4.1 – 5.4.3). Строим суперпозицию элементарных колебаний (5.4.10):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{pn}{L} x) \cdot (A_n \sin(a \frac{pn}{L} t) + B_n \cos(a \frac{pn}{L} t)) .$$

Подставляем данную бесконечную сумму в начальное условие (5.4.3):

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{np}{L} x) \cdot B_n = f(x), \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot a \cdot \frac{np}{L} \cdot \sin(\frac{np}{L} x) = g(t). \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} (5.2.11) \\ (5.2.12) \end{matrix}$$

Используя попарную ортогональность собственных функций задачи Штурма – Лиувилля, домножим правую и левую части уравнения (5.4.11) на $\sin(m \dfrac{p}{L} x)$ и проинтегрируем от 0 до L. Получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot\sin(\frac{mp}{L}x)dx = \int_0^L \sin(\frac{mp}{L}x)\cdot f(x)\cdot dx.$$

Левую часть соотношения уже считали в предыдущей главе. Она равна $\frac{L}{2}$. Поэтому сразу выражая коэффициенты из левой части, получаем

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot f(x)\cdot dx. \tag{5.4.13}$$

Аналогично поступаем со вторым уравнением (5.4.12); в результате получаем:

$$A_n = \frac{2}{npa}\int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot g(x)\cdot dx \tag{5.4.14}$$

Таким образом, краевая задача решена. Формальное решение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{pn}{L}x)\cdot(\frac{2}{npa}(\int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot g(x)\cdot dx)\sin(a\frac{pn}{L}t)+ \\ +\frac{2}{L}(\int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot f(x)\cdot dx)\cos(a\frac{pn}{L}t)). \end{gathered} \tag{5.4.15}$$

Отметим следующее. Если начальная скорость струны равна нулю, т.е. $g(x)=0$, то решение (5.4.15) задачи (5.4.1) – (5.4.3) принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{pn}{L}x)\cdot\frac{2}{L}(\int_0^L \sin(\frac{np}{L}x)\cdot f(x)\cdot dx)\cos(a\frac{pn}{L}t).$$

Теорема. Если функция $f(x)$ на отрезке $[0;L]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям $f(0)=f(L)=0$, $f''(0)=f''(L)=0$, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условию $g(0)=g(L)=0$, то существует единственное решение $u(x,t)$ краевой задачи (5.4.1) – (5.4.3). Функция $u(x,t)$, определенная рядом (5.4.15), в котором коэффициенты A_n, B_n вычисляются по формулам (5.4.13), (5.4.14) соответственно, имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (5.4.1), краевым условиям (5.4.2) и начальным условиям (5.4.3), причем возможно почленное дифференцирование ряда (5.4.15) по x и t дважды. При этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно для $0\le x\le L$, $t\ge 0$.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Лиувилль Жозеф (Liouville Joseph) (1809 – 1882) – французский математик, член Парижской Академия Наук. Профессор Политехнической школы и Коллеж де Франс. Систематически исследовал разрешимость ряда задач – дал строгое определение понятию элементарной функции и квадратуры. Исследовал возможность интегрирования в элементарных функциях заданной алгебраической либо трансцендентной функции. Изучал дифференциальные уравнения с частными производными. Он совместно с Ш. Штурмом решил проблему нахождения собственных значений и собственных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений. Получил ряд принципиальных результатов. Именем Лиувилля были названы поверхность и ряд математических теорем.

Задачи для решения. Решить гиперболическую краевую задачу:

1. $u_{tt}=u_{xx},\quad \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0,\\ u(1,t)=0, \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} u(x,0)=\sin(p\,x),\\ u_t(x,0)=0. \end{array}\right\}$

2. $u_{tt}=u_{xx},\quad \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0,\\ u(1,t)=0, \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} u(x,0)=0,\\ u_t(x,0)=\sin(3p\,x). \end{array}\right\}$

3. $u_{tt}=u_{xx},\quad \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0,\\ u(1,t)=0, \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} u(x,0)=\sin(px)+0{,}5\sin(3px),\\ u_t(x,0)=0. \end{array}\right\}$

Приведем скрипт в ToolBox PDE среды MATLAB решения следующей краевой задачи:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ t\in\,]0,\infty[\,,\ x\in\,]0,1[\,,\ \left.\begin{array}{l} u(x,0)=f_1(x),\\ u_t(x,0)=f_2(x), x\in[0,1], \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0,\\ u(1,t)=0, t\in\,]0,\infty[. \end{array}\right\}$$

```
% Решение гиперболического  уравнения
%   utt = a^2*utt
% в области  D  (0<=x<=1; 0<=t<=time).
% С системой начальных условий    u0(x,0)  = f1(x);    ut0(x,0) = f2(x);
% и системой граничных условий    u(0,t) = g1(t);        u(1,t) = g2(t);
% методом конечных элементов
syms x y;
%Инициализация данных:
a = 4;          %коэффициент 'a' из уравнения
u0  = 0;        %начальное положение точек
ut0 = sin(x);   %начальная скорость точек
time = 2;       %интервал времени
fps  = 100;     %количество разбиений единицы времени
%----------------------------------------
%Генерация сетки
lenX = 50;      %количество разбиений оси Ox
lenY = 1;       %количество разбиений оси Oy
[p,e,t]=poimesh('squareg', lenX, lenY);
p(1,:)=(p(1,:)+1)/2;    %переход из области [-1,1][-1,1]
```

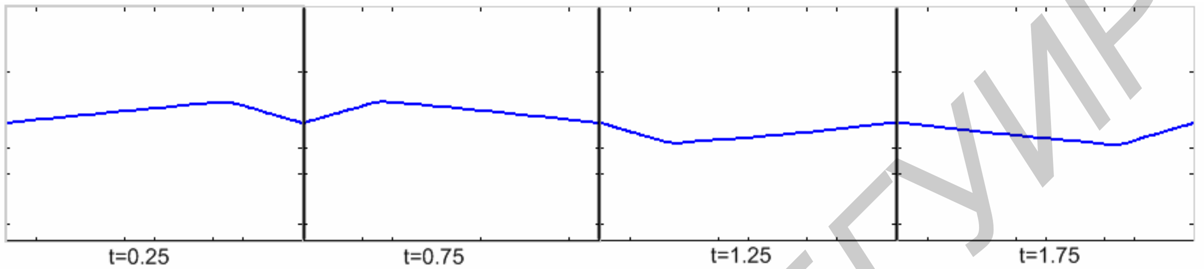
```
p(2,:)=(p(2,:)+1)/2;    %в область [0,1][0,1]
np=size(p,2);   %определяем количество узлов сетки
%----------------------------------------
%Инициализация массива начальных значений:
u0v  = zeros(np,1); %задаём массивы-столбики, размером в количество
ut0v = zeros(np,1); %узлов сетки, сначала заполненный нулями
u0v (:,1) = subs(u0,x,p(1,:));  %заполняем эти массивы
ut0v(:,1) = subs(ut0,x,p(1,:)); %значениями функций начальных условий
nframe = time*fps;  %считаем, на сколько частей разбить интервал времени
tlist = linspace(0,time,nframe);%создаём массив значений времени
%----------------------------------------
%Решение гиперболического уравнения
u = hyperbolic(u0v,ut0v,tlist,'Border',p,e,t,a^2,0,0,1);
%----------------------------------------
%Анимируем решение
limit = max(max(abs(u)));%ищем значение с наибольшим модулем
newplot;
M = moviein(nframe);
for i = 1:nframe        %рисуем каждый кадр отдельно
%рисуем график по точкам, рекомендуется проследить, как хранятся данные в p и u
plot(p(1,1:lenX+1),u(1:lenX+1,i));
axis([0 1 (-limit)*4 limit*4]);
caxis([(-limit)*4 limit*4]);
M(:,i) = getframe;
end;
%----------------------------------------
function [q,g,h,r] = pdebound(p,e,u,time)
%----------------------------------------
nb = size(e,2);
q = zeros(1,nb);
g = zeros(1,nb);
h = zeros(1,2*nb);
r = zeros(1,2*nb);
%----------------------------------------
%устанавливаем  граничные условия  u(0,t)=0 и u(1,t)=0
for i = 1:1:nb
p1 = p(1,e(1,i)); p2 = p(1,e(2,i));
if (((p1==0)&&(p2==0)) || ((p1==1)&&(p2==1)))
h(1,i) = 1; h(1,nb+i) = 1;
end; end;
```

Файл для обработки граничных условий имеет следующий вид:

```
%функция обработки граничных условий
function [q,g,h,r] = pdebound(p,e,u,time)
%----------------------------------------
nb = size(e,2);
q = zeros(1,nb);
g = zeros(1,nb);
h = zeros(1,2*nb);
r = zeros(1,2*nb);
%----------------------------------------
%устанавливаем  граничные условия u(0,t)=0 и u(1,t)=0
```

```
for i = 1:1:nb
p1 = p(1,e(1,i)); p2 = p(1,e(2,i));
if (((p1==0)&&(p2==0)) || ((p1==1)&&(p2==1)))
h(1,i) = 1; h(1,nb+i) = 1;
end; end;
%----------------------------------------
```

Ниже приведена визуализация построенного решения. Так колеблется струна в рассмотренной нами задаче.



§5. Метод характеристик решения задачи Коши гиперболического уравнения

Рассмотрим метод Даламбера решения еще одной задачи для гиперболического уравнения.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Д'Аламбер Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond) (1717 – 1783) – великий французский математик и философ. Академик. В 1743 г. в работе «Трактат о динамике» впервые сформулировал общие правила моделирования дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике – так называемый принцип Д'Аламбера. В 1747 г. Жан Лерон Д’Аламбер опубликовал статью по теории поперечных колебаний струны, где привел метод решения гиперболического дифференциального уравнения в частных производных. Он представил решение как сумму двух произвольных функций, и по граничным условиям выразил одну из них через другую. Эти работы Д’Аламбера, а также последующие работы Л. Эйлера и Д. Бернулли заложили фундамент дисциплины «уравнения математической физики». Д’Аламбер получил ряд принципиальных результатов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Д’Аламбер работал вместе с Д. Дидро над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел». В «Энциклопедии» Д’Аламбер вёл отделы математики и физики.

Построим решение задачи Коши для следующего волнового уравнения:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \qquad (5.5.1)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Эта задача описывает движение бесконечной струны с заданными начальными условиями. Она была решена в 1750 г. французским математиком Даламбером. Формула Даламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(x)dx$$

позволяет легко найти решение, если известны начальные условия. Кроме того, она позволяет дать интересную физическую интерпретацию решения на языке бегущих волн.

Задачу (5.5.1) можно решать с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной x по аналогии с §5 предыдущей главы. Мы воспользуемся другим методом – методом канонических координат. Решение задачи (5.5.1) разобьём на несколько этапов.

I этап. Заменим старые координаты (x,t) новыми каноническими координатами (x,h). Если заменить две независимые переменные x и t новыми пространственно-временными координатами $x=x+ct$, $h=x-ct$, то уравнение $u_{tt}=c^2u_{xx}$ преобразуется в уравнение $u_{xh}=0$.

В этом легко убедиться, если воспользоваться формулами преобразования координат:

$$u_x=u_x+u_h\,;\ u_t=c(u_x-u_h)\,;\ u_{xx}=u_{xx}+2u_{xh}+u_{hh}\,;\ u_{tt}=c^2(u_{xx}-2u_{xh}+u_{hh})\,. \qquad (5.5.2)$$

Подставляя эти выражения для производных в волновое уравнение, получим вторую каноническую форму записи гиперболического уравнения:

$$u_{xh}=0.$$

II этап. Преобразованное уравнение легко решить двумя последовательными интегрированиями (сначала по переменной x, а затем по h). После интегрирования по x получаем $u_h(x,h)=j_1(h)$ – произвольная функция от h. Интегрирование последнего соотношения по h приводит к общему решению $u(x,h)=j(h)+y(x)$, где $j(h)$ – первообразная функция $j_1(h)$, а $y(x)$ – произвольная функция. Итак, общее решение уравнения $u_{xh}=0$ записывается в виде

$$u(x,h)=j(h)+y(x), \qquad (5.5.3)$$

где $j(h)$ и $y(x)$ – произвольные функции своих аргументов. Например, несложно проверить, что функции $u(x,h)=\sin h+x^2$, $u(x,h)=1/h+tgx$, $u(x,h)=h^2+e$ являются решениями уравнения $u_{hx}=0$.

III этап. Возвращаемся к исходным координатам x и t. Для нахождения общего решения, т.е. всех решений уравнения $u_{tt}=c^2u_{xx}$, подставим $x=x+ct$, $h=x-ct$ в решение $u(x,h)=j(h)+y(x)$. В результате получаем

$$u(x,t)=j(x-ct)+y(x+ct). \qquad (5.5.4)$$

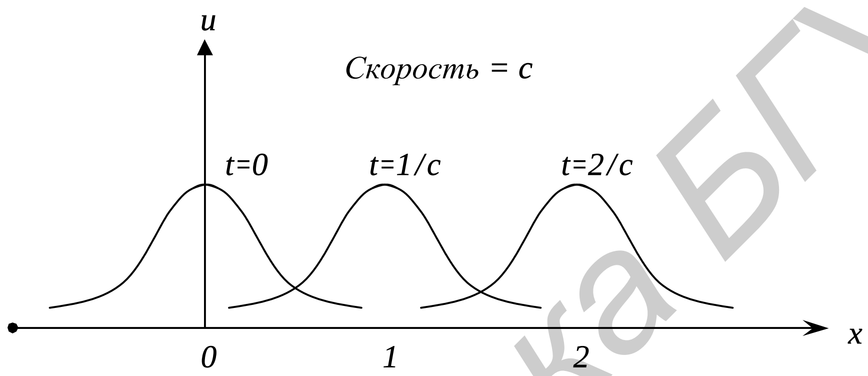
Это общее решение волнового уравнения. С физической точки зрения оно представляет собой сумму двух бегущих волн произвольной формы, движущихся в противоположных направлениях со скоростью c. Например, следующие функции:

I. $u(x,t)=\sin(x-ct)$ – волна, движущаяся слева направо;

II. $u(x,t)=(x+ct)^2$ – волна, движущаяся справа налево;

III. $u(x,t)=\sin(x-ct)+(x+ct)^2$ – две волны в противоположных направлениях – являются типичными решениями волнового уравнения.

На следующем рисунке изображена простейшая бегущая волна $u(x,t)=e^{-(x-ct)^2}$, которая движется слева направо.



IV этап. Учтем начальные условия. Для решения задачи Коши волнового уравнения подставим общее решение $u(x,t)=j\,(x-ct)+y\,(x+ct)$, (содержащее две произвольные функции) в начальные условия $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$, чтобы найти конкретные выражения для произвольных функций j и y. После подстановки получаем

$$\begin{aligned} &j\,(x)+y\,(x)=f(x),\\ &-cj\,'(x)+cy\,'(x)=g(x). \end{aligned} \qquad (5.5.5)$$

Если теперь проинтегрировать второе уравнение (5.5.5), то получится алгебраическая система двух уравнений относительно неизвестных функций $j\,(x)$ и $y\,(x)$. В самом деле, после интегрирования в пределах от x_0 до x получаем

$$-cj\,(x)+cy\,(x)=\int_{x_0}^{x} g(x)\,dx+K\,. \qquad (5.5.6)$$

Решаем теперь уравнение (5.5.6) совместно с первым уравнением (5.5.5) и получаем следующие выражения для функций $j\,(x)$ и $y\,(x)$:

$$(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int\limits_{x_0}^{x}g(x)dx+K/2c,$$
$$j(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int\limits_{x_0}^{x}g(x)dx-K/2c. \qquad (5.5.7)$$

Следовательно, общее решение задачи(5.5.1) даётся формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}g(x)dx\,. \qquad (5.5.8)$$

Решение вида (5.5.8) принято называть **формулой Даламбера**. Самостоятельно убедиться в том, что пределы интегрирования меняются от $x-ct$ до $x+ct$. Задача Коши (5.5.1) для волнового уравнения решена.

Глава 6. Линейные эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ. ТИПЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА КРУГЕ. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПУАССОНА. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. МЕТОД РИТЦА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ.

§1. Оператор Лапласа в криволинейных системах координат

Выпишем оператор Лапласа в $\boldsymbol{R}^2$ в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{6.1.1}$$

Выпишем параболические, гиперболические и эллиптические уравнения общего вида, используя дифференциальные операторы первого порядка. Градиент: $grad = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Дивергенция: $div = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. Ротор:

$$\overrightarrow{rot}\ a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left[\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\right] = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Параболическое уравнение примет вид: $a \cdot u_t' - div(b \cdot grad(u)) + g \cdot u = f$, где a, b, g – некоторые известные функции из R; гиперболическое уравнение будет иметь вид: $a \cdot ut_t'' - div(b \cdot grad(u)) + g \cdot u = f$, где a, b, g – некоторые известные функции из R; эллиптическое уравнение: $-div(b \cdot grad(u)) + g \cdot u = f$, где b, g – некоторые известные функции из R. Оператор задачи Штурма – Лиувилля примет вид $-div(b \cdot grad(u)) + g \cdot u = a \cdot l u,$ где a, b, g – коэффициенты.

В приложениях важную роль играет набла ∇ – оператор Гамильтона. Он вводится либо как символический вектор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, либо как дифференциальный оператор: $\nabla u = \overrightarrow{grad}\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$. В физических приложениях часто применяется следующая запись: $\overrightarrow{grad}\ u = \nabla u$; $div\ \vec{a} = (\nabla, \overrightarrow{a})$; $rot(\overrightarrow{a}) = [\nabla, \vec{a}]$.

Выпишем оператор Лапласа Δ в двумерном случае в полярной системе координат. Напомним, что переход из полярных координат $\boldsymbol{R}^2$ в прямоугольные декартовы задается соотношениями: $x = r\cos j$, $y = r\sin j$. Переход из декартовых координат R^2 в полярные задается соотношениями:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad j=arctg\,\dfrac{y}{x}$. Вычисляем полную производную: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial x}$.

Подсчитываем:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos j}{r}=\cos j\ ,$$

$$\frac{\partial j}{\partial x}=\left(arctg\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{1+tg^2 j}\left(-\frac{r\sin j}{r^2\cos^2 j}\right)=\cos^2 j\left(-\frac{\sin j}{r\cos^2 j}\right)=-\frac{\sin j}{r}.$$

Получаем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\sin j}{r}$.

Вычисляем полную производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial y}$. Подсчитываем:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\sin j}{r}=\sin j\ ,$$

$$\frac{\partial j}{\partial y}=\left(arctg\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+tg^2 j}\cdot\frac{1}{r\cos j}=\cos^2 j\cdot\frac{1}{r\cos j}=\frac{\cos j}{r}.$$

Получаем $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\cos j}{r}$.

Теперь вычислим вторую производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Введем обозначение $F_1=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=\dfrac{\partial F_1}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial x}$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right)'_r=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos j-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\sin j}{r}-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial j}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right)'_j=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\sin j}{r}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right).$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos^2 j-\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\sin j\cos j}{r}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j\cos j}{r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\frac{\cos j\sin j}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2 j}{r}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\sin^2 j}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j\sin j}{r^2}.$$

Теперь вычислим вторую производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Введем обозначение

$$F_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ тогда } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial j}\cdot\frac{\partial j}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right)'_r = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\sin j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\cos j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial j} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right)'_j = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\cos j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right).$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\sin^2 j + \frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\cos j\,\sin j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j\,\sin j}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\frac{\sin j\,\cos j}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2 j}{r} +$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\cos^2 j}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j\,\cos j}{r^2}.$$

Подставляя и приводя подобные, окончательно получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}. \qquad (6.1.2)$$

Замечание. Самостоятельно получить запись оператора Лапласа в $\boldsymbol{R}^3$ в цилиндрической и сферической системах координат соответственно:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2 q} + \frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{\cos q}{r^2\sin q} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

§2. Типы краевых задач для оператора Лапласа

Задача Дирихле: краевая задача с граничным условием 1-го рода

Условие Дирихле: на границе области задана некоторая функция. Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0,\ r\in[0,1],\\ u(1,j) = g(j),\ j\in[0,2p].\end{cases} \qquad (6.2.1)$$

Помимо внутренней задачи Дирихле можно рассмотреть следующую задачу Дирихле, которая носит название внешней задачи Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0,\ r\geq 1,\\ u(1,j) = g(j),\ j\in[0,2p].\end{cases} \qquad (6.2.2)$$

Задачу Дирихле можно рассматривать и на кольце:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, a \le r \le b, \\ u(a, j) = g_1(j), \\ u(b, k) = g_2(j), j \in [0, 2p]. \end{cases} \qquad (6.2.3)$$

Задача Неймана: краевая задача с граничным условием 2-го рода

Для данной краевой задачи на границе области задается производная по внешней нормали $\dfrac{\partial u}{\partial n}$. Эта производная эквивалентна вытекающему потоку, т.е. через границу области задан поток.

Постановка задачи Неймана в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = g(x, y). \end{cases} \qquad (6.2.4)$$

Пример постановки задачи Неймана в полярной системе координат на круге:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, r \in [0, 1], j \in [0, 2p]; \\ \left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = g(j), r = 1, j \in [0, 2p]. \end{cases} \qquad (6.2.5)$$

Отметим, что для данной задачи поток тепла направлен внутрь при $j = [0, p]$ и наружу при $j \in [p, 2p]$.

Отдельно отметим, что задача Неймана для уравнения Лапласа имеет физический смысл только в том случае, когда суммарный поток тепла через границу области равен нулю. На границе должно выполняться соотношение $\int\limits_{\partial G} \dfrac{\partial u}{\partial n} dS = 0$. В противном случае задача не имеет физического смысла, хотя может иметь математическое решение.

Краевая задача с граничным условием 3-го рода

Рассмотрим задачу с граничным условием смешанного типа. Граничное условие получено как линейная суперпозиция двух первых типов граничных условий и имеет следующий вид: $\left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = -h(u - g)$. Здесь $u(x, y)$ – искомая функция; $g(x, y)$ – некоторая заданная на границе функция; h – некоторая константа, дифференцирование проводится по внешней нормали к ∂G.

Согласно этому условию, поток тепла, втекающий в область через границу, пропорционален разности между искомой температурой u и некоторой заданной температурой g. Это означает при $k > 0$ следующее. Если температура u на границе области выше температуры окружающей среды, то тепло вытекает из области. Если температура u на границе соответственно ниже температуры окружающей среды, то тепло втекает в область.

Это закон теплообмена Ньютона, записанный в производных для стационарной задачи теплообмена.

Если рассмотреть процесс во времени, то получится не стационарное, а эволюционное уравнение параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$. Поэтому, как отмечалось ранее, эллиптическое уравнение является стационарным случаем (мгновенным срезом в некоторый момент времени) параболического уравнения.

§3. Корректность задач для оператора Лапласа

Задачи математической физики делятся на корректно и не корректно поставленные. Данному понятию предпошлём понятие устойчивости.

Решение краевой задачи называется устойчивым, если для каждого действительного числа $e > 0$ найдется такое действительное число $d(e) > 0$, что при изменении исходных данных задачи на величину по норме, не превосходящей d, решение задачи в каждой точке внутри области и на границе получит приращение по норме, не превосходящее e.

Краевая задача поставлена корректно в рассмотренной области, если её решение: существует, единственно, устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из этих требований, называются не корректно поставленными.

Пример Адамара. Покажем, что следующая задача Коши для уравнения Лапласа поставлена не корректно:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u'_y(x,0) = F(x); \ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Положим: $f_1(x) = 0;$ $F_1(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$. Тогда решение запишется в виде: $u_1(x,y) = \frac{1}{a^2}\sin(ax)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{ay} - e^{-ay}\right)$. Положим теперь $f_2(x) = 0, F_2(x) = 0$. Тогда решение: $u_2(x,y) = 0$. Теперь оценим отклонение начальных данных и отклонение получившихся решений:

$$\sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0; \qquad \sup_x |F_1(x) - F_2(x)| = \frac{1}{a};$$

$$\sup_{x,y\ge 0} |u_1(x,y) - u_2(x,y)| = \sup_{x,y\ge 0} \left| \frac{1}{2a^2} \sin(ax)\left(e^{ay} - e^{-ay}\right) \right| = \frac{1}{2a^2}\left(e^{ay} - e^{-ay}\right).$$

Отсюда следует, что при сколь угодно малом отклонении начального условия a, отклонения соответствующих решений могут быть сколь угодно велики. Задача не обладает свойством устойчивости. Задача является не корректно поставленной.

§4. Схема решения внутренней задачи Дирихле на круге

Рассмотрим следующую задачу Дирихле на круге:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, \ \ r \in [0;1] \\ u(1, j) = g(j); \ \ j \in [0, 2p] \ . \end{cases} \tag{6.4.1}$$

I этап. Будем искать решение методом разделения переменных, полагая

$$u(r, j) = \Phi(j)\cdot R(r), \tag{6.4.2}$$

Подставляя (6.4.2) в уравнение (6.4.1), получим

$$\Phi(j)\cdot R''(r) + \frac{1}{r}\cdot\Phi(j)\cdot R'(r) + \frac{1}{r^2}\cdot\Phi''(j)\cdot R(r) = 0,$$

или

$$\frac{\Phi''(j)}{\Phi(j)} = -\frac{r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r)}{R(r)}. \tag{6.4.3}$$

В силу независимости правой и левой частей (6.4.3) друг от друга, приравниваем их к некоторой константе m и получаем следующую систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\Phi''(j) - m\cdot\Phi(j) = 0, \tag{6.4.4}$$

$$r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r) + m\cdot R(r) = 0. \tag{6.4.5}$$

Исследуем константу разделения m. Решаем уравнение (6.4.4). Выписываем характеристический полином: $p^2 - m = 0$. Полином имеет два корня: $p_1 = \sqrt{m}$ и $p_2 = -\sqrt{m}$. Решение уравнения (6.4.4) примет следующий вид:

$$\Phi(j) = A\cdot e^{\sqrt{m}\, j} + B\cdot e^{-\sqrt{m}\, j}. \tag{6.4.6}$$

Пусть $m > 0$. Анализируя (6.4.6), видим, что функция $\Phi(j)$ не является периодической. Исключаем $m > 0$ из дальнейшего рассмотрения. Пусть $m = 0$. Тогда уравнение (6.4.4) имеет вид $\Phi''(j) = 0$, интегрируя которое, получим $\Phi(j) = C\cdot j + D$, где C, D – константы. Исключаем $m = 0$ из дальнейшего рассмотрения. Пусть $m < 0$. Полагаем $m = -l^2,\ l \in R$. Тогда решение (6.4.4) представимо в виде

$$\Phi(j) = A\cdot\cos l j + B\cdot\sin l j\ . \tag{6.4.7}$$

Данное решение согласуется с физическим смыслом задачи (6.4.1).

II этап. Формируем задачу Штурма – Лиувилля, полагая $m = -l^2,\ l \in R$:

$$r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r) - l^2\cdot R(r) = 0, \tag{6.4.8}$$

$$R(1) = g(j)/\Phi(j). \tag{6.4.9}$$

Решаем дифференциальное уравнение (6.4.8), которое называется уравнением Эйлера. Оно является линейным обыкновенным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с непостоянными коэффициентами. Сделаем подстановку $R(r) = r^n$. Поскольку $R'(r) = n \cdot r^{n-1}$, $R''(r) = n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2}$, то, вписывая $R'(r)$ и $R''(r)$ в уравнение (6.4.8), получаем $r^2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} + r \cdot n \cdot r^{n-1} - l^2 \cdot r^n = 0$, или, что то же самое:

$$n^2 - l^2 = 0. \qquad (6.4.10)$$

Находим корни уравнения (6.4.10): $n = \pm l$ ($l = \pm n$). Поскольку корни действительные и кратность каждого корня равна единице, общее решение уравнения (6.4.8) будет иметь следующий вид:

$$R_n(r) = C \cdot r^n + D \cdot r^{-n}. \qquad (6.4.11)$$

Для определенности можно ограничиться только положительными значениями n, так как в силу произвола выбора констант C, D отрицательные значения n новых частных решений не дают. Поскольку ищется решение конечное в круге $G = \{0 \le r \le 1, j \in [0, 2p]\}$, в формуле (6.4.11) положим $D = 0$, т.е. $R_n(r) = C \cdot r^n$.

Подставляя (6.4.7) и (6.4.11) в представление (6.4.2), окончательно получаем

$$u_n(r, j) = \Phi_n(j) \cdot R_n(r) = (A \cdot \cos(nj) + B \cdot \sin(nj)) \cdot r^n. \qquad (6.4.12)$$

Функция (6.4.12) будет элементарным решением уравнения (6.4.1).

III Этап. Решение краевой задачи (6.4.1) будем искать в виде следующего ряда:

$$u(r, j) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nj + B_n \sin nj) r^n. \qquad (6.4.13)$$

Подберём произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялось краевое условие задачи (6.4.1). Подставляя в равенство (6.4.13) $r = 1$, получаем

$$g(j) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nj + B_n \sin nj). \qquad (6.4.14)$$

Потребуем, чтобы ряд (6.4.14) являлся рядом Фурье функции $g(j)$ на интервале $(0, 2p)$ с коэффициентами A_n, B_n:

$$A_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} g(j)\, dj, \quad A_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} g(j) \cos(nj)\, dj, n = 1, 2, \ldots .$$

$$B_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} g(j) \sin(nj)\, dj, n = 1, 2, \ldots . \qquad (6.4.15)$$

Окончательно получаем, что ортогональный ряд (6.4.13) с коэффициентами, определёнными (6.4.15), доставляет формальное решение краевой задаче (6.4.1).

Теорема. Если функция $g(j)$ на окружности $\partial G = \{r = 1, j \in [0, 2p]\}$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную, то существует единственное решение $u(r, j)$ граничной задачи

Дирихле (6.4.1). Функция $u(r,j)$, определяемая абсолютно и равномерно сходящимся рядом (6.4.13), в котором коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам (6.4.15), имеет непрерывные вторые производные по совокупности переменных r, j. Причем возможно почленное дифференцирование ряда (6.4.13) по r и по j дважды. При этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно на $G=\{\, r\in[0,1]\,,\, j\in[\,0,2p\,]\,\}$.

Задачи для решения. Решить эллиптическую краевую задачу Дирихле $r\in[0,1],\ j\in[0,2p\,]$ с проверкой решения:

1. $\Delta u=0,\ u(1,j)=2.$ **2.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\sin j\,.$ **3.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\cos j\,.$

4. $\Delta u=0,\ u(1,j)=1+\sin j\,.$ **5.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\sin j+\frac{1}{2}\cos j\,.$ **6.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=1+\sin j+\sin 2j\,.$

Приведем скрипт в ToolBox PDE среды MATLAB решения задачи Дирихле, заданной на треугольной области $G: x>0,\, y>0,\, x+y<1$ **и удовлетворяющую на границе области** $\partial G: x=0,\, y=0,\, x+y=1$ **условию** $u|_{\partial G}=x^2+y^2$ (отдельно отметим, что в §8 эта же задача будет решена методом Ритца).

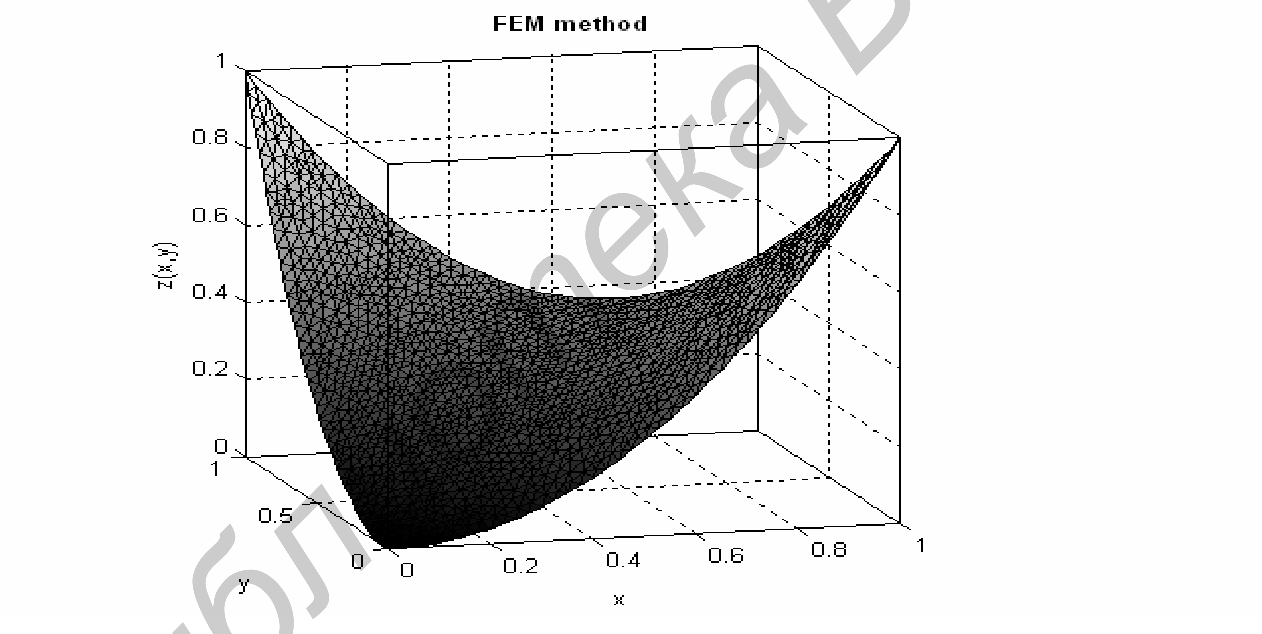
```
%решение эллиптической задачи Дирихле для треугольной области
clear all;
format long;
syms x y z D2zx2 D2zxy D2zy2; % переменные
LapL=D2zx2+D2zy2;  % левая часть уравнения Лапласа
LapR=0;  % правая часть уравнения Лапласа
zc=x^2+y^2;  % граничное условие
[p,e,t]=initmesh('triangleg','hmax',0.025); % формируем FEM-сетку
np=size(p,2);  % число узлов
nel=size(t,2);  % число элементов
fprintf('Число узлов сетки разбиения np=%d\n',np);
fprintf('Число конечных элементов nel=%d\n',nel);
da=daspect;  % текущие масштабы осей
da(1:2)=min(da(1:2));  % выравняли масштабы
daspect(da);
% -------------задание граничных условий-------------------------------
s{1}='function [q,g,h,r]=boundmem(p,e,u,time)';  % заголовок
s{2}='nb=size(e,2);';  % определили размерности
s{3}='q=zeros(1,nb);  g=zeros(1,nb);';  % задали массивы условий Неймана
s{4}='h=ones(1,2*nb);  r=zeros(1,2*nb);';  % задали массивы условий Дирихле
s{5}='xb=[p(1,e(1,:)),p(1,e(2,:))];';  % столбец координат x
s{6}='yb=[p(2,e(1,:)),p(2,e(2,:))];';  % столбец координат y
zcf=subs(zc,{x,y},{sym('xb'),sym('yb')});  % формула для подстановки
s{7}=['r=' vectorize(zcf) ';'];
disp('Текст файла граничных условий boundmem.m:')
fprintf('%s\n',s{:})
fid = fopen ('C:\MATLAB701\work\boundmem.m', 'w' );
```

```
fprintf(fid,'%s\n',s{:});
fclose(fid);  % закрываем файл
% --------задание функций, входящих в дифференциальное уравнение--------
a=eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{1,0,0,0}));
c11=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,1,0,0}));
c12=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,0,1,0}));
c22=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,0,0,1}));
c=[c11;c12;c12;c22];
fp = subs(LapR,{x,y},{p(1,:),p(2,:)});  % f в узлах
if (length(fp)>1)
f = (fp(t(1,:))+fp(t(2,:))+fp(t(3,:)))/3;  % f в ц.т. конечных элементов
else
f = 0; end;
%-------------------Визуализируем решение------------------------------
u = assempde('boundmem',p,e,t,c,a,f); % решили
pdeplot(p,e,t,'xydata',u,'zdata',u,'mesh','on','colorbar','off');  % рисуем
title ('\bfFEM method')  % заголовок
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z(x,y)');
v = axis;  % границы осей
da = daspect;  % масштаб осей
da(1:2) = min(da(1:2));  % min из двух
daspect(da)  % выравняли масштаб осей
axis(v); % оставили границы
colormap(gray)  % выбрали палитру
grid on  % показали сетку
box on  % показали внешний контур
```

```
% функция описания геометрии области, на которой строится решение
function [x,y]=triangleg(bs,s)
% Описывает геометрические данные для треугольной области
% NE=TRIANGLEG возвращает количество граничных участков
% D=TRIANGLEG(BS) возвращает матрицу с одной колонкой для каждого
% граничного участка, определенного в BS
% [X,Y]=TRIANGLEG(BS,S) возвращает координаты граничных точек
% BS определяет граничные участки и S соответствующие
% значения параметра BS может быть скаляром
nbs=3;
if nargin==0,
x=nbs; % количество граничных участков
return
end;
d=[
0 0 0 % начальное значение параметра
1 1 1 % конечное значение параметра
0 0 0 % номер левосторонней области
1 1 1 % номер правосторонней области
];
bs1=bs(:)';
if nargin==1,
x=d(:,bs1);
return
end;
x=zeros(size(s));
```

```
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if m==1 && n==1,
bs=bs*ones(size(s)); end;
if ~isempty(s),
ii=find(bs==1); % граничный участок 1
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)],[0 1],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)],[1 0],s(ii)); end;
ii=find(bs==2); % граничный участок 2
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)],[1 0],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)],[0 0],s(ii)); end;
ii=find(bs==3); % граничный участок 3
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)],[0 0],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)],[0 1],s(ii));
end; end;
```

Ниже приведена визуализация полученного решения:



§5. Анализ решения задачи Дирихле. Интегральная формула Пуассона

Если граничное условие $g(j)$ уже представимо конечным числом слагаемых своего разложения в тригонометрический ряд Фурье, то решение задачи Дирихле выписывается почти автоматически. Пусть дана задача:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(1, j) = 1 + \sin j + \frac{1}{2}\sin 3j + \cos 4j .$$

Тогда решение данной задачи будет иметь следующий вид: $u(r, j) = 1 + r \cdot \sin j + \frac{1}{2} r^{3} \cdot \sin 3j + r^{4} \cdot \cos 4j$, поскольку в данном случае граничные условия $g(j)$ уже разложены в тригонометрический ряд Фурье со следующими коэффициентами: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{1}{2}$, $b_4 = 0$, ... Отметим, что коэффициент $a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} g(j)\,dj$ является средним значением функции $g(j)$.

Выпишем решение задачи Дирихле, заданной на круге произвольным радиусом R:

$$u(r,j) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos(nj) + b_n\sin(nj)).$$

Подставим формулы (6.4.15) для подсчета коэффициентов a_n и b_n. Получаем следующее представление:

$$u(r,j) = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} g(j)dj + \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \int_0^{2p} g(j)(\cos(na)\cdot\cos(nj) + \sin(na)\cdot\sin(nj))da =$$

$$= \frac{1}{2p}\int_0^{2p}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left(\cos(j-a)\right)\right\}g(a)da.$$

Преобразуем выражение, стоящее в фигурных скобках:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(j-a) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[e^{in(j-a)} + e^{-in(j-a)}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(j-a)}\right)^n + \left(\frac{r}{R}e^{-i(j-a)}\right)^n\right] = 1 + \frac{\frac{r}{R}e^{i(j-a)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(j-a)}} + \frac{\frac{r}{R}e^{-i(j-a)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(j-a)}} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(j-a)+\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}.$$

Окончательно получаем

$$u(r,j) = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} g(a)\left[\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}\right]da.$$

Данное выражение называется интегральной формулой Пуассона. Получено еще одно представление решения внутренней задачи Дирихле.

Замечание: Отметим, что выражение $\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}$ часто называют ядром Пуассона.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Пуассон Симеон Дени (1781 – 1840) – выдающийся французский математик, физик, механик. Член Парижской Академии наук. С 1816 г. – профессор в Сорбонне. В двухтомном курсе механики Пуассон развил идеи Ж. Лагранжа и П. Лапласа. Пуассон основательно разработал многие разделы математической физики, дал решения многих задач электростатики и магнитостатики. Предложил общие методы интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости. Существенное значение имеют работы Пуассона, посвященные уравнениям в конечных разностях, дифференциальным уравнениям с частными производными, вариационному исчислению, ортогональным рядам.

§6. Задача оптимального управления эллиптической системой

Приведем результат поиска оптимального управления в задаче управления дифференциальным уравнением эллиптического типа. Задачи такого типа часто встречаются в практических приложениях управления установившимися процессами.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}=F(x,z,u), \tag{6.6.1}$$

где нелинейная функция F непрерывна по $x=(x_1,x_2,x_3)$ в области D трёхмерного евклидова пространства и дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных z и u, где u – некоторый r-мерный параметр, принимающий всевозможные значения из некоторой ограниченной области U (открытой или замкнутой) r-мерного евклидова пространства.

Пусть S достаточно гладкая граница области D. Потребуем, чтобы искомая функция $z(x,y)$ удовлетворяла условию

$$\frac{dz}{dn}+hz=f(x) \text{ при } x\in S, \tag{6.6.2}$$

где n – направление внешней нормали, h – положительная постоянная, а $f(x)$ – ограниченная кусочно-непрерывная на S функция.

Функцию $u=u(x)$, определённую в области D, будем называть допустимой, если её значения расположены в U и она может иметь лишь конечное число поверхностей, линий и точек разрыва. Потребуем, чтобы в окрестности любой точки поверхности разрыва можно было ввести невырожденное преобразование координат $x_i=x_i(x), i=1,2,3$, такое, что эта поверхность переходит в кусок плоскости $x_3=0$. Вставляя такую допустимую функцию в уравнение (6.6.1), получим

$$\Delta z = F(x, z, u(x)), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}. \tag{6.6.3}$$

Это уравнение уже не содержит параметра. Согласно условиям, наложенным на F и $u(x)$, его правая часть является кусочно-непрерывной функцией. Поверхности $_i$, $i=1,\mathbf{K},k$, разрыва управления $u(x)$ разбивают область D на конечное число подобластей, в каждой из которых правая часть уравнения (3) непрерывна. Под решением краевой задачи (6.6.3), (6.6.2) будем понимать функцию $z = z(x)$, которая удовлетворяет уравнению (6.6.3), условию (6.6.2) и некоторым дополнительным условиям гладкости на $_i$. Будем предполагать, что заданные функции в уравнениях (6.6.1) и условиях (6.6.2), кроме перечисленных выше свойств, удовлетворяют ещё условиям, при которых каждой допустимой функции $u = u(x)$ соответствует единственное решение рассматриваемой краевой задачи (6.6.3), (6.6.2). Это решение будем называть решением, соответствующим допустимой функции $u = u(x)$.

Пусть задан функционал

$$I = \iint_S a(x) z(x) dS + \iiint_D b(x) z(x) dx,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – интегрируемые со своим квадратом функции, определённые соответственно в областях S и D.

Ставится задача: среди всех допустимых функций найти такую, что соответствующее ей решение уравнения (6.6.1), удовлетворяющее условию (6.6.2), реализует минимум (максимум) функционала I.

Функцию $u(x)$, для которой функционал I достигает своего минимума (максимума), будем называть минимизирующей (максимизирующей) функцией.

Пусть $u(x)$ – некоторая допустимая функция, а $z(x)$ – соответствующее ей решение уравнения (6.6.3) с граничным условием (6.6.2). Введём функцию $w(x)$, определив её как решение сопряженного уравнения

$$\Delta w = \frac{\partial F(x, z(x), u(x))}{\partial z} w - b(x) \tag{6.6.4}$$

с граничным условием

$$\frac{dw}{dn} + hw = a(x) \text{ при } x \in S, \tag{6.6.5}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – функции, входящие в определение функционала I.

Данными соотношениями функция $w(x)$ определяется однозначно и оказывается интегрируемой с квадратом по области D. Таким образом, каждая допустимая функция $u(x)$ однозначно определяет пару функций $z(x)$ и $w(x)$.

Введём обозначение (гамильтониан системы)

$$H(w(x), z(x), u, x) = w(x) F(x, z(x), u).$$

Будем говорить, что допустимая функция $u = u(x)$ удовлетворяет условию максимума, если

$$H(w\ (x), z(x), u(x), x)(=)\underset{u\in U}{Sup}\ H(w\ (x), z(x), u, x), \qquad (6.6.6)$$

где $z(x)$ и $w(x)$ – решения краевых задач (6.6.3), (6.6.2) и (6.6.4), (6.6.5), соответствующие допустимой функции $u = u(x)$. Символ (=) означает равенство, справедливое во всех точках области D, за исключением, быть может, множеств точек нулевой меры. Условие минимума определяется аналогично.

Сформулируем следующую теорему.

Принцип максимума (А. И. Егорова) Для того чтобы допустимая функция была минимизирующей (максимизирующей), необходимо, чтобы она удовлетворяла условию максимума (минимума).

Хотя принцип максимума формально не даёт достаточных условий существования минимизирующих (максимизирующих) функций, он служит практическим инструментом для их отыскания, поскольку уравнения (6.6.1), (6.6.4), (6.6.6) вместе с граничными условиями (6.6.2), (6.6.5) образуют полную систему отношений для определения искомых функций и соответствующих им решений краевой задачи (6.6.1), (6.6.2).

Таким образом, рассмотренная вариационная задача сводится к решению эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями.

§7. Основы вариационного метода решения краевых задач

Пусть в области G с границей ∂G дано линейное дифференциальное уравнение – обыкновенное или в частных производных. Требуется найти решение y этого уравнения, удовлетворяющее на границе ∂G заданным линейным однородным (краевым) условиям. Левую часть уравнения можно рассматривать как линейный оператор L, определённый на множестве Ξ функций, обладающий непрерывными производными нужного порядка в $G+\partial G$ и удовлетворяющий данным краевым условиям на ∂G. Таким образом, наша краевая задача сводится к решению операторного уравнения

$$Ly = f(P), \qquad (6.7.1)$$

$f(P)$ – известная функция (которую мы будем считать непрерывной) и $y \in \Xi$, причём функция y на границе ∂G удовлетворяет краевому условию

$$R[y] = 0, \qquad (6.7.2)$$

где R – известный линейный оператор более низкого порядка. Заметим, что неоднородная краевая задача

$$Ly = f(P), \qquad (6.7.3)$$

$$R[y] = j\ (P),\ \ P \in \partial G, \qquad (6.7.4)$$

где $j\ (P)$ – известная функция, сводится к однородной, если положить $y = z + y_1$, где z – новая неизвестная функция и y_1, удовлетворяющая краевому условию (4): $R[y_1]=j(P)$. Действительно, из формул (6.7.3) и (6.7.4) получаем $Lz = f(P) - Ly_1$ и $R[z]=0$. Функцию y_1 обычно нетрудно найти подбором.

Идея вариационного подхода состоит в том, что краевая задача (6.7.1), (6.7.2) заменяется эквивалентной задачей об отыскании функции, доставляющей экстремум (обычно минимум) некоторому функционалу. Вариационные методы решения краевых задач неразрывно связаны с именами Б. Г. Галеркина, В. Ритца, И. Г. Бубнова, которые предложили численные процедуры приближённого решения соответствующих задач. Приведём две важные для дальнейшего теоремы.

Теорема 1. Пусть L – самосопряженный линейный оператор, положительно-определенный в классе функций Ξ. Тогда операторное уравнение (6.7.1) при наличии краевого условия (6.7.2) в классе Ξ не может иметь двух решений. Если решение краевой задачи (6.7.1) – (6.7.2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что краевая задача (6.7.1) – (6.7.2) имеет два решения y_1 и y_2,

$$Ly_1 = f(P),\ R[y_1] = 0, \tag{6.7.5}$$

$$Ly_2 = f(P),\ R[y_2] = 0. \tag{6.7.6}$$

Вычитая из уравнений (6.7.5) соответствующие уравнения (6.7.6), в силу линейности оператора L и функционала R получим $L(y_1 - y_2) = 0$, $R[y_1 - y_2] = 0$, т.е. $(y_1 - y_2) \in \Xi$. Умножая первое из полученных равенств скалярно на разность $(y_1 - y_2)$, будем иметь

$$(L(y_1 - y_2),(y_1 - y_2)) = 0. \tag{6.7.7}$$

Так как по условию оператор L положительный в классе Ξ и функция $(y_1 - y_2) \in \Xi$, то из формулы (6.7.7) следует $(y_1 - y_2) \equiv 0$, т.е. $y_1 \equiv y_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть L – самосопряженный оператор, положительно-определенный в классе Ξ, а $F[y]$ – функционал вида

$$F[y] = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_w (Ly - 2f)\, y\, dw, \tag{6.7.8}$$

где $f = f(P)$ – правая часть уравнения (6.7.1).

Если краевая задача (6.7.1) – (6.7.2) с однородными граничными условиями имеет решение $\bar{y}$, то это решение даёт минимум функционалу $F[y]$.

Если в классе Ξ существует функция $\bar{y}$, дающая минимум функционалу (6.7.9), то эта функция является решением уравнения (6.7.1).

Доказательство. Пусть $\bar{y}$ есть решение краевой задачи (6.7.1) – (6.7.2), т.е. $L\bar{y} = f(P)$ и $R[\bar{y}] = 0$. Заменяя $f(P)$ через $L\bar{y}$ в формуле (6.7.8), получим

$$F[y] = (Ly, y) - 2(L\bar{y}, y). \tag{6.7.9}$$

Пользуясь симметричностью оператора L, получаем:

$$(L\bar{y}, y) = (\bar{y}, Ly) = (Ly, \bar{y}).$$

Поэтому

$$F[y]=(Ly,y)-(Ly,\bar y)-(L\bar y,y)=(Ly,y-\bar y)-[(L\bar y,y)-(L\bar y,\bar y)]-(L\bar y,\bar y)=$$
$$=(Ly,y-\bar y)-(L\bar y,y-\bar y)-(L\bar y,\bar y)=(L(y-\bar y),(y-\bar y))-(L\bar y,\bar y)\,. \qquad (6.7.10)$$

В правой части формулы (6.7.10) только первое слагаемое является переменным. Очевидно, $(y-\bar y)\in\Xi$, поэтому в силу положительности оператора L получаем $(L(y-\bar y),(y-\bar y))\geq 0$. Следовательно, функционал $F[y]$ достигает своего наименьшего значение для тех и только тех допустимых функций y, для которых имеет месть равенство $(L(y-\bar y),(y-\bar y))=0$. Отсюда на основании определения положительного оператора получаем $y-\bar y\equiv 0$, т.е. $y\equiv\bar y$.

Заметим, что из формулы (6.7.10) следует, что наименьшее значение функционала $F[y]$ равно $F_{\min}(y)=F[\bar y]=-(L\bar y,\bar y)$.

Пусть существует функция $\bar y$ из класса Ξ, дающая минимум функционалу (6.7.8). Это значит, что для любой функции $y_1\in\Xi$ и достаточно близкой к $\bar y$ справедливо следующее неравенство:

$$F[y_1]-F[\bar y]\geq 0\,.$$

Положим $h=(y_1-\bar y)\in\Xi$ и рассмотрим семейство функций

$$y=\bar y+ah\,, \qquad (6.7.11)$$

где a – числовой параметр. Очевидно, при любом a функции y являются допустимыми и при достаточно малом $|a|$ выполнено неравенство

$$\Delta F=F[y]-F[\bar y]\geq 0\,.$$

На основании формулы (6.7.8), выполняя тождественные преобразования, получаем

$$\Delta F=(Ly,y)-2(f,y)-(L\bar y,\bar y)+2(f,y)=$$
$$=(Ly,y)-2(L\bar y,y)+2(L\bar y-f,y)-2(L\bar y-f,\bar y)+(L\bar y,\bar y)=$$
$$=(Ly,y)-2(L\bar y,y)+2(L\bar y-f,y-\bar y)+(L\bar y,\bar y)\geq 0\,. \qquad (6.7.12)$$

Отсюда, используя преобразование (6.7.10) и формулу (6.7.11), находим

$$\Delta F=((L(y-\bar y),(y-\bar y))-(L\bar y,\bar y)+2(L\bar y-f,y-\bar y)=a^2(Lh,h)+2a\,(L\bar y-f,h)\geq 0\,.$$

Левая часть данного неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно параметра a, причём этот трёхчлен не может менять знака. Следовательно, соответствующее квадратное уравнение заведомо не имеет действительных различных корней и, значит, обладает неположительным дискриминантом: $(L\bar y-f,h)^2-(Lh,h)\cdot 0\leq 0$. Отсюда $(L\bar y-f,h)^2=0$. Таким образом, $\int\limits_w(L\bar y-f)h\,dw=0$ для любой функции $h\in\Xi$. В силу произвола выбора функции h отсюда следует, что $L\bar y-f\equiv 0$, т.е. $L\bar y\equiv f$. Таким образом, $\bar y$ есть решение нашей краевой задачи.

Бубнов Иван Григорьевич (1872 – 1919) – выдающийся русский инженер и математик. Основоположник строительной механики корабля, создатель первых боевых подводных лодок России. Окончил Морское инженерное училище в Кронштадте (1891), Морскую академию (1896). Профессор Политехнического института и Николаевской морской академии. В своих работах И. Г. Бубнов математически исследовал вопросы упругости и прочности судов. Разработал метод нахождения приближенного решения операторного уравнения, который применил к решению ряда задач теории упругости. Этот метод был усовершенствован Б. Г. Галеркиным и сейчас называется методом Бубнова – Галеркина.

Рассмотрим приведенный выше подход применительно к краевым задачам для уравнений Пуассона и Лапласа. Пусть дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x,y),\ f(x,y) \in C(G). \qquad (6.7.13)$$

Требуется найти решение уравнения, непрерывное в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \partial G$ и удовлетворяющее на границе ∂G этой области краевому условию

$$u\big|_{\partial G} = j\,(P), \qquad (6.7.14)$$

где $P = (x,y)$ и $j\,(P)$ – заданная непрерывная функция. Предположим вначале, что $j\,(P) \equiv 0$, т.е.

$$u\big|_{\partial G} = 0, \qquad (6.7.15)$$

и будем решать однородную краевую задачу (6.7.13), (6.7.15). Покажем, что в классе функций $\Xi = \{u(x)\}$, непрерывных в $\overline{G}$ вместе со своими первыми и вторыми производными и обращающихся на контуре ∂G в нуль, оператор $Lu = -\Delta u$ самосопряжен и положителен.

Пусть $u \in \Xi$ и $v \in \Xi$. Составим выражение

$$(Lu,v) - (Lv,u) = \iint\limits_G \left[-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] dxdy =$$

$$= \left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x},\ -v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x},\right.$$

$$\left. u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},\ -v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] =$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dxdy.$$

Используя формулу Грина $\oint\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ и используя нулевые граничные условия $u\big|_{\partial G} = 0,\ v\big|_{\partial G} = 0,$ получим, что

$$(Lu,v)-(Lv,u)=\oint\limits_{\partial G}\left[-\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]=0. \quad (6.7.16)$$

Следовательно, $(Lu,v)=(Lv,u)$. Поэтому оператор L самосопряжен. Далее установим, что оператор L является положительно-определенным. Получаем

$$(Lu,u)=-\iint\limits_{G}u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=$$

$$=\left[-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, -u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=$$

$$=-\iint\limits_{G}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy+\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy.$$

Применяя к первому интегралу формулу Грина, в силу краевых условий для функции u получим

$$(Lu,u)=-\oint\limits_{\partial G}\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \quad (6.7.17)$$

т.е. $(Lu,u)=(-\Delta u,u)\ge 0$. Если $(Lu,u)=0$, то из формулы (6.7.17) следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Отсюда $u(x,y)=c$, и на основании краевого условия (6.7.15) следует $u(x,y)\equiv 0$. Следовательно, оператор L является положительно-определенным оператором. Таким образом, для краевой задачи (6.7.13) с однородными краевыми условиями (6.7.15) выполнены условия теоремы 2. Следовательно, эта задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[u]=(Lu,u)-2(u,f) \quad (6.7.18)$$

в классе Ξ функций. В силу формулы (6.7.17) получаем

$$F[u]=\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dxdy. \quad (6.7.19)$$

Рассмотрим теперь уравнение (6.7.13) с неоднородным краевым условием (6.7.14), и пусть $\Xi_1=\{u(x,y)\}$ – класс функций $u\in C^{(2)}(G+\partial G)$, удовлетворяющих условиям (6.7.14).

Следуя идее предыдущего параграфа, построим функцию $z = z(x, y) \in C^{(2)}(G + \partial G)$, для которой выполнены краевые условия (6.7.14).

Введём функцию

$$v(x, y) = u(x, y) - z(x, y), \tag{6.7.20}$$

где $u(x, y)$ – решение нашей неоднородной краевой задачи. Тогда функция $n = n(x, y)$ удовлетворяет на контуре ∂G однородному краевому условию

$$v\big|_{\partial G} = 0 \tag{6.7.21}$$

и является решением уравнения

$$Lv = Lu - Lz = f(P) - Lz, \tag{6.7.22}$$

где $Lz = -\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ – известная функция. Функция $v = v(x, y)$, являясь решением однородной краевой задачи (6.7.21) – (6.7.22), на основании формулы (6.7.18) даёт наименьшее значение функционалу

$$F[v] = (Lv, v) - 2(v, f(P) - Lz). \tag{6.7.23}$$

Возвращаясь в последнем равенстве к функции u (см. (6.7.20)) и используя свойства скалярного произведения и линейного оператора L, получим

$$\begin{aligned} F[u - z] \equiv F_1[u] &= (L(u - z), u - z) - 2(u - z, f(P) - Lz) = \\ &= (Lu, u) - 2(u, f) + (u, Lz) - (z, Lu) + 2(z, f) - (Lz, z). \end{aligned} \tag{6.7.24}$$

Так как последние два члена формулы (6.7.24) не зависят от искомой функции $u = u(x, y)$, то функция $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$, дающая наименьшее значение функционалу (6.7.24), будет минимизировать функционал

$$F_2[u] = (Lu, u) - 2(u, f) + [(Lz, u) - (Lu, z)]. \tag{6.7.25}$$

Покажем, что функционал (6.7.25) можно заменить функционалом, не содержащим функцию z. Используя преобразование, применённое в формуле (6.7.16), имеем

$$(Lz, u) - (Lu, z) = \iint_G (z\Delta u - u\Delta z)\,dz = \oint_{\partial G}\left[-\left(z\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right] =$$

$$= \oint_{\partial G}\left(z\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS,$$

где n – внешняя нормаль к ∂G и

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial S} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial S},\ \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial S} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial S}.$$

Отсюда, так как $z\big|_{\partial G} = u\big|_{\partial G} = j(x, y)$, получаем

$$(Lz, u) - (Lz, u) = \oint_{\partial G} j(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial n}\right)dS. \tag{6.7.26}$$

С другой стороны, на основании формулы (6.7.17) находим

$$(Lu, u) = -\oint_{\partial G}\left(u\frac{\partial u}{\partial n}dS\right) + \iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= -\oint_{\partial G}\left(j\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}dS \right) + \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy. \qquad (6.7.27)$$

Подставляя (6.7.26) и (6.7.27) в формулу (6.7.25), будем иметь

$$F_2[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\,fu \right] dxdy - \oint_{\partial G}\left(j\,(x,y)\frac{\partial z}{\partial n}dS \right). \qquad (6.7.28)$$

Так как последнее слагаемое в формуле (6.7.28) не зависит от функции u, то краевая задача (6.7.13) – (6.7.14) эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\,fu \right] dx\,dy \qquad (6.7.29)$$

в классе функций Ξ_1.

В частном случае, если $f = f(x,y) \equiv 0$, то получаем уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, причём краевая задача (6.7.13) – (6.7.14) есть известная задача Дирихле. Решением этой задачи, как вытекает из формулы (6.7.29), является функция u из класса Ξ_1, минимизирующая интеграл Дирихле $\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy$. Убедиться в этом самостоятельно, выписав уравнение Остроградского для данного функционала.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Галёркин Борис Григорьевич (1871 – 1945) – выдающийся русский советский математик и инженер. Специалист в области теории упругости. Родился в Полоцке. В 1899 г. окончил Петербургский технологический институт. В 1928 г. Борис Григорьевич был избран членом-корреспондентом, а в 1935 г. действительным членом Академии Наук СССР. Труды Б.Г.Галеркина относятся к проблемам строительной механики и теории упругости. Разработал методы решения дифференциальных уравнений теории упругости. С его именем неразрывно связан метод конечных элементов, применяемый для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенная Б. Г. Галёркиным формула решения уравнений уп-ругого равновесия, содержащая три бигармонические функции, позволила эффективно решить многие пространственные задачи теории упругости. Б. Г. Галёркин – один из создателей теории изгиба упругих пластин.

§8. Метод Ритца численного решения вариационной задачи

Рассмотрим следующий прямой метод приближенного решения вариационной задачи. Выберем функционал следующего вида: $F[u] = (Lu,u) - 2(f,u)$, который определим на некотором линейном множестве

$\Xi=\{u\}$, где L – положительно-определенный линейный оператор; f – заданная непрерывная функция. Предполагается, что функции класса Ξ удовлетворяют условиям $R[u]=j\ (P)$, где R – известный линейный функционал; j – заданная функция. Построим последовательность достаточно гладких линейно независимых функций $u_0(P), u_1(P), \mathbf{K}, u_n(P)$, где $u_0(P)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям $R[u_0]=j\ (P)$, а функции $u_i(P), i=1, 2, \mathbf{K}, n$ – однородным краевым условиям $R[u_i]=0, i=1, 2, \mathbf{K}, n$. Составим следующую линейную комбинацию:

$$u(P; c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)=u_0(P)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(P). \tag{6.8.1}$$

Так как $R[u]=R[u_0]+\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 0=j\ (P)$, то $u\in\Xi$ при любых постоянных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Приближенное решение нашей вариационной задачи будем искать в виде (6.8.1). Для этого подставляем $u(P; c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)$ в выбранный функционал $F[u]=(Lu,u)-2(f,u)$ и получаем

$$F[u]=\ (c_1,c_2,\mathbf{K},c_n), \tag{6.8.2}$$

где – известная функция, зависящая от n переменных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Подсчитываем коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$ таким образом, чтобы значение $F[u]$ было минимальным. Это приводит к решению следующей системы уравнений: $\frac{\partial}{\partial c_1}=0, \frac{\partial}{\partial c_2}=0, \ldots, \frac{\partial}{\partial c_n}=0.$ Таким образом, вариационная задача приближенно сводится к задаче об отыскании безусловного экстремума функции $(c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)$.

Рассмотрим приведенную выше схему применительно к решению задачи Дирихле для уравнений Лапласа:

$$\Delta u=0,\ (x,y)\in G \tag{6.8.3}$$

$$u|_{\partial G}=f(x,y), \tag{6.8.4}$$

где ∂G – простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область G, а функция $f(x,y)$ непрерывна на ∂G. Данная краевая задача эквивалентна следующей вариационной задаче для функционала:

$$F[y]=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{6.8.5}$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $G+\partial G$ и удовлетворяющих на границе ∂G краевому условию (6.8.4). Построим конечную систему линейно независимых функций (которые называются координатными функциями) $u_0(x,y),\ \ u_1(x,y),\ \ \ldots,\ \ u_n(x,y)\in C^{(2)}(G+\partial G)$, которые должны удовлетворять условия на границе $u_0(x,y)|_{\partial G}=f(x,y),\ \ u_i(x,y)|_{\partial G}=0,\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда линейная комбинация $j\,(x,y) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x,y)$, принадлежит классу допустимых функций при любых постоянных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Более коротко:

$$j\,(x,y) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x,y), \tag{6.8.6}$$

где $c_0 = 1$. Подставляя выражение (6.8.6) в функционал (6.8.5), получим

$$F[j\,] = \iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy. \tag{6.8.7}$$

Подберем коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$ так, чтобы функция $F[j\,]$ имела минимум. Для этого требуется выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial c_j} F[j\,] = 2\iint_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_j}{\partial x}\right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_j}{\partial y}\right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] dxdy = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.8.8}$$

что приводит к решению системы следующих алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} [u_0,u_1] + c_1[u_1,u_1] + \ldots + c_n[u_n,u_1] = 0, \\ [u_0,u_2] + c_1[u_1,u_2] + \ldots + c_n[u_n,u_2] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [u_0,u_n] + c_1[u_1,u_n] + \ldots + c_n[u_n,u_n] = 0, \end{cases} \tag{6.8.9}$$

где $[u_i,u_j] = \iint_G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dxdy$ причем $[u_i,u_j] = [u_j,u_i]$. Из линейной системы (6.8.9) определяются коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Функция $j\,(x,y)$ и будет являться приближенным решением задачи Дирихле. Точность приближения зависит от выбора координатных функций $u_k(x,y)$ и от числа этих функций.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Ритц Вальтер (Ritz Walter) (1878 – 1909) – знаменитый немецкий математик и физик-теоретик. Основные исследования относятся к решению вариационных задач математической физики. Открыл спектральную формулу (формула Ритца). Разработал идею вычисления частот непосредственно из энергетического функционала, без решения дифференциальных уравнений. Предложил (1908) мощный прямой метод приближенного решения вариационных задач – метод Ритца. Метод нашел широкое применение в теории колебаний, теории упругости, инженерной механике. Этот метод применяется для приближённого решения вариационных задач и тех краевых задач математической физики, которые сводятся к вариационным. Строгое теоретическое обоснование метода Ритца дал в 1918 г. известный русский математик И. М. Крылов.

Пример. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую в области $G: x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1$ и удовлетворяющую на границе $\partial G: x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$ условию $u|_{\partial G} = x^2 + y^2$.

Решение. Выберем следующую систему координатных функций:

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2,\ u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2 y(1 - x - y),\ u_3(x,y) = xy^2(1-x-y)\mathbf{K}$$

и составим линейную комбинацию

$$j\,(x, y) = x^2 + y^2 + c_1 xy(1 - x - y) + c_2 x^2 y(1 - x - y) + c_3 xy^2(1 - x - y). \quad (6.8.10)$$

Легко проверить, что функция $j\,(x, y)$ удовлетворяет краевому условию $j\,|_{\partial G} = x^2 + y^2$ при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3.

Для составления системы (6.8.9) подсчитываем коэффициенты при неизвестных c_1, c_2, c_3 и свободные члены:

$$[u_0, u_1] = [u_1, u_0] = \iint_G [2x(y - 2xy - y^2 + 2y(x - x^2 - 2xy)]dxdy,$$

$$[u_0, u_2] = [u_2, u_0] = \iint_G [2x(2xy - 3x^2 y - 2xy^2) + 2y(x^2 - x^3 - 2x^2 y)]dxdy,$$

$$[u_0, u_3] = [u_3, u_0] = \iint_G [2x(y^2 - 2xy^2 - y^3) + 2y(2xy - 2x^2 y - 3xy^2)]dxdy,$$

$$[u_1, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)^2 + (x - x^2 - 2xy)^2]dxdy,$$

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(2xy - 3x^2 y - 2xy^2) + (x - x^2 - 2xy)(x^2 - x^3 - 2x^2 y)]dxdy,$$

$$[u_1, u_3] = [u_3, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x - x^2 - 2xy)(2xy - 2x^2 y - 3xy^2)]dxdy,$$

$$[u_2, u_2] = \iint_G (2xy - 3x^2 y - 2xy^2)^2 + (x^2 - x^3 - 2x^2 y)^2]dxdy,$$

$$[u_2, u_3] = [u_3, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2 y - 2xy^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) +$$

$$+ (x^2 - x^3 - 2x^2 y)(2xy - 2x^2 y - 3xy^2]dxdy,$$

$$[u_3, u_3] = \iint_G [(y^2 - 2xy^2 - y^3)^2 + (2xy - 2x^2 y - 3xy^2)^2]dxdy.$$

Введём обозначения $a_{11} = [u_1, u_1]$, $a_{12} = [u_1, u_2]$, $a_{13} = [u_1, u_3]$, $a_{21} = [u_2, u_1]$, $a_{22} = [u_2, u_2]$, $a_{23} = [u_2, u_3]$, $a_{31} = [u_3, u_1]$, $a_{32} = [u_3, u_2]$, $a_{33} = [u_3, u_3]$, $b_1 = [u_0, u_1]$, $b_2 = [u_0, u_2]$, $b_3 = [u_0, u_3]$. Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $A \cdot C = B$, где $A = [a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}]$, $C = [c_1, c_2, c_3]^T$, $B = [b_1, b_2, b_3]^T$.

Значения коэффициентов при неизвестных c_1, c_2, c_3 считает следующий скрипт MatLab:

```
% подсчет коэффициентов при координатных функциях
syms x y u k;
% u(1),u(2),u(3),u(4) - система координатных функций
u(1) = x^2+y^2; u(2) = x*y*(1-x-y);
u(3) = x^2*y*(1-x-y); u(4) = x*y^2*(1-x-y);
% k - таблица коэффициентов при неизвестных
for i=1:4
for j=i:4
% k(j,i) = k(i,j) - элемент таблицы
k(j,i)=int(int(diff(u(i),'x')*diff(u(j),'x')+diff(u(i),'y')*diff(u(j),'y'),'y',0,1-x),'x',0,1);
k(i,j) = k(j,i);
end; end;
disp('Значения коэффициентов при неизвестных:');
disp(k);
```

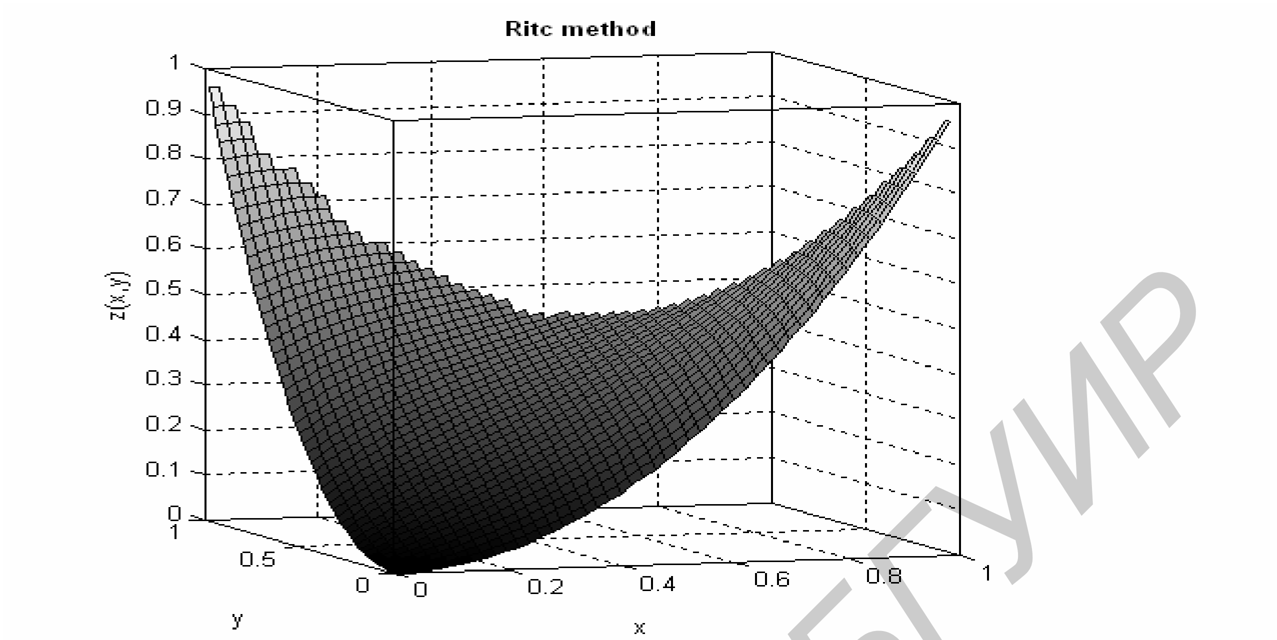
Решив систему, находим $c_1 \approx 4{,}6667$; $c_2 = c_3 \approx -2{,}3333$. Подставляя найденные значения величин c_1, c_2, c_3 в формулу (6.8.9) и получаем приближенное формульное решение нашей задачи:

$$j\,(x, y) = x^2 + y^2 + xy(1 - x - y)[4{,}6667 - 2{,}3333(x + y)].$$

Следующий скрипт MatLab визуализирует полученное методом Ритца решение:

```
%визуализация решения, полученного методом Ритца
clear all;
format long;
x=[0:.02:1];
y=[0:.02:1];
[X,Y]=meshgrid(x,y); % задаём сетку
for i=1:length(x)
for j=1:length(y)
if (y(j)<=1-x(i)) % вычисляем значения, которые попадают в заданную область
Z(i,j)=x(i).^2+y(j).^2+x(i)*y(j)*(1-x(i)-y(j))...
*(4.6667-2.3333*(x(i)+y(j)));
else
Z(i,j)=NaN;
end; end; end;
surf(X,Y,Z); % визуализируем решение
title ('\bfRitc method')  % заголовок графика
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z(x,y)'); v = axis;  % границы осей
da = daspect;  % масштаб осей
da(1:2) = min(da(1:2));  % min из двух
daspect(da)  % выравняли масштаб осей
axis(v); % оставили границы
colormap(gray)  % выбрали палитру
grid on  % показали сетку
box on  % показали внешний контур
```

График полученного решения совпадает с графиком, приведенным в §4:



Глава 6. Линейные эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных

Оператор Лапласа в криволинейных системах координат. Типы краевых задач для оператора Лапласа. Корректность задач для оператора Лапласа. Построение решения внутренней задачи Дирихле на круге. Анализ решения задачи Дирихле. Интегральная формула Пуассона. Основы вариационного метода решения краевых задач. Метод Ритца численного решения задачи Дирихле.

§1. Оператор Лапласа в криволинейных системах координат

Выпишем оператор Лапласа в $\boldsymbol{R}^2$ в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{6.1.1}$$

Выпишем параболические, гиперболические и эллиптические уравнения общего вида, используя дифференциальные операторы первого порядка. Градиент: $grad=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$. Дивергенция: $div=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$. Ротор:

$$\overrightarrow{rot}\ \ a=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=\left[\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)\right]=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Параболическое уравнение примет вид: $a\cdot u_t^{/}-div(b\cdot grad(u))+g\cdot u=f$, где a,b,g – некоторые известные функции из R; гиперболическое уравнение будет иметь вид: $a\cdot ut_t^{\prime\prime}-div(b\cdot grad(u))+g\cdot u=f$, где a,b,g – некоторые известные функции из R; эллиптическое уравнение: $-div(b\cdot grad(u))+g\cdot u=f$, где b,g – некоторые известные функции из R. Оператор задачи Штурма – Лиувилля примет вид $-div(b\cdot grad(u))+g\cdot u=a\cdot l u,$ где a,b,g – коэффициенты.

В приложениях важную роль играет набла ∇ – оператор Гамильтона. Он вводится либо как символический вектор $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, либо как дифференциальный оператор: $\nabla u=\overrightarrow{grad}\ u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$. В физических приложениях часто применяется следующая запись: $\overrightarrow{grad}\ u=\nabla u$; $div\ \vec{a}=(\nabla,\overrightarrow{a})$; $rot(\overrightarrow{a})=[\nabla,\vec{a}]$.

Выпишем оператор Лапласа Δ в двумерном случае в полярной системе координат. Напомним, что переход из полярных координат $\boldsymbol{R}^2$ в прямоугольные декартовы задается соотношениями: $x=r\cos j$, $y=r\sin j$. Переход из декартовых координат R^2 в полярные задается соотношениями:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\qquad j=arctg\,\dfrac{y}{x}$. Вычисляем полную производную: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial x}$.

Подсчитываем:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos j}{r}=\cos j\ ,$$

$$\frac{\partial j}{\partial x}=\left(arctg\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{1+tg^2 j}\left(-\frac{r\sin j}{r^2\cos^2 j}\right)=\cos^2 j\left(-\frac{\sin j}{r\cos^2 j}\right)=-\frac{\sin j}{r}.$$

Получаем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\sin j}{r}$.

Вычисляем полную производную $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial y}$. Подсчитываем:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\sin j}{r}=\sin j\ ,$$

$$\frac{\partial j}{\partial y}=\left(arctg\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+tg^2 j}\cdot\frac{1}{r\cos j}=\cos^2 j\cdot\frac{1}{r\cos j}=\frac{\cos j}{r}.$$

Получаем $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j+\dfrac{\partial u}{\partial j}\cdot\dfrac{\cos j}{r}$.

Теперь вычислим вторую производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Введем обозначение

$F_1=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial F_1}{\partial x}=\dfrac{\partial F_1}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial x}$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right)'_r=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos j-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\sin j}{r}-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial j}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right)'_j=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\cos j-\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\sin j}{r}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right).$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\cos^2 j-\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\sin j\cos j}{r}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j\cos j}{r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\frac{\cos j\sin j}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2 j}{r}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\sin^2 j}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j\sin j}{r^2}.$$

Теперь вычислим вторую производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Введем обозначение $F_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, тогда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial F_2}{\partial j}\cdot\dfrac{\partial j}{\partial y}$,

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right)'_r = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\sin j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\cos j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial j} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j}{r}\right)'_j = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\sin j + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos j\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\cos j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j}{r}\right).$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\sin^2 j + \frac{\partial^2 u}{\partial j\partial r}\cdot\frac{\cos j\,\sin j}{r} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\cos j\,\sin j}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial j}\cdot\frac{\sin j\,\cos j}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2 j}{r} +$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{\cos^2 j}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial j}\cdot\frac{\sin j\,\cos j}{r^2}.$$

Подставляя и приводя подобные, окончательно получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial j^2}. \tag{6.1.2}$$

Замечание. Самостоятельно получить запись оператора Лапласа в $\boldsymbol{R}^3$ в цилиндрической и сферической системах координат соответственно:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial j^2}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2 q} + \frac{\partial u}{\partial q}\cdot\frac{\cos q}{r^2\sin q} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

§2. Типы краевых задач для оператора Лапласа

Задача Дирихле: краевая задача с граничным условием 1-го рода

Условие Дирихле: на границе области задана некоторая функция. Внутренняя задача Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0,\ r\in[0,1],\\ u(1,j) = g(j),\ j\in[0,2p].\end{cases} \tag{6.2.1}$$

Помимо внутренней задачи Дирихле можно рассмотреть следующую задачу Дирихле, которая носит название внешней задачи Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0,\ r\ge 1,\\ u(1,j) = g(j),\ j\in[0,2p].\end{cases} \tag{6.2.2}$$

Задачу Дирихле можно рассматривать и на кольце:

$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, a \le r \le b, \\
u(a, j) = g_1(j), \\
u(b, k) = g_2(j), j \in [0, 2p].
\end{cases}
\qquad (6.2.3)
$$

Задача Неймана: краевая задача с граничным условием 2-го рода

Для данной краевой задачи на границе области задается производная по внешней нормали $\dfrac{\partial u}{\partial n}$. Эта производная эквивалентна вытекающему потоку, т.е. через границу области задан поток.

Постановка задачи Неймана в декартовой системе координат:

$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\
\left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = g(x, y).
\end{cases}
\qquad (6.2.4)
$$

Пример постановки задачи Неймана в полярной системе координат на круге:

$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, r \in [0,1], j \in [0, 2p]; \\
\left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = g(j), r = 1, j \in [0, 2p].
\end{cases}
\qquad (6.2.5)
$$

Отметим, что для данной задачи поток тепла направлен внутрь при $j = [0, p]$ и наружу при $j \in [p, 2p]$.

Отдельно отметим, что задача Неймана для уравнения Лапласа имеет физический смысл только в том случае, когда суммарный поток тепла через границу области равен нулю. На границе должно выполняться соотношение $\int\limits_{\partial G} \dfrac{\partial u}{\partial n} dS = 0$. В противном случае задача не имеет физического смысла, хотя может иметь математическое решение.

Краевая задача с граничным условием 3-го рода

Рассмотрим задачу с граничным условием смешанного типа. Граничное условие получено как линейная суперпозиция двух первых типов граничных условий и имеет следующий вид: $\left. \dfrac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = -h(u - g)$. Здесь $u(x, y)$ – искомая функция; $g(x, y)$ – некоторая заданная на границе функция; h – некоторая константа, дифференцирование проводится по внешней нормали к ∂G.

Согласно этому условию, поток тепла, втекающий в область через границу, пропорционален разности между искомой температурой u и некоторой заданной температурой g. Это означает при $k > 0$ следующее. Если температура u на границе области выше температуры окружающей среды, то тепло вытекает из области. Если температура u на границе соответственно ниже температуры окружающей среды, то тепло втекает в область.

Это закон теплообмена Ньютона, записанный в производных для стационарной задачи теплообмена.

Если рассмотреть процесс во времени, то получится не стационарное, а эволюционное уравнение параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$. Поэтому, как отмечалось ранее, эллиптическое уравнение является стационарным случаем (мгновенным срезом в некоторый момент времени) параболического уравнения.

§3. Корректность задач для оператора Лапласа

Задачи математической физики делятся на корректно и не корректно поставленные. Данному понятию предпошлём понятие устойчивости.

Решение краевой задачи называется устойчивым, если для каждого действительного числа $e > 0$ найдется такое действительное число $d(e) > 0$, что при изменении исходных данных задачи на величину по норме, не превосходящей d, решение задачи в каждой точке внутри области и на границе получит приращение по норме, не превосходящее e.

Краевая задача поставлена корректно в рассмотренной области, если её решение: существует, единственно, устойчиво.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из этих требований, называются не корректно поставленными.

Пример Адамара. Покажем, что следующая задача Коши для уравнения Лапласа поставлена не корректно:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u'_y(x,0) = F(x); \ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Положим: $f_1(x) = 0$; $F_1(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$. Тогда решение запишется в виде: $u_1(x,y) = \frac{1}{a^2}\sin(ax)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{ay} - e^{-ay}\right)$. Положим теперь $f_2(x) = 0, F_2(x) = 0$. Тогда решение: $u_2(x,y) = 0$. Теперь оценим отклонение начальных данных и отклонение получившихся решений:

$$\sup_x \left| f_1(x) - f_2(x) \right| = 0; \quad \sup_x \left| F_1(x) - F_2(x) \right| = \frac{1}{a};$$

$$\sup_{x,y\ge 0} \left| u_1(x,y) - u_2(x,y) \right| = \sup_{x,y\ge 0} \left| \frac{1}{2a^2} \sin(ax)\left(e^{ay} - e^{-ay}\right) \right| = \frac{1}{2a^2}\left(e^{ay} - e^{-ay}\right).$$

Отсюда следует, что при сколь угодно малом отклонении начального условия a, отклонения соответствующих решений могут быть сколь угодно велики. Задача не обладает свойством устойчивости. Задача является не корректно поставленной.

§4. Схема решения внутренней задачи Дирихле на круге

Рассмотрим следующую задачу Дирихле на круге:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0, \;\; r \in [0;1] \\ \quad u(1,j) = g(j); \;\; j \in [0, 2p] \; . \end{cases} \tag{6.4.1}$$

I этап. Будем искать решение методом разделения переменных, полагая

$$u(r,j) = \Phi(j)\cdot R(r), \tag{6.4.2}$$

Подставляя (6.4.2) в уравнение (6.4.1) , получим

$$\Phi(j)\cdot R''(r) + \frac{1}{r}\cdot\Phi(j)\cdot R'(r) + \frac{1}{r^2}\cdot\Phi''(j)\cdot R(r) = 0,$$

или

$$\frac{\Phi''(j)}{\Phi(j)} = -\frac{r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r)}{R(r)}. \tag{6.4.3}$$

В силу независимости правой и левой частей (6.4.3) друг от друга, приравниваем их к некоторой константе m и получаем следующую систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\Phi''(j) - m\cdot\Phi(j) = 0, \tag{6.4.4}$$

$$r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r) + m\cdot R(r) = 0. \tag{6.4.5}$$

Исследуем константу разделения m. Решаем уравнение (6.4.4). Выписываем характеристический полином: $p^2 - m = 0$. Полином имеет два корня: $p_1 = \sqrt{m}$ и $p_2 = -\sqrt{m}$. Решение уравнения (6.4.4) примет следующий вид:

$$\Phi(j) = A\cdot e^{\sqrt{m}\,j} + B\cdot e^{-\sqrt{m}\,j}. \tag{6.4.6}$$

Пусть $m > 0$. Анализируя (6.4.6), видим, что функция $\Phi(j)$ не является периодической. Исключаем $m > 0$ из дальнейшего рассмотрения. Пусть $m = 0$. Тогда уравнение (6.4.4) имеет вид $\Phi''(j) = 0$, интегрируя которое, получим $\Phi(j) = C\cdot j + D$, где C, D – константы. Исключаем $m = 0$ из дальнейшего рассмотрения. Пусть $m < 0$. Полагаем $m = -l^2,\; l \in R$. Тогда решение (6.4.4) представимо в виде

$$\Phi(j) = A\cdot\cos l j + B\cdot\sin l j \,. \tag{6.4.7}$$

Данное решение согласуется с физическим смыслом задачи (6.4.1).

II этап. Формируем задачу Штурма – Лиувилля, полагая $m = -l^2,\; l \in R$:

$$r^2\cdot R''(r) + r\cdot R'(r) - l^2\cdot R(r) = 0, \tag{6.4.8}$$

$$R(1) = g(j)/\Phi(j). \tag{6.4.9}$$

Решаем дифференциальное уравнение (6.4.8), которое называется уравнением Эйлера. Оно является линейным обыкновенным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с непостоянными коэффициентами. Сделаем подстановку $R(r) = r^n$. Поскольку $R'(r) = n \cdot r^{n-1}$, $R''(r) = n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2}$, то, вписывая $R'(r)$ и $R''(r)$ в уравнение (6.4.8), получаем $r^2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot r^{n-2} + r \cdot n \cdot r^{n-1} - l^2 \cdot r^n = 0$, или, что то же самое:

$$n^2 - l^2 = 0. \qquad (6.4.10)$$

Находим корни уравнения (6.4.10): $n = \pm l$ ($l = \pm n$). Поскольку корни действительные и кратность каждого корня равна единице, общее решение уравнения (6.4.8) будет иметь следующий вид:

$$R_n(r) = C \cdot r^n + D \cdot r^{-n}. \qquad (6.4.11)$$

Для определенности можно ограничиться только положительными значениями n, так как в силу произвола выбора констант C, D отрицательные значения n новых частных решений не дают. Поскольку ищется решение конечное в круге $G = \{ 0 \le r \le 1, j \in [0, 2p] \}$, в формуле (6.4.11) положим $D = 0$, т.е. $R_n(r) = C \cdot r^n$.

Подставляя (6.4.7) и (6.4.11) в представление (6.4.2), окончательно получаем

$$u_n(r, j) = \Phi_n(j) \cdot R_n(r) = (A \cdot \cos(nj) + B \cdot \sin(nj)) \cdot r^n. \qquad (6.4.12)$$

Функция (6.4.12) будет элементарным решением уравнения (6.4.1).

III Этап. Решение краевой задачи (6.4.1) будем искать в виде следующего ряда:

$$u(r, j) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nj + B_n \sin nj) r^n. \qquad (6.4.13)$$

Подберём произвольные постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворялось краевое условие задачи (6.4.1). Подставляя в равенство (6.4.13) $r = 1$, получаем

$$g(j) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nj + B_n \sin nj). \qquad (6.4.14)$$

Потребуем, чтобы ряд (6.4.14) являлся рядом Фурье функции $g(j)$ на интервале $(0, 2p)$ с коэффициентами A_n, B_n:

$$A_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} g(j)\, dj, \quad A_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} g(j) \cos(nj)\, dj, n = 1, 2, \ldots .$$

$$B_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} g(j) \sin(nj)\, dj, n = 1, 2, \ldots . \qquad (6.4.15)$$

Окончательно получаем, что ортогональный ряд (6.4.13) с коэффициентами, определёнными (6.4.15), доставляет формальное решение краевой задаче (6.4.1).

Теорема. Если функция $g(j)$ на окружности $\partial G = \{ r = 1, j \in [0, 2p] \}$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную, то существует единственное решение $u(r, j)$ граничной задачи

Дирихле (6.4.1). Функция $u(r,j)$, определяемая абсолютно и равномерно сходящимся рядом (6.4.13), в котором коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам (6.4.15), имеет непрерывные вторые производные по совокупности переменных r, j. Причем возможно почленное дифференцирование ряда (6.4.13) по r и по j дважды. При этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно на $G=\{\, r\in[0,1]\,,\, j\in[0,2p\,]\,\}$.

Задачи для решения. Решить эллиптическую краевую задачу Дирихле $r\in[0,1],\ j\in[0,2p\,]$ с проверкой решения:

1. $\Delta u=0,\ u(1,j)=2.$ **2.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\sin j.$ **3.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\cos j.$

4. $\Delta u=0,\ u(1,j)=1+\sin j.$ **5.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=\sin j+\frac{1}{2}\cos j.$ **6.** $\Delta u=0,\ u(1,j)=1+\sin j+\sin 2j.$

Приведем скрипт в ToolBox PDE среды MATLAB решения задачи Дирихле, заданной на треугольной области $G: x>0,\ y>0,\ x+y<1$ **и удовлетворяющую на границе области** $\partial G: x=0,\ y=0,\ x+y=1$ **условию** $u|_{\partial G}=x^2+y^2$ (отдельно отметим, что в §8 эта же задача будет решена методом Ритца).

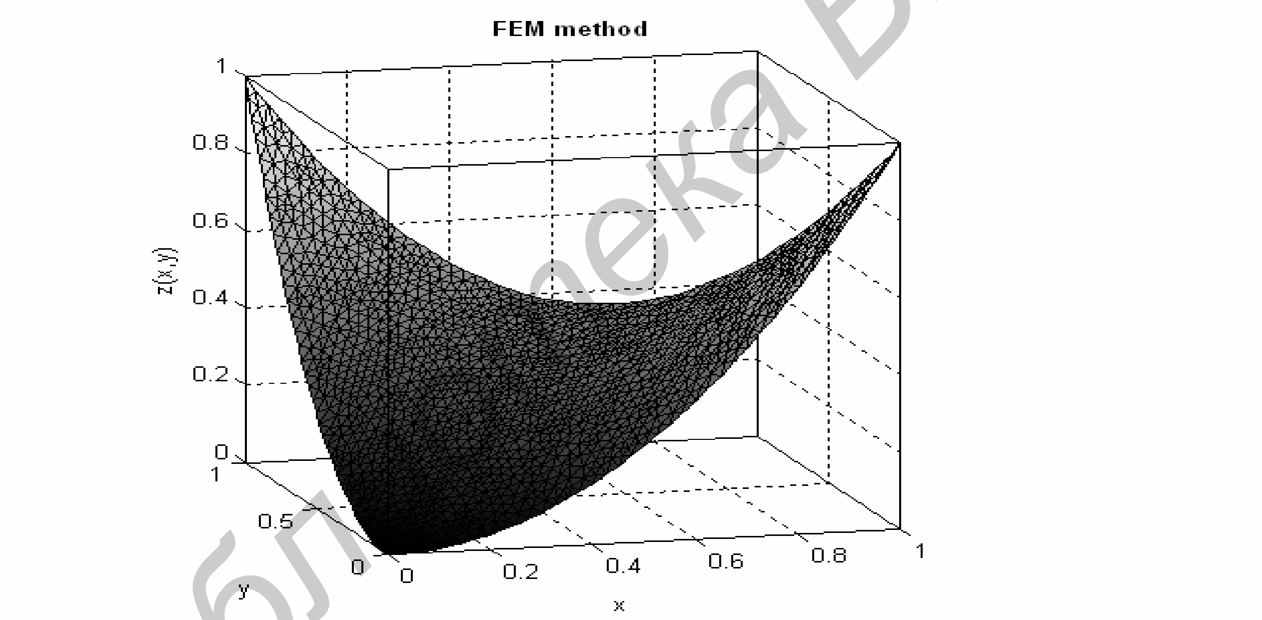
```
%решение эллиптической задачи Дирихле для треугольной области
clear all;
format long;
syms x y z D2zx2 D2zxy D2zy2; % переменные
LapL=D2zx2+D2zy2;  % левая часть уравнения Лапласа
LapR=0;  % правая часть уравнения Лапласа
zc=x^2+y^2;  % граничное условие
[p,e,t]=initmesh('triangleg','hmax',0.025); % формируем FEM-сетку
np=size(p,2);  % число узлов
nel=size(t,2);  % число элементов
fprintf('Число узлов сетки разбиения np=%d\n',np);
fprintf('Число конечных элементов nel=%d\n',nel);
da=daspect;  % текущие масштабы осей
da(1:2)=min(da(1:2));  % выравняли масштабы
daspect(da);
% -------------задание граничных условий-------------------------------
s{1}='function [q,g,h,r]=boundmem(p,e,u,time)';  % заголовок
s{2}='nb=size(e,2);';  % определили размерности
s{3}='q=zeros(1,nb);  g=zeros(1,nb);';  % задали массивы условий Неймана
s{4}='h=ones(1,2*nb);  r=zeros(1,2*nb);';  % задали массивы условий Дирихле
s{5}='xb=[p(1,e(1,:)),p(1,e(2,:))];';  % столбец координат x
s{6}='yb=[p(2,e(1,:)),p(2,e(2,:))];';  % столбец координат y
zcf=subs(zc,{x,y},{sym('xb'),sym('yb')});  % формула для подстановки
s{7}=['r=' vectorize(zcf) ';'];
disp('Текст файла граничных условий boundmem.m:')
fprintf('%s\n',s{:})
fid = fopen ('C:\MATLAB701\work\boundmem.m', 'w' );
```

```
fprintf(fid,'%s\n',s{:});
fclose(fid);  % закрываем файл
% --------задание функций, входящих в дифференциальное уравнение--------
a=eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{1,0,0,0}));
c11=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,1,0,0}));
c12=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,0,1,0}));
c22=-eval(subs(LapL,{z,D2zx2,D2zxy,D2zy2},{0,0,0,1}));
c=[c11;c12;c12;c22];
fp = subs(LapR,{x,y},{p(1,:),p(2,:)});  % f в узлах
if (length(fp)>1)
f = (fp(t(1,:))+fp(t(2,:))+fp(t(3,:)))/3;  % f в ц.т. конечных элементов
else
f = 0; end;
%-------------------Визуализируем решение------------------------------
u = assempde('boundmem',p,e,t,c,a,f); % решили
pdeplot(p,e,t,'xydata',u,'zdata',u,'mesh','on','colorbar','off');  % рисуем
title ('\bfFEM method')  % заголовок
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z(x,y)');
v = axis;  % границы осей
da = daspect;  % масштаб осей
da(1:2) = min(da(1:2));  % min из двух
daspect(da)  % выравняли масштаб осей
axis(v); % оставили границы
colormap(gray)  % выбрали палитру
grid on  % показали сетку
box on  % показали внешний контур
```

```
% функция описания геометрии области, на которой строится решение
function [x,y]=triangleg(bs,s)
% Описывает геометрические данные для треугольной области
% NE=TRIANGLEG возвращает количество граничных участков
% D=TRIANGLEG(BS) возвращает матрицу с одной колонкой для каждого
% граничного участка, определенного в BS
% [X,Y]=TRIANGLEG(BS,S) возвращает координаты граничных точек
% BS определяет граничные участки и S соответствующие
% значения параметра BS может быть скаляром
nbs=3;
if nargin==0,
x=nbs; % количество граничных участков
return
end;
d=[
0 0 0 % начальное значение параметра
1 1 1 % конечное значение параметра
0 0 0 % номер левосторонней области
1 1 1 % номер правосторонней области
];
bs1=bs(:)';
if nargin==1,
x=d(:,bs1);
return
end;
x=zeros(size(s));
```

```
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if m==1 && n==1,
bs=bs*ones(size(s)); end;
if ~isempty(s),
ii=find(bs==1); % граничный участок 1
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)],[0 1],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,1),d(2,1)],[1 0],s(ii)); end;
ii=find(bs==2); % граничный участок 2
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)],[1 0],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,2),d(2,2)],[0 0],s(ii)); end;
ii=find(bs==3); % граничный участок 3
if length(ii)
x(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)],[0 0],s(ii));
y(ii)=interp1([d(1,3),d(2,3)],[0 1],s(ii));
end; end;
```

Ниже приведена визуализация полученного решения:



§5. Анализ решения задачи Дирихле. Интегральная формула Пуассона

Если граничное условие $g(j)$ уже представимо конечным числом слагаемых своего разложения в тригонометрический ряд Фурье, то решение задачи Дирихле выписывается почти автоматически. Пусть дана задача:

$$\Delta u = 0,$$

$$u(1,j) = 1 + \sin j + \frac{1}{2}\sin 3j + \cos 4j .$$

Тогда решение данной задачи будет иметь следующий вид: $u(r,j) = 1 + r \cdot \sin j + \frac{1}{2} r^3 \cdot \sin 3j + r^4 \cdot \cos 4j$, поскольку в данном случае граничные условия $g(j)$ уже разложены в тригонометрический ряд Фурье со следующими коэффициентами: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{1}{2}$, $b_4 = 0$, ... Отметим, что коэффициент $a_0 = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} g(j)\,dj$ является средним значением функции $g(j)$.

Выпишем решение задачи Дирихле, заданной на круге произвольным радиусом R:

$$u(r,j) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos(nj) + b_n \sin(nj)).$$

Подставим формулы (6.4.15) для подсчета коэффициентов a_n и b_n. Получаем следующее представление:

$$u(r,j) = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} g(j)\,dj + \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \int\limits_0^{2p} g(j)(\cos(na)\cdot\cos(nj) + \sin(na)\cdot\sin(nj))\,da =$$

$$= \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\cos(j-a)\right)\right\} g(a)\,da.$$

Преобразуем выражение, стоящее в фигурных скобках:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(j-a) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[e^{in(j-a)} + e^{-in(j-a)}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(j-a)}\right)^n + \left(\frac{r}{R}e^{-i(j-a)}\right)^n\right] = 1 + \frac{\frac{r}{R}e^{i(j-a)}}{1 - \frac{r}{R}e^{i(j-a)}} + \frac{\frac{r}{R}e^{-i(j-a)}}{1 - \frac{r}{R}e^{-i(j-a)}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(j-a) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}.$$

Окончательно получаем

$$u(r,j) = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} g(a)\left[\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}\right] da.$$

Данное выражение называется интегральной формулой Пуассона. Получено еще одно представление решения внутренней задачи Дирихле.

Замечание: Отметим, что выражение $\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(j-a) + r^2}$ часто называют ядром Пуассона.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Пуассон Симеон Дени (1781 – 1840) – выдающийся французский математик, физик, механик. Член Парижской Академии наук. С 1816 г. – профессор в Сорбонне. В двухтомном курсе механики Пуассон развил идеи Ж. Лагранжа и П. Лапласа. Пуассон основательно разработал многие разделы математической физики, дал решения многих задач электростатики и магнитостатики. Предложил общие методы интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости. Существенное значение имеют работы Пуассона, посвященные уравнениям в конечных разностях, дифференциальным уравнениям с частными производными, вариационному исчислению, ортогональным рядам.

§6. Задача оптимального управления эллиптической системой

Приведем результат поиска оптимального управления в задаче управления дифференциальным уравнением эллиптического типа. Задачи такого типа часто встречаются в практических приложениях управления установившимися процессами.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}=F(x, z, u), \tag{6.6.1}$$

где нелинейная функция F непрерывна по $x=(x_1, x_2, x_3)$ в области D трёхмерного евклидова пространства и дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных z и u, где u – некоторый r-мерный параметр, принимающий всевозможные значения из некоторой ограниченной области U (открытой или замкнутой) r-мерного евклидова пространства.

Пусть S достаточно гладкая граница области D. Потребуем, чтобы искомая функция $z(x, y)$ удовлетворяла условию

$$\frac{dz}{dn}+hz=f(x) \text{ при } x\in S, \tag{6.6.2}$$

где n – направление внешней нормали, h – положительная постоянная, а $f(x)$ – ограниченная кусочно-непрерывная на S функция.

Функцию $u=u(x)$, определённую в области D, будем называть допустимой, если её значения расположены в U и она может иметь лишь конечное число поверхностей, линий и точек разрыва. Потребуем, чтобы в окрестности любой точки поверхности разрыва можно было ввести невырожденное преобразование координат $x_i=x_i(x), i=1, 2, 3$, такое, что эта поверхность переходит в кусок плоскости $x_3=0$. Вставляя такую допустимую функцию в уравнение (6.6.1), получим

$$\Delta z = F(x, z, u(x)), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}. \tag{6.6.3}$$

Это уравнение уже не содержит параметра. Согласно условиям, наложенным на F и $u(x)$, его правая часть является кусочно-непрерывной функцией. Поверхности $\;_i,\ i=1,\mathbf{K},k$, разрыва управления $u(x)$ разбивают область D на конечное число подобластей, в каждой из которых правая часть уравнения (3) непрерывна. Под решением краевой задачи (6.6.3), (6.6.2) будем понимать функцию $z = z(x)$, которая удовлетворяет уравнению (6.6.3), условию (6.6.2) и некоторым дополнительным условиям гладкости на $\;_i$. Будем предполагать, что заданные функции в уравнениях (6.6.1) и условиях (6.6.2), кроме перечисленных выше свойств, удовлетворяют ещё условиям, при которых каждой допустимой функции $u = u(x)$ соответствует единственное решение рассматриваемой краевой задачи (6.6.3), (6.6.2). Это решение будем называть решением, соответствующим допустимой функции $u = u(x)$.

Пусть задан функционал

$$I = \iint_S a(x) z(x) dS + \iiint_D b(x) z(x) dx,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – интегрируемые со своим квадратом функции, определённые соответственно в областях S и D.

Ставится задача: среди всех допустимых функций найти такую, что соответствующее ей решение уравнения (6.6.1), удовлетворяющее условию (6.6.2), реализует минимум (максимум) функционала I.

Функцию $u(x)$, для которой функционал I достигает своего минимума (максимума), будем называть минимизирующей (максимизирующей) функцией.

Пусть $u(x)$ – некоторая допустимая функция, а $z(x)$ – соответствующее ей решение уравнения (6.6.3) с граничным условием (6.6.2). Введём функцию $w(x)$, определив её как решение сопряженного уравнения

$$\Delta w = \frac{\partial F(x, z(x), u(x))}{\partial z} w - b(x) \tag{6.6.4}$$

с граничным условием

$$\frac{dw}{dn} + hw = a(x) \text{ при } x \in S, \tag{6.6.5}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – функции, входящие в определение функционала I.

Данными соотношениями функция $w(x)$ определяется однозначно и оказывается интегрируемой с квадратом по области D. Таким образом, каждая допустимая функция $u(x)$ однозначно определяет пару функций $z(x)$ и $w(x)$.

Введём обозначение (гамильтониан системы)

$$H(w(x), z(x), u, x) = w(x) F(x, z(x), u).$$

Будем говорить, что допустимая функция $u = u(x)$ удовлетворяет условию максимума, если

$$H(w\ (x), z(x), u(x), x) (=) \sup_{u \in U} H(w\ (x), z(x), u, x), \qquad (6.6.6)$$

где $z(x)$ и $w(x)$ – решения краевых задач (6.6.3), (6.6.2) и (6.6.4), (6.6.5), соответствующие допустимой функции $u = u(x)$. Символ (=) означает равенство, справедливое во всех точках области D, за исключением, быть может, множеств точек нулевой меры. Условие минимума определяется аналогично.

Сформулируем следующую теорему.

Принцип максимума (А. И. Егорова) Для того чтобы допустимая функция была минимизирующей (максимизирующей), необходимо, чтобы она удовлетворяла условию максимума (минимума).

Хотя принцип максимума формально не даёт достаточных условий существования минимизирующих (максимизирующих) функций, он служит практическим инструментом для их отыскания, поскольку уравнения (6.6.1), (6.6.4), (6.6.6) вместе с граничными условиями (6.6.2), (6.6.5) образуют полную систему отношений для определения искомых функций и соответствующих им решений краевой задачи (6.6.1), (6.6.2).

Таким образом, рассмотренная вариационная задача сводится к решению эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями.

§7. Основы вариационного метода решения краевых задач

Пусть в области G с границей ∂G дано линейное дифференциальное уравнение – обыкновенное или в частных производных. Требуется найти решение y этого уравнения, удовлетворяющее на границе ∂G заданным линейным однородным (краевым) условиям. Левую часть уравнения можно рассматривать как линейный оператор L, определённый на множестве Ξ функций, обладающий непрерывными производными нужного порядка в $G + \partial G$ и удовлетворяющий данным краевым условиям на ∂G. Таким образом, наша краевая задача сводится к решению операторного уравнения

$$Ly = f(P), \qquad (6.7.1)$$

$f(P)$ – известная функция (которую мы будем считать непрерывной) и $y \in \Xi$, причём функция y на границе ∂G удовлетворяет краевому условию

$$R[y] = 0, \qquad (6.7.2)$$

где R – известный линейный оператор более низкого порядка. Заметим, что неоднородная краевая задача

$$Ly = f(P), \qquad (6.7.3)$$

$$R[y] = j\ (P), \quad P \in \partial G, \qquad (6.7.4)$$

где $j\ (P)$ – известная функция, сводится к однородной, если положить $y = z + y_1$, где z – новая неизвестная функция и y_1, удовлетворяющая краевому условию (4): $R[y_1]=j\,(P)$. Действительно, из формул (6.7.3) и (6.7.4) получаем $Lz = f(P) - Ly_1$ и $R[z]=0$. Функцию y_1 обычно нетрудно найти подбором.

Идея вариационного подхода состоит в том, что краевая задача (6.7.1), (6.7.2) заменяется эквивалентной задачей об отыскании функции, доставляющей экстремум (обычно минимум) некоторому функционалу. Вариационные методы решения краевых задач неразрывно связаны с именами Б. Г. Галеркина, В. Ритца, И. Г. Бубнова, которые предложили численные процедуры приближённого решения соответствующих задач. Приведём две важные для дальнейшего теоремы.

Теорема 1. Пусть L – самосопряженный линейный оператор, положительно-определенный в классе функций Ξ. Тогда операторное уравнение (6.7.1) при наличии краевого условия (6.7.2) в классе Ξ не может иметь двух решений. Если решение краевой задачи (6.7.1) – (6.7.2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Предположим, что краевая задача (6.7.1) – (6.7.2) имеет два решения y_1 и y_2,

$$Ly_1 = f(P),\ R[y_1] = 0, \qquad (6.7.5)$$

$$Ly_2 = f(P),\ R[y_2] = 0. \qquad (6.7.6)$$

Вычитая из уравнений (6.7.5) соответствующие уравнения (6.7.6), в силу линейности оператора L и функционала R получим $L(y_1 - y_2) = 0$, $R[y_1 - y_2] = 0$, т.е. $(y_1 - y_2) \in \Xi$. Умножая первое из полученных равенств скалярно на разность $(y_1 - y_2)$, будем иметь

$$(L(y_1 - y_2),(y_1 - y_2)) = 0. \qquad (6.7.7)$$

Так как по условию оператор L положительный в классе Ξ и функция $(y_1 - y_2) \in \Xi$, то из формулы (6.7.7) следует $(y_1 - y_2) \equiv 0$, т.е. $y_1 \equiv y_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть L – самосопряженный оператор, положительно-определенный в классе Ξ, а $F[y]$ – функционал вида

$$F[y] = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_w (Ly - 2f)\, y\, dw, \qquad (6.7.8)$$

где $f = f(P)$ – правая часть уравнения (6.7.1).

Если краевая задача (6.7.1) – (6.7.2) с однородными граничными условиями имеет решение $\bar{y}$, то это решение даёт минимум функционалу $F[y]$.

Если в классе Ξ существует функция $\bar{y}$, дающая минимум функционалу (6.7.9), то эта функция является решением уравнения (6.7.1).

Доказательство. Пусть $\bar{y}$ есть решение краевой задачи (6.7.1) – (6.7.2), т.е. $L\bar{y} = f(P)$ и $R[\bar{y}] = 0$. Заменяя $f(P)$ через $L\bar{y}$ в формуле (6.7.8), получим

$$F[y] = (Ly, y) - 2(L\bar{y}, y). \qquad (6.7.9)$$

Пользуясь симметричностью оператора L, получаем:

$$(L\bar{y}, y) = (\bar{y}, Ly) = (Ly, \bar{y}).$$

Поэтому

$$F[y]=(Ly,y)-(Ly,\bar{y})-(L\bar{y},y)=(Ly,y-\bar{y})-[(L\bar{y},y)-(L\bar{y},\bar{y})]-(L\bar{y},\bar{y})=$$
$$=(Ly,y-\bar{y})-(L\bar{y},y-\bar{y})-(L\bar{y},\bar{y})=(L(y-\bar{y}),(y-\bar{y}))-(L\bar{y},\bar{y}). \qquad (6.7.10)$$

В правой части формулы (6.7.10) только первое слагаемое является переменным. Очевидно, $(y-\bar{y})\in\Xi$, поэтому в силу положительности оператора L получаем $(L(y-\bar{y}),(y-\bar{y}))\geq 0$. Следовательно, функционал $F[y]$ достигает своего наименьшего значение для тех и только тех допустимых функций y, для которых имеет место равенство $(L(y-\bar{y}),(y-\bar{y}))=0$. Отсюда на основании определения положительного оператора получаем $y-\bar{y}\equiv 0$, т.е. $y\equiv\bar{y}$.

Заметим, что из формулы (6.7.10) следует, что наименьшее значение функционала $F[y]$ равно $F_{\min}(y)=F[\bar{y}]=-(L\bar{y},\bar{y})$.

Пусть существует функция $\bar{y}$ из класса Ξ, дающая минимум функционалу (6.7.8). Это значит, что для любой функции $y_1\in\Xi$ и достаточно близкой к $\bar{y}$ справедливо следующее неравенство:

$$F[y_1]-F[\bar{y}]\geq 0.$$

Положим $h=(y_1-\bar{y})\in\Xi$ и рассмотрим семейство функций

$$y=\bar{y}+ah, \qquad (6.7.11)$$

где a – числовой параметр. Очевидно, при любом a функции y являются допустимыми и при достаточно малом $|a|$ выполнено неравенство

$$\Delta F=F[y]-F[\bar{y}]\geq 0.$$

На основании формулы (6.7.8), выполняя тождественные преобразования, получаем

$$\Delta F=(Ly,y)-2(f,y)-(L\bar{y},\bar{y})+2(f,y)=$$
$$=(Ly,y)-2(L\bar{y},y)+2(L\bar{y}-f,y)-2(L\bar{y}-f,\bar{y})+(L\bar{y},\bar{y})=$$
$$=(Ly,y)-2(L\bar{y},y)+2(L\bar{y}-f,y-\bar{y})+(L\bar{y},\bar{y})\geq 0. \qquad (6.7.12)$$

Отсюда, используя преобразование (6.7.10) и формулу (6.7.11), находим

$$\Delta F=((L(y-\bar{y}),(y-\bar{y}))-(L\bar{y},\bar{y})+2(L\bar{y}-f,y-\bar{y})=a^2(Lh,h)+2a(L\bar{y}-f,h)\geq 0.$$

Левая часть данного неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно параметра a, причём этот трёхчлен не может менять знака. Следовательно, соответствующее квадратное уравнение заведомо не имеет действительных различных корней и, значит, обладает неположительным дискриминантом: $(L\bar{y}-f,h)^2-(Lh,h)\cdot 0\leq 0$. Отсюда $(L\bar{y}-f,h)^2=0$. Таким образом, $\int_w(L\bar{y}-f)h\,dw=0$ для любой функции $h\in\Xi$. В силу произвола выбора функции h отсюда следует, что $L\bar{y}-f\equiv 0$, т.е. $L\bar{y}\equiv f$. Таким образом, $\bar{y}$ есть решение нашей краевой задачи.

Бубнов Иван Григорьевич (1872 – 1919) – выдающийся русский инженер и математик. Основоположник строительной механики корабля, создатель первых боевых подводных лодок России. Окончил Морское инженерное училище в Кронштадте (1891), Морскую академию (1896). Профессор Политехнического института и Николаевской морской академии. В своих работах И. Г. Бубнов математически исследовал вопросы упругости и прочности судов. Разработал метод нахождения приближенного решения операторного уравнения, который применил к решению ряда задач теории упругости. Этот метод был усовершенствован Б. Г. Галеркиным и сейчас называется методом Бубнова – Галеркина.

Рассмотрим приведенный выше подход применительно к краевым задачам для уравнений Пуассона и Лапласа. Пусть дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x,y),\ f(x,y) \in C(G). \tag{6.7.13}$$

Требуется найти решение уравнения, непрерывное в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \partial G$ и удовлетворяющее на границе ∂G этой области краевому условию

$$u\big|_{\partial G} = j\,(P), \tag{6.7.14}$$

где $P = (x,y)$ и $j\,(P)$ – заданная непрерывная функция. Предположим вначале, что $j\,(P) \equiv 0$, т.е.

$$u\big|_{\partial G} = 0, \tag{6.7.15}$$

и будем решать однородную краевую задачу (6.7.13), (6.7.15). Покажем, что в классе функций $\Xi = \{u(x)\}$, непрерывных в $\overline{G}$ вместе со своими первыми и вторыми производными и обращающихся на контуре ∂G в нуль, оператор $Lu = -\Delta u$ самосопряжен и положителен.

Пусть $u \in \Xi$ и $v \in \Xi$. Составим выражение

$$(Lu,v)-(Lv,u) = \iint\limits_G \left[-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] dxdy =$$

$$= \left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x},\ -v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x},\right.$$

$$\left. u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},\ -v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] =$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dxdy\,.$$

Используя формулу Грина $\oint\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ и используя нулевые граничные условия $u\big|_{\partial G} = 0,\ v\big|_{\partial G} = 0,$ получим, что

$$(Lu,v) - (Lv,u) = \oint\limits_{\partial G} \left[-\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right] = 0. \quad (6.7.16)$$

Следовательно, $(Lu,v) = (Lv,u)$. Поэтому оператор L самосопряжен. Далее установим, что оператор L является положительно-определенным. Получаем

$$(Lu,u) = -\iint\limits_G u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy =$$

$$= \left[-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, -u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] =$$

$$= -\iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dxdy + \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Применяя к первому интегралу формулу Грина, в силу краевых условий для функции u получим

$$(Lu,u) = -\oint\limits_{\partial G} \left(-u\frac{\partial u}{\partial y}dx + u\frac{\partial u}{\partial x}dy \right) + \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy, \quad (6.7.17)$$

т.е. $(Lu,u) = (-\Delta u,u) \geq 0$. Если $(Lu,u) = 0$, то из формулы (6.7.17) следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Отсюда $u(x,y) = c$, и на основании краевого условия (6.7.15) следует $u(x,y) \equiv 0$. Следовательно, оператор L является положительно-определенным оператором. Таким образом, для краевой задачи (6.7.13) с однородными краевыми условиями (6.7.15) выполнены условия теоремы 2. Следовательно, эта задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[u] = (Lu,u) - 2(u,f) \quad (6.7.18)$$

в классе Ξ функций. В силу формулы (6.7.17) получаем

$$F[u] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2\,fu \right] dxdy. \quad (6.7.19)$$

Рассмотрим теперь уравнение (6.7.13) с неоднородным краевым условием (6.7.14), и пусть $\Xi_1 = \{u(x,y)\}$ – класс функций $u \in C^{(2)}(G + \partial G)$, удовлетворяющих условиям (6.7.14).

Следуя идее предыдущего параграфа, построим функцию $z = z(x, y) \in C^{(2)}(G + \partial G)$, для которой выполнены краевые условия (6.7.14).

Введём функцию

$$v(x, y) = u(x, y) - z(x, y), \qquad (6.7.20)$$

где $u(x, y)$ – решение нашей неоднородной краевой задачи. Тогда функция $n = n(x, y)$ удовлетворяет на контуре ∂G однородному краевому условию

$$v\big|_{\partial G} = 0 \qquad (6.7.21)$$

и является решением уравнения

$$Lv = Lu - Lz = f(P) - Lz, \qquad (6.7.22)$$

где $Lz = -\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ – известная функция. Функция $v = v(x, y)$, являясь решением однородной краевой задачи (6.7.21) – (6.7.22), на основании формулы (6.7.18) даёт наименьшее значение функционалу

$$F[v] = (Lv, v) - 2(v, f(P) - Lz). \qquad (6.7.23)$$

Возвращаясь в последнем равенстве к функции u (см. (6.7.20)) и используя свойства скалярного произведения и линейного оператора L, получим

$$F[u - z] \equiv F_1[u] = (L(u - z), u - z) - 2(u - z, f(P) - Lz) =$$
$$= (Lu, u) - 2(u, f) + (u, Lz) - (z, Lu) + 2(z, f) - (Lz, z). \qquad (6.7.24)$$

Так как последние два члена формулы (6.7.24) не зависят от искомой функции $u = u(x, y)$, то функция $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$, дающая наименьшее значение функционалу (6.7.24), будет минимизировать функционал

$$F_2[u] = (Lu, u) - 2(u, f) + [(Lz, u) - (Lu, z)]. \qquad (6.7.25)$$

Покажем, что функционал (6.7.25) можно заменить функционалом, не содержащим функцию z. Используя преобразование, применённое в формуле (6.7.16), имеем

$$(Lz, u) - (Lu, z) = \iint_G (z\Delta u - u\Delta z)\,dz = \oint_{\partial G}\left[-\left(z\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \left(z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right] =$$
$$= \oint_{\partial G}\left(z\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial z}{\partial n}\right)dS,$$

где n – внешняя нормаль к ∂G и

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial S} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial S}, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial S} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial S}.$$

Отсюда, так как $z\big|_{\partial G} = u\big|_{\partial G} = j(x, y)$, получаем

$$(Lz, u) - (Lz, u) = \oint_{\partial G} j(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial n}\right)dS. \qquad (6.7.26)$$

С другой стороны, на основании формулы (6.7.17) находим

$$(Lu, u) = -\oint_{\partial G}\left(u\frac{\partial u}{\partial n}dS\right) + \iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= -\oint_{\partial G}\left(j\,(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}dS\right) + \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \qquad (6.7.27)$$

Подставляя (6.7.26) и (6.7.27) в формулу (6.7.25), будем иметь

$$F_2[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\,fu\right]dxdy - \oint_{\partial G}\left(j\,(x,y)\frac{\partial z}{\partial n}dS\right). \qquad (6.7.28)$$

Так как последнее слагаемое в формуле (6.7.28) не зависит от функции u, то краевая задача (6.7.13) – (6.7.14) эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\,fu\right]dx\,dy \qquad (6.7.29)$$

в классе функций Ξ_1.

В частном случае, если $f = f(x,y) \equiv 0$, то получаем уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, причём краевая задача (6.7.13) – (6.7.14) есть известная задача Дирихле. Решением этой задачи, как вытекает из формулы (6.7.29), является функция u из класса Ξ_1, минимизирующая интеграл Дирихле $\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$. Убедиться в этом самостоятельно, выписав уравнение Остроградского для данного функционала.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Галёркин Борис Григорьевич (1871 – 1945) – выдающийся русский советский математик и инженер. Специалист в области теории упругости. Родился в Полоцке. В 1899 г. окончил Петербургский технологический институт. В 1928 г. Борис Григорьевич был избран членом-корреспондентом, а в 1935 г. действительным членом Академии Наук СССР. Труды Б.Г.Галеркина относятся к проблемам строительной механики и теории упругости. Разработал методы решения дифференциальных уравнений теории упругости. С его именем неразрывно связан метод конечных элементов, применяемый для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Предложенная Б. Г. Галёркиным формула решения уравнений уп-ругого равновесия, содержащая три бигармонические функции, позволила эффективно решить многие пространственные задачи теории упругости. Б. Г. Галёркин – один из создателей теории изгиба упругих пластин.

§8. Метод Ритца численного решения вариационной задачи

Рассмотрим следующий прямой метод приближенного решения вариационной задачи. Выберем функционал следующего вида: $F[u] = (Lu,u) - 2(f,u)$, который определим на некотором линейном множестве

$\Xi=\{u\}$, где L – положительно-определенный линейный оператор; f – заданная непрерывная функция. Предполагается, что функции класса Ξ удовлетворяют условиям $R[u]=j\ (P)$, где R – известный линейный функционал; j – заданная функция. Построим последовательность достаточно гладких линейно независимых функций $u_0(P), u_1(P), \mathbf{K}, u_n(P)$, где $u_0(P)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям $R[u_0]=j\ (P)$, а функции $u_i(P), i=1, 2, \mathbf{K}, n$ – однородным краевым условиям $R[u_i]=0, i=1, 2, \mathbf{K}, n$. Составим следующую линейную комбинацию:

$$u(P; c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)=u_0(P)+\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(P). \tag{6.8.1}$$

Так как $R[u]=R[u_0]+\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 0 = j\ (P)$, то $u\in\Xi$ при любых постоянных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Приближенное решение нашей вариационной задачи будем искать в виде (6.8.1). Для этого подставляем $u(P; c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)$ в выбранный функционал $F[u]=(Lu,u)-2(f,u)$ и получаем

$$F[u]=\ \ (c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n), \tag{6.8.2}$$

где   – известная функция, зависящая от n переменных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Подсчитываем коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$ таким образом, чтобы значение $F[u]$ было минимальным. Это приводит к решению следующей системы уравнений: $\frac{\partial}{\partial c_1}=0, \frac{\partial}{\partial c_2}=0, \ldots, \frac{\partial}{\partial c_n}=0.$ Таким образом, вариационная задача приближенно сводится к задаче об отыскании безусловного экстремума функции $(c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n)$.

Рассмотрим приведенную выше схему применительно к решению задачи Дирихле для уравнений Лапласа:

$$\Delta u=0,\ (x,y)\in G \tag{6.8.3}$$

$$u|_{\partial G}=f(x,y), \tag{6.8.4}$$

где ∂G – простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область G, а функция $f(x,y)$ непрерывна на ∂G. Данная краевая задача эквивалентна следующей вариационной задаче для функционала:

$$F[y]=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy, \tag{6.8.5}$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $G+\partial G$ и удовлетворяющих на границе ∂G краевому условию (6.8.4). Построим конечную систему линейно независимых функций (которые называются координатными функциями) $u_0(x,y),\ \ u_1(x,y),\ \ \ldots,\ \ u_n(x,y)\in C^{(2)}(G+\partial G)$, которые должны удовлетворять условия на границе $u_0(x,y)|_{\partial G}=f(x,y),\ \ u_i(x,y)|_{\partial G}=0,\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда линейная комбинация $j\,(x,y)=u_0+\sum\limits_{i=1}^{n}c_i u_i(x,y)$, принадлежит классу допустимых функций при любых постоянных $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Более коротко:

$$j\,(x,y)=\sum_{i=0}^{n}c_i u_i(x,y), \qquad (6.8.6)$$

где $c_0=1$. Подставляя выражение (6.8.6) в функционал (6.8.5), получим

$$F[j\,]=\iint\limits_G [(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_i}{\partial x})^2+(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_i}{\partial y})^2]\,dxdy. \qquad (6.8.7)$$

Подберем коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$ так, чтобы функция $F[j\,]$ имела минимум. Для этого требуется выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial c_j}F[j\,]=2\iint\limits_G[(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_j}{\partial x})\frac{\partial u_j}{\partial x}+(\sum_{i=0}^{n}c_i\frac{\partial u_j}{\partial y})\frac{\partial u_j}{\partial y}]\,dxdy=0\,,\quad j=1,\ 2,\ ...,\ n, \qquad (6.8.8)$$

что приводит к решению системы следующих алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}[u_0,u_1]+c_1[u_1,u_1]+...+c_n[u_n,u_1]=0,\\ [u_0,u_2]+c_1[u_1,u_2]+...+c_n[u_n,u_2]=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [u_0,u_n]+c_1[u_1,u_n]+...+c_n[u_n,u_n]=0,\end{cases} \qquad (6.8.9)$$

где $[u_i,u_j]=\iint\limits_G(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial y})dxdy$ причем $[u_i,u_j]=[u_j,u_i]$. Из линейной системы (6.8.9) определяются коэффициенты $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$. Функция $j\,(x,y)$ и будет являться приближенным решением задачи Дирихле. Точность приближения зависит от выбора координатных функций $u_k(x,y)$ и от числа этих функций.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Ритц Вальтер (Ritz Walter) (1878 – 1909) – знаменитый немецкий математик и физик-теоретик. Основные исследования относятся к решению вариационных задач математической физики. Открыл спектральную формулу (формула Ритца). Разработал идею вычисления частот непосредственно из энергетического функционала, без решения дифференциальных уравнений. Предложил (1908) мощный прямой метод приближенного решения вариационных задач – метод Ритца. Метод нашел широкое применение в теории колебаний, теории упругости, инженерной механике. Этот метод применяется для приближённого решения вариационных задач и тех краевых задач математической физики, которые сводятся к вариационным. Строгое теоретическое обоснование метода Ритца дал в 1918 г. известный русский математик И. М. Крылов.

Пример. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую в области $G: x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1$ и удовлетворяющую на границе $\partial G: x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$ условию $u|_{\partial G} = x^2 + y^2$.

Решение. Выберем следующую систему координатных функций:

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2,\ u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2 y(1 - x - y),\ u_3(x,y) = xy^2(1-x-y)\mathbf{K}$$

и составим линейную комбинацию

$$j\,(x, y) = x^2 + y^2 + c_1 xy(1 - x - y) + c_2 x^2 y(1 - x - y) + c_3 xy^2(1 - x - y). \quad (6.8.10)$$

Легко проверить, что функция $j\,(x, y)$ удовлетворяет краевому условию $j\,|_{\partial G} = x^2 + y^2$ при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3.

Для составления системы (6.8.9) подсчитываем коэффициенты при неизвестных c_1, c_2, c_3 и свободные члены:

$$[u_0, u_1] = [u_1, u_0] = \iint_G [2x(y - 2xy - y^2 + 2y(x - x^2 - 2xy)]dxdy,$$

$$[u_0, u_2] = [u_2, u_0] = \iint_G [2x(2xy - 3x^2 y - 2xy^2) + 2y(x^2 - x^3 - 2x^2 y)]dxdy,$$

$$[u_0, u_3] = [u_3, u_0] = \iint_G [2x(y^2 - 2xy^2 - y^3) + 2y(2xy - 2x^2 y - 3xy^2)]dxdy,$$

$$[u_1, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)^2 + (x - x^2 - 2xy)^2]dxdy,$$

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(2xy - 3x^2 y - 2xy^2) + (x - x^2 - 2xy)(x^2 - x^3 - 2x^2 y)]dxdy,$$

$$[u_1, u_3] = [u_3, u_1] = \iint_G [(y - 2xy - y^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) + (x - x^2 - 2xy)(2xy - 2x^2 y - 3xy^2)]dxdy,$$

$$[u_2, u_2] = \iint_G (2xy - 3x^2 y - 2xy^2)^2 + (x^2 - x^3 - 2x^2 y)^2]dxdy,$$

$$[u_2, u_3] = [u_3, u_2] = \iint_G [(2xy - 3x^2 y - 2xy^2)(y^2 - 2xy^2 - y^3) +$$

$$+ (x^2 - x^3 - 2x^2 y)(2xy - 2x^2 y - 3xy^2]dxdy,$$

$$[u_3, u_3] = \iint_G [(y^2 - 2xy^2 - y^3)^2 + (2xy - 2x^2 y - 3xy^2)^2]dxdy.$$

Введём обозначения $a_{11} = [u_1, u_1]$, $a_{12} = [u_1, u_2]$, $a_{13} = [u_1, u_3]$, $a_{21} = [u_2, u_1]$, $a_{22} = [u_2, u_2]$, $a_{23} = [u_2, u_3]$, $a_{31} = [u_3, u_1]$, $a_{32} = [u_3, u_2]$, $a_{33} = [u_3, u_3]$, $b_1 = [u_0, u_1]$, $b_2 = [u_0, u_2]$, $b_3 = [u_0, u_3]$. Получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $A \cdot C = B$, где $A = [a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}]$, $C = [c_1, c_2, c_3]^T$, $B = [b_1, b_2, b_3]^T$.

Значения коэффициентов при неизвестных c_1, c_2, c_3 считает следующий скрипт MatLab:

```
% подсчет коэффициентов при координатных функциях
syms x y u k;
% u(1),u(2),u(3),u(4) - система координатных функций
u(1) = x^2+y^2; u(2) = x*y*(1-x-y);
u(3) = x^2*y*(1-x-y); u(4) = x*y^2*(1-x-y);
% k - таблица коэффициентов при неизвестных
for i=1:4
for j=i:4
% k(j,i) = k(i,j) - элемент таблицы
k(j,i)=int(int(diff(u(i),'x')*diff(u(j),'x')+diff(u(i),'y')*diff(u(j),'y'),'y',0,1-x),'x',0,1);
k(i,j) = k(j,i);
end; end;
disp('Значения коэффициентов при неизвестных:');
disp(k);
```

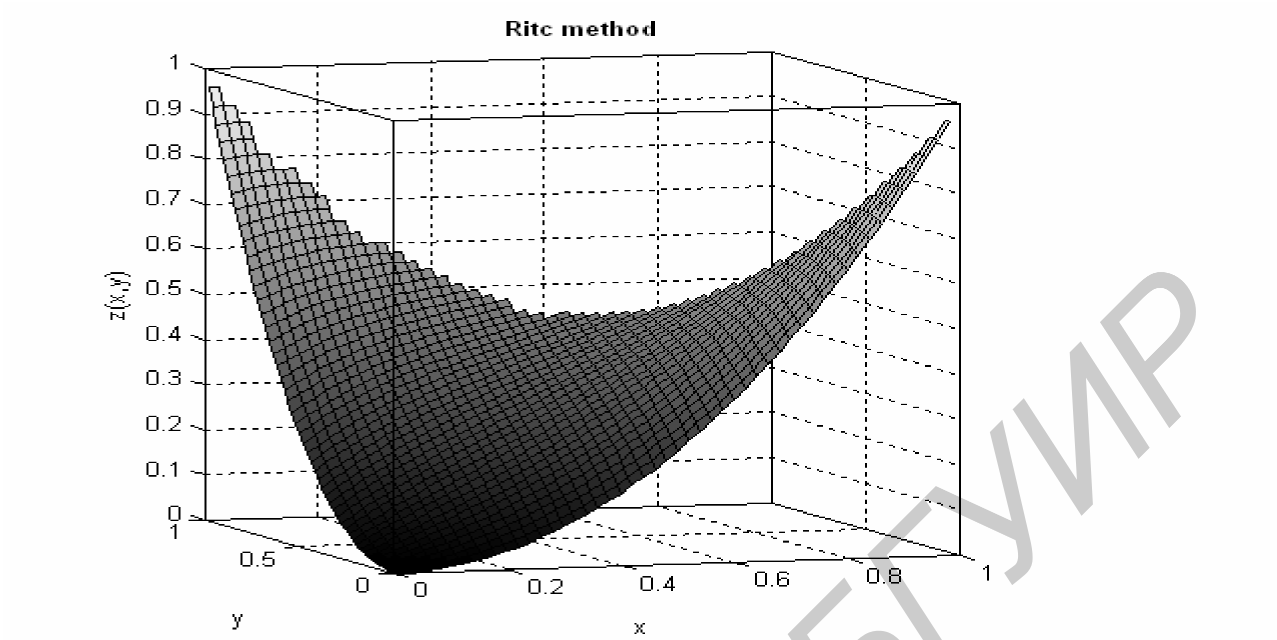
Решив систему, находим $c_1 \approx 4{,}6667$; $c_2 = c_3 \approx -2{,}3333$. Подставляя найденные значения величин c_1, c_2, c_3 в формулу (6.8.9) и получаем приближенное формульное решение нашей задачи:

$$j\,(x,y) = x^2 + y^2 + xy(1-x-y)[4{,}6667 - 2{,}3333(x+y)].$$

Следующий скрипт MatLab визуализирует полученное методом Ритца решение:

```
%визуализация решения, полученного методом Ритца
clear all;
format long;
x=[0:.02:1];
y=[0:.02:1];
[X,Y]=meshgrid(x,y); % задаём сетку
for i=1:length(x)
for j=1:length(y)
if (y(j)<=1-x(i)) % вычисляем значения, которые попадают в заданную область
Z(i,j)=x(i).^2+y(j).^2+x(i)*y(j)*(1-x(i)-y(j))...
*(4.6667-2.3333*(x(i)+y(j)));
else
Z(i,j)=NaN;
end; end; end;
surf(X,Y,Z); % визуализируем решение
title ('\bfRitc method')  % заголовок графика
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z(x,y)'); v = axis;  % границы осей
da = daspect;  % масштаб осей
da(1:2) = min(da(1:2));  % min из двух
daspect(da)  % выравняли масштаб осей
axis(v); % оставили границы
colormap(gray)  % выбрали палитру
grid on  % показали сетку
box on  % показали внешний контур
```

График полученного решения совпадает с графиком, приведенным в §4:



ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск, 1974.
2. Годунов, С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами / С. К. Годунов. – Новосибирск, 1994.
3. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – Л., 1950.
4. Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М., 1985.
5. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин. – М., 1962.
6. Егоров, А. И. Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений / А. И. Егоров. – М., 2008.
7. Егоров, А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. – М., 2005.
8. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М., 1976.
9. Лаврентьев, М. А. Курс вариационного исчисления / М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. – М., 1950.
10. Люстерник, Л. А. Курс функционального анализа / Л. А. Ластерник. – М., 1950.
11. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М., 1981.
12. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М., 1970.
13. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М., 1977.
14. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М., 1970.
15. Демидович, Б. П. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Б. П. Демидович, А. В. Ефимов. – М., 1978.
16. Вуколов, Э. А. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения / Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов. – М., 1981.
17. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике. 13-е изд., исп. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М., 1986.
18. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М., 1966.
19. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка / Э. Камке. – М., 1976.
20. Коллатц, Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений / Л. Коллатц. – М., 1953.
21. Богданов, Ю. С. Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов, Ю. Б. Сыроид. – М., 1996.

Св. план 2009, поз. 59

Учебное издание

Борзенков Алексей Владимирович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. MATLAB

Конспект лекций
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Редактор Т. Н. Крюкова
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Е. Г. Бабичева

Подписано в печать 05.05.2009.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 7,21.
Уч.-изд. л. 6,5.	Тираж 100 экз.	Заказ 86.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6