А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ

Гомель
ГГУ им. Ф.Скорины
2013

УДК 512.579

Гальмак, А.М. Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

ISBN 978-985-439-755-9

Монография посвящена изучению свойств полиадических операций специального вида. Указанные операции определяются на любом множестве, все элементы которого являются функциями, имеющими общую область определения и принимающими значения в некотором группоиде.

Предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области математики.

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук Н.Т. Воробьёв,
доктор физико-математических наук М.В. Селькин

ISBN 978-985-439-755-9

ВВЕДЕНИЕ

Основным объектом изучения в данной книге являются полиадические операции, арность которых больше двух, то есть m-арные операции при $m \geq 2$. Такие операции востребованы в основном в алгебре, за пределами которой они практически не используются. Даже в тех областях науки, где многомерность изучаемых объектов – обычное явление, исследователи, как правило, ограничиваются унарными и бинарными операциями. Экспансия m-арных операций при $m \geq 2$ на некоторые в достаточной степени математизированные разделы науки является, на наш взгляд, естественной и оправданной. В первую очередь это касается геометрии и физики, где использование полиадических операций, арность которых больше двух, открывает новые возможности в изучении многомерных пространств и различных геометрий пространства-времени.

Если на некотором множестве A определены одна или несколько алгебраических операций, то, используя эти операции, можно конструировать новые алгебраические операции на множестве A^J всех функций с областью определения J и со значениями во множестве A. Способы конструирования таких операций, в том числе и многоместных, могут быть самыми разными. Наиболее распространенный из них состоит в том, что каждой операции, определенной на множестве A, ставится в соответствие операция той же арности, определенная поточечно на множестве A^J. Многоместные операции, определенные на множестве A^J как-то иначе, – большая редкость, как в геометрии, так и в физике.

К числу таких редких операций относятся прежде всего две m-арные операции, которые впервые появились в работе Э. Поста [1]. Первая из них возникла естественным образом при изучении m-арных подстановок, которые Э. Пост определил [1, с.248] как упорядоченные наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ биекций

$$\alpha_i\colon A_i \to A_{i+1} (i = 1, \ldots m - 2),\ \alpha_{m-1}\colon A_{m-1} \to A_1,$$

где все множества $A_1, \ldots, A_{m-1}$ являются конечными. Именно на множестве $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{m-1}}$ всех m-арных подстановок, определяемых множествами $A_1, \ldots, A_{m-1}$, Э. Пост и определил свою первую

m-арную операцию, относительно которой, как он установил, это множество является m-арной группой. Эту m-арную группу по аналогии с бинарным случаем он назвал симметрической m-арной группой степени n, где n – мощность множеств $A_1, \ldots, A_{m-1}$. При $m = 2$ m-арные подстановки Э. Поста – это обычные подстановки конечных множеств, а m-арная группа $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{m-1}}$ совпадает с симметрической группой.

В случае

$$A_1 = \ldots = A_{m-1} = \{1, \ldots, n\}$$

множество $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{m-1}}$ совпадает с $(m-1)$-ой декартовой степенью $\mathbf{S}_n^{m-1}$ множества $\mathbf{S}_n$ всех подстановок множества $\{1, \ldots, n\}$, то есть в этом случае m-арная операция Э. Поста определена на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$. Более того, несложно показать, что если все множества $A_1, \ldots, A_{m-1}$, имеют одинаковую мощность n, то декартову степень $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$ можно превратить в m-арную группу, изоморфную m-арной группе $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{m-1}}$.

Вторая из упомянутых выше m-арных операций из работы Э. Поста возникла на пути изучении m-арных матриц, которые по аналогии с m-арными подстановками Э. Пост определил [1, с.331] как упорядоченные наборы $(M_1, \ldots, M_{m-1})$, все компоненты которых являются невырожденными квадратными матрицами n-го порядка над полем C комплексных чисел. Понятно, что множество всех таких m-арных матриц совпадает с $(m-1)$-ой декартовой степенью $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$. Именно на множестве $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ Э. Пост и определил свою вторую m-арную операцию, относительно которой, как он установил [1, с.332], это множество является m-арной группой. При $m = 2$ m-арные матрицы Э. Поста – это обычные матрицы, а m-арная группа $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ совпадает с группой $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$.

Так как любой элемент $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ конечной декартовой степени A^{m-1} произвольного множества A можно отождествить с некоторой функцией $f\colon j \to a_j$ с областью определения

$J = \{1, \ldots, m-1\}$ и со значениями во множестве A, то можно считать, что обе операции Э. Поста определены соответственно на множествах функций $\mathbf{S}_A^J$ и $\mathbf{GL}_n^J(\mathrm{C})$.

Интересующие нас m-арные операции Э. Поста построены по одной и той же схеме и имеют ряд общих особенностей.

Во-первых, в определении каждой из них присутствует групповая операция. Первая из них построена с помощью операции симметрической группы, вторая – с помощью операции полной линейной группы.

Во-вторых, арность каждой из операций и число компонент в упорядоченных наборах, на которых действуют эти операции, связаны сильным ограничением: арность операции на единицу больше числа компонент.

В-третьих, в определении каждой из операций неявно присутствует цикл $\sigma = (12 \ldots m-1)$ из $\mathbf{S}_{m-1}$.

В-четвертых, каждая из m-арных операций Э. Поста определена на конечной декартовой степени группы. Имея в виду отмеченное выше отождествление, можно сказать, что каждая из m-арных операций Э. Поста определена соответственно на множествах функций $\mathbf{S}_A^J$ и $\mathbf{GL}_n^J(\mathrm{C})$ с общей конечной областью определения $J = \{1, \ldots, m-1\}$.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих m-арных операций, допускает различные обобщения. Реализация некоторых из этих обобщений, базирующихся на перечисленных выше особенностях, связана с решением следующих задач.

Задача 1. *Обобщить конструкцию Э. Поста, заменяя в ней конкретные – симметрическую и линейную группы, произвольной группой* (*произвольной полугруппой, произвольным группоидом*).

Задача 2. *Обобщить конструкцию Э. Поста, сняв в ней ограничение, связывающее арность полиадической операции и число компонент в упорядоченных наборах, на которых действует эта операция.*

Задача 3. *Обобщить конструкцию Э. Поста, заменив и ней цикл* σ = (12 ¼ m – 1) *любой подстановкой из* $\mathbf{S}_{m-1}$.

Задача 4. *Обобщить конструкцию Э. Поста, на любые декартовы степени, включая бесконечные, произвольной группы* (*произвольной полугруппы*, *произвольного группоида*), что равносильно следующей задаче: *обобщить конструкцию Э. Поста на множества A^J всех функций с произвольной областью определения J и со значениями в произвольной группе A* (*произвольной полугруппе A, произвольном группоиде A*).

Решению первых трех задач посвящены работы [2 – 10] одного из авторов. В частности, в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая при

$$k = m - 1,\ l = m,\ \sigma = (12\ \ldots\ m-1),\ A = \mathbf{S}_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$. Частные случаи операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ рассматривались в [3 – 8]. Подробному изучению свойств этой операции и некоторых ее обобщений посвящена книга [9]. Ещё одно обобщение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ предложено в [10]. Возможны и другие обобщения операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

Одному из таких обобщений, решающих задачу 4 в самом общем виде, посвящена настоящая книга. В ней для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J и любой биекции σ этого множества на себя на декартовой степени A^J произвольного группоида A определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$, которая, как несложно заметить, совпадает с операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$, если $J = \{1, \ldots, k\}$, A – полугруппа. Основная цель данной книги – изучение свойств операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$.

Авторы искренне признательны своим коллегам А.Н. Скибе, Г.Н. Воробьеву и В.К. Лапковскому за ценные замечания и полезные советы, способствовавшие улучшению книги.

Г Л А В А 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Данная глава носит вспомогательный характер. В ней приведены определения базовых понятий теории n-арных алгебраических систем и необходимые сведения о подстановках множеств произвольной мощности. Сформулированы также некоторые результаты, которые используются в дальнейшем изложении.

1.1. *n*-АРНЫЕ ГРУППОИДЫ

Универсальную алгебру $< A, [\ ] >$ с одной n-арной операцией $[\ ]$ называют *n-арным группоидом*.

Определение 1.1.1. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}], \quad (1.1.1)$$

называется [11] *n-арной полугруппой*, а n-арная операция $[\ ]$ в этом случае называется *ассоциативной*.

Если в n-арном группоиде $< A, [\ ] >$ тождество (1.1.1) выполняется для $i = n - 1$:

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_{n-1}[a_n \ldots a_{2n-1}]],$$

то n-арная операция $[\ ]$ называется *полуассоциативной*.

С помощью n-арной операции $[\ ]$, определенной на множестве A, можно для всякого $m = k(n - 1) + 1$, где $k \geq 1$, определить m-арную операцию $(\ )$:

$$(a_1 \ldots a_m) =$$

$$= [[\ \ldots [[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] \ldots]a_{(k-1)(n-1)+2} \ldots a_{k(n-1)+1}]. \quad (1.1.2)$$

Определение 1.1.2. m-Арный группоид $< A, (\ ) >$ и m-арная операция $(\ )$ называются *производными* соответственно от n-арного группоида $< A, [\ ] >$ и n-арной операции $[\ ]$, если выполняется условие (1.1.2).

В дальнейшем, чтобы не вводить лишние символы, будем полагать

$$[a_1 \ldots a_m] = [a_1 \ldots a_{k(n-1)+1}] =$$

$$= [[\ \ldots [[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] \ldots]a_{(k-1)(n-1)+2} \ldots a_{k(n-1)+1}].$$

Имеет место

Предложение 1.1.1. *m-Арный группоид, производный от n-арной полугруппы, является m-арной полугруппой, то есть m-арная операция, производная от ассоциативной n-арной операции, является ассоциативной.*

Определение 1.1.3. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}\ a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ однозначно разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_ia_{i+1} \ldots a_n] = b, \qquad (1.1.3)$$

называется *n-арной квазигруппой* [11].

Определение 1.1.4. n-Арный группоид, являющийся одновременно и n-арной полугруппой и n-арной квазигруппой, называется *n-арной группой* [12].

Таким образом, n-арная группа – это n-арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняются тождества (1.1.1) и однозначно разрешимы уравнения (1.1.3).

Понятно, что при $n = 2$ понятия n-арного группоида, n-арной полугруппы, n-арной квазигруппы и n-арной группы совпадают соответственно с понятиями группоида, полугруппы, квазигруппы и группы.

Подробнее об n-арных группах, в том числе и об их аксиоматике, будет рассказано в следующем параграфе.

Определение 1.1.5. Если в n-арном группоиде $< A, [\ ] >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}], \qquad (1.1.4)$$

то n-арный группоид $< A, [\ ] >$ и n-арная операция [ ] называются *абелевыми*.

Определение 1.1.6. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняется тождество

$$[a a_1 \ldots a_{n-2} b] = [b a_1 \ldots a_{n-2} a], \qquad (1.1.5)$$

называется *полуабелевым*. *Полуабелевой* в этом случае называется и сама n-арная операция [ ].

Заметим, что абелевы и полуабелевы n-арные операции впервые появились у Дёрнте [12] при изучении n-арных групп.

Определение 1.1.7. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняется тождество

$$[a \underbrace{b \ldots b}_{n-1}] = [\underbrace{b \ldots b}_{n-1} a], \qquad (1.1.6)$$

называется *слабо полуабелевым*. *Слабо полуабелевой* в этом случае называется и сама n-арная операция [ ].

При $n = 2$ понятия абелевости, полуабелевости и слабой полуабелевости совпадают, так как в этом случае тождества (1.1.4), (1.1.5) и (1.1.6) принимают вид $ab = ba$.

Определение 1.1.8. n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, а также n-арная операция [ ] называются *коммутативными* [13], если в $< A, [\ ] >$ выполняется тождество

$$[[a_{11} a_{12} \ldots a_{1n}][a_{21} a_{22} \ldots a_{2n}] \ldots [a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn}]] =$$

$$= [[a_{11} a_{21} \ldots a_{n1}][a_{12} a_{22} \ldots a_{n2}] \ldots [a_{1n} a_{2n} \ldots a_{nn}]].$$

Понятно, что класс всех абелевых n-арных группоидов содержится в классе всех полуабелевых n-арных группоидов. Глазек и Гляйхгевихт показали [14], что класс всех полуабелевых n-арных полугрупп содержится в классе всех коммутативных n-арных полугрупп.

Определение 1.1.9. Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется его:

1) *идемпотентом,* если $[\underbrace{a \ldots a}_{n}] = a$;

2) *нулем,* если для всех $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \ldots x_{n-1}] = [x_1 a x_2 \ldots x_{n-1}] = \ldots = [x_1 \ldots x_{n-1} a] = a;$$

3) *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = [ax\underbrace{a \ldots a}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{a \ldots a}_{n-1}x] = x.$$

Понятно, что n-арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n-арного группоида является его идемпотентом.

Определение 1.1.10. Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется:

1) *нейтральной* в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = [xe_1 \ldots e_{n-1}] = x;$$

2) *левой нейтральной* в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = x;$$

3) *правой нейтральной* в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \ldots e_{n-1}] = x.$$

Отметим, что в любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности.

Если a – единица n-арного группоида $< A, [\ ] >$, то последовательность $\underbrace{a \ldots a}_{n-1}$ является нейтральной в $< A, [\ ] >$.

Понятие нейтральной последовательности впервые было сформулировано Постом для n-арных групп [1].

Определение 1.1.11. Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ с нулем 0 называют его *i-ым делителем нуля*, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, если существуют $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n \in A$. отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \ldots b_{i-1} a b_{i+1} \ldots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i-ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то a называют *делителем нуля* в $< A, [\ ] >$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

1.2. *n*-АРНЫЕ ГРУППЫ

Начало развитию теории n-арных групп положила статья В. Дёрнте [12], в которой впервые было введено понятие n-группы, называемой также n-арной или полиадической группой. Информация по n-арным группам имеется в книгах [11, 15 – 17] и в обзорах [18 – 20]. Собственно n-арным группам посвящены объемная статья Поста [1] и книги [21 – 28].

К числу классических определений n-арной группы относятся уже упоминавшееся в предыдущем параграфе определение 1.1.5 Дёрнте и два определения Поста из [1]. Эти три определения являются обобщениями определения группы как полугруппы, в которой разрешимы уравнения $xa = b$ и $ay = b$.

Пост заметил, что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с n до двух, а при $n \geq 3$ даже до одного.

Определение 1.2.1 [1, Пост]. n-Арная полугруппа $< A, [\,] >$ называется n-арной группой, если в A разрешимы уравнения

$$[xa_2 \ldots a_n] = b, \; [a_1 \ldots a_{n-1}y] = b$$

для всех $a_1, ..., a_n, b \in A$.

Определение 1.2.2 [1, Пост]. n-Арная полугруппа $< A, [\,] >$ называется n-арной группой ($n \geq 3$), если в A разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n] = b$$

для всех элементов $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

В определениях В. Дёрнте и Э. Поста присутствуют только уравнения с одним неизвестным. Уравнения с числом неизвестных большим единицы не рассматривались до тех пор, пока не было установлено, что класс всех n-арных групп совпадает с классом всех n-арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимы уравнения

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a] = b, \; [ay_1 \ldots y_{n-1}] = b$$

с $n - 1$ неизвестными [29], а также с классом всех n-арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимо уравнение

$$[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = b$$

с $n - 2$ неизвестными [30].

Позже было установлено, что в определении n-арной группы могут присутствовать уравнения с любым числом неизвестных. Это вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 1.2.1 [28]. *Для n-арной полугруппы $< A, [\,] >$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если в A для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение*

$$[x_1 \ldots x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b, \qquad (1.2.1)$$

то в A *разрешимо каждое из уравнений*

$$[x_1 a_2 \ldots a_n] = b,\ [x_1 x_2 a_3 \ldots a_n] = b,\ \ldots,\ [x_1 \ldots x_{n-1} a_n] = b \qquad (1.2.2)$$

для всех $a_2, \ldots, a_n, b \in A$;

2) *если в* A *для некоторого* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *и любых элементов* $a_1, \ldots, a_{n-j}, b \in A$ *разрешимо уравнение*

$$[a_1 \ldots a_{n-j} y_1 \ldots y_j] = b, \qquad (1.2.3)$$

то в A *разрешимо каждое из уравнений*

$$[a_1 \ldots a_{n-1} y_1] = b,\ [a_1 \ldots a_{n-2} y_1 y_2] = b,\ \ldots,\ [a_1 y_1 \ldots y_{n-1}] = b \qquad (1.2.4)$$

для всех $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in A$.

Условия теоремы 1.2.3 можно ослабить, сохранив ее утверждения.

Теорема 1.2.2 [28]. *Для* n*-арной полугруппы* $< A, [\ ] >$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *если в* A *для некоторого* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *и любых* $a, b \in A$ *разрешимо уравнение*

$$[x_1 \ldots x_i \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b, \qquad (1.2.5)$$

то в A *разрешимо каждое из уравнений* (1.2.2) *для любых* $a_2, \ldots, a_n, b \in A$;

2) *если в* A *для некоторого* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ *и любых* $a, b \in A$ *разрешимо уравнение*

$$[\underbrace{a \ldots a}_{n-j} y_1 \ldots y_j] = b, \qquad (1.2.6)$$

то в A *разрешимо каждое из уравнений* (1.2.4) *для любых* $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in A$.

Из теорем 1.2.1 и 1.2.2 вытекает, что n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (1.2.1) и (1.2.3) или же, как n-арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (1.2.5) и (1.2.6).

Помимо определений n-арной группы, в которых постулируется разрешимость тех или иных уравнений, существуют также определения n-арной группы, являющиеся n-арным обобщением определения группы как полугруппы, основные операции которой связаны тождеством

$$y^{-1}(yx) = x = (xy)y^{-1},$$

где y^{-1} – результат применения унарной операции. К числу таких определений относится, например, определение В. Дудека, К. Глазека и Б. Гляйхгевихта [31], согласно которому n-арную группу можно определить как универсальную алгебру $< A, [\ ], ^{-} >$ с ассоциативной n-арной [ ] и унарной $^{-}$ операциями, в которой выполняется тождество

$$[\bar{y}\underbrace{y \ldots y}_{n-2}x] = x = [x\underbrace{y \ldots y}_{n-2}\bar{y}].$$

Приведем несколько примеров n-арных групп.

Пример 1.2.1. Определим на группе A n-арную операцию

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_na,$$

где a – элемент из центра $Z(A)$ группы A. Легко проверяется, что $< A, [\ ] >$ – n-арная группа.

Положив в примере 1.2.1 $a = 1$, получим n-арную группу $< A, [\ ] >$ с n-арной операцией

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_n,$$

которая называется *производной* от операции в группе A. При этом n-арная группа $< A, [\ ] >$ называется *производной* от группы A.

Пример 1.2.2. Определим на симметрической группе $\mathbf{S}_n$ производную тернарную операцию $(\alpha\beta\gamma)_3 = \alpha\beta\gamma$. Так как произведение трех нечетных подстановок является нечетной подстановкой, то множество $\mathbf{B}_n$ всех нечетных подстановок степени n замкнуто относительно тернарной операции

$(\ )_3$. Ассоциативность тернарной операции $(\ )_3$ следует из ассоциативности бинарной операции в группе $\mathbf{S}_n$. Ясно, что в тернарной полугруппе $\mathbf{B}_n$ для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha \in \mathbf{B}_n$ однозначно разрешимы уравнения

$$(x\alpha_2\alpha_3)_3 = \alpha,\ (\alpha_1 y\alpha_3)_3 = \alpha,\ (\alpha_1\alpha_2 z)_3 = \alpha.$$

Поэтому $< \mathbf{B}_n, (\ )_3 >$ – тернарная группа.

Пример 1.2.3. Если b – элемент группы A, удовлетворяющий условию $b^{n-1} = 1$, $[\ ]$ – n-арная операция, производная от операции в группе, то $< \{b\}, [\ ] >$ – n-арная группа.

В частности, если b – инволюция группы A, то есть $b^2 = 1$, то $< \{b\}, [\ ] >$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в группе.

Пример 1.2.4. Пусть $\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n-угольника. Поворот c n-угольника в его плоскости на угол $2\pi/n$ вокруг центра n-угольника порождает циклическую подгруппу

$$\mathbf{C}_n = < c > = \{e, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\}$$

поворотов. Диэдральная группа содержит еще n отражений. Если b – отражение, то

$$\mathbf{D}_n \setminus \mathbf{C}_n = \{b, bc, \ldots, bc^{n-1}\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

есть множество всех отражений. Определим на $\mathbf{D}_n \setminus \mathbf{C}_n$ тернарную операцию $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$. Легко проверяется, что $< \mathbf{D}_n \setminus \mathbf{C}_n, [\ ] >$ – тернарная группа.

Для построения дальнейших примеров нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1.2.1. *Если $a^{n-1} = 1$ для некоторого элемента a тела T, где $n \geq 2$, то $< T, [\ ] >$ – n-арная группа с n-арной операцией*

$$[x_1x_2 \ldots x_n] = x_1 + ax_2 + \ldots + a^{n-2}x_{n-1} + x_n.$$

Пример 1.2.5. Пусть T = C – поле всех комплексных чисел,

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n-1} + i\sin\frac{2\pi}{n-1} \in \mathrm{C}.$$

Так как $\varepsilon^{n-1} = 1$, то, по предыдущему предложению < C, [ ] > – n-арная группа с n-арной операцией

$$[z_1 z_2 \ldots z_n] = z_1 + \varepsilon z_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} z_{n-1} + z_n.$$

Пример 1.2.6. Пусть снова T = C. Так как $i^4 = 1$, то, согласно предложению 1.2.9, < C, [ ] > – 5-арная группа с 5-арной операцией

$$[z_1 z_2 z_3 z_4 z_5] = z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4 + z_5.$$

Пример 1.2.7. Пусть H – тело кватернионов. Так как

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;\ i^3 = -i,\ j^3 = -j,\ k^3 = -k;\ i^4 = j^4 = k^4 = 1,$$

то, согласно предложению 1.2.9, < H, $[\ ]_i$ >, < H, $[\ ]_j$ > и < H, $[\ ]_k$ > – 5-арные группы с 5-арными операциями

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_i = x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4 + x_5,$$

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_j = x_1 + j x_2 - x_3 - j x_4 + x_5,$$

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_k = x_1 + k x_2 - x_3 - k x_4 + x_5.$$

Легко проверяется, что элемент ε n-арной группы < A, [ ] > является идемпотентом тогда и только тогда, когда выполняется условие $[\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n-1} a] = [a \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n-1}] = a$ для некоторого $a \in A$.

В n-арной группе при $n > 2$, в отличие от групп, может быть несколько единиц. Более того существуют n-арные группы, в которых все элементы являются единицами. Существуют так же n-арные группы ($n > 2$), в которых вообще нет единиц и n-арные группы, в которых нет не только единиц, но и идемпотентов.

Предложение 1.2.2. *Для элемента* e *n-арной группы* < A, [ ] > *следующие утверждения эквивалентны*:

1) e *– единица в* < A, [ ] >;

2) $[a \underbrace{e \ldots e}_{n-1}] = [e a \underbrace{e \ldots e}_{n-2}] = a$ *для любого* $a \in A$;

3) $[\underbrace{e \ldots e}_{n-1} a] = [\underbrace{e \ldots e}_{n-2} a e] = a$ *для любого* $a \in A$.

Предложение 1.2.3. *Если* $< A, [\ ] >$ – *n-арная группа,* $k \geq 1$, $e_1, \ldots, e_{k(n-1)} \in A$, *то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *последовательность* $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$ – *нейтральная*;

2) *существует элемент* $a \in A$ *такой, что* $[e_1 \ldots e_{k(n-1)}a] = a$;

3) *существует элемент* $a \in A$ *такой, что* $[ae_1 \ldots e_{k(n-1)}] = a$.

В любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности, но определяются они неоднозначно.

Иногда, для сокращения записей, последовательности элементов будем обозначать малыми греческими буквами: $a_1 \ldots a_i = \alpha$.

Предложение 1.2.4. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\alpha\beta$ – *нейтральная последовательность n-арной группы, то* $\beta\alpha$ – *также нейтральная последовательность этой же n-арной группы*;

2) *если* α *и* β – *нейтральные последовательности n-арной группы, то* $\alpha\beta$ *и* $\beta\alpha$ – *также нейтральные последовательности этой же n-арной группы*.

Следующее определение обобщает на n-арный случай понятие обратного элемента группы.

Определение 1.2.3 [1]. Последовательность β элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *обратной* к последовательности α элементов из A, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Ясно, что если β – обратная к α, то α – обратная к β. Для любой последовательности α элементов n-арной группы существует обратная последовательность β. Причем, обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

Следствием утверждения 1) предложения 1.2.4 является

Предложение 1.2.5. *Если* α *и* β *– последовательности элементов* n*-арной группы, то следующие утверждения равносильны*:

1) β *– обратная к* α;

2) $\alpha\beta$ *– нейтральная*;

3) $\beta\alpha$ *– нейтральная*.

Предложение 1.2.6. *Пусть* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *–последовательности, составленные из элементов* n*-арной группы* $< A, [\ ] >$, *и пусть* $\beta_1, \ldots, \beta_r$ *– последовательности, обратные соответственно данным. Тогда* $\beta_r \ldots \beta_1$ *– обратная последовательность для последовательности* $\alpha_1 \ldots \alpha_r$.

Еще одним n-арным аналогом обратного элемента является косой элемент.

Определение 1.2.4 [12]. Элемент b n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} b \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = a$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если b – косой элемент для a, то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Согласно определению,

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} \bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = a$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Легко проверяется, что элемент $\bar{a}$ совпадает с решением уравнения

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} x \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = a$$

для фиксированного $i = 1, 2, \ldots, n$ и определяется однозначно. Из определения 1.2.4 и предложения 1.2.3 вытекает, что последовательность

$$\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\,\bar{a}\,\underbrace{a \ldots a}_{n-i-1}$$

является нейтральной для любого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Понятно, что, всякий идемпотент n-арной группы совпадает со своим косым.

Так как в n-арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то возникает задача изучения множества $\mathbf{E}(A, [\ ]) = \mathbf{E}(A)$ всех единиц произвольной n-арной группы $< A, [\ ] >$.

Теорема 1.2.3 [32, 33]. *Если* $\mathbf{E}(A) \neq \varnothing$, *то* $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$ *– характеристическая n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, [\ ] >$, *лежащая в её центре*.

Ясно, что если $e \in \mathbf{E}(A)$, то $< \{e\}, [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$. В n-арной подгруппе единиц могут существовать n-арные подгруппы, отличные от одноэлементных и от самой $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$. Например, как установлено в [32, 33], если e_1 и e_2 – единицы тернарной группы $< A, [\ ] >$, то $< \{e_1, e_2\}, [\ ] >$ – тернарная подгруппа тернарной группы $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$. Отсюда вытекает, что если конечная тернарная группа содержит более одной единицы, то её n-арная подгруппа единиц, её центр и она сама имеют четные порядки. В [32, 33] также установлено, что если a, b, c – три различные единицы тернарной группы $< A, [\ ] >$, то $< \{a, b, c, [abc]\}, [\ ] >$ – тернарная подгруппа четвертого порядка в $< \mathbf{E}(A), [\ ] >$.

Для всякой n-арной группы $< A, [\ ] >$ обозначим через $\mathbf{I}(A, [\ ]) = \mathbf{I}(A)$ множество всех её идемпотентов. Ясно, что $\mathbf{E}(A) \subseteq \mathbf{I}(A)$. Если же $< A, [\ ] >$ – абелева, то $\mathbf{E}(A) = \mathbf{I}(A)$.

Существуют примеры, показывающие, что множество всех идемпотентов n-арной группы в общем случае не образует в ней n-арную подгруппу.

Идемпотентные n-арные группы, то есть n-арные группы, все элементы которых являются индепотентами, могут служить примером того, как далеко иногда могут отстоять друг от друга бинарный прототип и его n-арный аналог. Если при $n = 2$ идемпотентные n-арные группы – это одноэлементные группы, не требующие специального изучения, то при $n > 2$ идемпотентные n-арные группы составляют нетривиальное многообразие, которое в многообразии всех n-арных групп выделяется тождеством

$$[\underbrace{x \ldots x}_{n}] = x.$$

Свойство n-арных групп из этого многообразия подробно изучались в [34, 35].

В предыдущем параграфе отмечалось, что при $n \geq 3$ класс всех коммутативных n-арных полугрупп шире класса всех полуабелевых n-арных полугрупп. На n-арных группах оба эти понятия совпадают.

Предложение 1.2.7 [14, 36]. *n-Арная группа $< A, [\ ] >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда она коммутативна.*

Иногда, как в следующем определении, последовательность $x_i \ldots x_j$ для краткости обозначается символом x_i^j.

Определение 1.2.5 [1, 21]. *Центром* n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется множество $\mathbf{Z}(A, [\ ])$ всех её элементов z таких, что

$$[zx_1x_2 \ldots x_{n-1}] = [x_1zx_2 \ldots x_{n-1}] = \ldots$$

$$\ldots = [x_1 \ldots x_{n-2}zx_{n-1}] = [x_1x_2 \ldots x_{n-1}z]$$

для всех $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$. Легко проверяется, что

$$\mathbf{Z}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zx\,x_1^{n-2}] = [xz\,x_1^{n-2}],\ \forall x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A\} =$$

$$= \{z \in A \mid [xz\bar{x}\underbrace{x \ldots x}_{n-3}] = z,\ \forall x \in A\} =$$

$$= \{z \in A \mid [\bar{x}\underbrace{x \ldots x}_{n-3}zx] = z,\ \forall x \in A\}.$$

В идемпотентной n-арной группе $< A, [\ ] >$ n-арная подгруппа единиц и центр совпадают: $\mathbf{E}(A, [\ ]) = \mathbf{Z}(A, [\ ])$.

Определение 1.2.6. [1, 21]**.** П*олуцентром* n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется множество

$$\mathbf{HZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z x_1^{n-2} x] = [x x_1^{n-2} z],\ \forall x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A\}.$$

Определение 1.2.7. [28]**.** *Слабым полуцентром* n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется множество

$$\mathbf{HZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z \underbrace{x \ldots x}_{n-1}] = [\underbrace{x \ldots x}_{n-1} z],\ \forall x, z \in A\}.$$

Отметим, что слабая полуабелевость впервые была определена одним из авторов для n-арных групп. Подробнее об этом в [28].

Предложение 1.2.8. *n-Арная группа $< A, [\ ] >$ является абелевой (полуабелевой, слабо полуабелевой) тогда и только тогда, когда она совпадает со своим центром* (*полуцентром, слабым полуцентром*).

Справедливость следующего предложения устанавливается простой проверкой.

Предложение 1.2.9. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы A, то центр $\mathbf{Z}(A, [\ ])$ n-арной группы совпадает с центром $\mathbf{Z}(A)$ группы*:

$$\mathbf{Z}(A, [\ ]) = \mathbf{Z}(A).$$

Предложение 1.2.10 [28]. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы A, то множество всех единиц этой n-арной группы имеет вид*

$$\mathbf{E}(A, [\ ]) = \{z \in \mathbf{Z}(A) \mid z^{n-1} = 1\},$$

где $\mathbf{Z}(A)$ – центр группы A, 1 – ее единица.

Предложение 1.2.11 [28]. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы A, то множество всех идемпотентов этой n-арной группы имеет вид*

$$\mathbf{I}(A, [\ ]) = \{u \in A \mid u^{n-1} = 1\},$$

где 1 *– единица группы A.*

Для нахождения n-арных подгрупп в n-арных группах пользуются следующим критерием В. Дёрнте.

Теорема 1.2.4 [12, Дёрнте]. *Подмножество B n-арной группы* $< A, [\ ] >$ *является ее n-арной подгруппой тогда и только тогда. когда оно замкнуто как относительно n-арной операции* [ ], *так и относительно унарной операции взятия косого элемента.*

1.3. *n*-АРНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Пусть $A_1, \ldots, A_{n-1}$ $(n \geq 2)$ произвольные множества одинаковой мощности, и пусть $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$ – последовательность биекций

$$A_1 \xrightarrow{g_1} A_2 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} A_1.$$

Множество всех последовательностей $\mathbf{g}$ указанного вида обозначим через $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$. Элементы множества $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$ назовем n-арными взаимно однозначными отображениями или n-арными биекциями.

Определим на $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$ n-арную операцию [ ] следующим образом. Если

$$\mathbf{f}_i\colon A_1 \xrightarrow{f_{i1}} A_2 \xrightarrow{f_{i2}} \ldots \xrightarrow{f_{i(n-2)}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{i(n-1)}} A_1,$$

где $i = 1, \ldots, n$, то

$$[\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_{n-1}\mathbf{f}_n] = (g_1, \ldots, g_{n-1}) = \mathbf{g}, \qquad (1.3.1)$$

где

$$g_1 = f_{11}f_{22} \ldots f_{(n-2)(n-2)}f_{(n-1)(n-1)}f_{n1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_k = f_{1k}f_{2(k+1)} \ldots f_{(n-k)(n-1)}f_{(n-k+1)1} \ldots f_{(n-1)(k-1)}f_{nk},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_{n-1} = f_{1(n-1)}f_{21} \ldots f_{(n-2)(n-3)}f_{(n-1)(n-2)}f_{n(n-1)}.$$

Описанная конструкция была предложена Постом [1] для случая конечных множеств $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Случай бесконечных множеств рассмотрел С.А. Русаков [21].

Теорема 1.3.1 [1, 21]. $< \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}, [\ ] >$ – *n-арная группа*.

Доказательство этой теоремы есть в [28].

Элементы множества $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$ называют еще *n-арными подстановками* [1, 21].

Отметим, что в [1] Э. Пост доказал n-арные аналоги многих известных на момент написания его работы результатов о группах подстановок, а также получил ряд результатов, не имеющих бинарных прототипов. В частности, он показал, что в n-арной группе $< \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}, [\ ] >$ имеется $(s!)^{m-2}$ идемпотентов, где s – мощность множеств $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Более общим, чем n-арная подстановка является понятие последовательности отображений множеств, введенное С.А. Русаковым [21] следующим образом.

Пусть $n \geq 1$,

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

– упорядоченные наборы, составленные из произвольных непустых множеств, и пусть δ – любая подстановка из $\mathbf{S}_n$. Если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определено отображение

$$f_i: X_i \to Y_{\delta(i)},$$

то упорядоченный набор $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется последовательностью отображений из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, определенной подстановкой δ. Если при этом для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ отображение f_i является биекцией X_i на $Y_{\delta(i)}$, то $\mathbf{f}$ называется последовательностью биективных отображений $\mathbf{X}$ на $\mathbf{Y}$, определенной подстановкой δ.

Полагая в приведенном определении

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}, \ \delta = (12 \ldots n-1),$$

получим определение n-арной подстановки из $\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}$.

Если даны три равномощных множества $T, A, B,$ причем множества A и B проиндексированы элементами множества T:

$$A = \{a_t \mid t \in T\}, \ B = \{b_t \mid t \in T\},$$

то для любой биекции f множества A на множество B определим биекцию $\underline{f}$ множества T на себя следующим образом:

$$f(a_t) = b_r \Leftrightarrow \underline{f}(t) = r.$$

Замечание 1.3.1. Отображение $f \to \underline{f}$, как несложно заметить, является биекцией множества $\mathbf{S}(A, B)$ всех биекций множества A на множество B на множество $\mathbf{S}_T$ всех биекций множества T на себя. Кроме того,

$$\mathbf{S}_T = \{\underline{f} \mid f \in S(A, B)\}.$$

Понятно, что если множества $B_1, \ldots, B_{k+1}$ проиндексированы элементами множества T, то для биекций

$$B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_{k-1}} B_k \xrightarrow{g_k} B_{k+1}$$

имеет место равенство

$$\underline{g_1 g_2 \ldots g_k} = \underline{g_1}\,\underline{g_2} \ldots \underline{g_k}. \qquad (1.3.2)$$

Проиндексируем множества $A_1, \ldots, A_{n-1}$ элементами множества T. Так как

$$\mathbf{S}_T = \{\underline{f} \mid f \in \mathbf{S}(A_i, A_{i+1})\}, \ i = 1, \ldots, n-2,$$

$$\mathbf{S}_T = \{\underline{f} \mid f \in \mathbf{S}(A_{n-1}, A_1)\},$$

то

$$\mathbf{S}_{\underbrace{T\times\ldots\times T}_{n-1}} = \{(\underline{f_1}, \ldots, \underline{f_{n-1}}) \mid (f_1, \ldots, f_{n-1}) \in \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}\}.$$

Поэтому теорема 1.3.1 позволяет сформулировать следующее

Предложение 1.3.1. $< \mathbf{S}_{\underbrace{T\times\ldots\times T}_{n-1}} = \underbrace{\mathbf{S}_T \times\ldots\times \mathbf{S}_T}_{n-1}, [\ ] >$ – *n-арная группа, где операция* [ ] *определяется следующим образом*

$$[\underline{\mathbf{f}_1} \ldots \underline{\mathbf{f}_n}] = (\underline{g_1}, \ldots, \underline{g_{n-1}}) =$$

$$= (\underline{f_{11}} \ldots \underline{f_{(n-1)(n-1)}}\ \underline{f_{n1}}, \ldots, \underline{f_{1(n-1)}}\ \underline{f_{21}} \ldots \underline{f_{n(n-1)}}).$$

Определим отображение

$$\varphi\colon \mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}} \to \underbrace{\mathbf{S}_T \times\ldots\times \mathbf{S}_T}_{n-1}$$

по правилу

$$\varphi\colon \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_{n-1}) \to \underline{\mathbf{g}} = (\underline{g_1}, \ldots, \underline{g_{n-1}}).$$

В виду замечания 1.3.2, φ является биекцией. Кроме того, применяя (1.3.1) и (1.3.2), получим

$$[\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_n]^{\varphi} \overset{(1.3.1)}{=} \mathbf{g}^{\varphi} = \underline{\mathbf{g}} = (\underline{g_1}, \ldots, \underline{g_{n-1}}) =$$

$$= (\underline{f_{11} \cdots f_{(n-1)(n-1)} f_{n1}}, \ldots, \underline{f_{1(n-1)} f_{21} \cdots f_{n(n-1)}}) \overset{(1.3.2)}{=}$$

$$\overset{(1.3.2)}{=} (\underline{f_{11}} \ldots \underline{f_{(n-1)(n-1)}}\ \underline{f_{n1}}, \ldots, \underline{f_{1(n-1)}}\ \underline{f_{21}} \ldots \underline{f_{n(n-1)}}) =$$

$$= [\underline{\mathbf{f}_1} \ldots \underline{\mathbf{f}_n}] = [\mathbf{f}_1^{\varphi} \ldots \mathbf{f}_n^{\varphi}].$$

Следовательно, φ – изоморфизм. Таким образом имеет место

Предложение 1.3.2. *n-Арные группы* $<\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{n-1}}, [\;]>$ *и* $<\underbrace{\mathbf{S}_T \times \ldots \times \mathbf{S}_T}_{n-1}, [\;]>$ *изоморфны.*

1.4. (*m, n*)-КОЛЬЦА

Приведем определение (m, n)-кольца, более общее, чем в [37].

Определение 1.4.1. Универсальная алгебра $< A, \mu, \eta >$ с двумя: m-арной и n-арной операциями

$$\mu: A^m \to A,\ \eta: A^n \to A$$

называется (m, n)-*кольцом,* если выполняются следующие условия:

1) $< A, \mu >$ – абелева m-арная группа;

2) в $< A, \mu, \eta >$ для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество дистрибутивности

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}\mu(b_1 \ldots b_m)a_{i+1} \ldots a_n) =$$

$$= \mu(\eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_n) \ldots \eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_ma_{i+1} \ldots a_n)). \quad (1.4.1)$$

При $m = 2$ тождество (1.4.1) принимает вид

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_n) =$$

$$= \eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_n) + \eta(a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_n), \quad (1.4.2)$$

где ″+″ – групповая операция. Таким образом, можно сказать, что $(2, n)$-кольцо – это абелева группа, с определенной на ней n-арной операцией η, которая связана с групповой операцией + предыдущим тождеством.

При $m = n = 2$ определение (m, n)-кольца превращается в определение обычного кольца, то есть понятие (2, 2)-кольца совпадает с понятием кольца.

Можно рассматривать и другие определения (m, n)-кольца, если в условии 1) абелевость m-арной операции μ заменять другими m-арными аналогами тождества $x + y = y + x$. Например, если абелевость заменить полуабелевостью, то определение (m, n)-кольца расширится, так как (m, n)-кольца в смысле определения 1.4.1 являются (m, n)-кольцами, в определении которых m-арная операция полуабелева.

Если n-арная операция η удовлетворяет некоторому n-арному аналогу тождества $xy = yx$, то соответствующий тип абелевости выносится в название (m, n)-кольца. Например, если η – абелева (полуабелева), то (m, n)-кольцо $< A, \mu, \eta >$ называется *абелевым* (*полуабелевым*).

(m, n)-Кольцо $< A, \mu, \eta >$ называется *ассоциативным*, если n-арная операция η ассоциативна, то есть n-арный группоид $< A, \eta >$ является n-арной полугруппой.

В [37, 38] (m, n)-кольцами называются ассоциативные (m, n)-кольца.

Замечание 1.4.1. Всякое ассоциативное кольцо $< A, +, \times >$ можно превратить в ассоциативное (m, n)-кольцо $< A, \mu, \eta >$, где $m \geq 2$, $n \geq 2$, а операции μ и η являются производными от операций + и $\times$ соответственно:

$$\mu(a_1a_2 \ldots a_m) = a_1 + a_2 + \ldots + a_m;$$

$$\eta(a_1a_2 \ldots a_n) = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n.$$

Иногда, имея ввиду бинарный случай, m-арную операцию μ называют *аддитивной*, а n-арную операцию η – *мультипликативной*. Соответственно идемпотенты m-арной группы $< A, \mu >$ называются *аддитивными*, а идемпотенты n-арной полугруппы $< A, \eta >$ – *мультипликативными* [38].

Так как в абелевой m-арной группе $< A, \mu >$ всякий идемпотент является ее единицей, а множество всех единиц произвольной m-арной группы является ее m-арной подгруппой (теорема 1.2.3), то множество всех аддитивных идемпотентов (m, n)-кольца

$< A, \mu, \eta >$ является m-арной подгруппой m-арной группы $< A, \mu >$.

Если a – аддитивный идемпотент (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$, то есть $\mu(\underbrace{a \ldots a}_{m}) = a$, то, используя тождество дистрибутивности, получим

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1} a a_{i+1} \ldots a_n) = \eta(a_1 \ldots a_{i-1} \mu(\underbrace{a \ldots a}_{m}) a_{i+1} \ldots a_n) =$$

$$= \mu(\underbrace{\eta(a_1 \ldots a_{i-1} a a_{i+1} \ldots a_n) \ldots \eta(a_1 \ldots a_{i-1} a a_{i+1} \ldots a_n)}_{m}).$$

Таким образом, для любого аддитивного идемпотента a (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$, любого $i = \{1, \ldots, n\}$ и всех

$$a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$$

элемент $\eta(a_1 \ldots a_{i-1} a a_{i+1} \ldots a_n)$ также является аддитивным идемпотентом [38].

Элемент a (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$ называется его *нулем*, если он является нулем n-арного группоида $< A, \eta >$.

n-Арный группоид $< A, \eta >$, как уже отмечалось, не может иметь более одного нуля. Поэтому, если (m, n)-кольцо $< A, \mu, \eta >$ имеет нуль, то этот нуль единственный.

Для нуля a (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ верно

$$\mu(\underbrace{a \ldots a}_{m}) = \mu(\underbrace{\eta(a a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1}) \ldots \eta(a a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1})}_{m}) =$$

$$= \eta(a a_1 \ldots a_{n-2} \mu(\underbrace{a_{n-1} \ldots a_{n-1}}_{m})) = a.$$

Таким образом, всякий нуль (m, n)-кольца является его аддитивным идемпотентом [38].

В [38] приведен пример (3, 4)-кольца, в котором один и тот же элемент является одновременно и аддитивным и мультипликативным идемпотентом, но не является нулем. Там же приведен пример (3, 4)-кольца, в котором нет аддитивных идемпотентов. Если a – аддитивный идемпотент (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$, то, как отмечалось выше, $\eta(a_1 \ldots a_{i-1}aa_{i+1} \ldots a_n)$ – аддитивный идемпотент для любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$. Если к тому же a – единственный аддитивный идемпотент, то

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1}aa_{i+1} \ldots a_n) = a.$$

Следовательно, a – нуль в $< A, \eta >$. Таким образом, единственный аддитивный идемпотент (m, n)-кольца является его нулем [38].

Замечание 1.4.2. Если $< A, \mu, \eta >$ – (m, n)-кольцо, то декартову степень A^k, где $k \geq 2$, можно превратить в (m, n)-кольцо $< A^k, \mu, \eta >$, определив операции μ и η покомпонентно и обозначив их теми же символами μ и η:

$$\mu((a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{m1}, \ldots, a_{mk})) = (\mu(a_{11} \ldots a_{m1}), \ldots, \mu(a_{1k} \ldots a_{mk})),$$

$$\eta((a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{nk})) = (\eta(a_{11} \ldots a_{n1}), \ldots, \eta(a_{1k} \ldots a_{nk})).$$

Если (m, n)-кольцо $< A, \mu, \eta >$ ассоциативно, абелево или полуабелево, то то же самое верно для (m, n)-кольца $< A^k, \mu, \eta >$.

Для (m, n)-кольца $< A, \mu, \eta >$ полагают $A^{\circ} = A$, если в нем нет нуля; $A^{\circ} = A \setminus \{0\}$, если в нем имеется нуль 0.

Приведем определения (m, n)-тела и (m, n)-поля из [39].

Определение 1.4.2. (m, n)-Кольцо $< A, \mu, \eta >$ называется (m, n)-*телом*, если $< A^{\circ}, \eta >$ – n-арная группа. Если же $< A^{\circ}, \eta >$ – абелева n-арная группа, то (m, n)-тело $< A, \mu, \eta >$ называется (m, n)-*полем*.

Определение 1.4.3. Линейное пространство A над полем P с определенной на нем n-арной операцией η называется $(2, n)$-*алгеброй* над полем P, если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ верно

$$\lambda\eta(a_1 \ldots a_n) = \eta((\lambda a_1)a_2 \ldots a_n) =$$

$$= \eta(a_1(\lambda a_2)a_3 \ldots a_n) = \ldots = \eta(a_1 \ldots a_{n-1}(\lambda a_n));$$

2) n-арная операция η дистрибутивна относительно операции + сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество (1.4.2).

Ясно, что при $n = 2$ определение $(2, n)$-алгебры над полем P совпадает с определением обычной бинарной алгебры над P.

$(2, n)$-Кольца называют также *n-арными кольцами*, а $(2, n)$-алгебры – *n-арными алгебрами*. В частности, (2, 3)-кольца называют *тернарными кольцами*, а (2, 3)-алгебры – *тернарными алгебрами*.

Понятно, что $(2, n)$-алгебру можно определить как $(2, n)$-кольцо $< A, +, \eta >$, в котором определена операция умножения скаляров поля P на элементы из A, удовлетворяющая сформулированному выше условию 1), а также следующим условиям:

3) $\lambda(\tau a) = (\lambda\tau)a$ для всех $\lambda,\tau \in P$, $a \in A$;

4) $(\lambda + \tau)a = \lambda a + \tau a$ для всех $\lambda,\tau \in P$, $a \in A$;

5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in P$, $a, b \in A$;

6) $1a = a$ для всех $a \in A$.

Если в приведённых определениях $(2, n)$-алгебры операцию + заменить m-арной операцией и подправить соответствующим образом аксиомы 1) – 6), то можно прийти к более общему понятию (m, n)-алгебры.

1.5. ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l, s, k}$

На k-ой декартовой степени A^k произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества $\mathbf{S}_k$

всех подстановок множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ определим [10] l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следующим образом. Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)).$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) =$$

$$= (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [9, Определение 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[\ ]_{l,k}$ впервые были определены в [2] для случая полугруппы A, где для полугруппы A также впервые была определена и операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$. Заметим также, что операция $[\ ]_{n,n-1}$ аналогична n-арной операции, которую Э. Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [1].

Теорема 1.5.1 [10]. *Пусть A – полугруппа,*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема 1.5.2 [2, 9]. *Если A – полугруппа (группа), σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа (l-арная группа).*

Свойства l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ подробно описаны в [9]. В частности, установлено, что:

1) *если полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от нее, то для нетождественной подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ не является абелевым* [9, Предложение 3.5.1];

2) *если полугруппа A содержит единицу, то для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – абелева* [9, Предложение 3.5.4];

3) *если полугруппа A содержит более одного элемента, то для нетождественной подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ не имеет единиц* [9, Предложение 3.7.3];

4) *если 0 – нуль полугруппы A, то $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$ – нуль l-арного группоида $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$. Если к тому же $l \geq 3$, то в $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ все элементы являются делителями нуля* [9, Предложение 3.7.1].

1.6. ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Будем использовать стандартные обозначения: N – множество всех натуральных чисел; Z – множество всех целых чисел; R – множество всех действительных чисел; C – множество всех комплексных чисел; A^J – множество всех отображений множества J во множество A или, что то же самое, множество всех функций на J со значениями в A.

Множество A^J совпадает с декартовым произведением $\prod_{j \in J} A_j$, где $A_j = A$ для любого $j \in J$.

Если множество J совпадает с одним из множеств

$$\{1, 2, \ldots, k\}, \quad \mathrm{N} = \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathrm{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

то значение функции $\mathbf{x} \in A^J$ в точке $j \in J$ удобно обозначать символом x_j: $\mathbf{x}(j) = x_j$. В связи с этим, если $\mathbf{x}$ принадлежит одному из множеств $A^{\{1, 2, \ldots, k\}}$, A^{N} или A^{Z}, то соответственно полагают:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots),$$

$$\mathbf{x} = (\ldots, x_{-k}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots).$$

Таким образом,

$$A^{\{1, 2, \ldots, k\}} = A^k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in A\},$$

$$A^{\mathrm{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \mid x_i \in A\},$$

$$A^{\mathrm{Z}} = \{(\ldots, x_{-k}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \mid x_i \in A\}.$$

Во множестве A^J выделим подмножество $\mathbf{C}(A^J)$ всех постоянных функций:

$$\mathbf{C}(A^J) = \{\mathbf{c}_a \in A^J \mid \mathbf{c}_a\,(j) = a, \forall a \in A, \forall j \in J\}.$$

Если A – группоид с нулем 0, то символом $\mathbf{0}$ будем обозначать постоянную функцию $\mathbf{0} = \mathbf{c}_0$ из $\mathbf{C}(A^J)$, ставящую в соответствие каждому $j \in J$ нуль группоида A: $\mathbf{0}(j) = 0$ для любого $j \in J$. Если же группоид A содержит единицу 1, то символ $\mathbf{e}$ будет использоваться для обозначения постоянной функции $\mathbf{c}_1$ из $\mathbf{C}(A^J)$, ставящей в соответствие каждому $j \in J$ единицу группоида A: $\mathbf{e}(j) = 1$ для любого $j \in J$.

Если $< A, * >$ – группоид, то $< A^J, * >$ – группоид с операцией $*$, которая определяется поточечно:

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) * \mathbf{y}(j), \; j \in J.$$

Центр группоида $< A^J, * >$ обозначается стандартно символом $\mathbf{Z}(A^J, *)$ или просто $\mathbf{Z}(A^J)$, если операция $*$ явно не указывается. Ясно, что

$$\mathbf{Z}(A^J) = \{\mathbf{z} \in A^J \mid \mathbf{z}(j)\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(j), \forall \mathbf{x} \in A^J, \forall j \in J\},$$

$$\mathbf{Z}(A^J) = \{\mathbf{z} \in A^J \mid \mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ \forall j \in J\},$$

$$\mathbf{Z}(A^J) = (\mathbf{Z}(A))^J.$$

Если группоид A абелев, то группоид A^J также абелев. Поэтому $\mathbf{Z}(A^J) = A^J$.

Если A – кольцо (линейное пространство над полем P, линейная алгебра над полем P), то декартову степень A^J можно превратить в кольцо (линейное пространство над P, линейную алгебру над P), определив операции сложения и умножения элементов из A^J, а также умножение скаляров из P на элементы из A^J поточечно:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) + \mathbf{y}(j),\ (\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ (\lambda\mathbf{x})(j) = \lambda\mathbf{x}(j).$$

1.7. ПОДСТАНОВКИ МНОЖЕСТВА ПРОИЗВОЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

Для обозначения множества всех биекций множества J на себя будем использовать символ $\mathbf{S}_J$. Множество $\mathbf{S}_J$ вместе с операцией суперпозиции функций является группой, которую называют симметрической группой. Элементы множества $\mathbf{S}_J$ называют подстановками.

Следующие сведения о подстановках множеств произвольной мощности взяты из монографии Д.А. Супруненко [40]. Эту же информацию можно почерпнуть из книги Х. Виландта [41].

Носителем подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ называется подмножество

$$\mathbf{T}(\sigma) = \{j \in J \mid \sigma(j) \neq j\}$$

множества J.

Две подстановки σ и τ называются *независимыми*, если

$$\mathbf{T}(\sigma) \cap \mathbf{T}(\tau) = \varnothing.$$

Подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ называется *конечным циклом* длины $k \geq 2$, если

$$|\mathbf{T}(\sigma)| = k,\ \mathbf{T}(\sigma) = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\},$$

$$\sigma(j_1) = j_2,\ \sigma(j_2) = j_3,\ \ldots,\ \sigma(j_{k-1}) = j_k,\ \sigma(j_k) = j_1.$$

Такой цикл обозначается символом $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ или $(j_1\, j_2 \ldots j_k)$. При этом

$$\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_k) = (j_2, j_3, \ldots, j_{k-1}, j_k) = \ldots = (j_k, j_1, \ldots, j_{k-1}),$$

$$\mathbf{T}(\sigma) = \{j_i, \sigma(j_i), \ldots, \sigma^{k-1}(j_i)\},\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Тождественная подстановка ε из $\mathbf{S}_J$, имеющая пустой носитель, отождествляется с конечным циклом длины $k = 1$.

Подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ называется *бесконечным циклом*, если ее носитель $\mathbf{T}(\sigma)$ имеет счетную мощность и при подходящих обозначениях элементов множества J может быть представлен в виде

$$\mathbf{T}(\sigma) = \{\ldots, j_{-2}, j_{-1}, j_0, j_1, j_2, \ldots\},$$

где $\sigma(j_i) = j_{i+1}$, $i \in \mathrm{Z}$. Такой цикл обозначается следующим образом

$$\sigma = (\ldots, j_{-2}, j_{-1}, j_0, j_1, j_2, \ldots) \text{ или } \sigma = (\ldots\, j_{-2}\, j_{-1}\, j_0\, j_1\, j_2 \ldots).$$

В группе $\mathbf{S}_J$ порядок конечного цикла длины k равен k, а бесконечный цикл имеет бесконечный порядок.

Для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ непустое подмножество K множества J называется σ-*инвариантным*, если $\sigma(K) = K$.

Согласно теореме 1 [40, с. 16] *для любой подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *существует такое разбиение множества J на непересекающиеся σ-инвариантные подмножества, что на каждом из них подстановка σ индуцирует некоторый цикл, то есть действует на каждом из этих подмножеств как цикл*.

Конечные подмножества этого разбиения имеют вид

$$\{j, \sigma(j), \ldots, \sigma^{k-1}(j)\} \tag{1.7.1}$$

для некоторого $k \geq 1$, где $\sigma^k(j) = j$, а бесконечные представимы в виде

$$\{\ldots, \sigma^{-2}(j), \sigma^{-1}(j), j, \sigma(j), \sigma^2(j), \ldots\}, \qquad (1.7.2)$$

где $\sigma^k(j) \neq j$ для любого целого k. На множестве (1.7.1) подстановка σ при $k \geq 2$ индуцирует конечный цикл

$$(j, \sigma(j), \ldots, \sigma^{k-1}(j)),$$

а на всех одноэлементных множествах ($k = 1$), элементами которых являются точки, которые подстановка σ оставляет неподвижными, она индуцирует конечный цикл длины 1. На множестве (1.7.2) подстановка σ индуцирует бесконечный цикл

$$(\ldots, \sigma^{-2}(j), \sigma^{-1}(j), j, \sigma(j), \sigma^2(j), \ldots).$$

Так как любые два σ-инвариантные подмножества из указанного выше разбиения множества J не пересекаются, то подстановка σ индуцирует на этих подмножествах независимые циклы, которые называют независимыми циклами подстановки σ. Заметим, что все σ-инвариантные подмножества этого разбиения называют еще σ-орбитами. Множество всех независимых циклов подстановки σ обозначают символом $\mathbf{\Phi}(\sigma)$. Для любого множества $\mathbf{\Phi}$ попарно независимых циклов группы $\mathbf{S}_J$ существует одна и только одна подстановка σ такая, что $\mathbf{\Phi}(\sigma) = \mathbf{\Phi}$. Если множество $\mathbf{\Phi}(\sigma)$ содержит m попарно независимых циклов, то σ – произведение m независимых циклов. В частности, если носитель $\mathbf{T}(\sigma)$ конечен, то σ – произведение m независимых циклов конечной длины m, где m – число всех элементов множества $\mathbf{\Phi}(\sigma)$.

Согласно теореме 3 [40, с. 18] *если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *имеет конечный порядок* d, *то длины всех ее независимых циклов ограничены, а* d *совпадает с наименьшим общим кратным длин этих циклов. Обратно, если длины всех независимых циклов подстановки* σ *ограничены, то ее порядок конечен.*

Множество $\mathbf{SF}_J$ всех подстановок из $\mathbf{S}_J$, имеющих конечный носитель, является нормальной подгруппой группы $\mathbf{S}_J$. Если J – конечное множество, то $\mathbf{SF}_J = \mathbf{S}_J$. Для бесконечного множества J

группу $\mathbf{SF}_J$ называют *финитарной симметрической группой*. Каждый элемент группы $\mathbf{SF}_J$ представим в виде произведения конечного числа транспозиций. Если число транспозиций в таком представлении элемента σ группы $\mathbf{SF}_J$ четное (нечетное), то подстановку σ называют четной (нечетной). Произведение двух подстановок одинаковой четности является четной подстановкой. Произведение в любом порядке четной и нечетной подстановок является нечетной подстановкой. Множество $\mathbf{A}_J$ всех четных подстановок из $\mathbf{SF}_J$ является нормальной подгруппой группы $\mathbf{S}_J$ и называется *знакопеременной группой*. Множество всех нечетных подстановок из $\mathbf{SF}_J$ будем обозначать символом $\mathbf{B}_J$. Для множества $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ полагают $\mathbf{S}_J = \mathbf{S}_k$, $\mathbf{A}_J = \mathbf{A}_k$, $\mathbf{B}_J = \mathbf{B}_k$.

Согласно предложению 1 [40, с. 18] и предложению 1 [40, с. 34] *если множество J содержит более двух элементов, то центры симметрической группы $\mathbf{S}_J$ и финитарной симметрической группы $\mathbf{SF}_J$ одноэлементны, то есть*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}_J) = \{\varepsilon\},\ \mathbf{Z}(\mathbf{FS}_J) = \{\varepsilon\},$$

где ε – тождественная подстановка.

Для любого нечетного $l \geq 3$ определим на симметрической группе $\mathbf{S}_J$ производную l-арную операцию

$$(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l)_l = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_l.$$

Пример 1.2.2 обобщается следующим предложением.

Предложение 1.7.1. *Для любого нечетного* $l \geq 3$ *универсальная алгебра* $< \mathbf{B}_J, (\ )_l >$ *является l-арной подгруппой l-арной группы* $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$.

В дальнейшем изложении существенную роль будут играть подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$, удовлетворяющие условию $\sigma^l = \sigma$, то есть подстановки, имеющие конечный порядок, делящий $l - 1$. Такие подстановки индуцируют на всех подмножествах соответствующего разбиения множества J только конечные циклы, длина каждого из которых делит $l - 1$.

Например, следующая подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3\lambda-2 & 3\lambda-1 & 3\lambda & \ldots \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3\lambda-1 & 3\lambda & 3\lambda-2 & \ldots \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{\mathrm{N}}$$

разбивает множество N на непересекающиеся σ-инвариантные подмножества

$$\mathrm{N}_\lambda = \{3\lambda - 2, 3\lambda - 1, 3\lambda\}, \lambda \in \mathrm{N}.$$

и на каждом таком подмножестве индуцирует цикл

$$\sigma_\lambda = (3\lambda - 2, 3\lambda - 1, 3\lambda),$$

а подстановка

$$\tau = \begin{pmatrix} \ldots & -j & \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & j & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \ldots & -j & \ldots \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$$

разбивает множество Z на непересекающиеся τ-инвариантные подмножества

$$\mathrm{Z}_0 = \{0\}, \mathrm{Z}_\lambda = \{-\lambda, \lambda\}, \lambda = 1, 2, \ldots,$$

на которых она индуцирует тождественную подстановку τ_0, а также циклы

$$\tau_\lambda = (-\lambda, \lambda)\ , \lambda = 1, 2, \ldots .$$

Порядок подстановки σ равен 3, а подстановка τ имеет порядок, равный 2.

Г Л А В А   2

l-АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l,\, \mathrm{s},\, J}$

В данной главе для произвольного множества J, любой подстановки σ из $\mathbf{S}_J$ и любого целого $l \geq 2$ на декартовой степени A^J группоида A определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\, \sigma,\, J}$ и изучаются свойства этой операции.

2.1. ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ

В [9] имеется большое число примеров полиадических операций, определённых на множестве A^J, когда $J = \{1, 2, \ldots, k\}$. Приведем примеры полиадических операций, определённых на множестве A^J, когда множество J бесконечно. Ввиду громоздкости вычислений, ограничимся пока только тернарными операциями.

Пример 2.1.1. Определим на множестве

$$\mathrm{R}^{\mathrm{Z}} = \{(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathrm{R}\}$$

тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = (\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0, \ldots, x_jy_{-j}z_j, \ldots), \tag{2.1.1}$$

где

$$\mathbf{x} = (\ldots, x_{-j}, \ldots, x_0, \ldots, x_j, \ldots),$$

$$\mathbf{y} = (\ldots, y_{-j}, \ldots, y_0, \ldots, y_j, \ldots),$$

$$\mathbf{z} = (\ldots, z_{-j}, \ldots, z_0, \ldots, z_j, \ldots).$$

Положим также

$$\mathbf{u} = (\ldots, u_{-j}, \ldots, u_0, \ldots, u_j, \ldots) \in \mathrm{R}^{\mathrm{Z}},$$

$$\mathbf{v} = (\ldots, v_{-j}, \ldots, v_0, \ldots, v_j, \ldots) \in \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}.$$

1) Так как

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [(\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0, \ldots, x_jy_{-j}z_j, \ldots)\mathbf{uv}] =$$

$$= (\ldots, (x_{-j}y_jz_{-j})u_jv_{-j}, \ldots, (x_0y_0z_0)u_0v_0, \ldots, (x_jy_{-j}z_j)u_{-j}v_j, \ldots) =$$

$$= (\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}u_jv_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0u_0v_0, \ldots, x_jy_{-j}z_ju_{-j}v_j, \ldots),$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{x}(\ldots, t_{-j} = y_{-j}z_ju_{-j}, \ldots, t_0 = y_0z_0u_0, \ldots, t_j = y_jz_{-j}u_j, \ldots)\mathbf{v}] =$$

$$= (\ldots, x_{-j}t_jv_{-j}, \ldots, x_0t_0v_0, \ldots, x_jt_{-j}v_j, \ldots) =$$

$$= (\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}u_jv_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0u_0v_0, \ldots, x_jy_{-j}z_ju_{-j}v_j, \ldots),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] =$$

$$= [\mathbf{xy}(\ldots, s_{-j} = z_{-j}u_jv_{-j}, \ldots, s_0 = z_0u_0v_0, \ldots, s_j = z_ju_{-j}v_j, \ldots)] =$$

$$= (\ldots, x_{-j}y_js_{-j}, \ldots, x_0y_0s_0, \ldots, x_jy_{-j}s_j, \ldots)] =$$

$$= (\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}u_jv_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0u_0v_0, \ldots, x_jy_{-j}z_ju_{-j}v_j, \ldots),$$

то

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]].$$

Следовательно, тернарная операция [ ] ассоциативна, то есть $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, [\ ] >$ – тернарная полугруппа.

2) Далее имеем

$$[(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{zu}] =$$

$$= (\ldots, (x_{-j} + y_{-j})z_ju_{-j}, \ldots, (x_0 + y_0)z_0u_0, \ldots, (x_j + y_j)z_{-j}u_j, \ldots) =$$

$$= (\ldots, x_{-j}z_ju_{-j} + y_{-j}z_ju_{-j}, \ldots, x_0z_0u_0 + y_0z_0u_0, \ldots, x_jz_{-j}u_j + y_jz_{-j}u_j, \ldots) =$$

$$= (\ldots, x_{-j}z_ju_{-j}, \ldots, x_0z_0u_0, \ldots, x_jz_{-j}u_j \ldots) +$$

$$+ (\ldots, y_{-j}z_ju_{-j}, \ldots, y_0z_0u_0, \ldots, y_jz_{-j}u_j, \ldots) = [\mathbf{xzu}] + [\mathbf{yzu}],$$

то есть

$$[(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{zu}] = [\mathbf{xzu}] + [\mathbf{yzu}].$$

Аналогично доказываются тождества

$$[\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{xyu}] + [\mathbf{xzu}],$$

$$[\mathbf{xy}(\mathbf{z} + \mathbf{u})] = [\mathbf{xyz}] + [\mathbf{xyu}].$$

Следовательно, тернарная операция [ ] дистрибутивна относительно бинарной операции покомпонентного сложения элементов в R^Z, которую будем обозначать тем же символом + , что и операцию сложения чисел в R.

Заметим, что множество R^Z является абелевой группой относительно бинарной операции покомпонентного сложения элементов в R^Z.

Таким образом, универсальная алгебра $< R^Z, +, [\ ] >$ является ассоциативным (2, 3)-кольцом или иначе, тернарным кольцом.

3) Так для любого $\lambda \in$ R верно

$$\lambda[\mathbf{xyz}] = [(\lambda\mathbf{x})\mathbf{yz}] = [\mathbf{x}(\lambda\mathbf{y})\mathbf{z}] = [\mathbf{xy}(\lambda\mathbf{z})] =$$

$$= (\ldots, \lambda x_{-j}y_jz_{-j}, \ldots, \lambda x_0y_0z_0, \ldots, \lambda x_jy_{-j}z_j, \ldots),$$

то универсальная алгебра $< R^Z, +, [\ ] >$ является (2, 3)-алгеброй или иначе, тернарной алгеброй.

4) Так как

$$[\mathbf{xyz}] = (\ldots, x_{-j}y_jz_{-j}, \ldots, x_0y_0z_0, \ldots, x_jy_{-j}z_j, \ldots) =$$

$$= (\ldots, z_{-j}y_jx_{-j}, \ldots, z_0y_0x_0, \ldots, z_jy_{-j}x_j, \ldots) = [\mathbf{zyx}],$$

то тернарная полугруппа $< R^Z, [\ ] >$ и тернарная алгебра $< R^Z, +, [\ ] >$ полуабелевы.

5) Покажем, что они не являются абелевыми. Для этого положим

$$\mathbf{e} = (\ldots, e_{-j} = 1, \ldots, e_0 = 1, \ldots, e_j = 1, \ldots),$$

$$\mathbf{r} = (\ldots, r_{-j} = 1, \ldots, r_{-2} = 1, r_{-1} = 0, r_0 = 1, r_1 = 1, \ldots, r_j = 1, \ldots),$$

$$[\mathbf{ere}] = \mathbf{s} = (\ldots, s_{-j}, \ldots, s_0, \ldots, s_j, \ldots),$$

$$[\mathbf{ree}] = \mathbf{t} = (\ldots, t_{-j}, \ldots, t_0, \ldots, t_j, \ldots).$$

Так как

$$s_1 = e_1r_{-1}e_1 = 1\cdot 0\cdot 1 = 0,\ t_1 = r_1e_{-1}e_1 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1,$$

то

$$[\mathbf{ere}] \neq [\mathbf{ree}].$$

Таким образом, тернарная полугруппа $< R^Z, [\ ] >$ и тернарная алгебра $< R^Z, +, [\ ] >$ неабелевы.

6) Для элемента

$$\mathbf{0} = (\ldots, 0_{-j} = 0, \ldots, 0_0 = 0, \ldots, 0_j = 0, \ldots),$$

согласно определению операции [ ], имеем

$$[\mathbf{0yz}] = [\mathbf{x0z}] = [\mathbf{xy0}] = \mathbf{0}.$$

Это означает, что элемент **0** является мультипликативным нулём в тернарной алгебре $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, +, [\ ] >$.

Для любого $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}$ и элементов

$$\mathbf{a} = (\ldots, a_{-j} = 0, \ldots, a_{-2} = 0, a_{-1} = 1, a_0 = 0, \ldots, a_j = 0, \ldots) \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b} = (\ldots, b_{-j} = 0, \ldots, b_{-1} = 0, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0, \ldots, b_j = 0, \ldots) \neq \mathbf{0}$$

имеем

$$[\mathbf{xaa}] = \mathbf{0}, [\mathbf{axb}] = \mathbf{0}, [\mathbf{aax}] = \mathbf{0},$$

Следовательно, все элементы в $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, +, [\ ] >$ являются делителями нуля **0**.

7) Предположим, что

$$\mathbf{u} = (\ldots, e_{-j}, \ldots, e_0, \ldots, e_j, \ldots)$$

– единица в $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, [\ ] >$, и для любого $a \in \mathrm{R}$ и положим

$$\mathbf{c} = (\ldots, c_{-j} = e_{-j}, \ldots, c_{-1} = e_{-1}, c_0 = e_0, c_1 = a, c_2 = e_2, \ldots, c_j = e_j, \ldots),$$

$$[\mathbf{uuc}] = \mathbf{d} = (\ldots, d_{-j}, \ldots, d_0, \ldots, d_j, \ldots),$$

$$[\mathbf{ucu}] = \mathbf{h} = (\ldots, h_{-j}, \ldots, h_0, \ldots, h_j, \ldots).$$

Согласно определению операции [ ], $d_1 = e_1 e_{-1} a$. Кроме того, так как **u** – единица в R^{Z}, то $[\mathbf{uuc}] = \mathbf{c}$, откуда следует $\mathbf{d} = \mathbf{c}$. Следовательно, $d_1 = c_1$, то есть $e_1 e_{-1} a = a$ для любого $a \in \mathrm{R}$, в частности, $e_1 e_{-1} e_1 = e_1$.

Согласно определению операции [ ] имеем $h_1 = e_1 e_{-1} e_1$. Кроме того, так как **u** – единица в R^{Z}, то $[\mathbf{ucu}] = \mathbf{c}$, откуда следует $\mathbf{h} = \mathbf{c}$. Следовательно, $h_1 = c_1$, то есть $e_1 e_{-1} e_1 = a$, откуда, учитывая полученное выше равенство $e_1 e_{-1} e_1 = e_1$, получаем $a = e_1$, что невозможно, если выбрать $a \neq e_1$.

Таким образом в $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, [\ ] >$, а значит и в $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, +, [\ ] >$ нет единиц. В частности, элемент

$$\mathbf{e} = (\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots)$$

не является единицей. Например, если $a \neq b$, то для элементов

$$\mathbf{f} = (\ldots, f_{-j} = 1, \ldots, f_{-2} = 1, f_{-1} = b, f_0 = 1, f_1 = a, f_2 = 1, \ldots, f_j = 1, \ldots),$$

$$\mathbf{g} = (\ldots, g_{-j} = 1, \ldots, g_{-2} = 1, g_{-1} = a, g_0 = 1, g_1 = b, g_2 = 1, \ldots, g_j = 1, \ldots),$$

имеем [**efe**] = **g** ≠ **f**.

8) Предположим, что элемент

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\ldots, \varepsilon_{-j}, \ldots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \ldots) \qquad (2.1.2)$$

является мультипликативным идемпотентом в $< R^Z, +, [\ ] >$. Так как [**εεε**] = **ε**, то, применяя к левой части записанного равенства определение операции [ ], получим

$$\varepsilon_j\varepsilon_{-j}\varepsilon_j = \varepsilon_j,\ \varepsilon_{-j}\varepsilon_j\varepsilon_{-j} = \varepsilon_{-j},\ j = 0\ 1, 2, \ldots \qquad (2.1.3)$$

Если $\varepsilon_j = 0$, то из второго равенства в (2.1.3) следует $\varepsilon_{-j} = 0$. Аналогично, если $\varepsilon_{-j} = 0$, то из первого равенства в (2.1.3) следует $\varepsilon_j = 0$.

Если $\varepsilon_j \neq 0$, то из первого равенства в (2.1.3) следует $\varepsilon_j\varepsilon_{-j} = 1$, откуда получаем $\varepsilon_{-j} \neq 0$. Если же $\varepsilon_{-j} \neq 0$, то из второго равенства в (2.1.3) также следует $\varepsilon_j\varepsilon_{-j} = 1$, откуда $\varepsilon_j \neq 0$.

Таким образом, для любого $j = 0\ 1, 2, \ldots$ элементы ε_j и ε_{-j} либо оба равны нулю, либо оба не равны нулю, а их произведение в этом случае равно единице:

$$\varepsilon_j = 0,\ \varepsilon_{-j} = 0 \text{ или } \varepsilon_j \neq 0,\ \varepsilon_{-j} \neq 0,\ \varepsilon_j\varepsilon_{-j} = 1,\ j = 0\ 1, 2, \ldots. \qquad (2.1.4)$$

Обратно, если все компоненты элемента (2.1.2) удовлетворяют условию (2.1.4), то этот элемент является мультипликативным идемпотентом в $< R^Z, +, [\ ] >$.

Таким образом, элемент (2.1.2) является мультипликативным идемпотентом в $< R^Z, +, [\ ] >$ тогда и только тогда, когда его компоненты удовлетворяют условию (2.1.4).

Если в (2.1.4) положить $j = 0$, то получим $\varepsilon_0 = 0$ или $\varepsilon_0^2 = 1$, то есть в идемпотенте (2.1.2) компонента ε_0 может принимать только значения 0, 1 или – 1.

Мультипликативными идемпотентами в $< R^Z, +, [\ ] >$ являются, например, следующие элементы

$$(\ldots, 0, \frac{1}{m}, \ldots, 0, \frac{1}{2}\ 0, 1, \varepsilon_0 = 0, 1, 0, 2, 0, \ldots, m, 0, \ldots),$$

$$(\ldots, \frac{1}{2^m}, 0, \ldots, \frac{1}{2}, 0\ 1, 0, \varepsilon_0 = 1, 0, 1, 0, 2, \ldots, 0, 2^m, \ldots).$$

9) Если

$$\mathbf{a} = (\ldots, a_{-j}, \ldots, a_0, \ldots, a_j, \ldots),$$

$$\mathbf{b} = (\ldots, b_{-j}, \ldots, b_0, \ldots, b_j, \ldots),$$

$$\mathbf{c} = (\ldots, c_{-j}, \ldots, c_0, \ldots, c_j, \ldots),$$

$$\mathbf{d} = (\ldots, d_{-j}, \ldots, d_0, \ldots, d_j, \ldots)$$

– произвольные элементы из R^{Z}, у которых все компоненты отличны от нуля, то элементы

$$\mathbf{x} = (\ldots, x_{-j} = b_j^{-1} c_{-j}^{-1} d_{-j}, \ldots, x_0 = b_0^{-1} c_0^{-1} d_0, \ldots, x_j = b_{-j}^{-1} c_j^{-1} d_j, \ldots),$$

$$\mathbf{y} = (\ldots, y_{-j} = a_j^{-1} c_j^{-1} d_j, \ldots, y_0 = a_0^{-1} c_0^{-1} d_0, \ldots, y_j = a_{-j}^{-1} c_{-j}^{-1} d_{-j}, \ldots),$$

$$\mathbf{z} = (\ldots, z_{-j} = a_{-j}^{-1} b_j^{-1} d_{-j}, \ldots, z_0 = a_0^{-1} b_0^{-1} d_0, \ldots, z_j = a_j^{-1} b_{-j}^{-1} d_j, \ldots)$$

являются единственными решениями уравнений

$$[\mathbf{xbc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{ayc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{abz}] = \mathbf{d}.$$

Следовательно, $< (\mathrm{R} \setminus \{0\})^{\mathrm{Z}}, [\ ] >$ – тернарная группа.

Пункты 1) – 9) из примера 2.1.1 позволяют сформулировать следующее

Предложение 2.1.1. *Определим на линейной алгебре* R^{Z} *над полем действительных чисел* R *тернарную операцию* (2.1.1). *Тогда универсальная алгебра* $< \mathrm{R}^{\mathrm{Z}}, +, [\ ] >$ *является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над* R, *в которой все элементы являются делителями нуля, в ней нет единиц, а элемент* (2.1.2) *является ее мультипликативным идемпотентом тогда и только тогда, когда его компоненты удовлетворяют условию* (2.1.4). *Кроме того,* $< (\mathrm{R} \setminus \{0\})^{\mathrm{Z}}, [\ ] >$ *– тернарная группа.*

Пример 2.1.2. Определим на множестве $\mathrm{R}^{[-1;\,1]}$ всех действительнозначных функций, определенных на отрезке [–1; 1], тернарную операцию

$$[\mathbf{fgh}](t) = \mathbf{f}(t)\mathbf{g}(-t)\mathbf{h}(t),\ t \in [-1; 1].$$

Так же, как и в примере 2.1.1, устанавливается, что *универсальная алгебра* $< \mathrm{R}^{[-1;\,1]}, +, [\ ] >$ *является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над* R, *в которой все элементы являются делителями нуля, в ней нет единиц*.

Примеры 2.1.1 и 2.1.2, как и предложение 2.1.1 (кроме утверждений о множестве идемпотентов) являются частными случаями следующего предложения.

Предложение 2.1.2. *Пусть G – группа, J – любое её подмножество, содержащее вместе со всяким элементом j его обратный* j^{-1}, σ *– сужение автоморфизма* $g \to g^{-1}$ *группы G на J, A – ассоциативная, коммутативная, линейная алгебра с единицей над полем P. Тогда универсальная алгебра* $< A^J, +, [\ ] >$ *является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над P с тернарной операцией*

$$[\mathbf{xyz}](j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j^{-1})\mathbf{z}(j),\ j \in J.$$

В этой тернарной алгебре все элементы являются делителями нуля, в ней нет единиц.

Предложение 2.1.1 получается из предложения 2.1.2, если считать в нем *J* подгруппой всех целых чисел аддитивной группы всех действительных чисел, а алгебру *A* – алгеброй всех действительных чисел. Если отрезок [–1; 1] рассматривать как подмножество аддитивной группы всех действительных чисел, а алгебру *A* – считать алгеброй всех действительных чисел, то получим пример 2.1.2.

Справедливо также следующее

Предложение 2.1.3. *Пусть J – любое подмножество множества всех комплексных чисел, содержащее вместе со всяким элементом j его сопряженный* $\bar{j}$, σ: $j \to \bar{j}$ *– отображение J на себя, A – ассоциативная, коммутативная, линейная алгебра с единицей над полем P. Тогда универсальная алгебра* $< A^J, +, [\ ] >$ *является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над P с тернарной операцией*

$$[\mathbf{xyz}](j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\bar{j})\mathbf{z}(j),\ j \in J.$$

В этой тернарной алгебре все элементы являются делителями нуля, в ней нет единиц.

Замечание 2.1.1. В качестве множества J в предложении 2.1.3 можно взять, например, множество

$$J = (\ldots, -2i, -i, 0, i, 2i, \ldots).$$

В результате получится утверждение, которое может быть получено и как следствие предложения 2.1.2, если считать в нем G аддитивной группой всех комплексных чисел, а множество J таким же, как и выше.

Пример 2.1.3. Определим на множестве

$$\mathrm{R}^{\mathrm{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots) \mid x_j \in \mathrm{R}\}$$

тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2, \ldots, x_j y_{\sigma(j)} z_j, \ldots),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots),\ \mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots),$$

σ – подстановка множества N, переводящее нечётное число в следующее за ним число, а чётное число – в предшествующее ему число, то есть $\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$. Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что *универсальная алгебра* $< \mathrm{R}^{\mathrm{N}}\ +, [\ ] >$ *является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над* R, *в которой все элементы являются делителями нуля, в ней нет единиц.*

Все предыдущие примеры и предложения обобщаются следующей теоремой, которая, в свою очередь, является частным случаем теоремы, которая будет доказана в разделе 2.11.

Теорема 2.1.1. *Пусть J – произвольное множество, σ – такая биекция J на себя, что σ^2 – тождественная подстановка, A – ассоциативная, коммутативная, линейная алгебра с единицей над полем P. Тогда универсальная алгебра $< A^J, +, [\ ] >$ является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй с тернарной операцией*

$$[\mathbf{xyz}](j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j))\mathbf{z}(j),\ j \in J.$$

В этой тернарной алгебре все элементы являются делителями *нуля, в ней нет единиц.*

Замечание 2.1.2. Укажем явный вид отображения σ для всех рассмотренных выше примеров и предложений:

в примере 2.1.1 и предложении 2.1.1 $\sigma(j) = -j,\ j \in J = \mathrm{Z}$;

в примере 2.1.2 $\sigma(j) = -j,\ j \in J = [-1;\ 1]$;

в предложении 2.1.2 $\sigma(j) = j^{-1},\ j \in J \subseteq G$;

в предложении 2.1.3 $\sigma(j) = \bar{j},\ j \in J \subseteq \mathrm{C}$;

в примере 2.1.3 $\sigma(j) = j + (-1)^{j+1},\ j \in J = \mathrm{N}$.

В каждом из указанных пяти случаев квадрат подстановки σ является тождественной подстановкой.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИИ $[\ ]_{l,\,s,\,J}$

Определение. 2.2.1. Пусть A – группоид, $l \geq 2$, J – произвольное множество, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$. Определим на A^J вначале бинарную операцию $\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)),\ j \in J, \tag{2.2.1}$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{2.2.2}$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\,\sigma,\,J}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Замечание 2.2.1. Если $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, то операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J} = [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ определены на k-ой декартовой степени A^k [10]. При этом (2.2.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1y_{\sigma(1)},\ x_2y_{\sigma(2)},\ \ldots,\ x_ky_{\sigma(k)}),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Легко заметить, что если $\sigma = (12 \dots k) \in \mathbf{S}_k$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \dots, x_{k-1}y_k, x_ky_1)$$

из [9, Определение 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения.

Теорема 2.2.1. *Пусть* A *– группоид,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l \in A^J$, $\sigma \in \mathbf{S}_J$. *Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J}(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma(j))(\dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j))) \dots)),\ j \in J.$$

Доказательство. Полагая

$$\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l = \mathbf{y}_{l-1},\ \mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l) = \mathbf{y}_{l-2},\ \dots$$

$$\dots,\ \mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots) = \mathbf{y}_2,$$

и, используя (2.2.1) и (2.2.2), получим

$$\mathbf{y}_{l-1}(j) = \mathbf{x}_{l-1}(j)\mathbf{x}_l(\sigma(j)),$$

$$\mathbf{y}_{l-2}(j) = \mathbf{x}_{l-2}(j)\mathbf{y}_{l-1}(\sigma(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma(j))\mathbf{x}_l(\sigma(\sigma(j)))) = \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma(j))\mathbf{x}_l(\sigma^2(j))),$$

……………………………………………………………..

$$\mathbf{y}_2(j) = \mathbf{x}_2(j)\mathbf{y}_3(\sigma(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma(j)) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-4}(\sigma(j)))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))) \dots) =$$

$$= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma(j)) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-2}(j))) \dots),$$

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma(j))(\mathbf{x}_3(\sigma(\sigma(j))) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-2}(\sigma(j)))) \dots)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma(j))(\mathbf{x}_3(\sigma^2(j)) \ldots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)),$$

то есть верно доказываемое равенство. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.2.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.2.1. *Пусть A – группоид, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$,*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\mathbf{K}(x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)})\mathbf{K})), j = 1, 2, \ldots, k.$$

Полагая в теореме 2.2.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.2.2. *Пусть A – группоид, $l \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_{\mathrm{N}}$,*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}, i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, \mathrm{N}} = (y_1, y_2, \ldots),$$

где

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\mathbf{K}(x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)})\mathbf{K})), j \in \mathrm{N}.$$

Полагая в теореме 2.2.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.2.3. *Пусть A – группоид, $l \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$,*

$$\mathbf{x}_i = (\ldots, x_{i(-2)}, x_{i(-1)}, x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots) \in A^{\mathrm{Z}}, i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, \mathrm{Z}} = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots),$$

где

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\mathbf{K}(x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)})\mathbf{K})),\ j \in \mathrm{Z}.$$

Случай полугруппы. Заменяя в теореме 2.2.1 и следствиях 2.2.1 – 2.2.3 группоид полугруппой, получим еще четыре следствия.

Следствие 2.2.4. *Пусть* A *– полугруппа,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$, $\sigma \in \mathbf{S}_J$. *Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J.$$

Следствие 2.2.5 [9]. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Следствие 2.2.6. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_{\mathrm{N}}$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots) \in A^{\mathrm{N}},\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = (y_1, y_2, \ldots),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j \in \mathrm{N}.$$

Следствие 2.2.7. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$,

$$\mathbf{x}_i = (\ldots, x_{i(-2)}, x_{i(-1)}, x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots) \in A^{\mathrm{Z}},\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}} = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j \in \mathrm{Z}.$$

Случай подстановки порядка *k*. Среди всех l-арных операций вида $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ особое место занимает l-арная операция $[\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,J}$, где σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$ порядка k. Важное значение этой операций объясняется тем, что, как будет установлено в разделе 2.5, она является ассоциативной.

Следствие 2.2.8. *Пусть A – полугруппа,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{sk+1} \in A^J$, *σ – подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *порядка* k, $s \geq 1$. *Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{sk+1}]_{sk+1,\,\sigma,\,J}(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_k(\sigma^{k-1}(j))$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(j)\mathbf{x}_{k+2}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{2k}(\sigma^{k-1}(j)) \ldots$$

$$\ldots \mathbf{x}_{(s-1)k+1}(j)\mathbf{x}_{(s-1)k+2}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{sk}(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{x}_{sk+1}(j), j \in J.$$

Доказательство. Согласно следствию 2.2.4,

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{sk+1}]_{sk+1,\,\sigma,\,J}(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{sk}(\sigma^{sk-1}(j))\mathbf{x}_{sk+1}(\sigma^{sk}(j)).$$

А так как $\sigma^{tk}(j) = j$ для любого $t = 1, \ldots, s$, то из предыдущего равенства следует равенство из условия следствия. Следствие доказано.

Полагая в следствии 2.2.8 $s = 1$, получим

Следствие 2.2.9. *Пусть A – полугруппа,* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k+1} \in A^J$, *σ – подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *порядка* k. *Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_k(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{x}_{k+1}(j), j \in J.$$

Полагая в следствии 2.2.8 $\sigma = (j_1\, j_2\, \ldots\, j_k)$ – цикл длины k из $\mathbf{S}_J$, получим

Следствие 2.2.10. *Пусть A – полугруппа, $\sigma = (j_1\, j_2\, \ldots\, j_k)$ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, $s \geq 1$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{sk+1} \in A^J$. Тогда*:

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{sk+1}]_{sk+1,\, \sigma,\, J}(j_r) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j_r)\mathbf{x}_2(j_{r+1}) \ldots \mathbf{x}_{k+1-r}(j_k)\mathbf{x}_{k+2-r}(j_1) \ldots \mathbf{x}_k(j_{r-1})$$

$$\mathbf{x}_{k+1}(j_r)\mathbf{x}_{k+2}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{x}_{2k+1-r}(j_k)\mathbf{x}_{2k+2-r}(j_1) \ldots \mathbf{x}_{2k}(j_{r-1})$$

$$\mathbf{x}_{(s-1)k+1}(j_r)\mathbf{x}_{(s-1)k+2}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{x}_{(s-1)k+1-r}(j_k)\mathbf{x}_{(s-1)k+2-r}(j_1) \ldots \mathbf{x}_{sk}(j_{r-1})\mathbf{x}_{sk+1}(j_r)$$

для любого $r = 1, 2, \ldots, k$;

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{sk+1}]_{sk+1,\, \sigma,\, J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(j) \ldots \mathbf{x}_{sk+1}(j)$$

для любого $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$.

Полагая в следствии 2.2.10 $s = 1$, получим

Следствие 2.2.11. *Пусть A – полугруппа, $\sigma = (j_1\, j_2\, \ldots\, j_k)$ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k+1} \in A^J$. Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\, \sigma,\, J}(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j_r)\mathbf{x}_2(j_{r+1}) \ldots \mathbf{x}_{k+1-r}(j_k)\mathbf{x}_{k+2-r}(j_1) \ldots \mathbf{x}_k(j_{r-1})\mathbf{x}_{k+1}(j_r)$$

для любого $r = 1, 2, \ldots, k$;

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\, \sigma,\, J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(j) \ldots \mathbf{x}_{k+1}(j)$$

для любого $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$.

Полагая в следствии 2.2.10 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k$, получим

Следствие 2.2.12. *Пусть A – полугруппа,* $\sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k$, $s \geq 1$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, sk + 1.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{sk+1}]_{sk+1,\,\sigma,\,J} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2(j+1)} \ldots x_{(k+1-j)k}x_{(k+2-j)1} \ldots x_{k(j-1)}$$

$$x_{(k+1)j}x_{(k+2)(j+1)} \ldots x_{(2k+1-j)k}x_{(2k+2-j)1} \ldots x_{2k(j-1)}$$

$$x_{((s-1)k+1)j}x_{((s-1)k+2)(j+1)} \ldots x_{((s-1)k+1-j)k}x_{((s-1)k+2-j)1} \ldots x_{sk(j-1)}x_{(sk+1)j}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Полагая в следствии 2.2.12 $s = 1$, получим

Следствие 2.2.13. *Пусть* A *– полугруппа,* $\sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, k + 1.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1,\,\sigma,\,J} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2(j+1)} \ldots x_{(k+1-j)k}x_{(k+2-j)1} \ldots x_{k(j-1)}x_{(k+1)j}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Случай тождественной подстановки. Напомним, что, если A – группоид (полугруппа), то A^J – группоид (полугруппа) с операцией

$$\mathbf{xy}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J,$$

которая определяется поточечно с помощью операции группоида (полугруппы) A.

Следующее предложение является следствием определения 2.2.1 и тождественности подстановки ε.

Предложение 2.2.1. *Пусть* ε *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$*. Тогда*:

1) *если* A *– группоид, то*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_2(\ldots (\mathbf{x}_{l-2}(\mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l)) \ldots));$$

2) *если* A *– полугруппа, то*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l.$$

Таким образом, согласно предложению 2.2.1, если ε – тождественная подстановка, то l-арная операция $[\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}$ является производной от бинарной операции группоида (полугруппы) A^J.

2.3. НЕАБЕЛЕВОСТЬ < A^J, $[\ ]_{l,\,s,\,J}$ >. ЦЕНТРЫ

Многие утверждения из [2 – 10] об операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, определённой на множестве A^k, могут быть обобщены на случай операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$, определённой на множестве A^J. Например, следующие две леммы, являющиеся следствиями определения 2.2.1, обобщают соответственно леммы 4 и 5 из [10], которые, в свою очередь, обобщают соответственно леммы 2.2.4 и 2.2.5 из [9].

Лемма 2.3.1. *Пусть* A *– группоид,* $m \in \{1, \ldots, l-2\}$, $\sigma \in \mathbf{S}_J$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$*. Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m[\mathbf{x}_{m+1} \ldots \mathbf{x}_l]_{l-m,\,\sigma,\,J}]_{m+1,\,\sigma,\,J},$$

в частности,

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l-1,\,\sigma,\,J},$$

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{l-2}(\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)]_{l-1,\,\sigma,\,J}.$$

Лемма 2.3.2. *Пусть* A *– группоид, содержащий единицу* 1, $m \in \{1, \ldots, l-1\}$, $\sigma \in \mathbf{S}_J$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, $\mathbf{e} \in A^J$, *где* $\mathbf{e}(j) = 1$ для любого $j \in J$*. Тогда*:

$$[\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{e};$$

$$[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-m}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_m]_{m,\sigma,J}.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *группоид A содержит единицу* 1 *и элемент* a, *отличный от неё. Тогда* l*-арный группоид* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *неабелев.*

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Положив $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{a}(j) = a$, $\mathbf{a}(s) = 1$ для любого $s \neq j$, $s \in J$, и, применив лемму 2.3.2, получим

$$[\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{a},$$

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{ea}]_{2,\sigma,J} = \mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a},$$

откуда

$$[\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{a}(j) = a,$$

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{e}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} \neq [\mathbf{e}\,\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\sigma,J},$$

то есть l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ не является абелевым. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.3.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.3.1 [10]. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$*, группоид* A *содержит единицу и элемент* a*, отличный от неё. Тогда* l*-арный группоид* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *неабелев.*

Если в следствии 2.3.1 положить $\sigma = (12 \ldots k)$, то получим предложение 2.8.1 [9].

Если в следствии 2.3.1 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.5.1 [9].

Полагая в теореме 2.3.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.3.2. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$*, группоид* A *содержит единицу и элемент* a*, отличный от неё. Тогда* l*-арный группоид* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$ *неабелев.*

Полагая в теореме 2.3.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.3.3. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$*, группоид* A *содержит единицу и элемент* a*, отличный от неё. Тогда* l*-арный группоид* $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}} >$ *неабелев.*

Утверждение теоремы 2.3.1 можно усилить, если потребовать, чтобы в группоиде A выполнялась сократимость слева (справа).

Определим для l-арного группоида $< A, [\ ] >$ шесть аналогов центра группоида: *левый центр*

$$\mathbf{Z}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zxy_1 \ldots y_{l-2}] = [xzy_1 \ldots y_{l-2}],\ \forall x, y_i \in A\};$$

малый левый центр

$$\mathbf{KZ}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zx\underbrace{y \ldots y}_{l-2}] = [xz\underbrace{y \ldots y}_{l-2}],\ \forall x, y \in A\};$$

большой левый центр

$$\mathbf{GZ}_L(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{x \ldots x}_{l-1}] = [xz\underbrace{x \ldots x}_{l-2}],\ \forall x \in A\};$$

правый центр

$$\mathbf{Z}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [y_1 \ldots y_{l-2}xz] = [y_1 \ldots y_{l-2}zx],\ \forall x, y_i \in A\};$$

малый правый центр

$$\mathbf{KZ}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{y \ldots y}_{l-2} xz] = [\underbrace{y \ldots y}_{l-2} zx],\ \forall x, y \in A\};$$

большой правый центр

$$\mathbf{GZ}_R(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{x \ldots x}_{l-1} z] = [\underbrace{x \ldots x}_{l-2} zx],\ \forall x \in A\}.$$

При $l = 2$ все шесть аналогов совпадают с центром $\mathbf{Z}(A)$ группоида A.

Ясно, что

$$\mathbf{Z}_L(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{GZ}_L(A, [\ ]),$$

$$\mathbf{Z}_R(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{GZ}_R(A, [\ ]).$$

В случаях, когда не возникает разночтений, символ [ ] l-арной операции в обозначениях всех шести аналогов указывать не будем, то есть полагаем

$$\mathbf{Z}_L(A, [\ ]) = \mathbf{Z}_L(A),\ \mathbf{KZ}_L(A, [\ ]) = \mathbf{KZ}_L(A),\ \mathbf{GZ}_L(A, [\ ]) = \mathbf{GZ}_L(A),$$

$$\mathbf{Z}_R(A, [\ ]) = \mathbf{Z}_R(A),\ \mathbf{KZ}_R(A, [\ ]) = \mathbf{KZ}_R(A),\ \mathbf{GZ}_R(A, [\ ]) = \mathbf{GZ}_R(A).$$

Для l-арной группы $< A, [\ ] >$ все шесть аналогов совпадают с ее центром $\mathbf{Z}(A, [\ ]) = \mathbf{Z}(A)$.

Представляет интерес следующая

Лемма 2.3.3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J});$$

2) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J});$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Доказательство. 1) Выше отмечалось, что имеют место включения

$$\mathbf{Z}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{GZ}_L(A^J).$$

Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_L(A^J)$, то есть

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}$$

для любого $\mathbf{x} \in A^J$. Тогда

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{x}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j)$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.2.4

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)).$$

Используя сокращение справа в полугруппе A, из последнего равенства получим

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j)). \qquad (2.3.1)$$

Если $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}$ – произвольные элементы из A^J, то из (2.3.1) следует

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{y}_1(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{y}_1(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J,$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{y}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{y}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J,$$

откуда, согласно следствию 2.2.4

$$[\mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{x}\mathbf{z}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

$$[\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}\,(j) = [\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}\,(j),$$

то есть

$$[\mathbf{zxy}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{xzy}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

$$[\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}\,.$$

Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_L(A^J)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_L(A^J)$, откуда

$$\mathbf{GZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{Z}_L(A^J),\ \mathbf{GZ}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J).$$

Учитывая приведенные выше включения, получаем

$$\mathbf{GZ}_L(A^J) = \mathbf{Z}_L(A^J),\ \mathbf{GZ}_L(A^J) = \mathbf{KZ}_L(A^J).$$

2) Выше отмечалось, что имеют место включения

$$\mathbf{Z}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{GZ}_R(A^J).$$

Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_R(A^J)$, то есть

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J}$$

для любого $\mathbf{x} \in A^J$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J}(j)$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.2.4

$$\mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)).$$

Используя сокращение слева в полугруппе A, из последнего равенства получим

$$\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)). \qquad (2.3.2)$$

Если $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}$ – произвольные элементы из A^J, то из (2.3.2) следует

$$\mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J,$$

$$\mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J,$$

откуда, согласно следствию 2.2.4

$$[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

$$[\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

то есть

$$[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

$$[\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\,\sigma,\,J}.$$

Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_R(A^J)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_R(A^J)$, откуда

$$\mathbf{GZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{Z}_R(A^J),\ \mathbf{GZ}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A^J).$$

Учитывая приведенные выше включения, получаем

$$\mathbf{GZ}_R(A^J) = \mathbf{Z}_R(A^J),\ \mathbf{GZ}_R(A^J) = \mathbf{KZ}_R(A^J).$$

3) Следует из 1) и 2). Лемма доказана.

Теорема 2.3.2. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если* A *– полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Зафиксируем элемент $a \in A$, отличный от единицы 1 полугруппы A.

1) Если $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_L(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{x}(j) = 1$, $\mathbf{x}(\sigma(j)) = a$. Тогда

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{ez}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

$$[\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

в частности,

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{ez}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

$$[\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

откуда

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{e}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(j)).$$

Из этих равенств, учитывая определение функций $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$, получаем

$$\mathbf{z}(j)\underbrace{1\ldots1}_{l-1} = 1\mathbf{z}(\sigma(j))\underbrace{1\ldots1}_{l-2},$$

$$\mathbf{z}(j)a\underbrace{1\ldots1}_{l-2} = 1\mathbf{z}(\sigma(j))\underbrace{1\ldots1}_{l-2},$$

то есть

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(\sigma(j)),\ \mathbf{z}(j)a = \mathbf{z}(\sigma(j)),$$

откуда $\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(j)a$. Так как A – полугруппа с левым сокращением, то $a = 1$, что невозможно, ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{KZ}_L(A^J) = \varnothing$.

Так как $\mathbf{Z}_L(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_L(A^J)$, то $\mathbf{Z}_L(A^J) = \varnothing$.

2) Если $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_R(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{x}(j) = a$, $\mathbf{x}(\sigma(j)) = 1$. Положим также $t = (\sigma^{-1})^{l-2}(j)$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{ze}]_{l,\sigma,J},$$

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\sigma,J},$$

в частности,

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{ze}]_{l,\sigma,J}(t),$$

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{xz}]_{l,\sigma,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{zx}]_{l,\sigma,J}(t),$$

откуда

$$\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{e}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) =$$

$$= \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{e}(\sigma^{l-1}(t)),$$

$$\mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) =$$

$$= \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{e}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)).$$

Из этих равенств, учитывая определение функций **e** и **x**, получаем

$$\underbrace{1\ldots1}_{l-1}\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \underbrace{1\ldots1}_{l-2}\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))1,$$

$$\underbrace{1\ldots1}_{l-2}\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \underbrace{1\ldots1}_{l-2}\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)),$$

то есть

$$\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)), \tag{2.3.3}$$

$$\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)). \tag{2.3.4}$$

Из (2.3.4), учитывая равенства

$$\mathbf{x}(j) = a,\ \mathbf{x}(\sigma(j)) = 1,\ t = (\sigma^{-1})^{l-2}(j),$$

последовательно получаем

$$\mathbf{x}(\sigma^{l-2}((\sigma^{-1})^{l-2}(j)))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}((\sigma^{-1})^{l-2}(j))),$$

$$\mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma(j)),$$

$$a\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)).$$

В последнем равенстве и в (2.3.3) правые части равны, поэтому равны и левые части:

$$a\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)).$$

Так как A – полугруппа с правым сокращением, то $a = 1$, что невозможно ввиду, выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{KZ}_R(A^J) = \varnothing$.

Так как $\mathbf{Z}_R(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_R(A)$, то $\mathbf{Z}_R(A^J) = \varnothing$.

3) Следует из доказанных выше утверждений 1) и 2) и утверждения 3) леммы 2.3.3. Теорема доказана.

Замечание 2.3.1. Легко проверяется, что если ε – тождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, полугруппа A содержит единицу, то

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \mathbf{Z}(A^J),$$

где $\mathbf{Z}(A^J)$ – центр группоида A^J, с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

В частности, если полугруппа A коммутативна, то

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = A^J.$$

Полагая в теореме 2.3.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.3.4. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если* A *– полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \varnothing;$$

2) *если* A *– полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \varnothing;$$

3) *если* A *– полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{GZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{GZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k}) = \varnothing.$$

Полагая в теореме 2.3.2 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.3.5. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если* A *– полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \varnothing;$$

2) *если* A *– полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}) = \varnothing.$$

Полагая в теореме 2.3.2 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.3.6. *Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}) = \varnothing.$$

Считая в теореме 2.3.2 и следствиях из нее A группой, получим еще четыре утверждения.

Теорема 2.3.3. *Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, группа A содержит более одного элемента. Тогда*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Полагая в теореме 2.3.3 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.3.7. *Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$, группа A содержит более одного элемента. Тогда*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{GZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{GZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \varnothing.$$

Полагая в теореме 2.3.3 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.3.8. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, *группа* A *содержит более одного элемента. Тогда*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \varnothing.$$

Полагая в теореме 2.3.3 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.3.9. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, *группа* A *содержит более одного элемента. Тогда*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) =$$

$$= \mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \varnothing.$$

Покажем, что если в условии теоремы 2.3.2 в качестве нетождественной подстановки σ взять цикл длины $l - 1 \geq 2$, то в утверждениях 1) и 2 этой теоремы пустота малых центров $\mathbf{KZ}_L(A)$ и $\mathbf{KZ}_R(A)$ распространяется соответственно на большие центры $\mathbf{GZ}_L(A)$ и $\mathbf{G}_R(A)$.

Теорема 2.3.4. *Пусть* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если* A *– полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing;$$

2) *если* A *– полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing;$$

3) *если* A *– полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Доказательство. Зафиксируем $j \in J$ и элемент $a \in A$, отличный от единицы 1 полугруппы A. Так как σ – цикл, длина которого больше 2, то $\sigma(j) \neq j$.

1) Ввиду теоремы 2.3.2 достаточно доказать равенство

$$\mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Если $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_L(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$,

$$\mathbf{x}(\sigma(j)) = a,\ \mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \ldots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = 1.$$

Такое определение функции $\mathbf{x}$ возможно, так как все значения

$$j,\ \sigma(j),\ \sigma^2(j),\ \ldots,\ \sigma^{l-2}(j)$$

различны и, кроме того, $\sigma^{l-1}(j) = j$. Тогда

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{e}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

в частности,

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{e}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),$$

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{x}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j).$$

Из этих равенств, учитывая определение функций $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}$, получаем

$$\mathbf{z}(j)\underbrace{1\ldots1}_{l-1} = 1\mathbf{z}(\sigma(j))\underbrace{1\ldots1}_{l-2},$$

$$\mathbf{z}(j)a\underbrace{1\ldots1}_{l-2} = 1\mathbf{z}(\sigma(j))\underbrace{1\ldots1}_{l-2},$$

то есть

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(\sigma(j)),\ \mathbf{z}(j)a = \mathbf{z}(\sigma(j)),$$

откуда $\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(j)a$. Так как A – полугруппа с левым сокращением, то $a = 1$, что невозможно, ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{GZ}_L(A^J) = \varnothing$.

2) Ввиду теоремы 2.3.2 достаточно доказать равенство

$$\mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Если $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_R(A^J)$, то положим $t = \sigma(j)$ и определим функции $\mathbf{e}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$,

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = a,\ \mathbf{x}(\sigma(j)) = \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \ldots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{z}\mathbf{e}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}\mathbf{z}\mathbf{x}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

в частности,

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{z}\mathbf{e}]_{l,\,\sigma,\,J}(t),$$

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-2}\mathbf{z}\mathbf{x}]_{l,\,\sigma,\,J}(t),$$

Из этих равенств, учитывая определение функции $\mathbf{e}$, равенство $t = \sigma(j)$, а также тождественность подстановки σ^{l-1}, получаем вначале

$$\underbrace{1\ldots1}_{l-1}\mathbf{z}(t) = \underbrace{1\ldots1}_{l-2}\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))1,$$

$$\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(t)) =$$

$$= \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(\sigma(t))\ \ldots\ \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(t))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)),$$

а затем

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)), \qquad (2.3.5)$$

$$\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma(\sigma(j))) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))\mathbf{x}(\sigma^{l-2}(\sigma(j)))\mathbf{z}(t) =$$

$$= \mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma(\sigma(j))) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-3}(\sigma(j)))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(t).$$

Последнее равенство принимает вид

$$\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(j)\mathbf{z}(t) =$$

$$= \mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j))\mathbf{x}(\sigma^3(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t))\mathbf{x}(\sigma(j)),$$

откуда, учитывая определение функции $\mathbf{x}$, получаем

$$a\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\sigma^{l-2}(t)).$$

В последнем равенстве и в (2.3.5) правые части равны, поэтому равны и левые части:

$$a\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t).$$

Так как A – полугруппа с правым сокращением, то $a = 1$, что невозможно, ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{GZ}_R(A^J) = \varnothing$.

3) Следует как из утверждения 3) теоремы 2.3.2, так и из доказанных выше утверждений 1) и 2) данной теоремы. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.3.4 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.3.10. *Пусть* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, *полугруппа* A *содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если* A *– полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{GZ}_L(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \varnothing;$$

2) *если* A *– полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \mathbf{GZ}_R(A^k, [\ ]_{l,\sigma,k}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Если в следствии 2.3.10 положить $l = k + 1$, то получится

Следствие 2.3.11. *Пусть* σ *– цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, *полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{GZ}_L(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \mathbf{GZ}_R(A^k, [\ ]_{k+1, \sigma, k}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Полагая в следствии 2.3.11 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 2.3.12. *Пусть* $\sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k$, *полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) = \mathbf{KZ}_L(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) =$$
$$= \mathbf{GZ}_L(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) = \mathbf{KZ}_R(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) =$$
$$= \mathbf{GZ}_R(A^k, [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Полагая в теореме 2.3.4 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.3.13. *Пусть* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, *полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Полагая в теореме 2.3.4 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.3.14. *Пусть* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, *полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_L(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{KZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \mathbf{GZ}_R(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}) = \varnothing;$$

3) *если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Считая в теореме 2.3.4 σ транспозицией, получим

Следствие 2.3.15. *Пусть* $\sigma = (ij)$ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_J$, *полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*:

1) *если A – полугруппа с левым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{3,(ij),J}) = \mathbf{KZ}_L(A^J, [\ ]_{3,(ij),J}) = \mathbf{GZ}_L(A^J, [\ ]_{3,(ij),J}) = \varnothing;$$

2) *если A – полугруппа с правым сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{3,\,(ij),\,J}) = \mathbf{KZ}_R(A^J, [\ ]_{3,\,(ij),\,J}) = \mathbf{GZ}_R(A^J, [\ ]_{3,\,(ij),\,J}) = \varnothing;$$

3) *если* A *– полугруппа с двусторонним сокращением*, *то верны все равенства из* 1) *и* 2).

Левые и правые центры одного и того же вида можно объединить общим понятием.

Для l-арного группоида $< A, [\ ] >$ и любого $i = 1, \ldots, l - 1$ определим: ***i*-ый центр**

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [y_1 \ldots y_{i-1} z x y_i \ldots y_{l-2}] =$$

$$= [y_1 \ldots y_{i-1} x z y_i \ldots y_{l-2}],\ \forall x, y_i \in A\};$$

малый ***i*-ый центр**

$$\mathbf{KZ}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{y \ldots y}_{i-1} z x \underbrace{y \ldots y}_{l-i-1}] =$$

$$= [\underbrace{y \ldots y}_{i-1} x z \underbrace{y \ldots y}_{l-i-1}],\ \forall x, y \in A\};$$

большой ***i*-ый центр**

$$\mathbf{GZ}_i(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [\underbrace{x \ldots x}_{i-1} z \underbrace{x \ldots x}_{l-i}] =$$

$$= [\underbrace{x \ldots x}_{i} z \underbrace{x \ldots x}_{l-i-1}],\ \forall x \in A\}.$$

Для для любого $i = 1, \ldots, l - 1$ имеют место включения

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{KZ}_i(A, [\ ]) \subseteq \mathbf{GZ}_i(A, [\ ]).$$

Ясно, что

$$\mathbf{Z}_1(A, [\ ]) = \mathbf{Z}_L(A, [\ ]),\ \mathbf{Z}_{l-1}(A, [\ ]) = \mathbf{Z}_R(A, [\ ]),$$

$$\mathbf{KZ}_1(A, [\ ]) = \mathbf{KZ}_L(A, [\ ]),\ \mathbf{KZ}_{l-1}(A, [\ ]) = \mathbf{KZ}_R(A, [\ ]),$$

$$\mathbf{GZ}_1(A, [\ ]) = \mathbf{GZ}_L(A, [\ ]),\ \mathbf{GZ}_{l-1}(A, [\ ]) = \mathbf{GZ}_R(A, [\ ]),$$

то есть 1-ые центры совпадают с левыми центрами, а $(l-1)$-ые центры – с правыми центрами.

Следующая лемма обобщает утверждение 3) леммы 2.3.3.

Лемма 2.3.4. *Если A – полугруппа с двусторонним сокращением, то*

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J})$$

для любого $i = 1, \ldots, l-1$.

Доказательство. Случаи $i = 1$ и $i = l-1$ содержатся в утверждении 3) леммы 2.3.3.

Пусть $i \in \{2, \ldots, l-2\}$ и предположим, что $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_i(A^J)$, то есть

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}$$

для любого $\mathbf{x} \in A^J$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i}]_{l,\sigma,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}(j)$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.2.4

$$\mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)).$$

Используя двустороннее сокращение в полугруппе A, из последнего равенства получим

$$\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i}(j)) = \mathbf{x}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i}(j)). \qquad (2.3.6)$$

Если $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}$ – произвольные элементы из A^J, то из (2.3.6) следует

$$\mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i}(j))\mathbf{y}_i(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{y}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i}(j))\mathbf{y}_i(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i}(j))\mathbf{y}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{y}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{z}(\sigma^{i}(j))\mathbf{y}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{y}(\sigma^{l-1}(j))$$

для любого $j \in J$, откуда, согласно следствию 2.2.4

$$[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{i-1}\mathbf{zx}\mathbf{y}_i \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\sigma,J}(j) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{i-1}\mathbf{xz}\mathbf{y}_i \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\sigma,J}(j),$$

$$[\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{i-1}\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{i-1}\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}(j),$$

то есть

$$[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{i-1}\mathbf{zx}\mathbf{y}_i \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{i-1}\mathbf{xz}\mathbf{y}_i \ldots \mathbf{y}_{l-2}]_{l,\sigma,J},$$

$$[\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{i-1}\mathbf{zx}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{i-1}\mathbf{xz}\underbrace{\mathbf{y}\ldots\mathbf{y}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}.$$

Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}_i(A^J)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{KZ}_i(A^J)$, откуда

$$\mathbf{GZ}_i(A^J) \subseteq \mathbf{Z}_i(A^J),\ \mathbf{GZ}_i(A^J) \subseteq \mathbf{KZ}_i(A^J).$$

Учитывая отмеченные выше включения

$$\mathbf{Z}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{KZ}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{GZ}_i(A, [\ ]_{l,\sigma,J}),$$

получаем требуемые равенства из формулировки леммы. Лемма доказана.

Следующая теорема является обобщением утверждения 3) теоремы 2.3.2.

Теорема 2.3.5. *Пусть* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, A *– полугруппа с двусторонним сокращением, содержащая единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*

$$\mathbf{Z}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{KZ}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GZ}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$$

для любого $i = 1, \ldots, l-1$.

Доказательство. Случаи $i = 1$ и $i = l - 1$ содержатся в утверждении 3) теоремы 2.3.2. Поэтому доказательство будем проводить для $i = 2, \ldots, l - 2$.

Ввиду леммы 2.3.4 достаточно доказать равенства

$$\mathbf{GZ}_i(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing,\ i = 2, \ldots, l-2.$$

Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) \neq j$. Зафиксируем элемент $a \in A$, отличный от единицы 1 полугруппы A, и положим $t = (\sigma^{-1})^{i-1}(j)$.

Если $\mathbf{z} \in \mathbf{GZ}_i(A^J)$, то определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$, $\mathbf{x}(j) = 1$, $\mathbf{x}(\sigma(j)) = a$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-i}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J},$$

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J},$$

в частности,

$$[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-i}]_{l,\sigma,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}(t),$$

$$[\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i-1}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i}]_{l,\sigma,J}(t) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{i}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-i-1}]_{l,\sigma,J}(t).$$

Из этих равенств, учитывая определение функции $\mathbf{e}$ и определение операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, получаем

$$\underbrace{1\ldots1}_{i-1}\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(t))\underbrace{1\ldots1}_{l-i} = \underbrace{1\ldots1}_{i}\mathbf{z}(\sigma^{i}(t))\underbrace{1\ldots1}_{l-i-1},$$

$$\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(\sigma(t))\ldots\mathbf{x}(\sigma^{i-2}(t))\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(t))\mathbf{x}(\sigma^{i}(t))\mathbf{x}(\sigma^{i+1}(t))\ldots\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)) =$$
$$= \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(\sigma(t))\ldots\mathbf{x}(\sigma^{i-2}(t))\mathbf{x}(\sigma^{i-1}(t))\mathbf{z}(\sigma^{i}(t))\mathbf{x}(\sigma^{i+1}(t))\ldots\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(t)),$$

откуда, применяя ко второму равенству двустороннюю сократимость в полугруппе A, получаем

$$\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(t)) = \mathbf{z}(\sigma^{i}(t)),$$

$$\mathbf{z}(\sigma^{i-1}(t))\mathbf{x}(\sigma^{i}(t)) = \mathbf{x}(\sigma^{i-1}(t))\mathbf{z}(\sigma^{i}(t)).$$

Последние равенства с учетом равенств

$$t = (\sigma^{-1})^{i-1}(j),\ \mathbf{x}(j) = 1,\ \mathbf{x}(\sigma(j)) = a$$

переписываются следующим образом

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(\sigma(j)),\ \mathbf{z}(j)a = \mathbf{z}(\sigma(j)),$$

откуда $\mathbf{z}(j) = \mathbf{z}(j)a$. Осталось применить левую сократимость в полугруппе A. Тогда $a = 1$, что невозможно, ввиду выбора элемента $a \neq 1$. Следовательно, $\mathbf{GZ}_i(A^J) = \varnothing$. Теорема доказана.

Замечание 2.3.2. Для теоремы 2.3.5 можно сформулировать соответствующие следствия, если в качестве множества J взять любое из множеств $\{1, 2, \ldots, k\}$, N или Z.

Кроме тех l-арных аналогов центра группоида, которые определены в этом разделе, возможны и другие его l-арные аналоги. Одним из таких аналогов является центр l-арного группоида, который В.Д. Белоусов первоначально определил для l-арной квазигруппы [11]. Согласно В.Д. Белоусову, *центром* $\mathbf{Z}(A, [\ ])$ l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется множество всех его элементов z таких, что

$$[x_1 \ldots x_{i-1}zx_i \ldots x_{l-1}] = [x_1 \ldots x_{i-1}x_i \ldots x_{j-1}zx_j \ldots x_{l-1}] \qquad (2.3.7)$$

для всех $i = 1, \ldots, l-1$, $j = i+1, \ldots, l$ и всех $x_1, \ldots, x_{l-1} \in A$.

Так как

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{Z}_L(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}),$$

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) \subseteq \mathbf{Z}_R(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}),$$

то из утверждений 1) и 2) теоремы 2.3.2 вытекает

Следствие 2.3.16. *Пусть σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, A – полугруппа с левым или правым сокращением, содержащая единицу и элемент, отличный от неё. Тогда*

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Придавая i, j и $x_1, \ldots, x_{l-1}$ в (2.3.7) конкретные значения, можно получить равенства, с помощью которых определяются все рассмотренные выше l-арные аналоги центра группоида. А именно:

если $i = 1$, $j = 2$, то имеем $\mathbf{Z}_L(A)$;

если $i = 1$, $j = 2$, $x_2 = \ldots = x_{l-1}$, то имеем $\mathbf{KZ}_L(A)$;

если $i = 1$, $j = 2$, $x_1 = \ldots = x_{l-1}$, то имеем $\mathbf{GZ}_L(A)$;

если $i = l - 1$, $j = l$, то имеем $\mathbf{Z}_R(A)$;

если $i = l - 1$, $j = l$, $x_1 = \ldots = x_{l-2}$, то имеем $\mathbf{KZ}_R(A)$;

если $i = l - 1$, $j = l$, $x_1 = \ldots = x_{l-1}$, то имеем $\mathbf{GZ}_R(A)$.

Замечание 2.3.3. Можно определить и другие l-арные аналоги центра группоида. Например, в качестве таких аналогов можно рассматривать следующие два множества:

$$\{z \in A \mid [zx_1x_2 \ldots x_{l-2}x_{l-1}] = [x_1zx_2 \ldots x_{l-2}x_{l-1}] = \ldots$$

$$\ldots = [x_1x_2 \ldots x_{l-2}zx_{l-1}] = [x_1x_2 \ldots x_{l-2}x_{l-1}z],\ \forall x_i \in A\};$$

$$\{z \in A \mid [z\underbrace{x \ldots x}_{l-1}] = [xz\underbrace{x \ldots x}_{l-2}] = \ldots$$

$$\ldots = [\underbrace{x \ldots x}_{l-2}zx] = [\underbrace{x \ldots x}_{l-1}z],\ \forall x \in A\}.$$

В связи с теоремой 2.3.1 естественен вопрос: *в каких случаях будет абелевым l-арный группоид* $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$, *где* ε – *тождественная подстановка*?

Частичный ответ на этот вопрос содержится в замечании 2.3.1, согласно которому, если полугруппа A коммутативна и содержит единицу, то l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ абелев. Полный ответ дает следующее

Предложение 2.3.1. *Если* ε *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *полугруппа A содержит единицу, то l-арный группоид* $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ *является абелевым тогда и только тогда, когда полугруппа A коммутативна.*

Доказательство. *Необходимость.* Зафиксируем $s \in J$ и пусть a и b – произвольные элементы из A. Определим функции $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in A^J$ так, что $\mathbf{x}(s) = a$, $\mathbf{y}(s) = b$, $\mathbf{z}(s) = 1$, где 1 – единица полугруппы A. Так как l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ является абелевым, то

$$[\mathbf{x}\mathbf{y}\underbrace{\mathbf{z}\ldots\mathbf{z}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\mathbf{y}\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{z}\ldots\mathbf{z}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J},$$

в частности,

$$[\mathbf{x}\mathbf{y}\underbrace{\mathbf{z}\ldots\mathbf{z}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J}(s) = [\mathbf{y}\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{z}\ldots\mathbf{z}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J}(s),$$

откуда, согласно теореме 2.2.1

$$\mathbf{x}(s)\mathbf{y}(s)\underbrace{\mathbf{z}(s)\ldots\mathbf{z}(s)}_{l-2} = \mathbf{y}(s)\mathbf{x}(s)\underbrace{\mathbf{z}(s)\ldots\mathbf{z}(s)}_{l-2}.$$

Из этого равенства, учитывая определение функций $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, получаем $ab = ba$. Следовательно, полугруппа A коммутативна.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l$ – произвольные элементы из A^J. Тогда, используя теорему 2.2.1 и коммутативность полугруппы A, получим

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\varepsilon,\,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(j) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(j)\mathbf{x}_l(j) =$$

$$= \mathbf{x}_{\tau(1)}(j)\mathbf{x}_{\tau(2)}(j) \ldots \mathbf{x}_{\tau(l-1)}(j)\mathbf{x}_{\tau(l)}(j) = [\mathbf{x}_{\tau(1)}\mathbf{x}_{\tau(2)} \ldots \mathbf{x}_{\tau(l-1)}\mathbf{x}_{\tau(l)}]_{l,\,\varepsilon,\,J}(j),\ j \in J$$

для любой подстановки $\tau \in \mathbf{S}_l$, то есть

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\varepsilon,\,J}(j) = [\mathbf{x}_{\tau(1)}\mathbf{x}_{\tau(2)} \ldots \mathbf{x}_{\tau(l-1)}\mathbf{x}_{\tau(l)}]_{l,\,\varepsilon,\,J}(j),\ j \in J,\ \tau \in \mathbf{S}_l.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\mathbf{x}_{\tau(1)}\mathbf{x}_{\tau(2)} \ldots \mathbf{x}_{\tau(l-1)}\mathbf{x}_{\tau(l)}]_{l,\,\varepsilon,\,J},\ \tau \in \mathbf{S}_l,$$

то есть l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ является абелевым. Предложение доказано.

Замечание 2.3.4. Из доказательства предложения 2.3.1 видно, что абелеввость l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ следует из коммутативности полугруппы A даже если она не содержит единицу.

2.4. ОТСУТСТВИЕ ЕДИНИЦ В $< A^J, [\ ]_{l,\,s,\,J} >$

Лемма 2.4.1. *Если σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, группоид A содержит более одного элемента, то в группоиде $< A^J, \overset{\sigma}{\circ} >$ нет единиц.*

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in J$.

Предположим, что $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, \overset{\sigma}{\circ} >$, и для любого $a \in A$ определим элемент $\mathbf{a} \in A^J$ следующим образом

$$\mathbf{a}(j) = a,\ \mathbf{a}(t) = \mathbf{e}(t),\ t \neq j.$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, \overset{\sigma}{\circ} >$, то $\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{e} = \mathbf{a}$, откуда

$$(\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{e})(j) = \mathbf{a}(j) = a, \qquad (2.4.1)$$

а согласно определению 2.2.1

$$(\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{e})(j) = \mathbf{a}(j)\mathbf{e}(\sigma(j)) = a\mathbf{e}(s),$$

откуда и из (2.4.1) следует $a = a\mathbf{e}(s)$. Последнее равенство верно для любого $a \in A$, в частности,

$$\mathbf{e}(j) = \mathbf{e}(j)\mathbf{e}(s). \qquad (2.4.2)$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, \overset{\sigma}{\circ} >$, то $\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a} = \mathbf{a}$, откуда

$$(\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a})(j) = \mathbf{a}(j) = a, \qquad (2.4.3)$$

а согласно определению 2.2.1 и в силу $\sigma(j) = s \neq j$, имеем

$$(\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a})(j) = \mathbf{e}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) = \mathbf{e}(j)\mathbf{e}(\mathrm{s}),$$

откуда и из (2.4.3) следует $a = \mathbf{e}(j)\mathbf{e}(\mathrm{s})$. Сравнивая это равенство с равенством (2.4.2), получаем $a = \mathbf{e}(j)$, что невозможно, если выбрать $a \neq \mathbf{e}(j)$. Лемма доказана.

Теорема 2.4.1. *Если σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, группоид A содержит более одного элемента, то в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ нет единиц.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.4.1, считаем $l \geq 3$.

Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in J$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in J$.

Предположим, что $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, и для любого $a \in A$ определим элемент $\mathbf{a} \in A^J$ следующим образом

$$\mathbf{a}(j) = a,\ \mathbf{a}(t) = \mathbf{e}(t),\ t \neq j.$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, то

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{a},$$

откуда

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{a}(j) = a. \qquad (2.4.4)$$

Так как по лемме 2.3.1

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{a}\,\mathbf{e}\,[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,J}]_{3,\sigma,J}, = \mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,J}),$$

то, положив

$$\mathbf{e} \overset{\sigma}{\circ} [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,J} = \mathbf{u},\ [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,J} = \mathbf{v},$$

и, используя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, а также равенства $\mathbf{a}(j) = a$ и $\sigma(j) = s$, получим

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{a}(j)\mathbf{u}(\sigma(j)) =$$

$$= a(\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{v}(\sigma(\sigma(j)))) = a(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))),$$

то есть

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = a(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))),$$

откуда и из (2.4.4) следует

$$a = a(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))).$$

Последнее равенство верно для любого $a \in A$. В частности, если, $a = \mathbf{e}(j)$, то

$$\mathbf{e}(j) = \mathbf{e}(j)(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))). \qquad (2.4.5)$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, то

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{a},$$

откуда

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{a}(j) = a. \qquad (2.4.6)$$

Так как по лемме 2.3.1

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{e}\,\mathbf{a}\,[\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,\,J}\,]_{3,\,\sigma,\,J} = \mathbf{e}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}\overset{\sigma}{\circ}\ [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,\,J}\,),$$

то, положив

$$\mathbf{a}\overset{\sigma}{\circ}\ [\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l-2,\sigma,\,J} = \mathbf{w},$$

и, используя определение операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, а также условие $\sigma(j) = s \neq j$, получим

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{e}(j)\mathbf{w}(\sigma(j)) = \mathbf{e}(j)(\mathbf{a}(\sigma(j))\mathbf{v}(\sigma(\sigma(j)))) =$$

$$= \mathbf{e}(j)(\mathbf{a}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))) = \mathbf{e}(j)(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))),$$

то есть

$$[\mathbf{e}\,\mathbf{a}\,\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}]_{l,\,\sigma,\,J}\,(j) = \mathbf{e}(j)(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))),$$

где $\mathbf{v}$ то же, что и выше. Из полученного равенства и из (2.4.6) вытекает

$$a = \mathbf{e}(j)(\mathbf{e}(s)\mathbf{v}(\sigma(s))),$$

откуда и из (2.4.5) вытекает $a = \mathbf{e}(j)$ для любого $a \in A$. Последнее равенство возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от $\mathbf{e}(j)$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.4.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.4.1 [10]. *Если* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* l*-арном группоиде* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *нет единиц.*

Если в следствии 2.4.1 положить $\sigma = (12 \ldots k)$, то получим предложение 2.10.7 [9].

Если в следствии 2.4.1 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.7.3 [9].

Полагая в теореме 2.4.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.4.2. *Если* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* l*-арном группоиде* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$ *нет единиц.*

Полагая в теореме 2.4.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.4.3. *Если* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* l*-арном группоиде* $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}} >$ *нет единиц.*

Согласно теореме 2.4.1 для нетождественной подстановки σ из $\mathbf{S}_J$ и группоида A, содержащего более одного элемента, в

l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ нет единиц. Легко проверяется, что для тождественной подстановки ε из $\mathbf{S}_J$ и группоида A с единицей 1 постоянная функция $\mathbf{e} \in A^J$, все значения которой равны 1, является единицей в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J} >$. Возникает естественный

Вопрос 2.4.1. *Существуют ли в* в *l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J} >$ единицы, отличные от* $\mathbf{e}$?

Исчерпывающий ответ на этот вопрос для полугруппы A с левым (правым, двусторонним) сокращением будет получен в разделе 2.5.

2.5. l-АРНАЯ ПОЛУГРУППА $< A^J, [\ ]_{l,s,J} >$

Предложение 2.5.1. *Если A – группоид с единицей, содержащий более одного элемента,* σ *– нетождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *то операция* $\overset{\sigma}{\circ}$ *не является ассоциативной.*

Доказательство. Для $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A^J$ положим

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}) \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z} = \mathbf{u},\ \mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{y} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z}) = \mathbf{v}.$$

Тогда для любого $j \in J$, согласно определению операции $\overset{\sigma}{\circ}$ будем иметь

$$\mathbf{u}(j) = ((\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j))\mathbf{z}(\sigma(j)) = (\mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)))\mathbf{z}(\sigma(j)),$$

$$\mathbf{v}(j) = \mathbf{x}(j)((\mathbf{y} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{z})(\sigma(j))) =$$

$$= \mathbf{x}(j)(\mathbf{y}(\sigma(j))\mathbf{z}(\sigma(\sigma(j)))) = \mathbf{x}(j)(\mathbf{y}(\sigma(j))\mathbf{z}(\sigma^2(j))).$$

Если теперь положить

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{y}(\sigma(j)) = \mathbf{z}(\sigma(j)) = 1,$$

то

$$\mathbf{u}(j) = 1,\ \mathbf{v}(j) = \mathbf{z}(\sigma^2(j)).$$

Так как σ – нетождественная подстановка, то

$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$$

для некоторого $\sigma(j) \in J$. Поэтому $\mathbf{v}(j) = \mathbf{z}(\sigma^2(j))$ можно выбрать отличным от $\mathbf{u}(j) = \mathbf{z}(\sigma(j)) = 1$, откуда следует $\mathbf{u}(j) \neq \mathbf{v}(j)$. Следовательно,

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\mathbf{o}} \mathbf{y}) \overset{\sigma}{\mathbf{o}} \mathbf{z} \neq \mathbf{x} \overset{\sigma}{\mathbf{o}} (\mathbf{y} \overset{\sigma}{\mathbf{o}} \mathbf{z}).$$

Предложение доказано.

Полагая в предложении 2.5.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.1 [10]. *Если A – группоид с единицей 1, содержащий более одного элемента,* σ *– нетождественная подстановка из* S_k, *то операция* $\overset{\sigma}{\mathbf{o}}$ *не является ассоциативной.*

Следствие 2.5.1 обобщает предложение 2.2.7 из [9].

Согласно предложению 2.5.1 операция $[\ ]_{2,\sigma,J}$ не является ассоциативной. Покажем, что при $l \geq 3$ операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ может быть ассоциативной. Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.5.1. *Пусть A и J – произвольные множества,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, f_σ *– отображение* A^J *в* A^J, *ставящее в соответствие функции* $\mathbf{x} \in A^J$ *функцию* $\mathbf{x}^{f_\sigma} \in A^J$, *значение которой в точке* $j \in J$ *совпадает со значением функции* $\mathbf{x}$ *в точке* $\sigma(j)$: $\mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$. *Тогда*:

1) f_σ *– биекция* A^J *на* A^J;

2) $f_\sigma^l = f_{\sigma^l}$ *для любого* $l \geq 2$;

3) *если* $\mathbf{a}$ *– постоянная функция из* A^J, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

4) *если* $< A, * >$ *– группоид, то* f_σ *– автоморфизм группоида* $< A^J, * >$ *с операцией*

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) * \mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

Доказательство. 1) Если $\mathbf{z}$ – произвольная функция из A^J то, положив $\mathbf{z}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$, определим функцию $\mathbf{x}$ со значениями в A, которая в силу $\sigma \in \mathbf{S}_J$, определена на всем J, то есть $\mathbf{x} \in A^J$. Ясно, что $\mathbf{z} = \mathbf{x}^{f_\sigma}$. Следовательно, f_σ – сюръекция.

Предположим теперь, что для некоторых функций $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^J$ верно $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{y}^{f_\sigma}$. Так как для любого $j \in J$ существует такой $i \in J$, что $j = \sigma(i)$, то из $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{y}^{f_\sigma}$ последовательно получаем

$$\mathbf{x}^{f_\sigma}(i) = \mathbf{y}^{f_\sigma}(i),\ \mathbf{x}(\sigma(i)) = \mathbf{y}(\sigma(i)),\ \mathbf{x}(j) = \mathbf{y}(j).$$

Так как последнее равенство верно для любого $j \in J$, то $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Следовательно, f_σ – инъекция, а значит и биекция.

2) Для любого $\mathbf{x} \in A^J$ имеем

$$\mathbf{x}^{f_\sigma^2}(j) = (\mathbf{x}^{f_\sigma})^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}^{f_\sigma}(\sigma(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(\sigma(\sigma(j))) = \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \mathbf{x}^{f_{\sigma^2}}(j),\ j \in J.$$

Следовательно, $f_\sigma^2 = f_{\sigma^2}$.

Используя индукцию, предположим, что $f_\sigma^{l-1} = f_{\sigma^{l-1}}$. Тогда для любого $\mathbf{x} \in A^J$ имеем

$$\mathbf{x}^{f_\sigma^l}(j) = (\mathbf{x}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma}(j) = (\mathbf{x}^{f_{\sigma^{l-1}}})^{f_\sigma}(j) =$$

$$= (\mathbf{x}^{f_{\sigma^{l-1}}})(\sigma(j)) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(\sigma(j))) = \mathbf{x}(\sigma^l(j)) = \mathbf{x}^{f_\sigma^l}(j).$$

Следовательно, $f_\sigma^l = f_{\sigma^l}$.

3) Следует из определения отображения f_σ.

4) Так как для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^J$ верно

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})^{f_\sigma}(j) = (\mathbf{x} * y)(\sigma(j)) = \mathbf{x}(\sigma(j)) * \mathbf{y}(\sigma(j)) =$$

$$= \mathbf{x}^{f_\sigma}(j) * \mathbf{y}^{f_\sigma}(j) = (\mathbf{x}^{f_\sigma} * \mathbf{y}^{f_\sigma})(j)$$

для любого $j \in J$, то

$$(\mathbf{x}*\mathbf{y})^{f_\sigma}=\mathbf{x}^{f_\sigma}*\mathbf{y}^{f_\sigma},$$

то есть f_σ – автоморфизм группоида $< A^J, * >$. Лемма доказана.

Следующее утверждение, является теоремой Глускина-Хоссу для l-арных полугрупп.

Лемма 2.5.2. *Пусть A – полугруппа, σ – ее автоморфизм такой, что σ^{l-1} – тождественный автоморфизм для некоторого $l \geq 2$. Тогда $< A, [\ ] >$ – l-арная полугруппа с l-арной операцией*

$$[x_1x_2 \dots x_{l-1}x_l] = x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} x_l.$$

Теорема 2.5.1. *Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l \in A^J$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \mathbf{x}_l.$$

Доказательство. Так как A – полугруппа, то A^J – полугруппа с операцией

$$(\mathbf{x}\mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

Автоморфизмом этой полугруппы, согласно утверждению 4) леммы 2.5.1 является отображение f_σ.

Так как σ^{l-1} – тождественная подстановка, то ввиду утверждения 2) леммы 2.5.1 имеем

$$\mathbf{x}^{f_\sigma^{l-1}}(j) = \mathbf{x}^{f_{\sigma^{l-1}}}(j) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j),\ \mathbf{x} \in A^J$$

для любого $j \in J$, то есть $\mathbf{x}^{f_\sigma^{l-1}} = \mathbf{x}$. Следовательно, $f_\sigma^{l-1} = f_{\sigma^{l-1}}$ – тождественный автоморфизм полугруппы A^J.

Таким образом, выполняются все условия теоремы Глускина-Хоссу (лемма 2.5.2), согласно которой l-арная операция

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l] = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l$$

ассоциативна.

Так как $f_\sigma^t = f_{\sigma^t}$ для любого $t \geq 1$, то

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l] = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l,$$

откуда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l](j) = (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l)(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2^{f_\sigma}(j) \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(j).$$

Учитывая тождественность подстановки σ^{l-1}, последнее равенство можно переписать следующим образом

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l](j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J.$$

Сравнивая правую часть полученного равенства с правой частью равенства из следствия 2.2.4, убеждаемся в совпадение l-арных операций $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и $[\ ]$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.5.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.2 [9]. *Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l\ ,$$

где отображение f_σ: $A^k \to A^k$ *определяется следующим образом*

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Полагая в теореме 2.5.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.5.3. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_\mathrm{N}$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* l*-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}}$ *является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots,) \in A^\mathrm{N}, i = 1, 2, \ldots, l$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l \ ,$$

где отображение f_σ: $A^\mathrm{N} \to A^\mathrm{N}$ *определяется следующим образом*

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \ldots) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots).$$

Полагая в теореме 2.5.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.5.4. *Пусть* A *– полугруппа,* $l \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_\mathrm{Z}$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* l*-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}}$ *является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (\ldots, x_{i(-2)}, x_{i(-1)}, x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots) \in A^\mathrm{Z}, i = 1, 2, \ldots, l.$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{Z}} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l \ ,$$

где отображение f_σ: $A^\mathrm{Z} \to A^\mathrm{Z}$ *определяется следующим образом*

$$f_\sigma: (\ldots, x_{-1}, x_{-2}, x_0, x_1, x_2, \ldots) \to (\ldots, x_{\sigma(-2)}, x_{\sigma(-1)}, x_0, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots).$$

Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в полугруппе единицы является достаточным условием неассоциативности операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$. Для этого нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2.5.3. *Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$. Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}.$$

Доказательство. Так как, в силу утверждения 2) леммы 2.5.1, для любого $t \geq 1$ верно $f_\sigma^t = f_{\sigma^t}$, то, используя следствие 2.2.4, получим

$$(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}})(j) = (\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}})(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2^{f_\sigma}(j) \ldots \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}(j) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j),\ j \in J.$$

Следовательно, равенства из условия леммы справедливы. Лемма доказана.

Лемма 2.5.4. *Пусть A – множество, состоящее более чем из одного элемента,* σ и τ – *подстановки из* $\mathbf{S}_J$. *Если* $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ *для любого* $\mathbf{x} \in A^J$, *то* $\sigma = \tau$.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $a \neq b$. Выберем произвольно $j \in J$, и пусть $\sigma(j) = i$, $\tau^{-1}(i) = m$, то есть $\tau(m) = i$. Определим функцию $\mathbf{x} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{x}(i) = b,\ \mathbf{x}(s) = a \text{ для любого } s \neq i,\ s \in J.$$

Определим также функции

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{f_\sigma} \in A^J,\ \mathbf{z} = \mathbf{x}^{f_\tau} \in A^J.$$

Тогда, ввиду условия $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ имеем $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Кроме того, согласно определению отображения f_σ имеем

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j)) = \mathbf{x}(i) = b,$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^{f_\sigma}(t) = \mathbf{x}(\sigma(t)) = a,\ t \neq j,\ t \in J;$$

$$\mathbf{z}(m) = \mathbf{x}^{f_\tau}(m) = \mathbf{x}(\tau(m)) = \mathbf{x}(i) = b,$$

$$\mathbf{z}(r) = \mathbf{x}^{f_\tau}(r) = \mathbf{x}(\tau(r)) = a,\ r \neq m,\ r \in J.$$

Таким образом,

$$\mathbf{y}(j) = b,\ \mathbf{y}(t) = a,\ t \neq j,\ t \in J, \qquad (2.5.1)$$

$$\mathbf{z}(m) = b,\ \mathbf{z}(r) = a,\ r \neq m,\ r \in J. \qquad (2.5.2)$$

Так как $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, то $\mathbf{z}(j) = \mathbf{y}(j)$, и, ввиду (2.5.1) имеем $\mathbf{z}(j) = b$, откуда и из (2.5.2), а также из неравенства $a \neq b$ следует $m = j$. Следовательно, $\tau^{-1}(i) = j$, откуда $\tau(j) = i = \sigma(j)$, то есть $\tau(j) = \sigma(j)$. Так как элемент $j \in J$ выбран произвольно, то $\sigma = \tau$. Лемма доказана.

Если в лемме 2.5.4 положить $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, то получится лемма 3.3.4 из [9].

Теорема 2.5.2. *Пусть A – полугруппа с единицей, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ не является полуассоциативной.*

Доказательство. Если предположить полуассоциативность операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, то в A выполняется тождество

$$[[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} =$$

$$= [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}[\mathbf{x}_l \ldots \mathbf{x}_{2l-2}\mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,j}]_{l,\sigma,J}\,.$$

Тогда, ввиду леммы 2.5.3

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} =$$

$$= \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}\,.$$

Так как, согласно утверждению 4) лемм 2.5.1 f_σ – автоморфизм полугруппы A^J, то последнее равенство может быть переписано следующим образом

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} =$$

$$= \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{2l-3}} \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{2l-2}}.$$

Если 1 – единица полугруппы A, то определим функцию $\mathbf{e} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(j) = 1$ для любого $j \in J$. Тогда, согласно утверждению 3) леммы 2.5.1 $f_\sigma^t(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ для любого $t \geq 1$. Кроме того, ясно, что $\mathbf{e}$ – единица полугруппы A^J. Поэтому, полагая в записанном выше равенстве

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_l = \mathbf{x}_{l+2} \ldots = \mathbf{x}_{2l-1} = \mathbf{e},$$

получим

$$\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} = \mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^l},$$

откуда и из утверждения 2) леммы 2.5.1 следует

$$\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} = \mathbf{x}_{l+1}^{f_{\sigma^l}}$$

для любого $\mathbf{x}_{l+1} \in A^J$.

Применяя к последнему равенству лемму 2.5.4, получим $\sigma = \sigma^l$, что противоречит условию $\sigma \neq \sigma^l$. Таким образом, предположение о полуассоциативности операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ неверно. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.5.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.5 [9]. *Пусть A – полугруппа с единицей, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ не является полуассоциативной.*

Теорема 2.5.2 вытекает при $i = l$ из следующего более общего результата.

Теорема 2.5.3. *Пусть A – полугруппа с единицей, $l \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в A^J для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество*

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} =$$

$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\,\sigma,\,J}\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}. \qquad (2.5.3)$$

Доказательство. Если предположить выполнимость в A^J тождества из условия теоремы, то

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} =$$

$$= \mathbf{x}_1\,\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}(\mathbf{x}_i\,\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}\,\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

откуда

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} =$$

$$= \mathbf{x}_1\,\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}\,\mathbf{x}_i^{f_\sigma^{i-1}}\,\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\,\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l}} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l+i-2}}\,\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}.$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.5.2, получим

$$\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} = \mathbf{x}_{l+1}^{f_{\sigma^l}}$$

для любого $\mathbf{x}_{l+1} \in A^J$, откуда следует невозможное равенство $\sigma^l = \sigma$. Теоремма доказана.

Полагая в теореме 2.5.3 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.6 [9]. *Пусть A – полугруппа с единицей,* $k \geq 2$, $l \geq 2$, $i \in \{2, \ldots, l\}$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l \neq \sigma$. *Тогда в* A^J *не выполняется тождество*

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,k} =$$

$$= [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l,\,\sigma,\,k}\mathbf{x}_{l+i} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\,\sigma,\,k}.$$

Если подстановка σ имеет в группе $\mathbf{S}_J$ бесконечный порядок, то $\sigma^l \neq \sigma$ для любого целого $l \geq 2$. Поэтому из теоремы 2.5.3 вытекает

Следствие 2.5.7. *Пусть A – полугруппа с единицей, подстановка* σ *имеет в группе* $\mathbf{S}_J$ *бесконечный порядок. Тогда для любых*

$l \geq 2$, $i \in \{2, \ldots, l\}$, *в* A^J *не выполняется тождество* (2.5.3), *то есть* l*-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ *не является ассоциативной. В частности, она не является и полуассоциативной.*

Замечание 2.5.1. В качестве подстановки σ в следствии 2.5.7 можно взять любую подстановку, у которой длины всех независимых циклов неограничены, в частности такая подстановка может иметь бесконечный цикл. В качестве множества J в следствии 2.5.7 можно взять множество N или множество Z.

Так как тождественная подстановка ε удовлетворяет условию $\varepsilon^l = \varepsilon$, то по теореме 2.5.1 для полугруппы A и целого $l \geq 2$ универсальная алгебра $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ является l-арной полугруппой. Множество всех единиц этой l-арной полугруппы обозначим через $\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J})$. Следующая теорема полностью описывает множество $\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J})$ для полугруппы A с левым (правым, двусторонним) сокращением.

Теорема 2.5.4. *Пусть* ε *– тождественная подстановка, полугруппа* A *с левым* (*правым, двусторонним*) *сокращением содержит единицу* 1. *Тогда элемент* $\mathbf{u} \in A^J$ *является единицей в* l*-арной полугруппе* $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *справедливы равенства*

$$\mathbf{u}(j) \in \mathbf{Z}(A), \tag{2.5.4}$$

$$(\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1, \tag{2.5.5}$$

где $\mathbf{Z}(A)$ *– центр полугруппы* A, то есть

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1,\ \forall j \in J\}.$$

Доказательство. *Необходимость*. Рассмотрим случай полугруппы A с левым сокращением.

Пусть $\mathbf{u}$ – единица в $<A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}>$. Тогда для любого $\mathbf{c} \in A^J$ имеем

$$[\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-2}\mathbf{c}\mathbf{u}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}\mathbf{c}]_{l,\,\varepsilon,\,J}, \tag{2.5.6}$$

$$[\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{c}. \qquad (2.5.7)$$

Используя в (2.5.6) вначале предложение 2.2.1, а затем левое сокращение в полугруппе A, получим

$$\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-2}\mathbf{c}(j)\mathbf{u}(j) = \underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-1}\mathbf{c}(j),\ j \in J,$$

$$\mathbf{c}(j)\mathbf{u}(j) = \mathbf{u}(j)\mathbf{c}(j),\ j \in J,$$

откуда, в силу произвольного выбора $\mathbf{c}(j) \in A$ следует (2.5.4).

Используя в (2.5.7) предложение 2.2.1, получим

$$\mathbf{c}(j)\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-1} = \mathbf{c}(j).$$

Из этого равенства, используя левое сокращение в полугруппе A, получим (2.5.5).

Рассмотрим теперь случай полугруппы A с правым сокращением.

Пусть снова $\mathbf{u}$ – единица в $\langle A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} \rangle$. Тогда для любого $\mathbf{c} \in A^J$ имеем

$$[\mathbf{u}\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}]_{l,\,\varepsilon,\,J}, \qquad (2.5.8)$$

$$[\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}\mathbf{c}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{c}. \qquad (2.5.9)$$

Используя в (2.5.8) вначале предложение 2.2.1, а затем правое сокращение в полугруппе A, получим

$$\mathbf{u}(j)\mathbf{c}(j)\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-2} = \mathbf{c}(j)\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-1},\ j \in J,$$

$$\mathbf{u}(j)\mathbf{c}(j) = \mathbf{c}(j)\mathbf{u}(j),\ j \in J,$$

откуда, в силу произвольного выбора $\mathbf{c}(j) \in A$ следует (2.5.4).

Используя в (2.5.9)) предложение 2.2.1, получим

$$\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-1}\mathbf{c}(j) = \mathbf{c}(j).$$

Из этого равенства, используя правое сокращение в полугруппе A, получим (2.5.5).

Случай полугруппы A с двусторонним сокращением сводится либо к случаю полугруппы A с левым сокращением, либо к случаю полугруппы A с правым сокращением.

Достаточность. Пусть для любого $j \in J$ справедливы равенства (2.5.4) и (2.5.5). Из (2.5.4) для любого $\mathbf{c} \in A^J$ следует

$$\mathbf{c}(j)\mathbf{u}(j) = \mathbf{u}(j)\mathbf{c}(j).$$

Далее для любого $i = 1, \ldots, l-1$ получаем

$$(\mathbf{u}(j))^{i-1}\mathbf{c}(j)(\mathbf{u}(j))^{l-i} = (\mathbf{u}(j))^{i}\mathbf{c}(j)(\mathbf{u}(j))^{l-i-1},\ j \in J,$$

откуда, ввиду предложения 2.2.1 вытекает

$$[\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{i-1}\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-i}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{i}\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-i-1}]_{l,\,\varepsilon,\,J}. \qquad (2.5.10)$$

Полагая в (2.5.10) $i = 1$, получим

$$[\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = [\mathbf{u}\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-2}]_{l,\,\varepsilon,\,J},$$

откуда, обозначив правую часть полученного равенства через $\mathbf{d}$, и, применив к ней определение операции $[\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}$, а затем, используя тождественность подстановки ε, а также равенства (2.5.4) и (2.5.5), получим

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{c}(j),\ j \in J,$$

то есть $\mathbf{d} = \mathbf{c}$. Следовательно,

$$[\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{c}.$$

Из этого равенства, а также из (2.5.10) вытекает справедливость для любого $i = 1, \ldots, l-1$ равенства

$$[\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{i-1}\mathbf{c}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-i}]_{l,\,\varepsilon,\,J} = \mathbf{c}.$$

Следовательно, **c** – единица в l-арной полугруппе $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$. Теорема доказана.

Следствие 2.5.8. *Пусть* ε *– тождественная подстановка, коммутативная полугруппа* A *с сокращениями содержит единицу* 1*. Тогда множество всех единиц* l*-арной полугруппы* $< A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J} >$ *имеет вид*

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1,\ \forall j \in J\}.$$

Полагая в теореме 2.5.4 и следствии 2.5.8 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $J = \mathrm{N}$ или $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.5.9. *Пусть* ε *– тождественная подстановка, полугруппа* A *с левым* (*правым, двусторонним*) *сокращением содержит единицу* 1, $\mathbf{Z}(A)$ *– центр полугруппы* A*. Тогда*:

$$\mathbf{E}(A^k, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,k}) =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k \mid a_j \in \mathbf{Z}(A),\ a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}\};$$

$$\mathbf{E}(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,\mathrm{N}}) =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathrm{N}} \mid a_j \in \mathbf{Z}(A),\ a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \mathrm{N}\};$$

$$\mathbf{E}(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,\mathrm{Z}}) =$$

$$= \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in A^{\mathrm{Z}} \mid a_j \in \mathbf{Z}(A),\ a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \mathrm{Z}\}.$$

Если полугруппа A *коммутативна, то*:

$$\mathbf{E}(A^k, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,k}) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k \mid a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}\};$$

$$\mathbf{E}(A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,\mathrm{N}}) = \{(a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathrm{N}} \mid a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \mathrm{N}\};$$

$$\mathbf{E}(A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,\mathrm{Z}}) = \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) \in A^{\mathrm{Z}} \mid a_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in \mathrm{Z}\}.$$

В ряде случаев весьма полезным оказывается следующее

Предложение 2.5.2. *Если* φ *– изоморфизм группоида* $< A, \circ >$ *на группоид* $< B, * >$, *то отображение* $\psi: \mathbf{a} \to \mathbf{a}^{\psi}$, *отображающее* A^J *на* B^J *по правилу*

$$\mathbf{a}^{\psi}(j) = (\mathbf{a}(j))^{\varphi}, \tag{2.5.11}$$

является изоморфизмом l*-арного группоида* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *на* l*-арный группоид* $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Доказательство. Ясно, что ψ – биекция A^J на B^J.

Для любых $\mathbf{a}_i \in A^J$, где $i = 1, \ldots, l$, положим

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J}.$$

Тогда, применяя теорему 2.2.1, равенство (2.5.11), а также тот факт, что φ – изоморфизм $< A, \circ >$ на $< B, * >$, получим

$$([\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J})^{\psi}(j) = \mathbf{u}^{\psi}(j) = (\mathbf{u}(j))^{\varphi} =$$

$$= (\mathbf{a}_1(j) \circ (\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \circ (\ldots (\mathbf{a}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \circ \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)))^{\varphi} =$$

$$= (\mathbf{a}_1(j))^{\varphi} * ((\mathbf{a}_2(\sigma(j)))^{\varphi} * (\ldots ((\mathbf{a}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)))^{\varphi} * (\mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)))^{\varphi}) \ldots))=$$

$$= \mathbf{a}_1^{\psi}(j) * (\mathbf{a}_2^{\psi}(\sigma(j)) * (\ldots (\mathbf{a}_{l-1}^{\psi}(\sigma^{l-2}(j)) * \mathbf{a}_l^{\psi}(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)) =$$

$$= [\mathbf{a}_1^{\psi}\mathbf{a}_2^{\psi} \ldots \mathbf{a}_{l-1}^{\psi}\mathbf{a}_l^{\psi}]_{l,\sigma,J}(j),\ j \in J,$$

то есть

$$([\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J})^{\psi}(j) = [\mathbf{a}_1^{\psi}\mathbf{a}_2^{\psi} \ldots \mathbf{a}_{l-1}^{\psi}\mathbf{a}_l^{\psi}]_{l,\sigma,J}(j),\ j \in J.$$

Следовательно,

$$([\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J})^{\psi} = [\mathbf{a}_1^{\psi}\mathbf{a}_2^{\psi} \ldots \mathbf{a}_{l-1}^{\psi}\mathbf{a}_l^{\psi}]_{l,\sigma,J},$$

то есть ψ – изоморфизм $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *на* $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Предложение доказано.

Полагая в предложении 2.5.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.10. *Если* φ *– изоморфизм группоида* $< A, \circ >$ *на группоид* $< B, * >$*, то отображение* $\psi\colon \mathbf{a} \to \mathbf{a}^{\psi}$*, отображающее* A^k *на* B^k *по правилу*

$$\psi\colon \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \to \mathbf{a}^{\psi} = (a_1^{\varphi}, \ldots, a_k^{\varphi}), \tag{2.5.12}$$

является изоморфизмом l*-арного группоида* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *на* l*-арный группоид* $< B^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.

Теорема 2.5.1 и предложение 2.5.2 позволяют сформулировать следующее

Предложение 2.5.3. *Если подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$*,* φ *– изоморфизм полугруппы* $< A, \circ >$ *на полугруппу* $< B, * >$*, то отображение* $\psi\colon \mathbf{a} \to \mathbf{a}^{\psi}$*, отображающее* A^J *на* B^J *по правилу* (2.5.11)*, является изоморфизмом* l*-арной полугруппы* $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ *на* l*-арную полугруппу* $< B^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$.

Полагая в предложении 2.5.3 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.5.11. *Если подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$*,* φ *– изоморфизм полугруппы* $< A, \circ >$ *на полугруппу* $< B, * >$*, то отображение* $\psi\colon \mathbf{a} \to \mathbf{a}^{\psi}$*, отображающее* A^k *на* B^k *по правилу* (2.5.12)*, является изоморфизмом* l*-арной полугруппы* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *на* l*-арную полугруппу* $< B^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$.

Для каждого из множеств N и Z справедливы следствия, аналогичные следствиям 2.5.10 и 2.5.11.

Замечание 2.5.2. Понятно, что если в предложениях 2.5.2 и 2.5.3 и в следствиях из них φ – гомоморфизм, то и ψ – гомоморфизм.

В заключение данного раздела сформулируем несколько результатов об операции $[\ ]_{l, \sigma, J}$ для некоторых полугрупп, играющих значительную роль в алгебраических исследованиях. При этом будем придерживаться следующего соглашения: множество $(M_L)^J$ всех функций из J во множество M_L, снабженное каким-либо нижним индексом, для краткости обозначается символом

M_L^J без круглых скобок. В частности, $\boldsymbol{\mathcal{F}}_X^J$ – множество всех функций из J в полугруппу $\boldsymbol{\mathcal{F}}_X$ всех преобразований множество X, $\boldsymbol{\mathcal{B}}_X^J$ – множество всех функций из J в полугруппу $\boldsymbol{\mathcal{B}}_X$ всех бинарных отношений на множестве X, $\mathbf{M}_n^J(P)$ – множество всех функций из J в полугруппу $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над полем P.

Следующие четыре теоремы являются следствиями теорем 2.3.1, 2.4.1 и 2.5.1.

Теорема 2.5.5. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \boldsymbol{\mathcal{F}}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, множество* X *содержит более одного элемента, то эта l-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

Теорема 2.5.6. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \boldsymbol{\mathcal{B}}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, множество* X *содержит более одного элемента, то эта l-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

Теорема 2.5.7. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, то эта l-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

В следующей теореме $\mathbf{H}(V)$ – полугруппа всех линейных преобразований линейного пространства V над полем P.

Теорема 2.5.8. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< \mathbf{H}^J(V), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная полугруппа. Если подстановка* σ *нетождественная, то эта l-арная полугруппа неабелева и в ней нет единиц.*

Замечание 2.5.3. Если в теореме 2.5.8 линейное пространство V над полем P имеет размерность n, то l-арная полугруппа из этой теоремы изоморфна l-арной полугруппе из теоремы 2.5.7.

Это следует из предложения 2.5.3, согласно которому отображение $\psi\colon \mathbf{a} \to \mathbf{a}^{\psi}$, отображающее $\mathbf{H}^J(V)$ на $\mathbf{M}_n^J(P)$ по правилу $\mathbf{a}^{\psi}(j) = (\mathbf{a}(j))^{\varphi}$, где φ – изоморфизм полугруппы $\mathbf{H}(V)$ на полугруппу $\mathbf{M}_n(P)$, ставящий в соответствие каждому линейному преобразованию f линейного пространства V его матрицу $M(f)$ в фиксированном базисе, является изоморфизмом l-арной полугруппы $< \mathbf{H}^J(V), [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ на l-арную полугруппу $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Замечание 2.5.4. В теореме 2.5.7 порядок матриц может быть равным единице ($n = 1$), так как в этом случае полугруппа $\mathbf{M}_n(P)$ отождествляется с полем P, которое всегда содержит более одного элемента. Аналогично, в теореме 2.5.8 размерность пространства V может быть равной единице.

2.6. ПОЛУАБЕЛЕВОСТЬ $< A^J, [\ ]_{l,\,s,\,J} >$. ПОЛУЦЕНТРЫ

Сформулируем критерий полуабелевости l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Теорема 2.6.1. *Если полугруппа A содержит единицу, подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – коммутативна.*

Доказательство. Согласно следствию 2.2.4 имеем

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J,$$

$$[\mathbf{x}_l\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_1]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{x}_l(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_1(\sigma^{l-1}(j)),\ j \in J$$

для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l \in A^J$.

Достаточность. Из абелевости полугруппы A, в силу условия $\sigma^{l-1}(j) = j$ следует равенство правых частей записанных равенств, откуда последовательно получаем

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{x}_l\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_1]_{l,\,\sigma,\,J}(j),\ j \in J,$$

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}_l\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_1]_{l,\,\sigma,\,J}, \tag{2.6.1}$$

что означает полуабелевость l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$.

Необходимость. Для фиксированного $j \in J$, любых элементов a и b полугруппы A и ее единицы 1 определим функции

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l \in A^J$$

так, что

$$\mathbf{x}_1(j) = a, \mathbf{x}_2(\sigma(j)) = \ldots = \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) = 1, \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) = b.$$

Тогда из полуабелевости $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ следует (2.6.1), откуда, рассуждая в обратном порядке, и, учитывая условие $\sigma^{l-1}(j) = j$, а также определение функций $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{x}_l$, последовательно получаем

$$\mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_l(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_1(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{x}_1(j),$$

$$ab = ba,$$

что, ввиду произвольного выбора $a, b \in A$ означает абелевость полугруппы A. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.6.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.6.1. [9]. *Если полугруппа A содержит единицу, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – коммутативна.*

Всякая полуабелева l-арная полугруппа является и слабо полуабелевой. Как показывает следующая теорема, для цикла длины $l - 1$ из слабой полуабелевости l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ следует ее полуабелевость.

Теорема 2.6.2. *Если полугруппа A содержит единицу, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *l-арная полугруппа* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *полуабелева*;

2) *l-арная полугруппа* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *слабо полуабелева*;

3) *полугруппа A – коммутативна*.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$2) Следует из определений полуабелевости и слабой полуабелевости.

2) $\Rightarrow$3) Для фиксированного $j \in J$, любых элементов a и b полугруппы A и ее единицы 1 определим функции $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{z}(j) = a,\ \mathbf{x}(\sigma(j)) = \ldots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1,\ \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = b.$$

Так как σ – цикл длины $l - 1$, то такое определение функции $\mathbf{x}$ возможно. Тогда из слабой полуабелевости $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ следует равенство

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J},$$

откуда

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J}(j),\ j \in J.$$

Применяя следствие 2.2.4, и, учитывая условие $\sigma^{l-1}(j) = j$, а также определение функций $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$, последовательно получаем

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$ab = ba,$$

что, ввиду произвольного выбора $a, b \in A$ означает абелевость полугруппы A.

3) $\Rightarrow$1) Следует из теоремы 2.6.1. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.6.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.6.2. *Если полугруппа* A *содержит единицу,* σ *– цикл длины* $l-1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$*, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) l*-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *полуабелева*;

2) l*-арная полугруппа* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *слабо полуабелева*;

3) *полугруппа* A *– коммутативна*.

Для каждого из множеств N и Z справедливы утверждения, аналогичные следствиям 2.6.1 и 2.6.2.

Замечание 2.6.1. Из доказательства теоремы 2.6.1 (теоремы 2.6.2) видно, что для полуабелевости (слабой полуабелевости) l-арной полугруппы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ необязательно наличие в коммутативной полугруппе A единицы.

В разделе 2.3 были определены и изучались различные полиадические аналоги центра группоида. Определим для l-арного группоида $< A, [\ ] >$ еще три таких аналога:

полуцентр

$$\mathbf{HZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zy_1 \ldots y_{l-2}x] = [xy_1 \ldots y_{l-2}z],\ \forall x, y_i \in A\};$$

малый полуцентр

$$\mathbf{KHZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{y \ldots y}_{l-2}x] = [x\underbrace{y \ldots y}_{l-2}z],\ \forall x, y \in A\};$$

большой полуцентр

$$\mathbf{GHZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [z\underbrace{x \ldots x}_{l-1}] = [\underbrace{x \ldots x}_{l-1}z],\ \forall x \in A\}.$$

При $l = 2$ все три аналога совпадают с центром $\mathbf{Z}(A)$ группоида A.

В случаях, когда не возникает разночтений, символ [ ] l-арной операции в обозначениях полуцентра, малого полуцентра и большого полуцентра указывать не будем, то есть полагаем

$$\mathbf{HZ}(A, [\ ]) = \mathbf{HZ}(A),\ \mathbf{KHZ}(A, [\ ]) = \mathbf{KHZ}(A),\ \mathbf{GHZ}(A, [\ ]) = \mathbf{GHZ}(A).$$

Ясно, что

$$\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A) \subseteq \mathbf{GHZ}(A).$$

Так как l-арный группоид $< A, [\ ] >$ полуабелев тогда и только тогда, когда его полуцентр $\mathbf{HZ}(A)$ совпадает с A, то для полуабелевого l-арного группоида $< A, [\ ] >$ из включений

$$\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A) \subseteq \mathbf{GHZ}(A) \subseteq A = \mathbf{HZ}(A)$$

следуют равенства

$$\mathbf{HZ}(A) = \mathbf{KHZ}(A) = \mathbf{GHZ}(A) = A,$$

а из теоремы 2.6.1 и замечания 2.6.1 вытекает

Следствие 2.6.3. *Если полугруппа* A *коммутативна, подстановка* $\sigma \in \mathrm{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{KHZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = A^J.$$

Замечание 2.6.2. Для l-арной группы различные типы центров и полуцентров, централизаторов и полуцентрализаторов подробно изучены в [28]. В этой книге большой полуцентр l-арной группы называется *слабым полуцентром* или *полуцентром типа* D, Там же для l-арной группы $< A, [\ ] >$ определено множество

$$\mathbf{HTZ}(A, [\ ]) = \{z \in A \mid [zx_1 \ldots x_{l-1}] = [x_1 \ldots x_{l-1}z],\ \forall x_i \in A\},$$

которое называется *полуцентром типа* T.

Напомним (раздел 1.6), что для полугруппы A с центром $\mathbf{Z}(A)$ множество

$$\{\mathbf{z} \in A^J \mid \mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ \forall j \in J\}$$

совпадает с центром $\mathbf{Z}(A^J)$ группоида A^J с операцией, которая определяется покомпонентно:

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

Предложение 2.6.1. *Пусть полугруппа A содержит единицу. Тогда*:

1) *если подстановка* $\sigma \in \mathrm{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то*

$$\mathbf{KHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J);$$

2) *если* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, *то*

$$\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) \subseteq \mathbf{Z}(A^J).$$

Доказательство. 1) Если $\mathbf{z} \in \mathbf{KHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J})$, то для любого элемента a полугруппы A и ее единицы 1 определим функции $\mathbf{e}$, $\mathbf{x} \in A^J$ так, что $\mathbf{e}(j) = 1$, $\mathbf{x}(j) = a$ для любого $j \in J$. Так как

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{x}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

то

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{x}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J}(j),\ j \in J,$$

откуда, используя равенства

$$\sigma^{l-1}(j) = j,\ \mathbf{e}(j) = 1,\ \mathbf{x}(j) = a,\ j \in J,$$

последовательно получаем

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{e}(\sigma(j))\mathbf{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{z}(j),$$

$$\mathbf{z}(j)a = a\mathbf{z}(j).$$

Следовательно, $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$, откуда $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J)$. Таким образом, доказано включение из 1).

2) Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$. Положим $\mathbf{e}(s) = 1$ для любого $s \in J$. Кроме того, для любого $j \in J$ и любого элемента a полугруппы A определим функции $\mathbf{x}_{(j,a)} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{x}_{(j,a)}(j) = \mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-1}(j)) = a,$$

$$\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma(j)) = \mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^2(j)) = \ldots = \mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

Такое определение функций $\mathbf{x}_{(j,a)}$ возможно, так как все значения

$$j = \sigma^{l-1}(j), \sigma(j), \sigma^2(j), \ldots, \sigma^{l-2}(j)$$

различны. Так как

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = [\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J},$$

то

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(s) = [\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J}(s),\ s \in J.$$

В частности,

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{x}_{(j,a)}\ldots\mathbf{x}_{(j,a)}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J}(j),$$

откуда, учитывая определение функций $\mathbf{e}$ и $\mathbf{x}_{(j,a)}$, последовательно получаем

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma(j))\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_{(j,a)}(j)\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma(j))\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}_{(j,a)}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}_{(j,a)}(j)\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)a = a\mathbf{z}(j),\ s \in J.$$

Следовательно, $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$, откуда $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J)$. Таким образом, доказано включение из 2). Предложение доказано.

Лемма 2.6.1. *Пусть некоммутативная полугруппа* A *содержит единицу* 1, $l \geq 3$, *подстановка* $\sigma \in S_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *функция* $\mathbf{z} \in A^J$ *такова, что* $\mathbf{z}(j) = 1$ *для некоторого* $j \in J$. *Тогда* $\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J)$.

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{z} \in \mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J})$.

Для единицы 1 полугруппы A и любых ее элементов a и b таких, что $ab \neq ba$ определим функции $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{y}_1(\sigma(j)) = a,\ \mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) = \ldots = \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j)) = 1,\ \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j) = b.$$

Так как

$$[\mathbf{z}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{x}]_{l, \sigma, J} = [\mathbf{x}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{z}]_{l, \sigma, J},$$

то

$$[\mathbf{z}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{x}]_{l, \sigma, J}(j) = [\mathbf{x}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{z}]_{l, \sigma, J}(j),$$

откуда, используя равенство $\sigma^{l-1}(j) = j$ и определение функций $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x}$, последовательно получаем

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{y}_1(\sigma(j))\mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{y}_1(\sigma(j))\mathbf{y}_2(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{y}_{l-2}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

$$\mathbf{z}(j)a\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(j)a\mathbf{z}(j),$$

$$\mathbf{z}(j)ab = ba\mathbf{z}(j). \qquad (2.6.2)$$

Так как по условию $\mathbf{z}(j) = 1$, то из последнего равенства следует $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b. Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J})$. Лемма доказана.

Теорема 2.6.3. *Пусть некоммутативная полугруппа* A *с левым или правым сокращением содержит единицу,* $l \geq 3$, *подстановка* $\sigma \in S_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l, \sigma, J}) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$. Согласно лемме 2.6.1 значение $\mathbf{z}(j)$ для любого $j \in J$ отлично от единицы полугруппы A.

Зафиксируем $j \in J$ и для любых элементов $a, b \in A$ таких, что $ab \neq ba$ определим функции $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l-2}, \mathbf{x} \in A^J$ так же, как в лемме 2.6.1. Так как

$$[\mathbf{z}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{x}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{x}\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_{l-2}\mathbf{z}]_{l,\sigma,J},$$

то, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.6.1, получим равенство (2.6.2). Из включения $\mathbf{HZ}(A) \subseteq \mathbf{KHZ}(A)$ и утверждения 1) предложения 2.6.1 вытекает $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$, откуда и из (2.6.2) следует

$$\mathbf{z}(j)ab = \mathbf{z}(j)ba,\ ab\mathbf{z}(j) = ba\mathbf{z}(j).$$

Применяя к полученным равенствам соответственно левое, правое сокращение в полугруппе A, получим $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b. Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$. Таким образом, $\mathbf{HZ}(A^J) = \varnothing$. Теорема доказана.

Теорема 2.6.3 и следствие 2.6.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.6.4. *Пусть полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1) *если полугруппа A коммутативна, то*

$$\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = A^J;$$

2) *если полугруппа A некоммутативна, то*

$$\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing.$$

Лемма 2.6.2. *Пусть некоммутативная полугруппа A содержит единицу 1, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, функция $\mathbf{z} \in A^J$ такова, что $\mathbf{z}(j) = 1$ для некоторого $j \in J$. Тогда $\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J)$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$.

Для единицы 1 полугруппы A и любых ее элементов a и b таких, что $ab \neq ba$ определим функцию $\mathbf{x} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{x}(j) = \mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) = b,\ \mathbf{x}(\sigma(j)) = a,\ \mathbf{x}(\sigma^2(j)) = \ldots = \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

Такое определение функции $\mathbf{x}$ возможно, так как все значения

$$j = \sigma^{l-1}(j),\ \sigma(j),\ \sigma^2(j),\ \ldots,\ \sigma^{l-2}(j)$$

различны. Так как

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

то

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J}(j)$$

и далее

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(\sigma^{l-1}(j)),$$

откуда, в силу равенства $\sigma^{l-1}(j) = j$, следует

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}(j) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{x}(\sigma(j))\mathbf{x}(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{x}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{z}(j).$$

Подставляя в полученное равенство соответствующие значения функции $\mathbf{x}$, получим (2.6.2). Так как по условию $\mathbf{z}(j) = 1$, то из (2.6.2) следует $ab = ba$, что противоречит выбору элементов a и b. Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J})$. Лемма доказана.

Теорема 2.6.5. *Пусть некоммутативная полугруппа* A *с левым или правым сокращением содержит единицу,* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда* $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J})$. Согласно лемме 2.6.2 значение $\mathbf{z}(j)$ для любого $j \in J$ отлично от единицы полугруппы A.

Зафиксируем $j \in J$ и для любых элементов $a, b \in A$ таких, что $ab \neq ba$ определим функцию $\mathbf{x} \in A^J$ так же, как в лемме 2.6.2. Так как

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}]_{l,\,\sigma,\,J} = [\underbrace{\mathbf{x}\ldots\mathbf{x}}_{l-1}\mathbf{z}]_{l,\,\sigma,\,J},$$

то, рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2.6.2, получим равенство (2.6.2). Согласно утверждению 2) предложения 2.6.1 имеем $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$. Поэтому из (2.6.2) следует

$$\mathbf{z}(j)ab = \mathbf{z}(j)ba,\ ab\mathbf{z}(j) = ba\mathbf{z}(j).$$

Применяя к полученным равенствам соответственно левое, правое сокращение в полугруппе A, получим равенство $ab = ba$, которое противоречит выбору элементов a и b из A. Следовательно, $\mathbf{z} \notin \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J})$. Таким образом, $\mathbf{GHZ}(A^J) = \varnothing$. Теорема доказана.

Теорема 2.6.5 и следствие 2.6.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.6.6. *Пусть полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$. Тогда*:

1) *если полугруппа A коммутативна, то*

$$\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = A^J;$$

2) *если полугруппа A некоммутативна, то*

$$\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J}) = \varnothing.$$

Из теорем 2.6.4 и 2.6.6 вытекает

Следствие 2.6.4. *Если полугруппа A с левым или правым сокращением содержит единицу, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, то* *в l-арной полугруппе* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *ее полуцентр и большой полуцентр совпадают*:

$$\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}).$$

Так как при $n \geq 2$ полугруппа $\mathbf{M}_n(P)$ некоммутативна, то теоремы 2.4.1, 2.5.1 и 2.6.1 позволяют сформулировать следующую теорему, уточняющую теорему 2.5.7.

Теорема 2.6.7. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– l-арная полугруппа*;

2) *если* $n \geq 2$, *то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3) *если* σ *– нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц*.

Следующая теорема уточняет теорему 2.5.8.

Теорема 2.6.8. *Пусть* $l \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{H}^J(V), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– l-арная полугруппа*;

2) *если рамерность пространства V больше единицы, то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3) *если* σ *– нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц*.

2.7. *l*-АРНАЯ ГРУППА $< A^J, [\ ]_{l,s,J} >$

Предложение 2.7.1. *Если A – группа, то* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– l-арная квазигруппа*.

Доказательство. Покажем, что в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ разрешимо уравнение

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{x}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{b}. \quad (2.7.1)$$

Так как A – группа, то в A для любого $j \in J$ разрешимо уравнение

$$\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))x_{ij}\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{b}(j),$$

решение которого обозначим через $\mathbf{a}_i(\sigma^{i-1}(j))$. Таким образом,

$$\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{a}_i(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{b}(j).$$

Так как σ^{i-1} – подстановка множества J, то при фиксированном i множество $\{\sigma^{i-1}(j) \mid j \in J\}$ совпадает с множеством J. Таким образом, на J определена функция $\mathbf{a}_i$ со значениями в A, то есть $\mathbf{a}_i \in A^J$. Эта функция является решением уравнения (2.7.1), так как из последнего равенства, ввиду следствия 2.2.4 вытекает

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) = \mathbf{b}(j),\ j \in J,$$

откуда

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{b}.$$

Следовательно, $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная квазигруппа. Предложение доказано.

Предложение 2.7.1 и теорема 2.5.1 позволяют сформулировать слеующую теорему.

Теорема 2.7.1. *Если A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная группа.*

Полагая в теореме 2.7.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.7.1. [9]. *Если A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ – l-арная группа.*

Полагая в теореме 2.7.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.7.2. *Если A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$ – l-арная группа.*

Полагая в теореме 2.7.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.7.3. *Если A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, удовлетворяющая условию $\sigma^{l} = \sigma$, то $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}} >$ – l-арная группа.*

Косые элементы. Следующее предложение позволяет для любого элемента $\mathbf{a}$ l-арной группы $< A^{J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ находить его косой элемент $\bar{\mathbf{a}}$.

Предложение 2.7.2. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^{l} = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a}$ l-арной группы $< A^{J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ функция $\mathbf{u} \in A^{J}$ такая, что*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} =$$

$$=(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J$$

является косым элементом, то есть $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{u}$.

Доказательство. Согласно теореме 2.7.1 $< A^{J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная группа. Применяя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, будет иметь

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{u}]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{u}(j) =$$

$$= \mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} = \mathbf{a}(j),$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{u}]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{a}(j),\ j \in J,$$

откуда

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{u}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{a}.$$

Следовательно, $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{u}$. Предложение доказано.

Замечание 2.7.1. Подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ порядка k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ тогда и только тогда, когда k делит $l - 1$, то есть тогда и только тогда, когда $l = sk + 1$ для некоторого натурального s. В этом случае произведение $\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j))$ может быть представлено либо в виде

$$\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)) =$$

$$= (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{a}(j))^{s-1}\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)),$$

либо в виде

$$\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))(\mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{s-1}.$$

Соответственно,

$$(\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} =$$

$$= ((\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{a}(j))^{s-1}\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} =$$

$$= (\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}((\mathbf{a}(j))^{-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1})^{s-1}$$

или

$$(\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} =$$

$$= (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))(\mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{s-1})^{-1} =$$

$$= ((\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}(\mathbf{a}(j))^{-1})^{s-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}.$$

Предложение 2.7.2 и замечание 2.7.1 позволяют сформулировать следующие предложения.

Предложение 2.7.3. *Пусть A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *порядка k, $s \geq 1$. Тогда для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(sk + 1)$*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{sk+1, \sigma, J} >$ *функция* $\mathbf{u} \in A^J$*, определяемая любым из следующих четырех равенств*

$$\mathbf{u}(j) = ((\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))\mathbf{a}(j))^{s-1}\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1},$$

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}((\mathbf{a}(j))^{-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1})^{s-1},$$

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j))(\mathbf{a}(j)\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{s-1})^{-1},$$

$$\mathbf{u}(j) = ((\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}(\mathbf{a}(j))^{-1})^{s-1}(\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}$$

для любого $j \in J$, *является косым элементом, то есть* $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{u}$. *В частности* ($s = 1$), *косой элемент* $\overline{\mathbf{a}}$ *для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(k + 1)$-*арной группы* $< A^J, [\ ]_{k+1, \sigma, J} >$, *определяется любым из следующих равенств*

$$\overline{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1},$$

$$\overline{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{k-1}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J.$$

Полагая в предложении 2.7.3 $\sigma = (j_1\, j_2 \ldots j_k)$ – цикл длины k из $\mathbf{S}_J$, получим

Предложение 2.7.4. *Пусть* A *– группа,* $\sigma = (j_1\, j_2 \ldots j_k)$ *– цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, $s \geq 1$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(sk + 1)$-*арной группы* $< A^J, [\ ]_{sk+1, \sigma, J} >$ *косой элемент* $\overline{\mathbf{a}}$ *определяется следующим образом*: *если* $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, *то*

$$\overline{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(j))^{-1})^{sk-1};$$

если $r = 1, 2, \ldots, k$, *то значение* $\overline{\mathbf{a}}(j_r)$ *определяется любым из следующих четырех равенств*

$$\overline{\mathbf{a}}(j_r) = ((\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k)\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1})\mathbf{a}(j_r))^{s-1}$$
$$\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k)\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1},$$

$$\overline{\mathbf{a}}(j_r) = (\mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_1))^{-1}(\mathbf{a}(j_k))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_{r+1}))^{-1}$$
$$((\mathbf{a}(j_r))^{-1}(\mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_1))^{-1}(\mathbf{a}(j_k))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_{r+1}))^{-1})^{s-1},$$

$$\overline{\mathbf{a}}(j_r) = (\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k)\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1})$$
$$(\mathbf{a}(j_r)\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k)\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1}))^{s-1})^{-1},$$

$$\overline{\mathbf{a}}(j_r) = ((\mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_1))^{-1}(\mathbf{a}(j_k))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_{r+1}))^{-1}(\mathbf{a}(j_r))^{-1})^{s-1}$$

$$(\mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_1))^{-1}(\mathbf{a}(j_k))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_{r+1}))^{-1}.$$

В частности ($s = 1$), *для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(k + 1)$-*арной группы* $< A^J, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,J} >$ *косой элемент* $\bar{\mathbf{a}} \in A^J$ *определяется следующим образом*: *если* $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, *то*

$$\bar{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(j))^{-1})^{k-1};$$

если $r = 1, 2, \ldots, k$, *то значение* $\bar{\mathbf{a}}(j_r)$ *определяется любым из следующих равенств*

$$\bar{\mathbf{a}}(j_r) = (\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k)\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1},$$

$$\bar{\mathbf{a}}(j_r) = (\mathbf{a}(j_{r-1}))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_1))^{-1}(\mathbf{a}(j_k))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(j_{r+1}))^{-1}.$$

Следствие 2.7.4. *Пусть* A – *абелева группа*, $\sigma = (j_1\, j_2 \ldots j_k)$ – *цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$, $s \geq 1$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(sk + 1)$-*арной группы* $< A^J, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,J} >$ *косой элемент* $\bar{\mathbf{a}}$ *определяется следующим образом*: *если* $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, *то*

$$\bar{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(j))^{-1})^{sk-1};$$

если $r = 1, 2, \ldots, k$, *то значение* $\bar{\mathbf{a}}(j_r)$ *определяется любым из следующих равенств*

$$\bar{\mathbf{a}}(j_r) = ((\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_k))^{s-1}\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1})\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k))^{-1},$$

$$\bar{\mathbf{a}}(j_r) = ((\mathbf{a}(j_1))^s \ldots (\mathbf{a}(j_{r-1}))^s(\mathbf{a}(j_r))^{s-1}(\mathbf{a}(j_{r+1}))^s \ldots (\mathbf{a}(j_k))^s)^{-1}.$$

В частности ($s = 1$), *для любого элемента* $\mathbf{a}$ $(k + 1)$-*арной группы* $< A^J, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,J} >$ *косой элемент* $\bar{\mathbf{a}} \in A^J$ *определяется следующим образом*: *если* $j \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, *то*

$$\bar{\mathbf{a}}(j) = (\mathbf{a}(j))^{-1})^{k-1};$$

если $r = 1, 2, \ldots, k$, *то значение* $\bar{\mathbf{a}}(j_r)$ *определяется равенством*

$$\bar{\mathbf{a}}(j_r) = (\mathbf{a}(j_1) \ldots \mathbf{a}(j_{r-1})\mathbf{a}(j_{r+1}) \ldots \mathbf{a}(j_k))^{-1}.$$

Полагая в предложении 2.7.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Предложение 2.7.5 [9]. *Пусть* A – *группа,* σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *косой элемент* $\overline{\mathbf{a}}$ *определяется любым из следующих равенств*

$$\overline{\mathbf{a}} = ((a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)})^{-1}, \ldots, (a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)})^{-1}),$$

$$\overline{\mathbf{a}} = (a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a^{-1}_{\sigma(k)}).$$

Полагая в предложении 2.7.4

$$J = \{1, 2, \ldots, k\},\ \sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k,$$

получим

Предложение 2.7.6. *Пусть* A – *группа,* $\sigma = (12 \ldots k) \in \mathbf{S}_k$, $s \geq 1$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ $(sk + 1)$*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{sk+1,\sigma,k} >$ *элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (c_1, \ldots, c_k)$, *где каждая компонента* c_j $(j = 1, \ldots, k)$ *определяется любым из следующих четырех равенств*

$$c_j = ((a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1} a_j)^{s-1} a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})^{-1},$$

$$c_j = a^{-1}_{j-1}\, \mathbf{K}\, a^{-1}_1 a^{-1}_k\, \mathbf{K}\, a^{-1}_{j+1} (a^{-1}_j a^{-1}_{j-1}\, \mathbf{K}\, a^{-1}_1 a^{-1}_k\, \mathbf{K}\, a^{-1}_{j+1})^{s-1},$$

$$c_j = (a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1} (a_j a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})^{s-1})^{-1},$$

$$c_j = (a^{-1}_{j-1}\, \mathbf{K}\, a^{-1}_1 a^{-1}_k\, \mathbf{K}\, a^{-1}_{j+1} a^{-1}_j)^{s-1} a^{-1}_{j-1}\, \mathbf{K}\, a^{-1}_1 a^{-1}_k\, \mathbf{K}\, a^{-1}_{j+1},$$

является косым элементом. В частности $(s = 1)$, *для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ $(k + 1)$*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ *косой элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (c_1, \ldots, c_k)$ *определяется любым из следующих равенств*

$$c_j = (a_{j+1} \ldots a_k a_1 \ldots a_{j-1})^{-1},\ j = 1, \ldots, k,$$

$$c_j = a^{-1}_{j-1}\, \mathbf{K}\, a^{-1}_1 a^{-1}_k\, \mathbf{K}\, a^{-1}_{j+1},\ j = 1, \ldots, k.$$

Следствие 2.7.5. *Пусть A – абелева группа,* $\sigma = (12 \ldots k)$ *– цикл из* $\mathbf{S}_k$, $s \geq 1$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ $(sk + 1)$*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{sk+1,\, \sigma,\, k} >$ *элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (c_1, \ldots, c_k)$, *где каждая компонента* c_j $(j = 1, \ldots, k)$ *определяется любым из следующих равенств*

$$c_j = ((a_1 \ldots a_k)^{s-1} a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_k)^{-1},$$

$$c_j = (a_1^s \ \mathbf{K}\ a_{j-1}^s a_j^{s-1} a_{j+1}^s \ \mathbf{K}\ a_k^s)^{-1},$$

является косым элементом. В частности $(s = 1)$, *для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ $(k + 1)$*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{k+1,\, \sigma,\, k} >$ *косой элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (c_1, \ldots, c_k)$, *определяется равенством*

$$c_j = (a_1 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_k)^{-1},\ j = 1, \ldots, k.$$

Полагая в предложении 2.7.2 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.7.6. *Пусть A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots)$ l*-арной группы* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\, \sigma,\, \mathrm{N}} >$ *элемент*

$$(a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(2)} \ldots a^{-1}_{\sigma(2)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(2)} \ldots a^{-1}_{\sigma(2)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K}).$$

Полагая в предложении 2.7.2 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.7.7. *Пусть A – группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (\ldots, a_{-j}, \ldots, a_0, \ldots, a_j, \ldots)$ l*-арной группы* $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\, \sigma,\, \mathrm{Z}} >$ *элемент*

$$(\mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(-j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(-j)}, \mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(0)} \ldots a^{-1}_{\sigma(0)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathbf{a}} = (\mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(-j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(-j)}, \mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(0)} \ldots a^{-1}_{\sigma(0)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a^{-1}_{\sigma(j)},\ \mathbf{K}).$$

Косые элементы в тернарной группе $< A^J, [\ ]_{3,\, s,\, J} >$. Полагая в предложениях 2.7.2, 2.7.5 и 2.7.6, а также в следствиях 2.7.6 и 2.7.7 $l = 3$, получим еще ряд следствий.

Следствие 2.7.8. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента* $\mathbf{a}$ *тернарной группы $< A^J, [\ ]_{3,\, \sigma,\, J} >$ функция $\mathbf{u} \in A^J$ такая, что*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J$$

является косым элементом для $\mathbf{a}$, *то есть* $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{u}$.

Следствие 2.7.9. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *тернарной группы $< A^k, [\ ]_{3,\, \sigma,\, k} >$ элемент*

$$(a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma(k)})$$

является косым элементом для $\mathbf{a}$, *то есть* $\overline{\mathbf{a}} = (a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma(k)})$.

Следствие 2.7.10. *Если A – группа, то для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *тернарной группы $< A^2, [\ ]_{3,\, (12),\, 2} >$ косым элементом является элемент* $\overline{\mathbf{a}} = (a_2^{-1}, a_1^{-1})$.

Следствие 2.7.11. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$, удовлетворяющая условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots)$ *тернарной группы $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{3,\, \sigma,\, \mathrm{N}} >$ элемент*

$$(a^{-1}_{\sigma(1)}, a^{-1}_{\sigma(2)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K})$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть* $\overline{\mathbf{a}} = (a^{-1}_{\sigma(1)}, a^{-1}_{\sigma(2)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K})$.

Следствие 2.7.12. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$, удовлетворяющая условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (\ldots, a_{-j}, \ldots, a_0, \ldots, a_j, \ldots)$ *тернарной группы $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{3,\, \sigma,\, \mathrm{Z}} >$ элемент*

$$(\mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma(-j)}, \mathbf{K}, a^{-1}_{\sigma(0)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma(j)}, \mathbf{K})$$

является косым для **a**, *то есть*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{K}, a_{\sigma(-j)}^{-1}, \mathbf{K}, a_{\sigma(0)}^{-1}, \ldots, a_{\sigma(j)}^{-1}, \mathbf{K}).$$

Пример 2.7.1. Положим в следствии 2.7.7

$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345\,\mathbf{K} & 5(m-1)+1 & 5(m-1)+2 & 5(m-1)+3 & 5(m-1)+4 & 5m & \mathbf{K} \\ 53421\,\mathbf{K} & 5m & 5(m-1)+3 & 5(m-1)+4 & 5(m-1)+2 & 5(m-1)+1 & \mathbf{K} \end{pmatrix},$$

где $m = 1, 2, \ldots$. Так как $\sigma^7 = \sigma$, то $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{7,\sigma,\mathrm{N}} >$ – 7-арная группа с 7-арной операцией

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]_{7,\sigma,\mathrm{N}} =$$

$$= (a_{11}a_{25}a_{31}a_{45}a_{51}a_{65}a_{71}, a_{12}a_{23}a_{34}a_{42}a_{53}a_{64}a_{72}, a_{13}a_{24}a_{32}a_{43}a_{54}a_{62}a_{73},$$

$$a_{14}a_{22}a_{33}a_{44}a_{52}a_{63}a_{74}, a_{15}a_{21}a_{35}a_{41}a_{55}a_{61}a_{75}, \ldots$$

$$\ldots, a_{1j}a_{2\sigma(j)}a_{3\sigma^2(j)}a_{4\sigma^3(j)}a_{5\sigma^4(j)}a_{6\sigma^5(j)}a_{7j}, \ldots),$$

где

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5}, \ldots, a_{ij}, \ldots),\ i = 1, 2, , \ldots, 7.$$

Кроме того, элемент

$$(\varepsilon_5^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_5^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_5^{-1}, \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1}, \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4^{-1},$$

$$\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_2^{-1}, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_5^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_5^{-1}\varepsilon_1^{-1}, \ldots, \varepsilon_{\sigma^5(j)}^{-1}\varepsilon_{\sigma^4(j)}^{-1}\varepsilon_{\sigma^3(j)}^{-1}\varepsilon_{\sigma^2(j)}^{-1}\varepsilon_{\sigma(j)}^{-1}, \ldots)$$

является косым для элемента $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \ldots, \varepsilon_j, \ldots)$.

Центр и полуцентры *l*-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,s,J} >$. Если группа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_J$, то, согласно теореме 2.3.1 l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ неабелев. В действительности имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2.7.2. *Пусть* A *– группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *если группа A – неединичная, подстановка σ – нетождественная, то центр l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ пуст, то есть* $\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$;

2) *если подстановка σ – тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in A^J \mid \mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A),\ \forall j \in J\},$$

где $\mathbf{Z}(A)$ – центр группы A.

Доказательство. 1) Следует из теоремы 2.7.1 и теоремы 2.3.2, если в последней в качестве полугруппы A взять группу и заметить, что в любой l-арной группе $< A, [\ ] >$ левый $\mathbf{Z}_L(A)$ и правый $\mathbf{Z}_R(A)$ центры совпадают с ее центром $\mathbf{Z}(A)$.

2) Если $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$, то

$$[\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-1}]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{u}\mathbf{z}\underbrace{\mathbf{u}\ldots\mathbf{u}}_{l-2}]_{l,\sigma,J} \qquad (2.7.2)$$

для любого $\mathbf{u} \in A^J$, откуда, используя предложение 2.2.1, получим

$$\mathbf{z}(j)\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-1} = \mathbf{u}(j)\mathbf{z}(j)\underbrace{\mathbf{u}(j)\ldots\mathbf{u}(j)}_{l-2},\ j \in J,$$

$$\mathbf{z}(j)\mathbf{u}(j) = \mathbf{u}(j)\mathbf{z}(j),\ j \in J.$$

Из полученного равенства, в силу произвольного выбора $\mathbf{u}(j) \in A$ следует $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$.

Обратно, если $\mathbf{z}(j) \in \mathbf{Z}(A)$ для любого $j \in J$, то, рассуждая в обратном порядке, убеждаемся в справедливости равенства (2.7.2). Следовательно, $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$. Теорема доказана.

Следствие 2.7.13. *Если A – неединичная группа, $s \geq 1$, то $(sk + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{sk+1,(12\ \ldots\ k),k} >$ имеет пустой центр.*

Следствие 2.7.14. *Если A – неединичная группа, то $(k + 1)$-арная группа $< A^k, [\ ]_{k+1,(12\ \ldots\ k),k} >$ имеет пустой центр.*

Следствие 2.7.15. *Если A – неединичная группа, то тернарная группа $< A^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ имеет пустой центр.*

Замечание 2.7.2. Правая часть в равенстве из утверждения 2) теоремы 2.7.2 совпадает с множеством $(\mathbf{Z}(A))^J$, которое, в свою очередь, совпадает с центром $\mathbf{Z}(A^J)$ группы A^J с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

Поэтому равенство из утверждения 2) теоремы 2.7.2 может быть переписано в виде

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = (\mathbf{Z}(A))^J = \mathbf{Z}(A^J).$$

Если в теоремах 2.6.1 и 2.6.2 в качестве полугруппы A взять группу, то получим еще две теоремы.

Теорема 2.7.3. *Если A – группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда группа A – абелева.*

Теорема 2.7.4. *Если A – группа, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ полуабелева*;

2) *l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ слабо полуабелева*;

3) *группа A – абелева*.

Теоремам 2.6.4 и 2.6.6 соответствуют следующие две теоремы.

Теорема 2.7.5. *Пусть A – группа, $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1) *если группа A абелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = A^J$*;

2) *если группа A неабелева, то $\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$*.

Теорема 2.7.6. *Пусть A – группа, σ – цикл длины $l - 1 \geq 2$ из $\mathbf{S}_J$. Тогда*:

1) *если группа A абелева, то $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = A^J$*;

2) *если группа A неабелева, то* $\mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$.

Из теорем 2.7.5 и 2.7.6 ытекает

Следствие 2.7.16. *Если A – группа,* σ *– цикл длины* $l - 1 \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_J$*, то в l-арной группе* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *ее полуцентр и большой полуцентр совпадают*:

$$\mathbf{HZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{GHZ}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}).$$

Следствие 2.7.16 вытекает также из следствия 2.6.4.

Единицы в *l*-арной группе $< A^J, [\ ]_{l,s,J} >$. Теоремы 2.4.1 и 2.5.4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.7.7. *Пусть A – группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *если группа A – неединичная, подстановка* σ *– нетождественная, то в l-арной группе* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *нет единиц, то есть* $\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \varnothing$;

2) *если подстановка* σ *– тождественная, то*

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u}(j) \in \mathbf{Z}(A), (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1, \forall j \in J\},$$

где 1 *– единица группы A.*

Замечание 2.7.3. Правая часть в равенстве из утверждения 2) теоремы 2.7.7 может быть переписана в виде

$$\{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u} \in (\mathbf{Z}(A))^J = \mathbf{Z}(A^J), \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\}$$

или, что то же самое, в виде

$$\{\mathbf{u} \in \mathbf{Z}(A^J) \mid \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\},$$

где **e** – функция, все значения которой равны единице 1 группы *A*. Эта функция является единицей группы A^J с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j), j \in J.$$

Таким образом, равенство из утверждения 2) теоремы 2.7.7 может быть переписано в виде

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u} \in \mathbf{Z}(A^J), \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\}$$

или в виде

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{Z}(A^J) \mid \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\}.$$

Имеея ввиду замечания 2.7.2 и 2.7.3, а также равенство $\mathbf{Z}(A^J) = (\mathbf{Z}(A))^J$, переформулируем утверждения 2) теорем 2.7.2 и 2.7.7.

Предложение 2.7.7. *Пусть* A *– группа,* ε *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*

$$\mathbf{Z}(A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J}) = \mathbf{Z}(A^J) = (\mathbf{Z}(A))^J,$$

$$\mathbf{E}(A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{Z}(A^J) \mid \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\} = \{\mathbf{u} \in (\mathbf{Z}(A))^J \mid \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\}.$$

Если $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, то, согласно предложению 2.7.7

$$\mathbf{Z}(A^k, [\ ]_{l,\varepsilon,k}) = (\mathbf{Z}(A))^k.$$

Поэтому, если группа A имеет конечный центр $\mathbf{Z}(A)$, то верно

Следствие 2.7.17. *Пусть* A *– группа с конечным центром* $\mathbf{Z}(A)$, ε *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*

$$|\mathbf{Z}(A^k, [\ ]_{l,\varepsilon,k})| = |\mathbf{Z}(A)|^k.$$

Так как, согласно предложению 2.2.1 l-арная операция $[\ ]_{l,\varepsilon,J}$ является производной от операции

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J$$

в группе A^J, то первое равенство из предложения 2.7.7 может быть получено как следствие предложения 1.2.9, а второе – как следствие предложения 1.2.10

***l*-Арные группы вида** $< A^J, [\ ]_{l,s,J} >$ **для некоторых классических групп**. Теперь можно сформулировать аналоги теорем

2.5.5 и 2.5.7 для множества $\mathbf{S}_X^J$ всех функций из множества J в группу $\mathbf{S}_X$ всех подстановок множества X и для множества $\mathbf{GL}_n^J(P)$ всех функций из множества J в группу $\mathbf{GL}_n(P)$ всех матриц из $\mathbf{M}_n(P)$ с определителем, отличным от нуля поля P.

Теорема 2.7.8. *Пусть $l \geq 3$, подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, множество X содержит более двух элементов. Тогда*:

1) $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– l-арная подгруппа l-арной полугруппы* $< \boldsymbol{\mathcal{F}}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

2) *полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$ *l-арной группы* $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *пуст, а сама она неполуабелева, в частности, неабелева*;

3) *если подстановка σ – нетождественная, то l-арная группа* $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

4) *если подстановка σ – тождественная, то единственной единицей l-арной группы* $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, *как и единственным элементом ее центра, является функция $\mathbf{e} \in \mathbf{S}_X^J$ такая, что $\mathbf{e}(j) = 1$ для любого $j \in J$, где 1 – единица группы $\mathbf{S}_X$, то есть*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{E}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\}.$$

Доказательство. 1) Следует из теоремы 2.7.1.

2) Так как множество X содержит более двух элементов, то группа $\mathbf{S}_X$ неабелева, откуда и из теоремы 2.7.5 следует пустота полуцентра $\mathbf{HZ}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J})$. А это означает неполуабелевость, в частности, неабелевость l-арной группы $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

3) Следует из теорем 2.4.1 и 2.7.2.

4) Так как множество X содержит более двух элементов, то единственным элементом центра группы $\mathbf{S}_X$ является ее единица 1. Тогда из теоремы 2.7.2 вытекает

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\},$$

а из теоремы 2.7.7 вытекает

$$\mathbf{E}(\mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.7.9. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– l-арная подгруппа l-арной полугруппы* $< \mathbf{M}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

2) *l-арная группа* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *имеет пустой полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$ *и является неполуабелевой, в частности, неабелевой*;

3) *если подстановка* σ *– нетождественная, то l-арная группа* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

4) *если подстановка* σ *– тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_j E_n,\ u_j \in P^*,\ \forall j \in J\},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_j E_n,\ u_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in J\},$$

где E_n *– единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 *– единица поля* P.

Доказательство. 1) Следует из теоремы 2.7.1.

2) Так как $n \geq 2$, то группа $\mathbf{GL}_n(P)$ неабелева, откуда и из теоремы 2.7.5 следует пустота полуцентра $\mathbf{HZ}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$. А это означает, неполуабелевость, в частности, неабелевость l-арной группы $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

3) Следует из теорем 2.4.1 и 2.7.2.

4) Так как центр группы $\mathbf{GL}_n(P)$ совпадает с множеством

$$\{M \in \mathbf{GL}_n(P) \mid M = uE_n,\ u \in P^*\}$$

всех скалярных матриц из $\mathbf{GL}_n(P)$, то из утверждения 2) теоремы 2.7.2 вытекает первое равенство.

Так как из $(uE_n)^{l-1} = E_n$ следует $u^{l-1} = 1$, то из утверждения 2) теоремы 2.7.7 вытекает второе равенство. Теорема доказана.

Таким образом, согласно утверждению 4) теоремы 2.7.9 функция $\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$ принадлежит центру $\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$ l-арной группы $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$; функция $\mathbf{z} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$ является единицей в $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$, порядок которых делит $l - 1$.

Полагая в утверждении 1) теоремы 2.7.9 $P = \mathrm{C}$ – поле всех комплексных чисел, $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \ldots k)$, получим следующий результат Э. Поста.

Следствие 2.7.18 [2]. *Если* $k \geq 2$, $n \geq 2$, *то универсальная алгебра* $< \mathbf{GL}_n^k(\mathrm{C}), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ *является* l*-арной группой.*

Замечание 2.7.4. Теорема 2.7.9 останется верной, если в ней группу $\mathbf{GL}_n(P)$ заменить изоморфной ей группой $\mathbf{GL}(V)$ всех невырожденных линейных преобразований линейного пространства V над полем P. Используя предложение 2.5.3, несложно установить, что l-арные группы $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ и $< \mathbf{GL}^J(V), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ изоморфны.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.7.9.

Теорема 2.7.10. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l*-арная подгруппа* l*-арной группы*

$< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

2) *l-арная группа* $<\mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$ *и является неполуабелевой, в частности, неабелевой;*

3) *если подстановка* σ *– нетождественная, то l-арная группа* $<\mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц;*

4) *если подстановка* σ *– тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{SL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_jE_n,\ u_j \in P^*,\ \forall j \in J\},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{SL}_n^J(P) \mid \mathbf{z}(j) = u_jE_n,\ u_j^{l-1} = 1,\ \forall j \in J\},$$

где E_n *– единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 *– единица поля* P.

Замечание 2.7.5. Ясно, что

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n^J(P)) = \mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n^J(P)) \cap \mathbf{SL}_n^J(P),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n^J(P)) = \mathbf{E}(\mathbf{GL}_n^J(P)) \cap \mathbf{SL}_n^J(P).$$

Для проективной общей линейной группы $\mathbf{PGL}_n(P)$ и проективной специальной линейной группы $\mathbf{PSL}_n(P)$ справедливы теоремы, которые доказываются аналогично теоремам 2.7.9 и 2.7.10. При этом учитывается тривиальность центров групп $\mathbf{PGL}_n(P)$ и $\mathbf{PSL}_n(P)$.

Теорема 2.7.11. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда:*

1) $<\mathbf{PGL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *– неполуабелева l-арная группа с пустым полуцентром* $\mathbf{HZ}(\mathbf{PGL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$;

2) *если подстановка* σ *– нетождественная, то l-арная группа* $<\mathbf{PGL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц;*

3) *если подстановка* σ *– тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{PGL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{E}(\mathbf{PGL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\},$$

где **e** *– постоянная функция из* $\mathbf{PGL}_n^J(P)$ *все значения которой равны единице группы* $\mathbf{PGL}_n(P)$.

Теорема 2.7.12. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{PSL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– неполуабелева* l*-арная группа с пустым полуцентром* $\mathbf{HZ}(\mathbf{PSL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J})$;

2) *если подстановка* σ *– нетождественная, то* l*-арная группа* $< \mathbf{PSL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

3) *если подстановка* σ *– тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{PSL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \mathbf{E}(\mathbf{PSL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J}) = \{\mathbf{e}\},$$

где **e** *– постоянная функция из* $\mathbf{PSL}_n^J(P)$ *все значения которой равны единице группы* $\mathbf{PSL}_n(P)$.

Для нахождения l-арных подгрупп в l-арной группе $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ удобно пользоваться сформулированными ниже двумя леммами. Первая из них является следствием определения операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и теоремы 2.7.1, а вторая вытекает из более общего утверждения, которое будет доказано разделе 2.12.

Лемма 2.7.1. *Если* B *– подгруппа группы* A, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *–* l*-арная подгруппа* l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Лемма 2.7.2. *Пусть* $l \geq 3$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, A *– группа,* B *– ее подгруппа индекса 2,* C *– смежный класс* A *по* B, *отличный от* B. *Тогда*:

1) $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *и* $< B^J \cup C^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *–* l*-арные подгруппы* l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

2) *если* l *– нечетное, то и* $< C^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *–* l*-арная подгруппа* l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

3) *если множество J содержит более одного элемента, то* $< B^J \cup C^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *– собственная l-арная подгруппа l-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Замечание 2.7.6. Если J – одноэлементное множество, то множества B^J, C^J и A^J отождествляются с множествами B, C и A соответственно. В этом случае

$$B^J \cup C^J = B \cup C = A = A^J.$$

Напомним (раздел 1.7), что в симметрической группе $\mathbf{S}_X$ имеются финитарная симметрическая группа $\mathbf{SF}_X$, знакопеременная группа $\mathbf{A}_X$ всех четных подстановок, а также множество $\mathbf{B}_X$ всех нечетных подстановок.

Замечание 2.7.7. Теорема 2.7.8 останется верной, если в ней симметрическую группу $\mathbf{S}_X$ заменить финитарной симметрической группой $\mathbf{SF}_X$.

Теорема 2.7.13. *Пусть $l \geq 3$, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда* $< \mathbf{SF}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, $< \mathbf{A}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, *а также* $< \mathbf{A}_X^J \mathbf{U}\, \mathbf{B}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *– l-арные подгруппы l-арной группы* $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$. *Если l – нечетное, то и* $< \mathbf{B}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *– l-арная подгруппа этой l-арной группы.*

Доказательство. Для $< \mathbf{SF}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ и $< \mathbf{A}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ применяется лемма 2.7.1.

Если в лемме 2.7.2 положить

$$A = \mathbf{SF}_X,\ B = \mathbf{A}_X,\ C = \mathbf{B}_X,$$

то, согласно утверждению 1) $< \mathbf{A}_X^J \mathbf{U}\, \mathbf{B}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{SF}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, а значит и l-арной группы $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Если l – нечетное, то согласно утверждению 2) леммы 2.7.2, $< \mathbf{B}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная подгруппа в $< \mathbf{SF}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$, а значит и в $< \mathbf{S}_X^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$. Теорема доказана.

Замечание 2.7.8. Для некоторых подгрупп полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$, удовлетворяющих всем условиям леммы 2.7.2, можно сфомулировать результат, аналогичный теореме 2.7.13. Например, если в лемме 2.7.2 положить: A – унимодулярная группа квадратных матриц порядка n над полем P; $B = \mathbf{SL}_n(P)$ – специальная линейная группа матриц из A с определителем, равным единице поля P; $C \neq B$ – смежный класс A по B, то есть множество всех матриц из A, у которых определитель равен $-1 \in P$.

2.8. ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В $< A^J, [\ ]_{l,\, s,\, J} >$

Теорема 2.8.1. *Если* 0 *– нуль группоида* A, *то функция* $\mathbf{0} \in A^J$ *такая, что* $\mathbf{0}(j) = 0$ *для любого* $j \in J$, *является нулем* l*-арного группоида* $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *каждое из множеств* J *и* A *содержит более одного элемента, то в* $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

Доказательство. Пусть

$$i \in \{1, 2, \ldots, l\}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l \in A^J, \mathbf{a}_i = \mathbf{0},$$

и положим

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\, \sigma,\, J} = \mathbf{y}.$$

Неравенство $i \leq l$ и равенство $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ гарантируют, что для любого $j \in J$ в произведении

$$\mathbf{a}_1(j)(\mathbf{a}_2(\sigma(j))(\ldots (\mathbf{a}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j))) \ldots))$$

присутствует сомножитель $\mathbf{a}_i(\sigma^{i-1}(j)) = 0$. А так как по теореме 2.2.1

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{a}_1(j)(\mathbf{a}_2(\sigma(j))(\ldots (\mathbf{a}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)),$$

то $\mathbf{y}(j) = 0$ для любого $j \in J$. Тем самым доказано равенство

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{0}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\, \sigma,\, J} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\mathbf{0}$ – нуль l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$.

Выше для $i = 1$ мы полагали $\sigma^{i-1}(j) = \sigma^0(j) = j$, то есть в этом случае $\mathbf{a}_1(j) = 0$.

Далее для сокращения записей мы не будем в длинных произведениях элементов из A расставлять скобки, указывающие порядок выполнения бинарной операции в группоиде A, считая, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Пусть $l \geq 3$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, $\mathbf{c}$ – произвольный элемент из A^J. Считаем также, что в группоиде A имеются элементы, отличные от 0. Зафиксируем $k \in J$ и рассмотрим три случая.

1) Если $i \geq 3$, то положим:

$$\mathbf{a}_1(k) \neq 0,\ \mathbf{a}_1(j) = 0,\ j \in J,\ j \neq k;$$

$$\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0},\ \mathbf{a}_2(\sigma(k)) = 0;$$

$$\mathbf{a}_s \neq \mathbf{0},\ s \in \{3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, l\}.$$

Тогда, полагая

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{c}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{z},$$

для $j \in J$, $j \neq k$ имеем

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{c}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= 0\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{c}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) = 0,$$

для $j = k$ имеем

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{a}_1(k)\mathbf{a}_2(\sigma(k))\mathbf{a}_3(\sigma^2(k)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(k))$$

$$\mathbf{c}(\sigma^{i-1}(k))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(k)0\mathbf{a}_3(\sigma^2(k)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(k))\mathbf{c}(\sigma^{i-1}(k))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) = 0.$$

Таким образом, если $i \geq 3$, то

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{c}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{0}, \qquad (2.8.1)$$

где все $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$.

2) Если $i = 2$, то положим: $\mathbf{a}_1$ таким же, как и в случае $i \geq 3$; в $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ компонента $\mathbf{a}_3(\sigma^2(k))$ равна нулю группоида A; элементы

$\mathbf{a}_4, \ldots, \mathbf{a}_l$ отличны от нуля l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$; $\mathbf{z}$ такое же, как и в случае 1). Тогда снова $\mathbf{z}(j) = 0$ для $j \in J, j \neq k$,

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{a}_1(k)\mathbf{c}(\sigma(k))\mathbf{a}_3(\sigma^2(k))\mathbf{a}_4(\sigma^3(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(k)\mathbf{c}(\sigma(k))0\mathbf{a}_4(\sigma^3(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) = 0.$$

Таким образом, для $i = 2$ равенство (2.8.1) также верно.

3) Если $i = 1$, то положим:

$$\mathbf{a}_2(\sigma(k)) \neq 0,\ \mathbf{a}_2(\sigma(j)) = 0,\ j \in J, j \neq k;$$

$\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_l$ такие же, как и в случае $i = 2$. Тогда

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{c}(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j))\mathbf{a}_3(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{c}(j)0\mathbf{a}_3(\sigma^2(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) = 0,\ j \in J, j \neq k,$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{c}(k)\mathbf{a}_2(\sigma(k))\mathbf{a}_3(\sigma^2(k))\mathbf{a}_4(\sigma^3(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) =$$

$$= \mathbf{c}(k)\mathbf{a}_2(\sigma(k))0\mathbf{a}_4(\sigma^3(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(k)) = 0.$$

Таким образом, и в случае $i = 1$ верно равенство (2.8.1). Следовательно, $\mathbf{c}$ – делитель нуля l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.8.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.8.1. *Если* 0 *– нуль группоида A, то* $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$ *– нуль l-арного группоида* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, $k \geq 2$, *группоид A содержит более одного элемента, то в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

Следствие 2.8.2 [9]. *Если элемент* 0 *является нулем полугруппы A, то* $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$ *– нуль l-арного группоида* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, $k \geq 2$, *полугруппа A содержит более одного элемента, то в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

Полагая в теореме 2.8.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.8.3. *Если элемент* 0 *является нулем группоида* A, *то*

$$\mathbf{0} = (0_0 = 0, \dots, 0_j = 0, \dots)$$

– нуль l*-арного группоида* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

Полагая в теореме 2.8.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.8.4. *Если элемент* 0 *является нулем группоида* A, *то*

$$\mathbf{0} = (\dots, 0_{-j} = 0, \dots, 0_0 = 0, \dots, 0_j = 0, \dots)$$

– нуль l*-арного группоида* $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *группоид* A *содержит более одного элемента, то в* $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}} >$ *все элементы являются делителями нуля.*

Представляет интерес следующее

Предложение 2.8.1. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, K *– конечное подмножество мощности* k *множества* J, $l \geq k$, σ *– подстановка множества* J, *сужение которой на подмножество* K *действует на нем так же, как некоторый цикл длины* k. *Если значение функции* $\mathbf{a} \in A^J$ *в некоторой точке* $j \in K$ *равно нулю* ($\mathbf{a}(j) = 0$), *то*

$$[\underbrace{\mathbf{a}\dots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\sigma,J}(s) = 0 \qquad (2.8.2)$$

для любого $s \in K$, *то есть функция* $[\underbrace{\mathbf{a}\dots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\sigma,J}$, *по крайней мере,* k *раз принимает зна*чение 0.

Доказательство. Так как $s \in K$ и σ действует на K как цикл длины k, то элементы $s, \sigma(s), \dots, \sigma^{k-1}(s)$ составляют все множество

K. Следовательно, $j = \sigma^t(s)$ для некоторого $t = 0, 1, \ldots, k - 1$. Поэтому неравенство $l \geq k$ гарантирует, что в произведении

$$\mathbf{a}(s)(\mathbf{a}(\sigma(s))(\ldots (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(s))\mathbf{a}(\sigma^{l-1}(s))) \ldots))$$

присутствует сомножитель

$$\mathbf{a}(\sigma^t(s)) = \mathbf{a}(j) = 0.$$

А так как по теореме 2.2.1

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l}]_{l,\, \sigma,\, J}\,(s) = \mathbf{a}(s)(\mathbf{a}(\sigma(s))(\ldots (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(s))\mathbf{a}(\sigma^{l-1}(s))) \ldots)).$$

то верно (2.8.2). Предложение доказано.

Замечание 2.8.1. Если среди всех независимых циклов подстановки σ множества J присутствует конечный цикл длины k, то в качестве подмножества K в предложении 2.8.1 можно взять σ-инвариантное подмножество, на котором действует указанный цикл длины k.

Полагая в предложении 2.8.1 $K = J = \{1, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.8.5. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, $j \in \{1, \ldots, k\}$, $l \geq k$, σ – *цикл длины k из $\mathbf{S}_k$,*

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \ldots, a_k) \in A^k.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l}]_{l,\, \sigma,\, \mathrm{k}} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}) = \mathbf{0}.$$

Из следствия 2.8.5 вытекает

Следствие 2.8.6 [9]. *Пусть полугруппа A обладает нулем* 0, $j \in \{1, \ldots, k\}$, σ – *цикл длины k из S_k, удовлетворяющий условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \ldots, a_k) \in A^k.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\,\sigma,\,k} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k}) = \mathbf{0}.$$

Полагая в предложении 2.8.1 $J = \mathrm{N}$, $k \geq 2$,

$$K = \mathrm{N}_{\lambda} = \{(\lambda - 1)k + 1,\ \ldots,\ \lambda k - 1,\ \lambda k\} \subseteq \mathrm{N},$$

для некоторого $\lambda \in \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.8.7. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, $k \geq 2$, $l \geq k$, $\lambda \in \mathrm{N}$,

$$j \in \mathrm{N}_{\lambda} = \{(\lambda - 1)k + 1,\ \ldots,\ \lambda k - 1,\ \lambda k\},$$

σ *– подстановка множества* N, *сужение которой на подмножество* N_{λ} *действует на нем так же, как цикл длины* k,

$$\mathbf{a} = (a_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a_j = 0,\ a_{j+1},\ \ldots,\ a_k,\ \ldots) \in A^{\mathrm{N}}.$$

Тогда, если

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\,s,\,\mathrm{N}} = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_s,\ \ldots)$$

для некоторого $j \in \mathrm{N}$, *то*

$$u_{(\lambda-1)k+1} = u_{(\lambda-1)k+2} = \ldots = u_{\lambda k} = 0.$$

Непосредственным следствием предложения 2.8.1 является следующее

Предложениеие 2.8.2. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, *множество J представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* J_{λ} ($\lambda \in \Lambda$) *мощности* k_{λ}, $l \geq k_{\lambda}$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *такова, что ее сужение на каждое подмножество* J_{λ} *действует на нем как некоторый цикл* σ_{λ}, *длина которого совпадает с мощностью этого подмножества. Если в каждом* J_{λ} *зафиксировать* j_{λ} *и выбрать в* A^J *функцию* $\mathbf{a}$ *так, что* $\mathbf{a}(j_{\lambda}) = 0$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$, *то*

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{0}.$$

Замечание 2.8.2. Если все независимые циклы подстановки σ множества J конечны и их длины ограничены числом l, то в качестве подмножеств J_λ в предложении 2.8.2 можно взять σ-инвариантные подмножества, на которых действуют указанные независимые циклы.

Полагая в предложении 2.8.2 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 2.8.8. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, *множество* N *представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* N_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *мощности* k_λ, $l \geq k_\lambda$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_\mathrm{N}$ *такова, что ее сужение на каждое подмножество* N_λ *действует на нем как некоторый цикл* σ_λ, *длина которого совпадает с мощностью этого подмножества. Если в каждом* N_λ *зафиксировать число* n_λ *и положить*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots) \in A^\mathrm{N},$$

где компоненты a_{n_λ} $(\lambda \in \Lambda)$ *равны нулю, то*

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = \mathbf{0}.$$

Из следствия 2.8.8 вытекает

Следствие 2.8.9. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, $k \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_\mathrm{N}$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k-1 & k & \ldots & (\lambda-1)k+1 & \ldots & \lambda k-1 & \lambda k & \ldots \\ 2 & \ldots & k & 1 & \ldots & (\lambda-1)k+2 & \ldots & \lambda k & (\lambda-1)k+1 & \ldots \end{pmatrix},$$

$l \geq k$. *Если в каждом множестве*

$$\mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda-1)k+1, \ldots, \lambda k-1, \lambda k\},\ \lambda \in \mathrm{N}$$

зафиксировать число n_λ *и положить*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots) \in A^\mathrm{N},$$

где компоненты a_{n_λ} $(\lambda \in \mathrm{N})$ *равны нулю, то*

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\,\sigma,\,\mathbf{N}} = \mathbf{0}.$$

Пример 2.8.1. Положим в следствии 2.8.8 $k = 3$, $l = 4$. Тогда подстановка σ из этого следствия примет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3\lambda-2 & 3\lambda-1 & 3\lambda & \ldots \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3\lambda-1 & 3\lambda & 3\lambda-2 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Если в каждом трехэлементном множестве

$$\mathrm{N}_\lambda = \{p_\lambda = 3\lambda - 2,\ q_\lambda = 3\lambda - 1,\ r_\lambda = 3\lambda\},\ \lambda \in \mathrm{N}$$

зафиксировать первые элементы

$$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ \ldots,\ p_\lambda = 3\lambda - 2,\ \ldots,$$

то для любого элемента

$$\mathbf{a} = (0, a_2, a_3, 0, a_5, a_6, \ldots, 0, a_{3\lambda-1}, a_{3\lambda}, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}$$

верно равенство $[\mathbf{aaaa}]_{4,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = \mathbf{0}$.

Если в каждом множестве N_λ зафиксировать вторые элементы

$$q_1 = 2,\ q_2 = 5,\ \ldots,\ q_\lambda = 3\lambda - 1,\ \ldots,$$

то для любого элемента

$$\mathbf{b} = (b_1, 0, b_3, b_4, 0, b_6, \ldots, b_{3\lambda-2}, 0, b_{3\lambda}, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}$$

верно равенство $[\mathbf{bbbb}]_{4,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = \mathbf{0}$.

Если в каждом множестве N_λ зафиксировать третьи элементы

$$r_1 = 3,\ r_2 = 6,\ \ldots,\ r_\lambda = 3\lambda,\ \ldots,$$

то для любого элемента

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, 0, c_4, c_5, 0, \ldots, c_{3\lambda-1}, c_{3\lambda-2}, 0, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}$$

верно равенство $[\mathbf{cccc}]_{4,\,\sigma,\,\mathrm{N}} = \mathbf{0}$.

Полагая в предложении 2.8.2 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 2.8.10. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, *множество* Z *представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* Z_λ ($\lambda \in \Lambda$) *мощности* k_λ, $l \geq k_\lambda$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_Z$ *такова, что ее сужение на каждое подмножество* Z_λ *действует на нем как некоторый цикл* σ_λ, *длина которого совпадает с мощностью этого подмножества. Если в каждом* Z_λ *зафиксировать число* z_λ *и положить*

$$\mathbf{a} = (\ldots, a_{-j}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots) \in A^Z,$$

где компоненты a_{z_λ} ($\lambda \in \Lambda$) *равны нулю, то*

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l}]_{l,\sigma,Z} = \mathbf{0}.$$

Пример 2.8.2. Положим в следствии 2.8.10 $l = 3$, представим множество Z в виде объединения своих подмножеств

$$Z_\lambda = \{p_\lambda = -\lambda,\ q_\lambda = \lambda\},\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

мощности, не превосходящей 2, и зафиксируем подстановку

$$\sigma \in \begin{pmatrix} \ldots & -j & \ldots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & j & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & \ldots & -j & \ldots \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_Z.$$

Если в каждом двухэлементном множестве $Z_\lambda = \{-\lambda, \lambda\}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$ зафиксировать первые элементы

$$p_1 = -1,\ p_2 = -2,\ \ldots,\ p_\lambda = -\lambda,\ \ldots$$

и положить $Z_0 = \{0\}$, то для любого элемента

$$\mathbf{a} = (\ldots, 0, \ldots, 0, 0, a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots) \in A^Z$$

верно равенство $[\mathbf{aaa}]_{3,\sigma,Z} = \mathbf{0}$.

Если в каждом двухэлементном множестве $Z_\lambda = \{-\lambda, \lambda\}$, $\lambda = 1, 2, \ldots$ зафиксировать вторые элементы

$$q_1 = 1,\ q_2 = 2,\ \ldots,\ q_\lambda = \lambda,\ \ldots$$

и положить $Z_0 = \{0\}$, то $[\mathbf{bbb}]_{3,\sigma,Z} = \mathbf{0}$ для любого

$$\mathbf{b} = (\ldots, b_{-j}, \ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0 = 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in A^Z.$$

2.9. ИДЕМПОТЕНТЫ В $< A^J, [\ ]_{l,\, s,\, J} >$

Пример 2.9.1. Пусть a идемпотент группоида A, $\mathbf{c}_a$ – постоянная функция из A^J, значение которой для любого $j \in J$ равно a. Проделав соответствующие вычисления, несложно убедиться в том, что для любого $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ функция $\mathbf{c}_a$ является идемпотентом в l-арном группоиде $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$.

Пример 2.9.1 обобщается следующим предложеием.

Предложение 2.9.1. *Если A – группоид, то элемент* $\mathrm{e} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)(\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))(\ldots (\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-1}(j))) \ldots)) = \boldsymbol{\varepsilon}(j). \qquad (2.9.1)$$

Доказательство. Если e – идемпотент в $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$, то

$$[\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \ldots \boldsymbol{\varepsilon}}_{l}]_{l,\, \sigma,\, J} = \mathrm{e},$$

откуда, согласно определению операции $[\ ]_{l,\, \sigma,\, J}$ вытекает (2.9.1).

Если теперь для любого $j \in J$ верно (2.9.1), то верно предыдущее равенство, то есть e – идемпотент в $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$. Предложение доказано.

Следствие 2.9.1. *Если A – группоид, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)(\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))(\ldots (\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j))\boldsymbol{\varepsilon}(j)) \ldots)) = \boldsymbol{\varepsilon}(j).$$

Заменяя в предложении 2.9.1 и следствии 2.9.1 группоид полугруппой, получим еще два следствия.

Следствие 2.9.2. *Если A – полугруппа, то элемент* $\mathrm{e} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-1}(j)) = \boldsymbol{\varepsilon}(j).$$

Следствие 2.9.3. *Если A – полугруппа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathrm{e} \in A^J$ является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in J$ выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j))\boldsymbol{\varepsilon}(j) = \boldsymbol{\varepsilon}(j).$$

Заменяя в следствии 2.9.3 полугруппу группой, получим

Следствие 2.9.4. *Если A – группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathrm{e} \in A^J$ является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in J$ выполняется либо условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1,$$

либо условие

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j))\boldsymbol{\varepsilon}(j) = 1,$$

где 1 *– единица группы A.*

В следствии 2.9.4 j может пробегать не все множество J, а только его часть.

Теорема 2.9.1. *Пусть A – группа,* 1 *– ее единица, J – дизъюнктное объединение конечных множеств*

$$J_\lambda = \{j_{\lambda 1}, \ldots, j_{\lambda l_\lambda}\},\ l_\lambda \geq 1,\ \lambda \in \Lambda,$$

подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, а ее сужение на каждое множество J_λ действует на нем как цикл длины l_λ. Тогда для того, чтобы элемент e *являлся идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ необходимо, чтобы для любого $\lambda \in \Lambda$ и любого $j_{\lambda i} \in J_\lambda$ выполнялось равенство*

$$\mathrm{e}(j_{\lambda i})\mathrm{e}(\sigma(j_{\lambda i}))\mathrm{e}(\sigma^2(j_{\lambda i})) \ldots \mathrm{e}(\sigma^{l-2}(j_{\lambda i})) = 1, \qquad (2.9.2)$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ и некоторого $j_{\lambda i} \in J_\lambda$.

Доказательство. *Неоходимость*. Если e является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, то, согласно следствию 2.9.4

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1$$

для любого $j \in J$. Следовательно, для любого $\lambda \in \Lambda$ и любого $j_{\lambda i} \in J_\lambda$ верно (2.9.2).

Достаточность. Пусть теперь для любого $\lambda \in \Lambda$ и некоторого $j_{\lambda i} \in J_\lambda$ верно (2.9.2). Так как сужение σ на множество J_λ действует на нем как цикл длины l_λ, то

$$J_\lambda = \{j_{\lambda i}, \sigma(j_{\lambda i}), \sigma^2(j_{\lambda i}), \ldots, \sigma^{l_\lambda - 1}(j_{\lambda i})\}.$$

Для сокращения записей положим

$$m_1 = j_{\lambda i},\ m_2 = \sigma(j_{\lambda i}),\ m_3 = \sigma^2(j_{\lambda i}), \ldots, m_{l_\lambda} = \sigma^{l_\lambda - 1}(j_{\lambda i}).$$

Тогда (2.9.2) примет вид

$$\mathrm{e}(m_1)\mathrm{e}(\sigma(m_1))\mathrm{e}(\sigma^2(m_1)) \ldots \mathrm{e}(\sigma^{l-2}(m_1)) = 1. \qquad (2.9.3)$$

Так как $\sigma(m_1) = m_2$, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-1}(m_1)) = \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(\sigma(m_1))) = \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(m_2)),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_1)) = \boldsymbol{\varepsilon}(m_2),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^s(m_1)) = \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{s-1}(\sigma(m_1))) = \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{s-1}(m_2)),\ s = 2, \ldots, l-2.$$

Полученные равенства позволяют переписать (2.9.3) в виде

$$\mathrm{e}(m_1)\boldsymbol{\varepsilon}(m_2)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_2)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_2)) = 1,$$

откуда последовательно получаем

$$\mathbf{(}\mathrm{e}(m_1)\mathbf{)}^{\mathbf{-1}}\mathrm{e}(m_1)\boldsymbol{\varepsilon}(m_2)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_2)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_2))\mathrm{e}(m_1)) = \mathbf{(}\mathrm{e}(m_1)\mathbf{)}^{\mathbf{-1}}\mathrm{e}(m_1),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_2)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_2)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_2))\mathrm{e}(m_1)) = 1,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_2)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_2)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_2))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(m_2)) = 1. \qquad (2.9.4)$$

Так как $\sigma(m_2) = m_3$, то аналогичные вычисления показывают, что из (2.9.4) следует

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_3)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_3)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_3))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(m_3)) = 1.$$

Продолжая процесс, убеждаемся в том, что из

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_{l_\lambda-1})\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_{l_\lambda-1})) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_{l_\lambda-1}))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(m_{l_\lambda-1})) = 1$$

следует

$$\boldsymbol{\varepsilon}(m_{l_\lambda})\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(m_{l_\lambda})) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-3}(m_{l_\lambda}))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(m_{l_\lambda})) = 1.$$

Таким образом, равенство (2.9.2) верно для любого $j_{\lambda i} \in J_\lambda$. А так как λ выбран в Λ произвольно, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1$$

для любого $j \in J$. Тогда, согласно следствию 2.9.4 элемент e является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Теорема доказана.

Замечание 2.9.1. В формулировке теоремы 2.9.1 каждому конечному подмножеству

$$J_\lambda = \{j_{\lambda 1}, \ldots, j_{\lambda l_\lambda}\},\ l_\lambda \geq 1,\ \lambda \in \Lambda,$$

входящему в дизъюнктное объединение множества J, можно поставить в соответствие некоторый цикл $\sigma_\lambda \in \mathbf{S}_J$ с носителем $\mathbf{T}(\sigma_\lambda) = J_\lambda$. Так как во множестве $\boldsymbol{\Phi} = \{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$любые два цикла независимы, то сущесвует одна и только одна подстановка σ такая, что $\boldsymbol{\Phi}(\sigma) = \boldsymbol{\Phi}$. Заметим, что если в дизъюнктное объединение множества J входят одноэлементные множества J_λ, то множество $\boldsymbol{\Phi}(\sigma)$ содержит одноэлементные циклы вида (j).

Если для любого подмножества J_λ число l_λ его элементов делит $l-1$, то порядок любого цикла $\sigma_\lambda \in \boldsymbol{\Phi}(\sigma) = \boldsymbol{\Phi}$, совпадающий с l_λ, также делит $l-1$. Следовательно, и порядок подстановки σ делит $l-1$, то есть она удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$.

Ясно, что поставив в соответствие каждому подмножеству J_λ цикл δ_λ из $\mathbf{S}_J$ с носителем J_λ, отличный от σ_λ, можно получить подстановку δ, отличную от σ, которая удовлетворяет условию $\delta^l = \delta$.

Таким образом, теорема 2.9.1 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.9.2. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица,* J *– дизъюнктное объединение конечных множеств* J_λ *мощности* $l_\lambda \geq 1$, *делящей* $l - 1$ $(\lambda \in \Lambda)$, σ_λ *– цикл из* $\mathbf{S}_J$ *с носителем* $\mathbf{T}(\sigma_\lambda) = J_\lambda$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *с множеством всех независимых циклов* $\boldsymbol{\Phi}(\sigma) = \{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $j_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$ *выполнялось равенство*

$$\mathrm{e}(j_\lambda)\mathrm{e}(\sigma(j_\lambda))\mathrm{e}(\sigma^2(j_\lambda)) \ldots \mathrm{e}(\sigma^{l-2}(j_\lambda)) = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $j_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$.

Замечание 2.9.2. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то ее порядок делит $l - 1$. Тогда порядок любого цикла τ из множества $\boldsymbol{\Phi}(\sigma)$ всех независимых циклов подстановки σ также делит $l - 1$. Отсюда следует, что и число элементов носителя $\mathbf{T}(\tau)$ цикла τ, совпадающее с порядком этого цикла, делит $l - 1$. Так как для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ множество J является дизъюнктным объединением носителей $\mathbf{T}(\tau)$ по всем циклам $\tau \in \boldsymbol{\Phi}(\sigma)$, то теорема 2.9.2 позволяет сформулировать следующую «компактную» теорему.

Теорема 2.9.3. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *необходимо, чтобы для любого цикла* $\tau \in \boldsymbol{\Phi}(\sigma)$ *и любого* $j \in \mathbf{T}(\tau)$ *выполнялось равенство*

$$\mathrm{e}(j)\mathrm{e}(\sigma(j))\mathrm{e}(\sigma^2(j)) \ldots \mathrm{e}(\sigma^{l-2}(j)) = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого цикла $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *и некоторого* $j \in \mathbf{T}(\tau)$.

Идемпотенты с нулевыми компонентами. Ясно, что если группоид A обладает нулем 0, то элемент $\mathbf{0} \in A^J$, все значения которого равны 0, является идемпотентом в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Пример 2.1.1 показывает, что идемпотентами в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ могут быть и функции, принимающие как нулевые, так и ненулевые значения. Изучим эту ситуацию подробнее.

Если $\boldsymbol{\varepsilon}$ – идемпотент в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, то $[\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \dots \boldsymbol{\varepsilon}}_{l}]_{l,\sigma,J} = e$. Поэтому из предложения 2.8.1 вытекает

Предложение 2.9.2. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, K *– конечное подмножество мощности* k *множества* J, $l \geq k$, σ *– подстановка множества* J, *сужение которой на подмножество* K *действует на нем так же, как некоторый цикл длины* k, *функция* $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, *принимающим в некоторой точке* $j \in K$ *значение, равное нулю* ($\boldsymbol{\varepsilon}(j) = 0$). *Тогда* $\boldsymbol{\varepsilon}(s) = 0$ *для любого* $s \in K$, *то есть идемпотент* $\boldsymbol{\varepsilon}$, *по крайней мере,* k *раз принимает значение* 0.

Непосредственным следствием предложения 2.9.2 является следующее

Предложение 2.9.3. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, *множество* J *представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* J_λ ($\lambda \in \Lambda$) *мощности* k_λ, $l \geq k_\lambda$ *для любого* $\lambda \in \Lambda$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *такова, что ее сужение на каждое подмножество* J_λ *действует на нем как некоторый цикл* σ_λ, *длина которого совпадает с мощностью этого подмножества, функция* $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. *Тогда, если для любого* $\lambda \in \Lambda$ *существует* $j_\lambda \in J_\lambda$ *такое, что* $\boldsymbol{\varepsilon}(j_\lambda) = 0$, *то* $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$.

Предложение 2.9.3 и замечание 2.9.1 позволяют сформулировать следующее предложение.

Предложение 2.9.4. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, J *– дизъюнктное объединение конечных множеств* J_λ *мощности* $l_\lambda \geq 1$ $(\lambda \in \Lambda)$, *не превосходящей* l, σ_λ *– цикл из* $\mathbf{S}_J$ *с носителем* $\mathbf{T}(\sigma_\lambda) = J_\lambda$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$ *с множеством всех независимых циклов* $\mathbf{\Phi}(\sigma) = \{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, *функция* $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. *Тогда, если для любого* $\lambda \in \Lambda$ *существует такое* $j_\lambda \in J_\lambda$, *что* $\boldsymbol{\varepsilon}(j_\lambda) = 0$, *то* $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$.

Предложение 2.9.4 и замечание 2.9.2 позволяют сформулировать следующее предложение.

Предложение 2.9.5. *Пусть группоид* A *обладает нулем* 0, *все независимые циклы подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *конечны и их длины ограничены числом* l, *функция* $\boldsymbol{\varepsilon} \in A^J$ *является идемпотентом в* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$. *Тогда, если для любого цикла* $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *существует такое* $j \in \mathbf{T}(\tau)$, *что* $\boldsymbol{\varepsilon}(j) = 0$, *то* $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$.

Идемпотенты в $< A^k, [\ ]_{l,s,k} >$. Полагая в следствии 2.9.3 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим следующее

Предложение 2.9.6 [9]. *Если* A *– полугруппа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является идемпотентом в* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ *удовлетворяют условиям*

$$\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}\varepsilon_1 = \varepsilon_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_k\varepsilon_{\sigma(k)}\varepsilon_{\sigma^2(k)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(k)}\varepsilon_k = \varepsilon_k.$$

Полагая в теореме 2.9.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим следующую теорему.

Теорема 2.9.4 [9]. *Если* A *– группа,* 1 *– ее единица,* $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ *– разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *является* *идемпотентом в* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$ *тогда и только тогда, когда компоненты* ε_m*, индексы которых подстановка* σ *оставляет неподвижными, удовлетворяют условию*

$$\varepsilon_m^{l-1} = 1,$$

а компоненты, индексы которых переставляются подстановкой $\sigma_r(r = 1, \ldots, p)$*, удовлетворяют условию*

$$\varepsilon_{j_r}\varepsilon_{\sigma(j_r)}\varepsilon_{\sigma^2(j_r)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(j_r)} = 1,$$

для некоторого j_r*, входящего в запись цикла* σ_r.

Заметим, что в необходимом утверждении теоремы 2.9.4 последнее равенство из ее формулировки верно для любого j_r, входящего в запись цикла σ_r. Кроме того, так как цикл $\sigma \in S_k$ длины k имеет порядок k, то из условия $\sigma^l = \sigma$ следует $l - 1 = sk$ для некоторого $s \geq 1$. Поэтому теорема 2.9.4 позволяет сформулировать

Следствие 2.9.5. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица,* σ *– цикл длины* k из $\mathbf{S}_k$, $s \geq 1$. *Тогда для того, чтобы элемент* $e = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ *являлся идемпотентом в* $(sk + 1)$*-арной группе* $< A^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k} >$ *необходимо, чтобы для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *выполнялось равенство*

$$\underbrace{\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)} \ldots \varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)}}_{s} = 1$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для некоторого $j = 1, 2, \ldots, k$. *Другими словами,*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_j\varepsilon_{\sigma(j)}\varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(j)})^s = 1\}$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

При $j = 1$ из следствия 2.9.5 вытекает

Следствие 2.9.6 [9]. *Если* A *– группа,* 1 *– ее единица,* σ *– цикл длины* k из $\mathbf{S}_k$, $s \geq 1$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)})^s = 1\}.$$

При $s = 1$ из следствия 2.9.6 вытекает

Следствие 2.9.7 [9]. *Если A – группа, 1 – ее единица, σ – цикл длины k из $\mathbf{S}_k$, то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)} = 1\}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)})^{-1}\}.$$

Полагая в следствии 2.9.7 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 2.9.8 [9]. *Если A – группа, 1 – ее единица, то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k = 1\}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1} \in A,\ \varepsilon_k = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1})^{-1}\},$$
$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^{-1}\}.$$

Если A – конечная группа порядка r, то в $(k+1)$-арной группе $< A^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} >$ ровно r^{k-1} идемпотентов и ровно $r^{k-1}(r-1)$ элементов, не являющихся идемпотентами.

Считая в следствии 2.9.5 или в следствии 2.9.6 группу A абелевой, получим

Следствие 2.9.9 [9]. *Если A – абелева группа, 1 – ее единица, σ – цикл длины k* из $\mathbf{S}_k$, $s \geq 1$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid (\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^s = 1\}.$$

Полагая в следствии 2.9.9 $s = 1$, или, считая в следствии 2.9.7 группу A абелевой, получим

Следствие 2.9.10 [9]. *Если A – абелева группа, 1 – ее единица, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k \mid \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k = 1\}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1} \in A,\ \varepsilon_k = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1})^{-1}\},$$
$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) =$$
$$= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in A,\ \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^{-1}\}.$$

Считая в следствиях 2.9.9 и 2.9.10 группу A циклической порядка m, получим следующие два следствия.

Следствие 2.9.11. *Если* $\mathbf{Z}_m$ *– циклическая группа порядка m с порождающим элементом a, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *то элемент*

$$(a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_k}) \in Z_m^k,\ r_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\},\ j = 1, \ldots, k$$

является идемпотентом в $(sk + 1)$*-арной группе* $< Z_m^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k} >$ *тогда и только тогда, когда m делит* $(r_1 + r_2 + \ldots, + r_k)s$.

Следствие 2.9.12. *Если* $\mathbf{Z}_m$ *– циклическая группа порядка m с порождающим элементом a, σ – цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$, *то элемент*

$$(a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_k}) \in Z_m^k,\ r_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\},\ j = 1, \ldots, k$$

является идемпотентом в $(k + 1)$*-арной группе* $< Z_m^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k} >$ *тогда и только тогда, когда m делит* $r_1 + r_2 + \ldots, + r_k$. *Всего в* $< Z_m^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k} >$ *имеется ровно* m^{k-1} *идемпотентов.*

При получении следствия 2.9.12 учитывалось следствия 2.9.8.

Полагая в следствиях 2.9.11 и 2.9.12 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 2.9.13. *Если* $\mathbf{Z}_m$ *– циклическая группа порядка* m *с порождающим элементом* a, *то элемент*

$$(a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_k}) \in Z_m^k, r_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, j = 1, \ldots, k$$

является идемпотентом в $(sk+1)$*-арной группе*

$$< Z_m^k, [\ ]_{sk+1,\,(12\ \ldots\ k),\,k} >$$

тогда и только тогда, когда m *делит* $(r_1 + r_2 + \ldots, + r_k)s$.

Следствие 2.9.14. *Если* $\mathbf{Z}_m$ *– циклическая группа порядка* m *с порождающим элементом* a, *то элемент*

$$(a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_k}) \in Z_m^k, r_j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, j = 1, \ldots, k$$

является идемпотентом в $(k+1)$*-арной группе*

$$< Z_m^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ \ldots\ k),\,k} >$$

тогда и только тогда, когда m *делит* $r_1 + r_2 + \ldots, + r_k$. *Всего в* $< Z_m^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ \ldots\ k),\,k} >$ *имеется ровно* m^{k-1} *идемпотентов.*

При $m = k$ из следствия 2.9.14 вытекает следующий результат Г.Н. Воробьева.

Следствие 2.9.15. [42]. *Если* $\mathbf{Z}_k$ *– циклическая группа порядка* k *с порождающим элементом* a, *то элемент*

$$e = (a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_k}) \in Z_k^k, r_j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, j = 1, \ldots, k$$

является идемпотентом в $(k+1)$*-арной группе*

$$< Z_k^k, [\ ]_{k+1,\,(12\ \ldots\ k),\,k} >$$

тогда и только тогда, когда k *делит* $r_1 + r_2 + \ldots, + r_k$.

Пример 2.9.2. Если в следствии 2.9.14 $m = k = 2$, то для показателей r_1, r_2, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$, сумма $r_1 + r_2$ делится на $m = 2$ только при

$$r_1 = r_2 = 0,\ r_1 = r_2 = 1.$$

Таким образом, множество $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^2, [\ ]_{3,(12),2})$ всех идемпотентов тернарной группы $< Z_2^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ состоит из двух элементов и имеет вид

$$\mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^2, [\ ]_{3,(12),2}) = \{(1, 1), (a, a)\},$$

где a – порождающий элемент группы $\mathbf{Z}_2$, 1 – ее единица.

Пример 2.9.3. Если в следствии 2.9.14 $m = 3$, $k = 2$, то для показателей r_1, r_2, принимающих значения из множества $\{0, 1, 2\}$, сумма $r_1 + r_2$ делится на $m = 3$ только при

$$r_1 = r_2 = 0;\ r_1 = 1,\ r_2 = 2;\ r_1 = 2,\ r_2 = 1.$$

Таким образом, множество $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^2, [\ ]_{3,(12),2})$ всех идемпотентов тернарной группы $< Z_3^2, [\ ]_{3,(12),2} >$ состоит из трех элементов и имеет вид

$$\mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^2, [\ ]_{3,(12),2}) = \{(1, 1), (a, a^2), (a^2, a)\},$$

где a – порождающий элемент группы $\mathbf{Z}_3$, 1 – ее единица.

Пример 2.9.4. Если в следствии 2.9.12 $m = 2$, $k = 3$, то для показателей r_1, r_2, r_3, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$, сумма $r_1 + r_2 + r_2$ делится на $m = 2$ только при

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0;\ r_1 = 0,\ r_2 = r_3 = 1;$$

$$r_1 = 1,\ r_2 = 0,\ r_3 = 1;\ r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = 0.$$

Таким образом, множества $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(123),3})$ и $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(132),3})$ всех идемпотентов 4-арных групп $< \mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(123),3} >$ и $< \mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(132),3} >$, состоящие из четырех элементов совпадают:

$$\mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(123),3}) = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_2^3, [\ ]_{4,(132),3}) =$$

$$= \{(1, 1, 1), (1, a, a), (a, 1, a), (a, a, 1)\},$$

где a – порождающий элемент группы $\mathbf{Z}_2$, 1 – ее единица.

Пример 2.9.5. Если в следствии 2.9.14 $m = 3$, $k = 3$, то для показателей r_1, r_2, r_3, принимающих значения из множества $\{0, 1, 2\}$, сумма $r_1 + r_2 + r_2$ делится на $m = 3$ только при

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0;$$

$$r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2; r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = 1;$$

$$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 2; r_1 = 2, r_2 = 0, r_3 = 1;$$

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 0; r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 0;$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1; r_1 = r_2 = r_3 = 2.$$

Таким образом, множества $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^3, [\ ]_{4,\,(123),\,3})$ и $\mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^3, [\ ]_{4,\,(132),\,3})$ всех идемпотентов 4-арных групп $< Z_3^3, [\ ]_{4,\,(123),\,3} >$ и $< Z_3^3, [\ ]_{4,\,(132),\,3} >$, состоящие из восьми элементов, совпадают:

$$\mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^3, [\ ]_{4,\,(123),\,3}) = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_3^3, [\ ]_{4,\,(132),\,3}) =$$

$$= \{(1, 1, 1), (1, a, a^2), (1, a^2, a), (a, 1, a^2),$$

$$(a^2, 1, a), (a, a^2, 1), (a^2, a, 1), (a, a, a), (a^2, a^2, a^2)\},$$

где a – порождающий элемент группы $\mathbf{Z}_3$, 1 – ее единица.

Примеры 2.9.4 и 2.9.5 показывают, что для разных n-арных групп, определенных на одном и том же множестве, множества всех их идемпотентов могут совпадать. Имеет место следующее общее утверждение, вытекающее из следствия 2.9.9.

Следствие 2.9.16. *Если A – абелева группа, σ и τ – циклы длины k* из $\mathbf{S}_k$, $s \geq 1$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{I}(A^k, [\ ]_{sk+1,\,\tau,\,k}).$$

Полагая в следствии 2.9.16 $s = 1$, получим

Следствие 2.9.17. *Если A – абелева группа, σ и τ – циклы длины k* из $\mathbf{S}_k$, *то*

$$\mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\sigma,\,k}) = \mathbf{I}(A^k, [\ ]_{k+1,\,\tau,\,k}).$$

Полагая в предложении 2.9.2 $K = J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.9.18. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, σ – *цикл длины k из S_k, $l \geq k$, элемент*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k$$

является идемпотентом в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. *Тогда либо* $\varepsilon_s = 0$ *для любого* $s = 1, 2, \ldots, k$, *то есть* $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, *либо* $\varepsilon_s \neq 0$ *для любого* $s = 1, 2, \ldots, k$.

Таким образом, согласно следствию 2.9.18, если группоид A обладает нулем, σ – цикл длины k из S_k, $l \geq k$, то у любого идемпотента l-арного группоида $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ все компоненты либо равны нулю, либо отличны от нуля.

Полагая в следствии 2.9.18 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 2.9.19. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, $l \geq k$, *элемент*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k$$

является идемпотентом в $< A^k, [\ ]_{l,(12\ldots k),k} >$. *Тогда либо* $\varepsilon_s = 0$ *для любого* $s = 1, 2, \ldots, k$, *то есть* $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, *либо* $\varepsilon_s \neq 0$ *для любого* $s = 1, 2, \ldots, k$.

Идемпотенты в $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,s,\mathrm{N}} >$ и $< A^{\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,s,\mathrm{Z}} >$. Полагая в теоремах 2.9.1 – 2.9.3 $J = \mathrm{N}$, получим следующие три результата.

Теорема 2.9.5. *Пусть A – группа,* 1 *– ее единица, множество* N *представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* N_λ ($\lambda \in \Lambda$), *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_\mathrm{N}$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *а ее сужение на каждое множество* N_λ *действует на нем как цикл, длина которого совпадает с мощностью этого множества. Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda$ *выполнялось равенство*

$$\varepsilon_{n_\lambda}\varepsilon_{\sigma(n_\lambda)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(n_\lambda)} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda$.

Теорема 2.9.6. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица,* N *– дизъюнктное объединение своих конечных подмножеств* N_λ *мощности* $l_\lambda \geq 1$, *делящей* $l-1$ $(\lambda \in \Lambda)$, σ_λ *– цикл из* $\mathbf{S}_\mathrm{N}$ *с носителем* $\mathbf{T}(\sigma_\lambda) = \mathrm{N}_\lambda$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_\mathrm{N}$ *с множеством всех независимых циклов* $\mathbf{\Phi}(\sigma) = \{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^\mathrm{N}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $n_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$ *выполнялось равенство из теоремы* 2.9.5, *и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $n_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$.

Теорема 2.9.7. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_\mathrm{N}$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^\mathrm{N}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$ *необходимо, чтобы для любого цикла* $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *и любого* $n \in \mathbf{T}(\tau)$ *выполнялось равенство*

$$\varepsilon_n \varepsilon_{\sigma(n)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(n)} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого цикла $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *и некоторого* $n \in \mathbf{T}(\tau)$.

Следствие 2.9.20. *Пусть* A *– группа,* 1 *– ее единица,* $s \geq 1$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_\mathrm{N}$ *такая же, как в следствии* 2.8.9. *Тогда для того, чтобы элемент* $\mathrm{e} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j, \ldots) \in A^\mathrm{N}$ *являлся идемпотентом в* $(sk+1)$*-арной группе* $< A^\mathrm{N}, [\ ]_{sk+1,\sigma,\mathrm{N}} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \mathrm{N}$ *и любого*

$$n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda-1)k+1, \ldots, \lambda k - 1, \lambda k\}$$

выполнялось равенство

$$\underbrace{\varepsilon_{n_\lambda} \varepsilon_{\sigma(n_\lambda)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(n_\lambda)} \ldots \varepsilon_{n_\lambda} \varepsilon_{\sigma(n_\lambda)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(n_\lambda)}}_{s} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda$.

Долазательство. Ясно, что множество N представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств

$$\mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda - 1)k + 1, \ldots, \lambda k - 1, \lambda k\},\ \lambda \in \mathrm{N}.$$

Подстановку σ можно определить как подстановку, сужение которой на каждое подмножество N_λ действует на нем как цикл,

$$\sigma_\lambda = \begin{pmatrix} (\lambda-1)k+1 & \ldots & \lambda k-1 & \lambda k \\ (\lambda-1)k+2 & \ldots & \lambda k & (\lambda-1)k+1 \end{pmatrix},$$

длина которого совпадает с мощностью k этого множества. Так как подстановка σ^k является тождественной, то $\sigma^{sk+1} = \sigma$. Осталось применить теорему 2.9.5. Следствие доказано.

Замечание 2.9.3. Подстановку σ из следствия 2.8.9 можно рассматривать как “бесконечное произведение” независимых циклов σ_λ. Каждый цикл σ_λ – это подстановка множества N, которая на подмножестве N_λ действует как соответствующий цикл, а числа, не входящие в N_λ, оставляет на месте.

При $s = 1$ из следствия 2.9.20 вытекает

Следствие 2.9.21. *Пусть A – группа, 1 – ее единица, подстановка σ из $\mathbf{S}_\mathrm{N}$ имеет тот же вид, что и в следствии 2.9.20. Тогда для того, чтобы элемент $e = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j, \ldots) \in A^\mathrm{N}$ являлся идемпотентом в $(k + 1)$-арной группе $< A^\mathrm{N}, [\ ]_{k+1, \sigma, \mathrm{N}} >$ необходимо, чтобы для любого $\lambda \in \mathrm{N}$ и любого*

$$n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda - 1)k + 1, \ldots, \lambda k - 1, \lambda k\}$$

выполнялось равенство

$$\varepsilon_{n_\lambda}\varepsilon_{\sigma(n_\lambda)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{k-1}(n_\lambda)} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ и некоторого $n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda$.

Полагая в следствии 2.9.21 $k = 2$, $n_\lambda = 2\lambda - 1$, получим

Следствие 2.9.22. *Пусть A – группа,* 1 *– ее единица,*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 & \ldots & 2\lambda-1 & 2\lambda & \ldots \\ 2\,1\,4\,3 & \ldots & 2\lambda & 2\lambda-1 & \ldots \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{\mathrm{N}}.$$

Тогда множество всех идемпотентов тернарной группы $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{3,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$ *имеет вид*

$$\mathbf{I}(A^{\mathrm{N}}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2\lambda-1}, \varepsilon_{2\lambda}, \ldots) \in A^{\mathrm{N}} \mid \varepsilon_{2\lambda-1}\varepsilon_{2\lambda} = 1,\ \lambda \in \mathrm{N}\}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{I}(A^{\mathrm{N}}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_1^{-1}, \varepsilon_2, \varepsilon_2^{-1}, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon_m^{-1}, \ldots) \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \ldots \in A\}.$$

Замечание 2.9.4. Сужение подстановки σ из следствия 2.9.22 действует на каждом подмножестве

$$\mathrm{N}_\lambda = \{2\lambda - 1, 2\lambda\}, \lambda \in \mathrm{N}$$

как цикл длины 2.

Тернарная операция $[\ ]_{3,\,\sigma,\,\mathrm{N}}$ в этом следствии имеет вид

$$[(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots)(b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots)(c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots)]_{3,\,\sigma,\,\mathrm{N}} =$$

$$= (a_1b_2c_1, a_2b_1c_2, \ldots, a_{2m-1}b_{2m}c_{2m-1}, a_{2m}b_{2m-1}c_{2m}, \ldots).$$

Полагая в предложении 2.9.2

$$J = \mathrm{N}, K = \mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda - 1)k + 1, \ldots, \lambda k - 1, \lambda k\}, \lambda \in \mathrm{N},$$

получим

Следствие 2.9.23. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, $l \geq k$, $\lambda \in \mathrm{N}$, σ *– подстановка множества* N, *сужение которой на подмножество*

$$\mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda - 1)k + 1, \ldots, \lambda k - 1, \lambda k\}$$

действует на нем так же, как некоторый цикл длины k, элемент

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}$$

является идемпотентом в $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$. *Тогда, если* $\varepsilon_j = 0$ *для некоторого* $j \in \mathrm{N}_\lambda$, *то*

$$\varepsilon_{(\lambda-1)k+1} = \varepsilon_{(\lambda-1)k+2} = \ldots = \varepsilon_{\lambda k} = 0.$$

Из следствия 2.9.23 вытекает

Следствие 2.9.24. *Пусть группоид A обладает нулем* 0, $s \geq 1$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$ *такая же, как в следствиях* 2.8.9 и 2.9.20, *элемент*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j, \ldots) \in A^{\mathrm{N}}$$

является идемпотентом в $< A^{\mathrm{N}}, [\ ]_{sk+1,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$. *Тогда, если для любого* $\lambda \in \Lambda$ *существует такое*

$$n_\lambda \in \mathrm{N}_\lambda = \{(\lambda-1)k+1, \ldots, \lambda k-1, \lambda k\},$$

что $\varepsilon_{n_\lambda} = 0$, *то*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \ldots, \varepsilon_j = 0, \ldots) = \mathbf{0}.$$

Следствия 2.9.24 может быть получено и как следствие из предложения 2.9.3.

Пример 2.9.6. Положим в следствии 2.9.20 $A = \mathrm{R}^{\bullet}$ $\cdot$ – мультипликативная группа всех действительных чисел, отличных от нуля. Тогда

$$\mathbf{I}(\mathrm{R}^{*\mathrm{N}}) = \{(a_1, \frac{1}{a_1}, a_2, \frac{1}{a_2}, \ldots, a_m, \frac{1}{a_m}, \ldots) \mid a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots \in \mathrm{R}^{\bullet}\}$$

– множество всех идемпотентов тернарной группы $< \mathrm{R}^{\bullet\mathbf{N}}, [\ ]_{3,\,\sigma,\,\mathrm{N}} >$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 & \mathbf{K} & 2m-1 & 2m & \mathbf{K} \\ 2\,1\,4\,3 & \mathbf{K} & 2m & 2m-1 & \mathbf{K} \end{pmatrix} \in A^{\mathrm{N}}.$$

Полагая в теоремах 2.9.1 – 2.9.3 $J = \mathrm{Z}$, получим следующие три результата.

Теорема 2.9.8. *Пусть A – группа,* 1 *– ее единица, множество* Z *представимо в виде дизъюнктного объединения своих конечных подмножеств* Z_λ ($\lambda \in \Lambda$), *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$ *удовлетворяет* *условию* $\sigma^l = \sigma$, *а ее сужение на каждое множество* Z_λ *действует на нем как цикл, длина которого совпадает с мощностью этого множества. Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^Z, [\ ]_{l,\sigma,Z} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $z_\lambda \in Z_\lambda$ *выполнялось равенство*

$$\varepsilon_{z_\lambda}\varepsilon_{\sigma(z_\lambda)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(z_\lambda)} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $z_\lambda \in Z_\lambda$.

Теорема 2.9.9. *Пусть* A *– группа*, 1 *– ее единица*, Z *– дизъюнктное объединение своих конечных подмножеств* Z_λ *мощности* $l_\lambda \geq 1$, *делящей* $l-1$ $(\lambda \in \Lambda)$, σ_λ *– цикл из* $\mathbf{S}_Z$ *с носителем* $\mathbf{T}(\sigma_\lambda) = Z_\lambda$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_Z$ *с множеством всех независимых циклов* $\mathbf{\Phi}(\sigma) = \{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^Z, [\ ]_{l,\sigma,Z} >$ *необходимо, чтобы для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и любого* $z_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$ *выполнялось равенство из теоремы* 2.9.8, *и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и некоторого* $z_\lambda \in \mathbf{T}(\sigma_\lambda)$.

Теорема 2.9.10. *Пусть* A *– группа*, 1 *– ее единица, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_Z$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для того, чтобы элемент* e *являлся идемпотентом в* $< A^Z, [\ ]_{l,\sigma,Z} >$ *необходимо, чтобы для любого цикла* $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *и любого* $z \in \mathbf{T}(\tau)$ *выполнялось равенство*

$$\varepsilon_z\varepsilon_{\sigma(z)}\ldots\varepsilon_{\sigma^{l-2}(z)} = 1,$$

и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для любого цикла $\tau \in \mathbf{\Phi}(\sigma)$ *и некоторого* $z \in \mathbf{T}(\tau)$.

Идемпотенты в $< A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J} >$. Считая в следствиях 2.9.2 и 2.9.3 σ тождественной подстановкой, получим еще два следствия.

Следствие 2.9.25. *Пусть* A *– полугруппа,* ε *– тождественная подстановка из* S_J. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^J, [\ ]_{l,\varepsilon,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid (\mathbf{u}(j))^l = \mathbf{u}(j),\ j \in J\}.$$

Следствие 2.9.26. *Пусть A – группа, ε – тождественная подстановка из* S_J. *Тогда*

$$\mathbf{I}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid (\mathbf{u}(j))^{l-1} = 1,\ j \in J\},$$

где 1 *– единица группы A.*

Замечание 2.9.5. Равенства из следствий 2.9.25 и 2.9.26 могут быть переписаны соответственно в виде

$$\mathbf{I}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u}^l = \mathbf{u}\},$$

$$\mathbf{I}(A^J, [\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}) = \{\mathbf{u} \in A^J \mid \mathbf{u}^{l-1} = \mathbf{e}\},$$

где $\mathbf{e}$ – функция, все значения которой равны единице 1 группы A. Эта функция является единицей группы A^J с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J.$$

Так как, согласно предложению 2.2.1, l-арная операция $[\ ]_{l,\,\varepsilon,\,J}$ является производной от этой бинарной операции, то второе равенство из замечания 2.9.5 может быть получено как следствие предложения 1.2.11.

2.10. (2, l)-КОЛЬЦО $< A^J, +, [\ ]_{l,\,s,\,J} >$

Предложение 2.10.1. *Пусть на множестве A определены бинарная аддитивная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее бинарная мультипликативная операция $\times$, обозначение которой в дальнейшем указывать не будем. Пусть также $l \geq 2$, J – произвольное множество, σ – подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$, определяемая на A^J равенствами* (2.2.1) *и* (2.2.2), *где в правой части* (2.2.1) *присутствует мультипликативная операция, является дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^J поточечно.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.8.1 для сокращения записей мы не будем в длинных произведениях элементов из A расставлять скобки, указывающие порядок выполнения операции, имея в виду, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A^J$. Используя теорему 2.2.1 и дистрибутивность в A мультипликативной операции относительно аддитивной операции, получим для любого $i = 1, \ldots, l$ и любого $j \in J$

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))(\mathbf{b}(\sigma^{i-1}(j)) +$$

$$+ \mathbf{c}(\sigma^{i-1}(j)))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{b}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{c}(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^{i}(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j) + [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{c}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J}(j).$$

Таким образом, в A^J выполняется тождество

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} =$$

$$= [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} + [\mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{c}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J}.$$

Предложение доказано.

Замечание 2.10.1. На множестве A^J операция $\times$, определенная поточечно, дистрибутивна относительно операции $+$, определенной также поточечно. Кроме того, согласно утверждению 4) леммы 2.5.1, f_σ – автоморфизм группоида $< A^J, + >$. Поэтому, если операция $\times$ ассоциативна, то дистрибутивность l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$ относительно операции $+$, определенной на A^J поточечно, можно доказать, используя лемму 2.5.3.

Прежде чем формулировать следующую теорему, напомним, что символом $A^{\bullet}$, как обычно, обозначается группа всех обратимых элементов кольца A с единицей. Считаем также, что и в кольце A и во множестве J содержится более, чем по одному элементу.

Теорема 2.10.1. *Пусть* $< A, +, \times >$ *– кольцо,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*:

1) $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – $(2, l)$*-кольцо, в котором все элементы являются делителями его нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *нет единиц, если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если кольцо* $< A, +, \times >$ *содержит единицу,* σ *– нетождественная подстановка, то* $(2, l)$*-кольцо* $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– неабелево*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то из ассоциативности кольца* $< A, +, \times >$ *следует ассоциативность* $(2, l)$*-кольца* $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *коммутативное кольцо* $< A, +, \times >$ *содержит единицу, то* $(2, l)$*-кольцо* $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *полуабелево*;

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l*-арная группа, в которой функция*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J$$

является косым элементом для функции $\mathbf{a} \in A^{\bullet J}$;

7) *если кольцо* $< A, +, \times >$ *имеет единицу* 1, *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} \in A^{\bullet J}$ *является идемпотентом в* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

Доказательство. 1) Используются теорема 2.8.1 и предложение 2.10.1.

2) Используется теорема 2.4.1.

3) Используется теорема 2.3.1.

4) Используется теорема 2.5.1.

5) Используется теорема 2.6.1.
6) Используется теорема 2.7.1 и предложение 2.7.2.
7) Используется следствие 2.9.4. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.10.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.10.1. *Пусть* $< A, +, \times >$ *– кольцо,* $k \geq 2$, $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) $< A^k, +, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *– (2, l)-кольцо, в котором все элементы являются делителями его нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< A^k, +, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *нет единиц если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если кольцо* $< A, +, \times >$ *содержит единицу,* σ *– нетождественная подстановка, то (2, l)-кольцо* $< A^k, +, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *– неабелево*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то из ассоциативности кольца* $< A, +, \times >$ *следует ассоциативность (2, l)-кольца* $< A^k, +, [\ ]_{l, \sigma, k} >$;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *коммутативное кольцо* $< A, +, \times >$ *содержит единицу, то (2, l)-кольцо* $< A^k, +, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *полуабелево*;

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^{\bullet k}, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *– l-арная группа, в которой элемент*

$$(a^{-1}_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a^{-1}_{\sigma(1)}, \ldots, a^{-1}_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a^{-1}_{\sigma(k)})$$

является косым для элемента $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^{\bullet k}$;

7) *если кольцо* $< A, +, \times >$ *имеет единицу 1, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^{\bullet k}$ *является идемпотентом в* $< A^{\bullet k}, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j = 1, 2, \ldots, k$ *выполняется условие*

$$\varepsilon_j \varepsilon_{\sigma(j)} \varepsilon_{\sigma^2(j)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(j)} = 1.$$

Аналогичные следствия из теоремы 2.10.1 можно сформулировать для случаев J = Z и J = N.

В качестве кольца $< A, +, \times >$ в теореме 2.10.1 можно взять, например, кольцо всех классов вычетов по модулю m или кольцо $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над полем P.

2.11. (2, l)-АЛГЕБРА $< A^J, +, [\ ]_{l,\, s,\, J} >$

Для (2, l)-алгебр имеет место результат, аналогичный теореме 2.10.1.

Теорема 2.11.1. *Пусть* $< A, +, \times >$ *– алгебра,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*:

1) $< A^J, +, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ – (2, l)-*алгебра, в котором все элементы являются делителями ее нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< A^J, +, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *нет единиц, если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если алгебра* $< A, +, \times >$ *содержит единицу,* σ *– нетождественная подстановка, то* (2, l)-*алгебра* $< A^J, +, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *– неабелева*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то из ассоциативности алгебры* $< A, +, \times >$ *следует ассоциативность* (2, l)-*алгебры* $< A^J, +, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *коммутативная алгебра* $< A, +, \times >$ *содержит единицу, то* (2, l)-*алгебра* $< A^J, +, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *полуабелева*;

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\, \sigma,\, J} >$ *–* l*-арная группа, в которой функция*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1},\ j \in J$$

является косым элементом для функции $\mathbf{a} \in A^{\bullet J}$;

7) *если алгебра* $< A, +, \times >$ *имеет единицу* 1, *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} \in A^{\bullet J}$ *является идемпотентом в* $< A^{\bullet J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = 1.$$

Доказательство. 1) Согласно утверждению 1) теоремы 2.10.1, $< A^J, +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – $(2, l)$-кольцо, в котором все элементы являются делителями его нуля **0.**

Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l \in A^J$, $\lambda \in P$. Так как

$$(\lambda\mathbf{a}_i)(j) = \lambda\mathbf{a}_i(j),\ i = 1, \ldots, l,$$

то для любого $j \in J$ имеем

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\lambda\mathbf{a}_i)\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J}(j) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))(\lambda\mathbf{a}_i)(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^i(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\lambda\mathbf{a}_i(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^i(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$

$$= \lambda(\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma^{i-2}(j))\mathbf{a}_i(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma^i(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j))) =$$

$$= \lambda[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J}(j) =$$

$$= (\lambda[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J})(j),$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\lambda\mathbf{a}_i)\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J}(j) =$$

$$= (\lambda[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J})(j).$$

Таким образом, в A^J выполняется тождество

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}(\lambda\mathbf{a}_i)\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J} = \lambda[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J}.$$

Утверждения 2) – 7) доказываются так же, как в теореме 2.10.1 Теорема доказана.

Если в теореме 2.11.1 положить $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $J = \mathrm{Z}$ или $J = \mathrm{N}$ то получатся соответствующие следствия.

Полагая в теореме 2.11.1 $A = \mathbf{M}_n(P)$ алгебра всех квадратных матриц порядка n над полем P, получим следующий результат.

Теорема 2.11.2. *Пусть* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$. *Тогда*:

1) $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – $(2, l)$*-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля* $\mathbf{0}$;

2) *в* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *нет единиц, если* σ *– нетождественная подстановка*;

3) *если* σ *– нетождественная подстановка, то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *– неабелева*;

4) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *ассоциативна*;

5) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $n \geq 2$, *то* $(2, l)$*-алгебра* $< \mathbf{M}_n^J(P), +, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *неполуабелева*;

6) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *–* l*-арная группа, в которой функция*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J$$

является косым элементом для функции $\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$;

7) *если подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то элемент* $\mathrm{e} \in \mathbf{GL}_n^J(P)$ *является идемпотентом в* l*-арной группе* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *тогда и только тогда, когда для любого* $j \in J$ *выполняется условие*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(j)\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma(j))\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^2(j)) \ldots \boldsymbol{\varepsilon}(\sigma^{l-2}(j)) = \mathrm{E},$$

где E *– единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$.

Пусть G – произвольное множество, $J \subseteq G$, $\tau \in \mathbf{S}_G$, σ – сужение τ на J. Если образ множества J при отображении τ совпадает с J ($\tau(J) = J$), то σ – подстановка множества J. Поэтому из теоремы 2.11.1 вытекает формально более общее, чем она сама утверждение.

Теорема 2.11.3. *Пусть G – произвольное множество, $J \subseteq G$, $\tau \in \mathbf{S}_G$, $\tau(J) = J$, σ – сужение τ на J, $< A, +, \times >$ – алгебра, $l \geq 3$. Тогда справедливы утверждения* 1) – 7) *теоремы* 2.11.1.

Теорема 2.11.3 включает в себя теорему 2.11.1 при $J = G$.

Из теоремы 2.11.3 можно извлекать различные следствия, если в качестве множества G в ней взять любую универсальную алгебру, например, группу или линейное пространство; в качестве множества J – любое подмножества в G, а в качестве подстановки τ – любой такой автоморфизм выбранной универсальной алгебры, что $\tau(J) = J$. Например, если в теореме 2.11.3 положить $l = 3$, G – группа, J – любое ее подмножество, содержащее вместе со всяким элементом j его обратный j^{-1}, σ – сужение автоморфизма τ: $g \to g^{-1}$ группы G на J, A – ассоциативная, коммутативная, линейная алгебра с единицей над полем P, то получится предложение 2.1.2.

2.12. ОБЕРТЫВАЮЩАЯ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ГРУППЫ *l*-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^J, [\ ]_{l,\, s,\, J} >$

Одним из важнейших достижений Э. Поста в теории полиадических групп является результат [1, с. 238], который впоследствии стали называть теоремой Поста о смежных классах, позволяющий во многих случаях при изучении l-арных групп использовать результаты теории групп.

Теорема Поста о смежных классах утверждает, что *для всякой l-арной группы $< A, [\ ] >$ существует группа A^*, в которой имеется нормальная подгруппа A_0 такая, что факторгруппа A^* / A_0 – циклическая порядка $l - 1$. Образующий смежный класс xA_0 этой циклической группы является l-арной группой с l-арной* *операцией, производной от операции в группе* A^*, *при этом* l*-арные группы* $< A, [\ ] >$ *и* $< xA_0, [\ ] >$ *изоморфны.*

В определении группы A^* Э. Пост использовал отношение θ_A, которое он определил [1, с.217] на свободной полугруппе F_A по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют $\gamma, \delta \in F_A$ такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. В случаях, когда не возникает разночтений, для сокращения записей вместо символа θ_A употребляют символ θ.

Отношение θ является конгруэнцией на F_A, а полугруппа F_A / θ – группой, которую Э. Пост обозначил символом A^* и назвал [1, с.219] *универсальной обертывающей группой* l-арной группы $< A, [\ ] >$. Группа A_0 из теоремы Поста о смежных классах совпадает с множеством всех классов $\theta(\alpha) \in F_A / \theta$ последовательностей α длины $l - 1$ и называется *соответствующей группой Поста* l-арной группы $< A, [\ ] >$.

Согласно Э. Посту [1, с. 238] (см. также [21]), группа G называется *обертывающей* для l-арной группы $< A, [\ ] >$, если она порождается множеством A, а бинарная операция в группе G и l-арная операция [ ] связаны условием

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_n$$

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Подмножество

$$H = \{a_1 \ldots a_{n-1} \mid a_1, \ldots, a_{n-1} \in A\}$$

является нормальной подгруппой в группе G, факторгруппа G / H по которой циклическая, порождается элементом A и имеет порядок, делящий $l - 1$. Группу H называют *соответствующей* для l-арной группы $< A, [\ ] >$.

Отметим, что для для l-арной группы $< A, [\ ] >$ ее обертывающая и соответствующая группы определяются неоднозначно.

Обратная теорема Поста о смежных классах [1, 21] утверждает, что *если факторгруппа* G / H *группы* G *по ее нормальной подгруппе* H *является циклической с образующим элементом* $A = aH$

и имеет порядок, делящий $l-1$, то $< A, [\ ] >$ l-арная группа с l-арной операцией

$$[x_1x_2 \ldots x_n] = x_1x_2 \ldots x_n.$$

Группы G и H являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для l-арной группы $< A, [\ ] >$.

Отметим еще один факт [1, 21], который будет использован в дальнейшем: *если группы G и H являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для l-арной группы $< A, [\ ] >$, то существует гомоморфизм ψ универсальной обертывающей группы Поста A^* на обертывающую группу G, сужение которого на A_0 является изоморфизмом соответствующей группы Поста A_0 на группу H. Если порядок факторгруппы G / H равен $l-1$, то гомоморфизм ψ является изоморфизмом A^* на G.*

Замечание 2.12.1. Из только что сформулированного результата вытекает, что любые две соответствующие группы для одной и той же l-арной группы изоморфны.

Укажем для некоторых l-арных групп их обертывающие и соответствующие группы.

Пример 2.12.1 [25]. Так как факторгруппа $\mathbf{D}_n / \mathbf{C}_n$ диэдральной группы $\mathbf{D}_n$ по ее подгруппе поворотов $\mathbf{C}_n$ является циклической группой порядка 2, порождающим смежным классом которой является множество $u\mathbf{C}_n$ всех отражений из $\mathbf{D}_n$ (u – любое отражение из $\mathbf{D}_n$), то по обратной теореме Поста о смежных классах $< u\mathbf{C}_n, [\ ] >$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в группе $\mathbf{D}_n$. Кроме того, диэдральная группа $\mathbf{D}_n$ – обертывающая группа, а циклическая группа $\mathbf{C}_n$ – соответствующая группа для тернарной группы $< u\mathbf{C}_n, [\ ] >$. Ясно. что группа $\mathbf{D}_n$ изоморфна универсальной обертывающей группе $(u\mathbf{C}_n)^*$, а группа $\mathbf{C}_n$ изоморфна соответствующей группе Поста $(u\mathbf{C}_n)_0$.

Пример 2.12.2 [25]. Так как факторгруппа $\mathbf{SF}_X / \mathbf{A}_X$ финитарной симметрической группы $\mathbf{SF}_X$ по знакопеременной группе $\mathbf{A}_X$ является циклической группой порядка 2, порождающим смежным классом которой является множество $\mathbf{B}_X$ всех нечетных подстановок из $\mathbf{SF}_X$, то по обратной теореме Поста о смежных классах $< \mathbf{B}_X, [\ ] >$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в группе $\mathbf{SF}_X$. Кроме того, финитарная симметрическая группа $\mathbf{SF}_X$ – обертывающая группа, а знакопеременная группа $\mathbf{A}_X$ – соответствующая группа для тернарной группы $< \mathbf{B}_X, [\ ] >$. В частности, если $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $< \mathbf{B}_n, [\ ] >$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в симметрической группе $\mathbf{S}_n$, которая является обертывающей для $< \mathbf{B}_n, [\ ] >$. Соответствующей группой для $< \mathbf{B}_n, [\ ] >$ является знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$. Ясно. что группа $\mathbf{SF}_X$ изоморфна универсальной обертывающей группе $(\mathbf{B}_X)^*$, а группа $\mathbf{A}_X$ изоморфна соответствующей группе Поста $(\mathbf{B}_X)_0$. В частности, группа $\mathbf{S}_n$ изоморфна универсальной обертывающей группе $(\mathbf{B}_n)^*$, а группа $\mathbf{A}_n$ изоморфна соответствующей группе Поста $(\mathbf{B}_n)_0$.

В следующем примере будем использовать стандартные обозначения: F_q – поле Галуа, то есть конечное поле с числом элементов $q = p^\alpha$, p – простое; $\mathbf{GL}_n(q)$ – полная линейная группа над полем F_q; $\mathbf{SL}_n(q)$ – специальная линейная группа степени n над полем F_q.

Пример 2.12.3. Так как факторгруппа $\mathbf{GL}_n(q) / \mathbf{SL}_n(q)$ изоморфна циклической группе F_q^* порядка $q - 1$ ненулевых элементов поля F_q, то, согласно обратной теореме Поста о смежных классах, для любого порождающего смежного класса U этой факторгруппы универсальная алгебра $< U, [\ ] >$ является q-арной группой с q-арной операцией, производной от операции в группе $\mathbf{GL}_n(q)$. Кроме того, $\mathbf{GL}_n(q)$ – обертывающая группа, а $\mathbf{SL}_n(q)$ – соответствующая группа для q-арной группы $< U, [\ ] >$. Ясно. что группа $\mathbf{GL}_n(q)$ изоморфна универсальной обертывающей группе $(U)^*$, а группа $\mathbf{SL}_n(q)$ изоморфна соответствующей группе Поста $(U)_0$.

Напомним, что: если x – произвольный элемент множества A, то символом $\mathbf{c}_x$ обозначается постоянная функция из A^J, принимающая в каждой точке $j \in J$ значение x; если A – группа, то группа A^J – это группа с операцией $\mathbf{xy}$ и обратным элементом $\mathbf{x}^{-1}$, которые определяются поточечно:

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ \mathbf{x}^{-1}(j) = (\mathbf{x}(j))^{-1},\ j \in J.$$

Если 1 – единица группы A, то постоянная функция $\mathbf{c}_1$ является единицей группы A^J. Если B – подгруппа группы A, то B^J – подгруппа группы A^J.

Лемма 2.12.1. *Пусть J – произвольное множество, A – группа, a и B – ее элемент и подгруппа соответственно. Тогда* *для смежного класса* aB *группы* A *по подгруппе* B *и смежного класса* $\mathbf{c}_a B^J$ *группы* A^J *по подгруппе* B^J *справедливо равенство*

$$(aB)^J = \mathbf{c}_a B^J. \qquad (2.12.1)$$

Если подгруппа B *нормальна в группе* A, *то*:

1) *множество*

$$U = \bigcup_{u \in A} (uB)^J = \bigcup_{u \in A} \mathbf{c}_u B^J$$

является подгруппой группы A^J;

2) *подгруппа* B^J *нормальна в группе* A^J;

3) *факторгруппа* U / B^J *группы* U *по подгруппе* B^J *совпадает с множеством*

$$\{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\} = \{(uB)^J \mid u \in A\} = \{C^J \mid C \in A/B\};$$

4) *факторгруппы* A / B *и* U / B^J *имеют одинаковую мощность*;

5) *если факторгруппа* A / B *является циклической с порождающим элементом* C, *то факторгруппа* U / B^J *также является циклической с порождающим элементом* C^J.

Доказательство. Если $a \in B$, то $\mathbf{c}_a \in B^J$. В этом случае равенство (2.12.1) верно, так как принимает вид $B^J = B^J$. Покажем, что равенство (2.12.1) верно и для $a \notin B$.

Если $\mathbf{u} \in (aB)^J$ для некоторого $a \notin B$, то $\mathbf{u}(j) \in aB$ для любого $j \in J$, то есть

$$\mathbf{u}(j) = ab \qquad (2.12.2)$$

для некоторого элемента $b \in B$. Определим функцию $\mathbf{b} \in B^J$ так, что для любого $j \in J$ ее значение $\mathbf{b}(j)$ совпадает с элементом b из (2.12.2). Тогда (2.12.2) принимает вид $\mathbf{u}(j) = \mathbf{c}_a(j)\mathbf{b}(j)$, откуда последовательно получаем $\mathbf{u} = \mathbf{c}_a\mathbf{b}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_a B^J$. Следовательно,

$$(aB)^J \subseteq \mathbf{c}_a B^J.$$

Если теперь $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_a B^J$ для некоторого $a \notin B$, то $\mathbf{u} = \mathbf{c}_a\mathbf{b}$ для некоторого $\mathbf{b} \in B^J$. Тогда

$$\mathbf{u}(j) = \mathbf{c}_a(j)\mathbf{b}(j) = a\mathbf{b}(j)$$

для любого $j \in J$, где $\mathbf{b}(j) \in B$. Поэтому из равенства $\mathbf{u}(j) = a\mathbf{b}(j)$ последовательно получаем $\mathbf{u}(j) \in aB$, $\mathbf{u} \in (aB)^J$. Следовательно,

$$\mathbf{c}_a B^J \subseteq (aB)^J.$$

Из доказанных включений следует справедливость равенства (2.12.1) для $a \notin B$.

1) Заметим, что равенство $\bigcup\limits_{u \in A}(uB)^J = \bigcup\limits_{u \in A}\mathbf{c}_u B^J$ следует из (2.12.1). Пусть

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U = \bigcup_{u \in A}(uB)^J.$$

Так как любые два смежных класса C и D группы A по подгруппе B не имеют общих элементов, то множества C^J и D^J также не имеют общих элементов. Поэтому каждая из функций $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ принадлежит только одному из множеств C^J, где C пробегает все множество $\{uB \mid u \in A\}$ смежных классов A по B, то есть все значения каждой из функций $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ принадлежат только одному из смежных классов A по B. Таким образом, существуют такие элементы $x, y \in A$, что

$$\mathbf{x}(j) \in xB, \mathbf{y}(j) \in yB, j \in J.$$

Согласно определению операции в группе A^J

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j), j \in J,$$

а так как подгруппа B нормальна в группе A, то

$$\mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j) \in xyB, j \in J.$$

Тогда

$$(\mathbf{xy})(j) \in xyB, j \in J,$$

откуда $\mathbf{xy} \in (xyB)^J \subseteq U$. Следовательно, множество U замкнуто относительно бинарной операции в группе A^J.

Так как $\mathbf{x}(j) \in xB$ для любого $j \in J$, то

$$\mathbf{x}^{-1}(j) = (\mathbf{x}(j))^{-1} \in (xB)^{-1} = x^{-1}B, j \in J,$$

то есть $\mathbf{x}^{-1}(j) \in x^{-1}B$ для любого $j \in J$, откуда $\mathbf{x}^{-1} \in (x^{-1}B)^J \subseteq U$. Следовательно, множество U замкнуто относительно операции взятия обратного элемента в группе A^J. Таким образом, U – подгруппа группы A^J.

2) Пусть $\mathbf{x}$ – произвольный элемент из A^J. Для любого $\mathbf{xb} \in \mathbf{x}B^J$, где $\mathbf{b} \in B^J$, определим функцию $\mathbf{c} \in A^J$ следующим образом

$$\mathbf{c}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{b}(j)(\mathbf{x}(j))^{-1}, j \in J.$$

Так как $\mathbf{b} \in B^J$, то $\mathbf{b}(j) \in B$ для любого $j \in J$, а так как подгруппа B нормальна в группе A, то из полученного выше равенства следует $\mathbf{c}(j) \in B$ для любого $j \in J$, что означает $\mathbf{c} \in B^J$. Так как указанное равенство может быть переписано в виде

$$\mathbf{x}(j)\mathbf{b}(j) = \mathbf{c}(j)\mathbf{x}(j), j \in J,$$

то, $\mathbf{xb} = \mathbf{cx}$, а так как $\mathbf{cx} \in B^J\mathbf{x}$, то $\mathbf{xb} \in B^J\mathbf{x}$, откуда, в силу произвольного выбора $\mathbf{xb} \in \mathbf{x}B^J$ следует $\mathbf{x}B^J \subseteq B^J\mathbf{x}$. Обратное включение $B^J\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}B^J$ доказывается аналогично. Таким образом, $\mathbf{x}B^J = B^J\mathbf{x}$, то есть доказана нормальность подгруппы B^J в группе A^J, а значит и в ее подгруппе U.

3) Пусть $\mathbf{v} \in U / B^J$, то есть $\mathbf{v} = \mathbf{u}B^J$, где $\mathbf{u} \in U$. Так как $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_u B^J$ для некоторого $u \in A$, то $\mathbf{u} = \mathbf{c}_u\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in B^J$. Таким образом, $\mathbf{v} = \mathbf{c}_u\mathbf{b}B^J$, а так как B^J – подгруппа в A^J, то $\mathbf{v} = \mathbf{c}_u B^J$. Следовательно, $\mathbf{v} \in \{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\}$, тем самым доказано включение

$$U / B^J \subseteq \{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\}.$$

Если теперь $\mathbf{v} = \mathbf{c}_u B^J$, где $u \in A$, то $\mathbf{v} = \mathbf{c}_u\mathbf{b}B^J$ для любого $\mathbf{b} \in B^J$. Тогда, полагая $\mathbf{u} = \mathbf{c}_u\mathbf{b}$, получим $\mathbf{v} = \mathbf{u}B^J$, где $\mathbf{u} \in \mathbf{c}_u B^J \subseteq U$. Следовательно, $\mathbf{v} \in U / B^J$, тем самым доказано включение

$$\{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\} \subseteq U / B^J.$$

Из доказанных включений следует равенство

$$U / B^J = \{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\}.$$

Равенство

$$\{\mathbf{c}_u B^J \mid u \in A\} = \{(uB)^J \mid u \in A\}$$

следует из (2.12.1). Левая и правая части в равенстве

$$\{(uB)^J \mid u \in A\} = \{C^J \mid C \in A / B\}$$

отличаются только обозначениями.

4) Согласно 3)

$$U / B^J = \{C^J \mid C \in A / B\}.$$

Кроме того, для любых несовпадающих смежных классов C и D из A / B смежные классы C^J и D^J из U / B^J также не совпадают. Поэтому отображение $\varphi: C \to C^J$ является биекцией A / B на U / B^J.

5) Если факторгруппа A / B порядка t порождается смежным классом $C = aB$, то есть

$$A / B = \{B, aB, \ldots, a^{t-1}B\},\ a^t \in B,$$

то согласно 3)

$$U / B^J = \{B^J, \mathbf{c}_a B^J, \ldots, \mathbf{c}_{a^{t-1}} B^J\}.$$

Так как для любых $x, y \in A$ верно

$$(\mathbf{c}_x \mathbf{c}_y)(j) = \mathbf{c}_x(j)\mathbf{c}_y(j) = xy = \mathbf{c}_{xy}(j),\ j \in J,$$

то $\mathbf{c}_x \mathbf{c}_y = \mathbf{c}_{xy}$. Поэтому

$$\mathbf{c}_{a^s} B^J = (\mathbf{c}_a)^s B^J = (\mathbf{c}_a B^J)^s,\ s = 1, \ldots, t-1,$$

откуда

$$U / B^J = \{B^J, \mathbf{c}_a B^J, \ldots, (\mathbf{c}_a B^J)^{t-1}\}.$$

Кроме того,

$$(\mathbf{c}_a B^J)^t = (\mathbf{c}_a)^t B^J = \mathbf{c}_{a^t} B^J = (a^t B)^J = B^J.$$

Следовательно, факторгруппа U / B^J является циклической группой порядка t с порождающим элементом $\mathbf{c}_a B^J = (aB)^J = C^J$.

Для бесконечной факторгруппы A / B доказательство проводится аналогично. При этом используется равенство $(\mathbf{c}_x)^{-1} = \mathbf{c}_{x^{-1}}$, верное для любого $x \in A$, так как

$$(\mathbf{c}_x)^{-1}(j) = (\mathbf{c}_x(j))^{-1} = x^{-1} = \mathbf{c}_{x^{-1}}(j),\ j \in J.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.12.1. *Пусть* $l \geq 3$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, A *– группа,* A / B *– факторгруппа по ее нормальной подгруппе* B, *множество* U *определяется так же, как в лемме* 2.12.1. *Тогда* $< B^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ *и* $< U, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ *–* l*-арные подгруппы* l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$. *Если факторгруппа* A / B *является циклической, порождается смежным классом* C *и имеет порядок, делящий* $l - 1$, *то*:

1) $< C^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ *–* l*-арная подгруппа* l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$;

2) *подгруппы* U *и* B^J *являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для* l*-арной группы* $< C^J, [\ ] >$ с l*-арной операцией* $[\ ]$, *производной от операции в группе* A^J;

3) *существует гомоморфизм* ψ *универсальной обертывающей группы* $(C^J)^*$ *на группу* U, *сужение которого на соответствующую группу* $(C^J)_0$ *является изморфизмом на* B^J; *если порядок факторгруппы* A / B *равен* $l - 1$, *то указанный гомоморфизм* ψ *является изоморфизмом* $(C^J)^*$ *на* U;

4) l*-арные операциии* $[\ ]_{l, \sigma, J}$ *и* $[\ ]$ *связаны условием*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l] = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l]$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$, *где* f_σ *– отображение* A^J *в* A^J, *ставящее в соответствие функции* $\mathbf{x} \in A^J$ *функцию* $\mathbf{x}^{f_\sigma} \in A^J$, *значение которой в каждой точке* $j \in J$ *совпадает со значением функции* $\mathbf{x}$ *в точке* $\sigma(j)$: $\mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$.

Доказательство. Согласно теореме 2.7.1 $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная группа, а по лемме 2.7.1 $< B^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная подгруппа в $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Пусть

$$\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l \in U = \bigcup_{u \in A}(uB)^J$$

и положим

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{b},\ \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{c}. \qquad (2.12.3)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 2.12.1, устанавливается, что все значения каждой из функций $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ принадлежат только одному из смежных классов A по B. Таким образом, существуют такие элементы $x, x_1, x_2, \ldots, x_l \in A$, что

$$\mathbf{a}(j) \in xB,\ \mathbf{a}_1(j) \in x_1B,\ \mathbf{a}_2(j) \in x_2B,\ \ldots,\ \mathbf{a}_l(j) \in x_lB,\ j \in J.$$

Применяя к первому равенству из (2.12.3) следствие 2.2.4, получим

$$\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{b}(j),\ j \in J, \qquad (2.12.4)$$

а так как, в силу нормальности B в A

$$\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) \in x_1x_2 \ldots x_lB,\ j \in J,$$

то

$$\mathbf{b}(j) \in x_1x_2 \ldots x_lB \in A/B,\ j \in J,$$

то есть

$$\mathbf{b} \in (x_1 x_2 \ldots x_l B)^J \subseteq \bigcup_{u \in A} (uB)^J = U.$$

Таким образом, ввиду первого равенства из (2.12.3) имеем

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\,\sigma,\,J} = \mathbf{b} \in \bigcup_{u \in A} (uB)^J = U.$$

Следовательно, множество U замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$.

Применяя ко второму равенству из (2.12.3) предложение 2.7.2, получим

$$(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} = \mathbf{c}(j),\ j \in J, \tag{2.12.5}$$

а так как

$$(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} \in (x^{-1})^{l-2} B = x^{2-l} B,\ j \in J,$$

то

$$\mathbf{c}(j) \in x^{2-l} B \in A/B,\ j \in J,$$

то есть

$$\mathbf{c} \in (x^{2-l} B)^J \subseteq \bigcup_{u \in A} (uB)^J = U.$$

Таким образом, ввиду второго равенства из (2.12.3) имеем

$$\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{c} \in \bigcup_{u \in A} (uB)^J = U.$$

Следовательно, множество U замкнуто относительно унарной операции взятия косого элемента.

Так как, множество U замкнуто как относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$, так и относительно унарной операции взятия косого элемента, то, согласно критерию Дёрнте (теорема 1.2.4), $< U, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

1) Пусть теперь

$$\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l \in C^J$$

и снова положим $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ такими же, как и в (2.12.3).

Тогда в левой части (2.12.4) все сомножители принадлежат смежному классу C, порождающему циклическую факторгруппу A/B, а в левой части (2.12.5) все сомножители принадлежат смежному классу C^{-1}. Поэтому

$$\mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{a}_l(\sigma^{l-1}(j)) \in C^l = C, j \in J,$$

$$(\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} \in (C^{-1})^{l-2} = C, j \in J,$$

откуда

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{b} \in C^J, \ \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{c} \in C^J.$$

Следовательно, множество C^J замкнуто как относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, так и относительно унарной операции взятия косого элемента. Согласно критерию Дёрнте, $< C^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

2) Согласно утверждениям 4) и 5) леммы 2.12.1 факторгруппа U / B^J является циклической группой с порождающим элементом C^J, порядок которой совпадает с порядком факторгруппы A / B, то есть делит $l-1$. Поэтому, согласно обратной теореме Поста о смежных классах подгруппы U *и* B^J являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для l-арной группы $< C^J, [\ ] >$, с l-арной операцией $[\ ]$, производной от операции в группе U, а значит и от операции в группе A^J.

3) Вытекает из соответствующего результата Э. Поста, сформулированного на с. 168.

4) Так как l-арная операция $[\ ]$ является производной от операции в группе A^J, то для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$ имеем

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l] = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l,$$

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l] = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l.$$

Кроме того, по теореме 2.5.1 для тех же $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_l \in A^J$ имеем

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}}\mathbf{x}_l.$$

Таким образом, справедливы доказываемые равенства из 4). Теорема доказана.

Замечание 2.12.1. Доказывая теорему 2.12.1, мы привели прямое доказательство утверждения о том, что $< C^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$. Это же утверждение может быть получено и как следствие обратной теоремы Поста о смежных классах.

Замечание 2.12.2. Если в условиях леммы 2.12.1 и теоремы 2.12.1 множество J содержит более одного элемента, то во множестве A^J имеются элементы, не принадлежащие множеству $U = \bigcup\limits_{u \in A} (uB)^J$. К числу таких элементов относится, например, любая функция $\mathbf{d} \in A^J$ такая, что для некоторых $s \neq t$ из J значение $\mathbf{d}(s)$ является единицей группы A, а значение $\mathbf{d}(t)$ не является элементом B. Ясно, что из $\mathbf{d}(t) \notin B$ следует $\mathbf{d} \notin B^J$, а из $\mathbf{d}(s) \in B$ следует $\mathbf{d} \notin T^J$ для любого смежного класса T из A / B, отличного от B. Следовательно, $\mathbf{d} \notin U = \bigcup\limits_{u \in A} (uB)^J$. Таким образом, в теореме 2.12.1 $< U, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ – собственная l-арная подгруппа l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Лемма 2.7.2 получается из теоремы 2.12.1, если в ней в качестве подгруппы B группы A взять подгруппу индекса 2.

Теорема 2.12.1 позволяет дополнить теорему 2.7.10 еще одним утверждением, содержащемся в следующем предложении.

Предложение 2.12.1. *Пусть* $l \geq 3$, $n \geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$U = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(P)} (u\mathbf{SL}_n(P))^J = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(P)} \mathbf{c}_u \mathbf{SL}_n^J(P).$$

Тогда множество U *замкнуто относительно* l*-арной операции* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}$, *а универсальная алгебра* $< U, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *является* l*-арной подгруппой* l*-арной группы* $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Описание l-арной группы $< \mathbf{GL}_n^J(P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, данное в теоремах 2.7.9 и 2.7.10, можно детализировать для конечного поля $P = F_q$ из q элементов, если воспользоваться теоремой 2.12.1, положив в ней $A = \mathbf{GL}_n(q)$ и $B = \mathbf{SL}_n(q)$, а также учесть тот факт, что факторгруппа $\mathbf{GL}_n(q) / \mathbf{SL}_n(q)$ является циклической и имеет порядок $q - 1$.

Теорема 2.12.2. *Пусть $n \geq 2$, подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^q = \sigma$, C – смежнвй класс, порождающий циклическую факторгруппу $\mathbf{GL}_n(q) / \mathbf{SL}_n(q)$,*

$$U = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(q)} (u\mathbf{SL}_n(q))^J = \bigcup_{u \in \mathbf{GL}_n(q)} \mathbf{c}_u \mathbf{SL}_n^J(q).$$

Тогда:

1) *множество U замкнуто относительно q-арной операции $[\ ]_{q\,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $< U, [\ ]_{q,\sigma,J} >$ является q-арной подгруппой q-арной группы $< \mathbf{GL}_n^J(q), [\ ]_{q,\sigma,J} >$;*

2) $< C^J, [\ ]_{q,\sigma,J} >$ *– q-арная подгруппа q-арной группы* $< \mathbf{GL}_n^J(q), [\ ]_{q,\sigma,J} >$;

3) *подгруппы U и $\mathbf{SL}_n^J(q)$ являются соответственно обертывающей и соответствующей группами для q-арной группы* $< C^J, [\ ] >$ с *q-арной операцией $[\ ]$, производной от операции в группе $\mathbf{GL}_n^J(q)$;*

4) *существует гомоморфизм ψ группы $(C^J)^*$ на группу U, сужение которого на $(C^J)_0$ является изморфизмом на $\mathbf{SL}_n^J(q)$;*

5) *l-арные операциии $[\ ]$ и $[\ ]_{q,\sigma,J}$ связаны условием*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_q]_{q,\sigma,J} = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{q-1}^{f_\sigma^{q-2}} \mathbf{x}_q] = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{q-1}^{f_{\sigma^{q-2}}} \mathbf{x}_q].$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q \in A^J$, где f_σ – отображение группы $\mathbf{GL}_n^J(q)$ в себя, ставящее в соответствие функции $\mathbf{x} \in \mathbf{GL}_n^J(q)$ функцию

$\mathbf{x}^{f_\sigma} \in \mathbf{GL}_n^J(q)$, *значение которой в каждой точке* $j \in J$ *совпадает со значением функции* $\mathbf{x}$ *в точке* $\sigma(j)$: $\mathbf{x}^{f_\sigma}(j) = \mathbf{x}(\sigma(j))$.

Если A – группа, и выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная группа. А так как согласно теореме Поста о смежных классах всякая l-арная группа $< A, [\ ] >$ обладает соответствующей группой A_0, то возникает задача нахождения соответствующей группы Поста $(A^J)_0$ l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Лемма 2.12.2 [27]. *Для любой* l*-арной группы* $< A, [\ ] >$ *и любого ее элемента* a *соответствующая группа* A_0 *изоморфна группе* $< A, ⓐ >$ с операцией

$$x ⓐ y = [x\underbrace{a \ldots a}_{l-2}y].$$

Предложение 2.12.2. *Если* A *– группа,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$*, удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$*, то соответствующая группа Поста* $(A^J)_0$ l*-арной группы* $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ *изоморфна группе* A^J *с операцией*

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J,$$

то есть $(A^J)_0 \simeq A^J$.

Доказательство. Положим $\mathbf{e}(j) = 1$ для любого $j \in J$, где 1 – единица группы A. Согласно лемме 2.12.2 группа $(A^J)_0$ изоморфна группе $< A^J, ⓔ >$ с операцией

$$\mathbf{x} ⓔ \mathbf{y} = [\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{y}]_{l,\sigma,J}.$$

Так как $\sigma^{l-1}(j) = j$ для любого $j \in J$, то

$$(\mathbf{x} ⓔ \mathbf{y})(j) = [\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-2}\mathbf{y}]_{l,\sigma,J}(j) =$$

$$= \mathbf{x}(j)\mathbf{e}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{e}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{y}(\sigma^{l-1}(j)) = \mathbf{x}(j)\underbrace{1 \ldots 1}_{l-2}\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j).$$

Таким образом, $\mathbf{x} \circledcirc \mathbf{y} = \mathbf{xy}$, то есть операция $\circledcirc$ совпадает с операцией в группе A^J. Предложение доказано.

Следствие 2.12.1. *Если A – группа, $l \geq 3$, то для любых подстановок $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_J$, удовлетворяющих условиям $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, соответствующие группы Поста l-арных групп $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ и $< A^J, [\ ]_{l, \tau, J} >$ являются изоморфными.*

Значение предложения 2.12.2 состоит в том, что с его помощью, используя соответствующие результаты теории полиадических групп, можно получать новую информацию об l-арной группе $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$.

В качестве примера докажем следующее

Предложение 2.12.3. *Если группа A и множество J содержат более чем по одному элементу, $l \geq 3$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ не является полуциклической.*

Доказательство. Полиадическую группу называют *полуциклической* [27], если ее соответствующая группа Поста циклическая.

Так как группа A^J с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J$$

не является циклической, то, ввиду предложения 2.12.2 соответствующая группа Поста $(A^J)_0$ l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ также не является циклической. Поэтому l-арная группа $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ не является полуциклической. Предложение доказано.

Заметим, что в случае нетождественности подстановки σ нецикличность l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ следует из предложения 2.3.1, согласно которому $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$ – неабелева.

Из теоремы 2.6.1 и предложения 2.12.3 вытекает

Следствие 2.12.2. *Если группа A и множество J содержат более чем по одному элементу, $l \geq 3$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удов-*

летворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, *то* l*-арная группа* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *является полуабелевой, но не является полуциклической.*

Так как всякая полуциклическая l-арная группа является полуабелевой, то из следствия 2.12.2 вытекает, что для любого $l \geq 3$ класс всех полуабелевых l-арных групп шире класса всех полуциклических l-арных групп.

Предложение 2.12.4. *Если* A *– нильпотентная группа,* $l \geq 3$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* l*-арная группа* $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ *является полунильпотентной.*

Доказательство. Полиадическую группу называют *полунильпотентной* [28, 43], если ее соответствующая группа Поста нильпотентна.

Так как A – нильпотентная группа, то группа A^J с операцией

$$(\mathbf{xy})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j),\ j \in J$$

также является нильпотентной. Тогда, ввиду предложения 2.12.2 соответствующая группа Поста $(A^J)_0$ l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$ также является нильпотентной, что означает полунильпотентность $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$. Предложение доказано.

Предложение 2.12.2 может быть использовано не только для получения новых результатов, но и для упрощения доказательств уже известных результатов. Например, согласно критерию Поста, полуабелевость полиадической группы равносильна абелевости ее соответствующей группы Поста. Поэтому, если A – абелева группа, и $\sigma^l = \sigma$, то из абелевости группы A^J, ввиду предложения 2.12.2 следует полуабелевость l-арной группы $< A^J, [\ ]_{l,\,\sigma,\,J} >$.

Полагая в преддложениях 2.12.2 – 2.12.4 и следствиях 2.12.1 и 2.12.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим соответствующие утверждения из [9].

Предложение 2.12.5. [9]. *Если* A *– группа,* $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то соответствующая группа Поста* $(A^k)_0$ l*-арной группы* $< A^k, [\ ]_{l,\,\sigma,\,k} >$

изоморфна прямому произведению A^k k *экземпляров группы* A: $(A^k)_0 \simeq A^k$.

Следствие 2.12.3. [9]. *Если A – группа,* $l \geq 3$, $k \geq 2$, *то для любых подстановок* $\sigma, \tau \in S_k$, *удовлетворяющих условиям* $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, *соответствующие группы Поста l-арных групп* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *и* $< A^k, [\ ]_{l, \tau, k} >$ *являются изоморфными.*

Предложение 2.12.6. [9]. *Если группа A содержат более одного элемента,* $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *не является полуциклической.*

Следствие 2.12.4. [9]. *Если абелева группа A содержат более одного элемента,* $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *является полуабелевой, но не является полуциклической.*

Предложение 2.12.7. [9]. *Если A – нильпотентная группа,* $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная группа* $< A^k, [\ ]_{l, \sigma, k} >$ *является полунильпотентной.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Post, E.L.** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P.208 – 350.

2. **Гальмак, А.М.** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – №3. – С. 28 – 34.

3. **Гальмак, А.М.** Многоместные неассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Вестник ПГУ. – Серия С. – Полоцк. – 2008. – №3. – С. 66 – 72.

4. **Гальмак, А.М.** О многоместных операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – Могилев. – 2008. – №2–3 (30). – С. 134 – 139.

5. **Гальмак А.М.** Полиадические операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – Москва. – 2008. – №1. – С. 112 – 139.

6. **Гальмак А.М.** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – Москва. – 2008. – №.2 – С. 172 – 192.

7. **Гальмак, А.М.** Об *n*-арных операциях на декартовых степенях *n*-арных группоидов / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – Могилев. – 2009. – №2–3 (33). – С. 172 – 139.

8. **Гальмак, А.М.** О полиадических операциях на декартовых степенях *n*-арных групп / А.М. Гальмак // Вестник ПГУ. – Серия С. – Полоцк. – 2009. – №3. – С. 57 – 62.

9. **Гальмак, А.М.** Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

10. **Гальмак, А.М.** Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – Могилев. – 2010. – №1 (35). – С. 34 –38.

11. **Белоусов, В.Д.** *n*-Арные квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 228 с.

12. **Dörnte, W.** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.

13. **Курош, А.Г.** Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1974. – 160 с.

14. **Glazek, K.** Abelian *n*-groups / K. Glazek, B. Gleichgewicht // Proc. Congr. Math. Soc. J. Bolyai. – Esztergom. – 1977. – P. 321 – 329.

15. **Сушкевич, А.К.** Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич. – Харьков; Киев, 1937. – 176 с.

16. **Bruck, R.H.** A survey of binary systems / R.H.Bruck. – Berlin; Heldelberg; New York: Springer-Verlad, 1966. – 185 p.

17. **Бурбаки, Н.** Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и плилинейная алгебра / Н. Бурбаки. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

18. **Артамонов, В.А.** Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. – Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1976. – С. 191 – 248.

19. **Артамонов, В.А.** Универсальные алгебры / В.А. Артамонов // Итоги науки и техники. – Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1989. – С. 45 – 124.

20. **Glazek, K.** Bibliographi of *n*-groups (poliadic groups) and same group like *n*-ary systems / K. Glazek // Proc. of the sympos. *n*-ary structures. – Skopje, 1982. – P. 259 – 289.

21. **Русаков, С.А.** Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

22. **Русаков, С.А.** Некоторые приложения теории *n*-арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 167 с.

23. **Ušan, J.** *n*-Groups in the light of the neutral operations / J. Ušan // Mathematika Moravica. – 2003. – Special Vol. – 162 p.

24. **Гальмак, А.М.** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу / А.М. Гальмак. – Гомель, 1997. – 85 с.

25. **Гальмак, А. М.** Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 128с.

26. **Гальмак, А. М.** Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

27. **Гальмак, А.М.** *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202с.

28. **Гальмак, А.М.** *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

29. **Гальмак, А.М.** Об определении *n*-арной группы / А.М. Гальмак // Междунар. конф. по алгебре. – Тез. докл. – Новосибирск, 1991. – С. 30.

30. **Гальмак, А.М.** О некоторых новых определениях *n*-арной группы / А.М. Гальмак // Третья междунар. конф. по алгебре. – Тез. докл. – Красноярск, 1993. – С. 33.

31. **Dudek, W.** A note on the axioms of *n*-groups / W. Dudek, K. Glazek, B. Gleichgewicht // Colloq Math. Soc. J. Bolyai. – 1977. – Vol. 29. – P. 195 – 202.

32. **Гальмак, А.М.** *n*-Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак // Препринт ГГУ им. Ф.Скорины. – 1998. – № 77. – 23 с.

33. **Гальмак, А.М.** *n*-Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак // Весці НАН РБ. – 2003. – №2. – С.25 – 30.

34. **Гальмак, А.М.** Идемпотентные *n*-арные группы / А.М. Гальмак // Весці НАН РБ. – 2000. – №2. – С.42 – 45.

35. **Гальмак, А.М.** Силовское строение идемпотентных *n*-арных групп / А.М. Гальмак // Укр. мат. журнал. – 2001. – №11. – С.1488 – 1494.

36. **Колесников, О.В.** Разложение *n*-групп / О.В. Колесников // Мат. исслед. – Вып. 51. – Квазигруппы и лупы. Кишинёв: Штиинца, 1979. – С. 88 – 92.

37. **Čupona, G.** On [*m*, *n*]-rings / G. Čupona // Bull. Soc. math. phys. Mased. – 1965. – Vol. 16. – P. 5 – 10.

38. **Crombez, G.** On (*n*, *m*)-rings / G. Crombez // Abh. Math. Sem. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180 – 199.

39. **Crombez, G.** On (*m*, *n*)-quotient rings / G. Crombez, J. Timm // Abh. Math. Semin. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 200 – 203.

40. **Супруненко Д.А.** Группы подстановок / Д.А. Супруненко. – Мн.: Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.

41. **Wielandt, H.** Unendliche Permutationsgruppen / H. Wielandt. – Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959 -1960. – Tübingen, 1960. – S. 1 – 45.

42. **Воробьев, Г.Н.** Идемпотенты в (k + 1)-арной группе $< \mathbf{Z}_k^k$, $[\,]_{k+1,\,k} >$ / Г.Н. Воробьев // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – Могилев. – 2011. – №2 (38). – С. 11 – 38.

43. **Щучкин, Н.А.** Разрешимые и нильпотентные *n*-группы / Н.А. Щучкин // Алгебраические системы. – Волгоград, 1989. – С. 133 – 139.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N – множество всех натуральных чисел;
Z – множество всех целых чисел;
R – множество всех действительных чисел;
C – множество всех комплексных чисел;

$$a_m^k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \ldots a_k, & \text{если } m \le k, \\ \varnothing, & \text{если } m > k; \end{cases}$$

$\bar{a}$ – косой элемент для элемента а;
A^J – множество всех всех функций из J в A;
$A^{\bullet}$ – группа всех обратимых элементов кольца A с единицей;
A^* – универсальная обертывающая группа l-арной группы < A, [ ] >;
A_0 – соответствующая группа Поста l-арной группы < A, [ ] >;
F_A – свободная полугруппа над алфавитом A;
F_q – конечное поле из q элементоов;
θ – отношение эквивалентности Поста на F_A;
$\mathbf{A}_X$– группа всех четных подстановок множества X;
$\mathbf{A}_n$ – знакопеременная группа степени n;
$\mathbf{B}_X$ – множество всех нечетных подстановок множества X;
$\mathbf{B}_n$ – множество всех нечетных подстановок степени n;
$\mathbf{C}_n$ – циклическая группа порядка n;
$\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа порядка $2n$;
$\mathbf{S}_X$ – группа всех подстановок множества X;
$\mathbf{S}_n$ – симметрическая группа степени n;
$\mathbf{SF}_X$ – финитарная симметрическая группа;
$\mathbf{T}(\sigma)$ – носитель подстановки σ;
$\mathbf{\Phi}(\sigma)$ – множество всех независимых циклов подстановки σ;
$\mathcal{F}_X$ – полугруппа всех преобразований множество X;
$\mathbf{H}(V)$ – полугруппа всех линейных преобразований линейного пространства V;
$\mathbf{GL}_n(P)$ – полная линейная группа над полем P;
$\mathbf{SL}_n(P)$ – специальная линейная группа над полем P;
$\mathbf{SL}_n(q)$ – полная линейная группа над F_q;
$\mathbf{SL}_n(q)$ – специальная линейная группа над F_q;
$\mathbf{PGL}_n(P)$ – проективная полная линейная группа над полем P;
$\mathbf{PSL}_n(P)$ – проективная специальная линейная группа над полем P;
[ ] – l-арная операция;
< A, [ ] > – l-арная группа;
$x \textcircled{a} \boldsymbol{y} = [x\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{l-3}y]$, где a – элемент l-арной группы < A, [ ] >;

$\mathbf{E}(A, [\ ])$ – l-арная подгруппа единиц l-арной группы $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{I}(A, [\ ])$ – множество всех идемпотентов l-арной группы $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{Z}(A, [\ ])$ – центр l-арной группы $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{Z}_L(A, [\ ])$ – левый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{Z}_R(A, [\ ])$ – правый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{GZ}_L(A, [\ ])$ – большой левый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{GZ}_R(A, [\ ])$ – большой правый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{KZ}_L(A, [\ ])$ – малый левый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{KZ}_R(A, [\ ])$ – малый правый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{Z}_i(A, [\ ])$ – i-ый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{GZ}_i(A, [\ ])$ – большой i-ый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{KZ}_i(A, [\ ])$ – малый i-ый центр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{HZ}(A, [\ ])$ – полуцентр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{GHZ}(A, [\ ])$ – большой полуцентр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{KHZ}(A, [\ ])$ – малый полуцентр l-арного группоида $< A, [\ ] >$;

$\mathbf{S}_{A_1, \ldots, A_{l-1}}$ – множество всех l-арных подстановок, где $A_1, \ldots, A_{l-1}$ – l-арные группы;

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Гальмак Александр Михайлович
Кулаженко Юрий Иванович

**ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
НА МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ**

Подписано в печать 20.12.2012. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 12,1.
Тираж 100 экз. Заказ 135.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
‹‹Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины››
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.