МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Н. В. Михайлова

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

МОНОГРАФИЯ

Минск
МГВРК
2013

УДК 101.1: 510.2

Михайлова, Н. В. **Философско-методологический анализ проблемы обоснования современной математики: монография / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2013. – 468 с. – ISBN 978-985-526-178-1**

Монография посвящена актуальной проблеме теории познания – философско-методологическому обоснованию современной математики. Используемый в монографии системный подход к проблеме обоснования математики на основе единства и целостности математического знания позволяет сформулировать новую философскую концепцию обоснования. В работе также анализируются новые кризисы современной математики и философская концепция самоорганизации математического знания, постнеклассический тип рациональности в математике и современные средства компьютерной математики, системный и математический стиль мышления и вопрос непротиворечивости в постгёделевской философии математики, понятие математической истины и эффективность математики, наконец, системная триада направлений обоснования современной математики.

Адресуется студентам, магистрантам и аспирантам философских, математических и компьютерных специальностей, преподавателям философии науки и техники, естественнонаучных дисциплин, а также тем, кто интересуется философскими проблемами математики.

Библиогр.: с. 405–437; с. 438–448.

Рекомендовано Советом учреждения образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
(протокол № 4 от 29 ноября 2012 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник отдела
нелинейного и стохастического анализа
Института математики НАН Беларуси **А. Д. Егоров**,
доктор философских наук, профессор,
заведующий кафедрой философии Белорусского
государственного экономического университета **В. К. Лукашевич**,
доктор философских наук, профессор,
профессор кафедры философских учений Белорусского
национального технического университета **В. П. Старжинский**.

ISBN 978-985-526-178-1

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 2

ГЛАВА 1. ОБЗОР ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ 10

ГЛАВА 2. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ И ФИЛОСОФСКОЕ ЕДИНСТВО СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ 40

2.1 Критика логицистского направления в обосновании математики и новые кризисы современной математики 48

2.2 Роль умеренного платонизма в формировании единства философских направлений обоснования математики 67

2.3 Системный подход к проблеме обоснования математики в контексте гегелевской концепции саморазвития 120

ГЛАВА 3 ПОСТНЕКЛАССИЧЕСКАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И СОВРЕМЕННЫЕ СРЕДСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ 161

3.1 Философский анализ идеи дополнительности и 165

когнитивного релятивизма в обосновании математики 165

3.2 Общая концепция развития и направления обоснования в постгёделевской философии математики 202

3.3 Современные средства математического познания и новые возможности компьютерного моделирования 235

ГЛАВА 4 МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ЦЕЛОСТНОСТЬ КОНЦЕПЦИИ ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ 280

4.1 Системный стиль математического мышления и практическая эффективность современной математики 287

4.2 Проблема непротиворечивости в философии математики и генезис понятия математической истины 323

4.3 Системная триада направлений обоснования математики как форма философско-методологического синтеза 369

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 410

ЛИТЕРАТУРА 422

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы данного исследования определяется поисками реальных механизмов развития математических теорий и характеризуется степенью разработанности проблемы в научной литературе. Проблема обоснования современной математики состоит из двух взаимосвязанных уровней – математического и философского. Если сущность первого выявляется через применение программы обоснования к конкретной теории, что составляет чисто математическую работу, то сущность второго характеризуется тем, что каждая программа обоснования нуждается в философском анализе ее соответствия своей исходной философско-методологической задаче. Кроме того, проблема обоснования настолько тесно связана с философскими императивами конкретной эпохи, что ее исследование невозможно без анализа соответствующего философского контекста. Для этого необходимо выявить методологическую базу и раскрыть теоретические и практические подходы к обоснованию математики. Но, как отмечает академик В.С. Степин: “Из большого поля философской проблематики и вариантов ее решений, возникающих в культуре каждой исторической эпохи, наука использует в качестве обосновывающих структур лишь некоторые идеи и принципы” [424, с.133–134]. Поэтому круг современных философских вопросов, нуждающихся в дальнейшем изучении, связан с естественным синтезом наиболее устойчивых философско-методологических традиций в математике с целью создания адекватной концепции обоснования математики.

По поводу степени разработанности темы этого исследования, можно сказать, что в настоящее время, как в теории познания, так и в философии математики проведена необходимая подготовительная работа для выработки адекватной модели обоснования математики, соответствующей пониманию законов ее исторического развития. Некоторые аспекты проблемы обоснования математики достаточно детально обсуждались в связи с рассмотрением различных вопросов философии математики. Можно, например, выделить работы таких известных в области философии и методологии математики и науки авторов, как А.Д. Александров, Н.В. Бугаев, Г. Вейль, К. Гёдель, М. Клайн, И. Лакатос, Р. Пенроуз, В.Я. Перминов, Б. Рассел, Г.И. Рузавин, В.С. Степин, В.А. Успенский, Г. Фреге, В.В. Целищев, Б.Г. Юдин и других. Философско-математическому сообществу всегда не хватает таких исследователей в философии науки, которые выполняли бы роль “соединителя” методологически противоположных подходов в математическом знании с помощью современных общефилософских принципов.

Философско-методологической основой проведенного исследования является системный подход, который показал свою эффективность при анализе проблем философии науки. При изучении конкретных вопросов обоснования современной математики наиболее плодотворным и универсальным философским принципом все же является принцип системности. Идея системного подхода к обоснованию математики на основе эволюции математического знания в некоторой степени была намечена немецким философом Эдмундом Гуссерлем. Он писал, что “нужно понимать глубокую причину того требования так называемого "теоретико-познавательного обоснования" наук, которое распространилось и, в конце концов, повсеместно утвердилось в Новое время, в то время как ясности по поводу того, чего же не хватает заслужившим столько восхищения наукам, достигнуто не было” [124, с.230]. В обосновании математики исторически сосуществуют и взаимодействуют два способа систематизации подходов к обоснованию – теоретический и практический. При теоретическом способе систематизации обоснования математического знания выявляются общие логические связи, продуцируемые познавательными способностями и зафиксированные в специальных понятиях логического вывода. При практическом способе систематизации обоснования акценты переносятся на выявление наиболее стабильных и надежных методов конструирования новых математических объектов, соответствующих практико-прикладным потребностям, которые в свою очередь способствуют правильному пониманию реальных направлений эволюции современных математических теорий.

Необходимо также отметить, что многообразие различных направлений в современной математике благодаря своим основаниям организуется в системное целое, поэтому наличие связей между ними дает основание рассматривать ее как целостную и самоорганизующуюся систему. По поводу философских оснований науки академик В.С. Степин авторитетно заявляет: “Формирование и трансформация философских оснований науки требует не только философской, но и специальной научной эрудиции исследователя (понимания им особенности предмета соответствующей науки, ее традиций, ее образцов деятельности и т.п.). Оно осуществляется путем выработки и последующей адаптации идей, выработанных в философском анализе, к потребностям определенной области научного познания, что приводит к конкретизации исходных философских идей, их уточнению. Возникновению новых категориальных смыслов, которые после вторичной рефлексии эксплицируются как новое содержание философских категорий” [424, с.134]. Поэтому в этом монографическом исследовании делается акцент на философских и методологических высказываниях профессиональных математиков с целью сведения философских и математических предпосылок в единое целое. Заметим, что такую исследовательскую деятельность и принято обозначать как философию и методологию науки.

Включение математического знания в общую мировоззренческую культуру предполагает его философское обоснование с помощью философско-методологических идей, включающих онтологические и эпистемологические аспекты математического знания. Поэтому проблема обоснования современной математики исследуется на основе философско-методологического анализа развития различных областей математического и естественнонаучного знания. В частности, необходимо упомянуть известную белорусскую школу и таких философов науки и профессиональных математиков как П.А. Водопьянов, И.В. Гайшун, А.Д. Егоров, В.А. Еровенко, Н.И. Жуков, П.П. Забрейко, А.И. Зеленков, П.С. Карако, В.К. Лукашевич, М.А. Слемнев, Э.М. Сороко, В.П. Старжинский, Д.И. Широканов, В.И. Янчевский, Я.С. Яскевич и других.

Философия математики есть часть философии, поэтому в ней отражаются те тенденции, которые свойственны всей философии. В общефилософском аспекте в отношении анализа и синтеза в различных областях знания, в том числе и философии современной математики, мы встречаемся с проблемами, напоминающими ситуацию в квантовой физике, которая называется “соотношением неопределенностей”. Сущность этого принципа состоит в том, что физические понятия в некоторых случаях не являются точно определенными. Поэтому соотношение неопределенностей возникает с самого начала, еще до процедуры измерения, как математическое утверждение. Соответствующие трудности обусловлены тем, что, как образно заметили А.Д. Егоров и И.Д. Егоров, “сам принцип неопределенности свидетельствует о том, что человек не просто "видит" данный объект, но одновременно блокирует другие возможные "видения". Эта мысль особенно четко прослеживается при "видении" идеальных объектов” [143, с.83]. Например, алгоритмическое толкование понятий математики, понимаемое в контексте конструктивной установки, противостоит теоретико-множественным понятиям формального направления, в котором рассматриваются абстрактные множества элементов произвольной природы. Кроме того, естественный исторический рост абстрактности математики стал противоречить представлениям о ней как науки о непреложных фактах, данных нам с некоторой очевидностью, что обусловило методологический конфликт между сторонниками символьной и содержательной математики.

Философско-методологический анализ математических теорий никогда не был однозначным, поэтому чтобы увидеть за техническими трудностями методологическую сущность новых методов исследования в современной математике, требуется большая культура философского и математического мышления. В этом исследовании используются результаты, опубликованные в ряде монографий и статей, написанных математиками, в которых проблема обоснования эксплицируется в контексте тенденций развития конкретных разделов современной математики. В первую очередь необходимо назвать таких выдающихся математиков как В.И. Арнольд, Л. Брауэр, Д. Гильберт, Ж. Дьедонне, Г. Кантор, А.Н. Колмогоров, П.Дж. Коэн, А. Лебег, Н.Н. Лузин, С. Маклейн, Б. Мандельброт, А.А. Марков, С.П. Новиков, А. Пуанкаре, И.Р. Шафаревич и многих других. Заметим, что хотя еще со времен Платона философы настаивали на достаточно строгой разработке системы математических знаний и даже многие из них принимали в ней участие, инициатива в методологических исследованиях всегда исходила от самих математиков.

Проблема обоснования современной математики не сводится только к выявлению научно-теоретических предпосылок, а рассматривается в более широком аспекте, так как она непосредственно связана с анализом проблемы понимания смысла математических утверждений, поскольку лишенная смысла математика может неограниченно развиваться при ее постоянном логическом конструировании. Раньше, по мнению В.В. Ильина, “в классический период стремление к точности и строгости, извечно свойственное сознанию ученых, некритически гиперболизировалось: научным считалось лишь всесторонне обоснованное знание в некотором доскональном смысле” [161, с.30]. Теперь для адекватного понимания проблемы обоснования необходим синтез, который объединяет концепции основных направлений философии математики, включающий дополняющие друг друга подходы к обоснованию математики. При системном стиле мышления выявляется не только дополнительность этих подходов, но и их объединение в новой системной целостности. Анализу подобной идеи в обосновании математики посвящено настоящее исследование, что характеризует место этой монографии среди других исследований в области философии математики. Но для реализации соответствующих построений нужен выход в новое смысловое философское пространство, необходимое для понимания практической значимости новой концепции обоснования.

Необходимость философско-методологического синтеза программ обоснования обусловлена тем, что философия акцентирует свои когнитивные задачи на выявление теоретически универсального в обосновании математики, а методология – на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте и создании условий для дальнейшего развития математики. Говоря о традиционных стилях мышления, противопоставляемых друг другу, И.Б. Новик добавляет: “Однако в плане рассмотрения специфики системного стиля мышления тут имеется определенное своеобразие, состоящее в том, что придается определяющая значимость и другой стороне – выявлению моментов не альтернативности, но общности элементов, имевших место и в прежних стилях мышления” [311, с.54]. Философско-методологический синтез как раз и отличается от простого соединения принципов именно тем, что он представляет собой слияние исходных, даже противоположных, принципов с помощью идеи дополнительности в концептуальном подходе, имеющем новый смысл, сущность которого состоит в том, что он задает совокупность методов исследования как составляющую часть методологического арсенала. Поэтому философская попытка такого синтеза носит предварительный характер и не может заключать в себе окончательную истину.

Теоретическая задача предпринятого исследования по обоснованию математики в контексте системного стиля мышления состоит в переходе к новым критериям, способным совмещать в себе философско-методологический синтез. При этом синтез предполагает, что в проблеме обоснования математики важно учитывать промежуточный член в процессе разрешения противоречия противоположных подходов к обоснованию. Взгляд на проблему обоснования под углом зрения философско-методологического синтеза способствует приращению знания, открывая новые способы интеграции в математике. Стремление к синтезу и новой методологической целостности, заменяющей недостижимую полноту, связано с идеей тринитарности, которая находит плодотворное применение в синергетике. Философское познание активно воздействует на развитие мировоззренческой культуры, моделируя ее возможные изменения как функционирование системной целостности. Но следует помнить также о том, что, по мнению академика В.С. Степина, "невозможно построить абсолютно истинную философскую систему, поскольку каждая такая система даже в своих прогностических компонентах детерминирована особенностями культуры своей эпохи и в силу этого ограничена" [427, с.9]. Тем не менее, опираясь на принцип системности, можно попытаться объединить различные философские подходы к обоснованию математики, что способствует установлению путей их синтеза и новому осмыслению их взаимной дополнительности.

По мнению методолога науки И.В. Блауберга, "системный подход представляет собой методологическую ориентацию исследователя, основанную на рассмотрении объектов изучения в виде систем, то есть совокупностей элементов, связанных взаимодействием и в силу этого выступающих как единое целое" [53, с.319]. Системный подход, направляющий общую стратегию исследования, дает возможность осуществления философско-методологического синтеза в обосновании математических теорий. Специфика системного подхода в обосновании современной математики состоит в понимании эволюции математических теорий как систем, которые совершенствуют свою организацию, стремятся к зрелому состоянию теории. Поэтому целью этого исследования является разработка целостной интегральной концепции обоснования современной математики, непосредственно связанной с идеей утверждения философско-методологического синтеза существующих направлений обоснования математического знания. Реализация указанной цели предполагает последовательное решение нескольких взаимосвязанных философских задач:

Осуществить конкретизацию философского принципа системности путем раскрытия генезиса проблемы обоснования математики, как главного объекта сравнения, и реконструировать философские проблемы программ обоснования формализма и интуиционизма, восходящие к общему источнику – идее актуальной бесконечности, на основе чего раскрывается также необходимость экспликации философской концепции математического платонизма.

Выявить эффективные пути выхода из методологического кризиса в обосновании математики с учетом эволюции математического знания на примере философской репрезентации фрактальной геометрии, рассматриваемой в качестве нового направления постнеклассической математики и обосновать необходимость нового уровня рефлексии в проблемном поле исследований по философии современной математики.

Разработать новую концептуальную идею философии математики, состоящую в выявлении, упорядочении и прогнозировании результирующих пересечений философских направлений обоснования современной математики на основе философско-методологического синтеза, что позволит замкнуть бинарную оппозицию действующих программ обоснования современной математики “формализм – интуиционизм” в системную триаду “формализм – платонизм – интуиционизм”, характеризующую единство современной математики и образующую достаточно устойчивую целостность.

Еще раз подчеркнем, что объектом проведенного исследования является современная математика как совокупность абстрактных структур, а предметом данного исследования в рамках философии математики – целостная концепция синтеза основных направлений обоснования математики, которая в наибольшей степени соответствует пониманию сущности математики как развивающейся науки. Исследование проблемы обоснования современной математики, которая неоднократно привлекала внимание философов, осуществляется с опорой на конкретные результаты истории развития математики и понимание природы процессов, происходящих в современном математическом познании. В частности, 1-я глава включает аналитический обзор как философской, так и математической литературы по проблеме философско-методологического обоснования современной математики, а логику построения основных глав монографии в общих чертах можно объяснить следующим образом.

Историческую эволюцию любой научной дисциплины, среди которых многие десятилетия идеал научности формировался по математическому образцу, можно теоретически реконструировать с помощью моделирования, экспликации и прогнозирования того вида реальности, который составляет ее предмет. В соответствии с этим, во 2-й главе моделируется эволюция представлений о сущности математики, исходя из имплицитной изменчивости критериев достоверности математического знания, выявляются заблуждения относительно возможности редукции математики к логике и методологические причины несостоятельности программы логицизма как направления обоснования. Кроме того рассматриваются философские аргументы релевантности концепции “умеренного платонизма” в обосновании математики.

Направления формализма и интуиционизма, как предпосылочные нетривиальные направления обоснования классической и неклассической математики, в силу специфики определенных субъективных установок философского и методологического характера, вызывают необходимость их дополнительной экспликации. Поэтому 3-я глава посвящена применению компаративистского подхода к математическому познанию, с помощью которого выявляется сущность противоречий конкурирующих направлений обоснования математики, которые в равной мере соответствуют математическому опыту и росту математического знания, включающего, например, фрактальную геометрию, как современный образец постнеклассического математического знания.

Значительное количество различающихся философских точек зрения на проблему обоснования современной математики свидетельствует не только об актуальности этой проблемы, но и о новых методологических кризисах, связанных с проблемой переусложненности доказательств и надежности компьютерных способов доказательства теорем, исходящих из существа рассматриваемой проблемы. Для прогнозирования путей их преодоления в 4-й главе с помощью вторичной концептуализации репрезентируется системная триада направлений обоснования формализма, платонизма и интуиционизма как новая форма философско-методологического синтеза. Она рассматривается в качестве концептуальной основы концепции обоснования математики, которая в контексте более или менее правдоподобной гипотезы снимает необоснованные претензии математики на абсолютную точность и непротиворечивость ее теорий.

Специфика математического метода состоит в том, что для большей части математического символизма не существует, ни материальных объектов, ни физических процессов, поэтому для развития науки так важна идея единства и целостности математики. Отличие предлагаемой концепции обоснования современной математики от предыдущих концепций состоит в том, что задача развития методологии математики ориентирована на проработку метатеоретического знания при условии парадигмального сдвига науки в направлении от анализа к синтезу. На основе философско-методологического синтеза направлений обоснования математики можно свести различные элементы совокупного математического знания в целостную систему, обеспечивая тем самым единство многообразия математических теорий, способствующее приращению знания и новым способам коммуникации в современной математике. В таком контексте основная философская идея системного подхода к обоснованию современных математических теорий состоит в том, чтобы связать их философско-методологическую завершенность со свойствами непротиворечивости или надежности теоретического и прикладного математического знания.

ГЛАВА 1.
ОБЗОР ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

К началу XX века философия математики осознала себя как область, имеющая значение не только для решения чисто философских проблем. Методологически строго проблема обоснования математики впервые была сформулирована немецким математиком Давидом Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий. В докладе "Обоснования математики" Гильберт говорил: "Что касается исследований новейшего времени, то тот факт, что снова так живо пробудились стремление и интерес к работам по обоснованию, сам по себе меня в высшей степени радует; но, представляя себе содержание и результаты этих работ, я большей частью не могу согласиться с их направлением; вернее сказать, я считаю, что большая часть их отстала, что они как бы пришли к нам из того времени, когда величественный мир идей Кантора не был ещё открыт" [111, с.379]. Высказывание Гильберта в новом контексте по-прежнему актуально в философии математики. Его понимание обоснования математики, интерпретируемой как совокупность абстрактных структур, сводилось к задаче обоснования надежности ее доказательных утверждений и установлению непротиворечивости ее теорий.

Остановимся сначала на истории этого вопроса. Еще Платон пришел к выводу о том, что знание предполагает не только соответствие высказывания реальности, но и обоснованность первого. "Проблема обоснования знания становится центральной в западноевропейской философии, – считает академик В.А. Лекторский, – начиная с XVII в. Это связано с становлением нетрадиционного общества, с появлением свободного индивида, полагающегося на самого себя. Именно в это время происходит то, что иногда называют "эпистемологическим поворотом". Что именно можно считать достаточным обоснованием знания? Этот вопрос оказывается в центре философских дискуссий" [235, с.73]. Не случайно, слово "обоснование" часто употребляется в обыденной речи и в научном лексиконе. Поэтому в различных контекстах ему придаются различные значения, иногда как синоним термина "доказательство", а иногда как синоним "объяснения". Наиболее распространенными являются следующие два значения. Первое значение это слово приобретает в составе определенного термина обоснование математики, где "под обоснованием математики понимается попытка найти такую содержательную теорию (канторовскую теорию множеств, логику и т. д.), из которой выводится вся математика" [307, с.50]. Или построить некоторую формальную систему, из которой можно было бы вывести, по крайней мере, основы фундаментальной математической теории.

В разделе “Вопросы обоснования математики” энциклопедической статьи “Математика” выдающийся математик академик А.Н. Колмогоров определяет обоснование так: “Чрезвычайное расширение предмета математики привлекло в 19 в. усиленное внимание к вопросам ее "обоснования", т.е. критического пересмотра ее исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критического рассмотрения логических приемов, употребляемых при этих доказательствах” [195, с.29]. Важность такой работы становится понятной, считал он, если учесть изменившийся характер взаимоотношений “между развитием математической теории и ее проверкой на практическом материале”, доставляемом естествознанием. Другим распространенным значением слова “обоснование” является то, которое ему придается в обыденном сознании, точнее в “здравом смысле”. Так, например, современный английский математик Роджер Пенроуз считает: “В математике неизмеримо больше здравого смысла, нежели можно обнаружить в любом отдельно взятом разуме. Не является ли это прямым указанием на то, что математика существует вне нас, что она обладает собственной реальностью, недоступной ни одному отдельному индивидууму?” [328, с.34]. Возможно и третье объяснение, согласно которому математический мир не обладает независимым существованием, а является совокупностью индивидуальных идей, заслуживающих полного доверия, однако такое обоснование, похоже, ничего по существу не объясняет. Современное развитие философии математики позволяет сформировать такую концепцию обоснования современной математики, которая, в частности, сочетала бы достоинства этих двух пониманий, не настаивая на окончательности ответа на все вопросы.

Как справедливо отмечает философ науки Н.С. Мудрагей: “Можно соглашаться с Пенроузом или нет, но нельзя не отметить его стремление дать теоретическое обоснование уникальной способности математики как средства познания Природы, тогда как большинство ученых признают этот факт, но на нем – признании – и останавливаются. <…> Лично я знаю одну (эрудированные товарищи меня поправят) попытку теоретического обоснования статуса математики – это Кант” [294, с.88]. Заметим, что трансцендентальное познание у Иммануила Канта означает не столько познание самого предмета, сколько осознание того, как возможно познание, которое предшествует опыту, и является всеобщим. Благодаря трансцендентальному основоположению математики, указанному Кантом, “чистая математика со всей ее точностью становится приложимой к предметам опыта, тогда как без него это не было бы ясно само собой и, более того, вызывало бы много противоречий. <…> И все увертки, будто предметы чувств могут не сообразоваться с правилами построения в пространстве (например, с бесконечной делимостью линий или углов), должны отпасть, так как тем самым мы бы отрицали объективную значимость пространства и вместе с ним всей математики и утратили знание о том, почему и насколько математика приложима к явлениям” [166, с.129–130]. Абстрактные представления о пространстве и времени укорены в человеческом сознании, поэтому, согласно Канту, “синтез пространств и времен” дает возможность схватывать явление. Кроме того, заключает он, все, что математика в ее “чистом применении” доказывает об этом синтезе, не может быть неправильным в отношении этого знания. В контексте формирования предпосылочного знания заметим, что ответы на некоторые вопросы отчасти подготовлены всем предшествующим философским анализом проблемы обоснования математики.

Как отмечает автор первой на советском пространстве докторской диссертации по философии математики на тему “Философские проблемы обоснования математики” (1969) Г.И. Рузавин: “Именно крайняя абстрактность математики и чисто логический способ получения ее истин постоянно привлекали внимание выдающихся математиков и философов, не раз вызывали острые дискуссии среди ученых. <…> И все же фундаментальные проблемы обоснования математики нельзя решать в отрыве от других наук и особенно философии. Вот почему возникает необходимость в специальном, философском обсуждении проблем обоснования математики и общей оценке различных программ такого обоснования” [390, с.2–3]. Эта значимая и актуальная работа по философии математики была посвящена анализу философских проблем обоснования математики, в которой акцентировалось внимание на вопросах, связанных с природой математических абстракций и существованием абстрактных объектов. Для дальнейшего философско-методологического анализа проблемы обоснования важен следующий вывод из этой диссертации: “Эволюция главных школ обоснования математики – логицизма, интуиционизма и формализма – ясно показывает, что претензии каждой из них представить единственно правильное обоснование математики оказались беспочвенными” [390, с.45]. Кроме того, анализ философских проблем обоснования математики показал, что они принципиально отличаются от конкретных математических проблем, но, тем не менее, поиск новых принципов и методов обоснования, считает он, должен способствовать задачам дальнейшего развития современной математики.

Но так ли существенна для математики проблема ее обоснования? В общеметодологическом плане такое обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств. Заметим, что в разные периоды истории развития математики надежными представлялись математические теории, соответствующие различным уровням теоретической строгости, формирующимся под влиянием критической познавательной установки. Принято считать, что проблема обоснования математики имеет не только логическое, но и философское измерение, которое наиболее важно в этом исследовании. В выборе направлений обоснования для анализа сошлемся на мнение американского логика и математика, специалиста по основаниям математики Стиви Клини: “Имеются три основных направления в основаниях математики: (i) логистическая школа (Рассел и Уайтхед, Англия), (ii) интуиционистская школа (Брауэр, Голландия) и (iii) формалистическая, или аксиоматическая, школа (Гильберт, Германия). <…> Эта широкая классификация не включает различных других точек зрения, которые не столь широко культивировались или не совмещают в такой же степени реконструкцию математики и философию, лежащую в ее основе” [187, с.45]. Отметим, что первоначальное понимание проблемы обоснования ориентировалось в значительной мере на логический анализ и было в определенной степени “антифилософским”, а в тех вопросах, где нельзя было избежать философского анализа, ее решение сводилось к определенного вида догматическим допущениям, таким, например, как “конструктивное доказательство, несомненно, достоверно”. Такого рода методологические установки до сих пор ограничивают продуктивность философии науки в перспективе обоснования современной математики.

Для полноценного анализа проблемы обоснования математики необходимо прояснить различие математической и философской методологий. Если первая стремится определить “дорогу” к математическому знанию, будучи убежденной в его объективной истинности, то вторая пытается выяснить, что считать истиной, как получить истинное знание, то есть выявляет философские критерии достоверного знания, которые использует наука в процессе познания. Поэтому можно выделить следующие два понимания методологии. Во-первых, как учения о методах познания, что приводит к представлению о ее относительно самостоятельном характере. Во-вторых, как инструмента преобразования философского мировоззрения в познавательную деятельность, что проявляется в способности философии превращать мировоззренческую функцию в методологическую функцию. С точки зрения проблемы обоснования математики нельзя абсолютизировать ни один из этих подходов. Еще более широкое определение методологии, в том числе и методологии математики, согласно историку математики К.А. Рыбникову, состоит в том, что “методология понимается как философское учение о методах познания и преобразования действительности, как применение принципов мировоззрения… к процессу познания, к духовному творчеству вообще и к практике” [394, с.6]. При таком понимании методологическая проблема обоснования математики получает общефилософское истолкование. “Методологический подход, – уточняет методолог науки Э.Г. Юдин, – это принципиальная методологическая ориентация исследования, точка зрения, с которой рассматривается объект изучения (способ определения объекта), понятие или принцип, руководящий общей стратегией исследования” [496, с.143]. Такое понимание методологической деятельности приложимо к системному подходу в проблеме обоснования современной математики.

Поэтому при ответе на поставленный вопрос мы исходим из того, что методологический и философский статус теоретико-множественных принципов, реально используемых в современной математической практике, в действительности не является широко известным даже в профессиональном сообществе математиков. По мнению выдающегося французского математика Анри Лебега, сформировавшемуся в начале прошлого века, одна из причин сложившегося положения состоит в том, что после первых крупных успехов теории множеств математики сочли, возможным, отбросив недоразумения, искать взаимопонимание с философами. “Обратились к мужам, которых страстное желание все знать сделало философами и которые были одарены столь блистательно, что казались на самом деле способными все объять и все постичь; – писал А. Лебег, – но заставить их выйти за рамки традиционной философии не удалось, и поэтому при создании научной философии, пригодной для науки, ученые положительно должны были рассчитывать только на самих себя” [229, с.11]. С тех пор многое изменилось в лучшую сторону благодаря прояснению философских оснований математической науки. Но поскольку математику можно рассматривать как специфическую систему понятий и идей, в контексте научного знания в целом, то в данном исследовании проблема обоснования современной математики обсуждается, прежде всего, с философской точки зрения, а именно в плане общих принципов математического познания. В качестве еще одного предварительного вопроса необходимо обсудить, что подразумевать под термином “современная математика”?

Заметим, что современная математика как результат длительного исторического развития представляет собой очень сложную и гетерогенную по внутреннему содержанию систему дисциплин, разделов и теорий. Наиболее известная периодизация истории математики была дана академиком А.Н. Колмогоровым. Согласно его классификации история математики распадается на четыре этапа. Это период зарождения математики; период “элементарной математики”, начинающийся в VI–V веках до н.э. и завершающийся в конце XVI века; период “высшей математики”, охватывающий XVII–XVIII века, то есть период переменных величин; и наконец, период современной математики, продолжающийся в XIX–XX веках, для которого характерно сознательное расширение предмета математики. Следует заметить, что наименования второго и третьего периодов “элементарной математики” и “высшей математики”, с точки зрения оппонентов, связывали содержание целого исторического периода со школьным и вузовским образованием, хотя, например, инфинитезимальные методы Архимеда относятся к высшей математике. Обсуждая причины возникновения математики как науки в Древней Греции, он связал их с историческими и социокультурными особенностями развития древнегреческих государств. “Появилась потребность в отчетливых математических доказательствах, были сделаны первые попытки систематического построения математической теории. <…> Это изменение характера математической науки объясняется более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, приведшей к высокому развитию диалектики, искусства спора, к привычке отстаивать свои убеждения в борьбе с противником” [196, с.34]. Основные возражения в контексте этой периодизации относились к описанию современной математики, для адекватного понимания которой требуется расширительное толкование входящих в определение современной математики терминов. Так, определение математики, модной в 60–70-х годах XX века группы Бурбаки, сводилось к представлению ее в виде абстрактных форм, точнее математических структур.

Периодизация Колмогорова с некоторыми модификациями принята многими историками математики. Но, как отмечает А.П. Юшкевич: “Для современной математики XIX–XX вв. А.Н. [Колмогоров] не нашел, а может быть, не искал лаконичной характеристики в немногих словах всего многообразия направлений исследований. Он подчеркивает огромное расширение предмета математики, проблем обоснования теоретико-множественной концепции и в связи с нею расцвет математической логики, аксиоматического метода построения новых структур и т. д.” [498, с.15]. Из-за огромного содержательного разнообразия предмет и метод современной математики не может быть охвачен каким-то простым определением, которое выражало бы ее единую сущность, поскольку сама эта сущность системна и многообразна. По признанию самих историков математики, с содержательным наименованием периода современной математики дело обстоит гораздо сложнее. В частности, возникает вопрос: можно ли говорить о последних двух столетиях развития математики как о едином периоде? Может быть, в связи с наступившей эрой компьютеризации, правильнее говорить о первом этапе нового развития математики? Но, при всем разнообразии направлений, изучаемых современной математикой, можно, следуя Колмогорову, заключить: “Овладеть всем разнообразием образований, изучаемых современной математикой, нельзя без аксиоматического метода, позволяющего систематически обозреть различные возможности развития той или иной теории, открывающиеся в зависимости от того, как видоизменяются исходные допущения, положенные в ее основу” [196, с.124]. Поэтому видимо целесообразнее, как предлагал А.Н. Колмогоров, просто говорить о “современном этапе развития математики”. В создании принципиально новых методов исследования, достаточно гибких для того, чтобы изучать весьма общие и разнообразные математические отношения, заключается философско-методологическая новизна нового исторического периода развития математики.

Следует еще добавить, что многие математики склонные к философии имели все основания называть современную математику наукой о бесконечности, поскольку при любом философском размышлении о сущности математики из глубин сознания вполне естественно извлекается эта бесконечность. Это, пожалуй, наиболее серьезное методологическое изменение, произошедшее в математике со времен древнегреческой науки. Можно даже утверждать, что именно понятие бесконечного разделяет математику и логику, поскольку интуитивное и формальное представление о бесконечности, необходимое в математике, отсутствует в логике. Поэтому необходимость обоснования современной математики обусловлена, с одной стороны, самой логикой математического познания, поскольку убедительность переусложненных математических доказательств, подчиняющихся законам логики, убывает с увеличением их длины, а с другой стороны, проблемами функционирования математических теорий, так как даже “финитарные” математические утверждения могут иметь сложно понимаемые истинностные значения. При выдвижении программ обоснования математики представление о бесконечном было вербализовано как неявная теоретическая предпосылка. Все попытки ее элиминации из математических теорий оказались неудачными, а представление о бесконечном никак не вписывалось в жесткие каноны строгости, предъявляемые программами обоснования математики. Заметим, что определенные стагнационные процессы последних десятилетий, происходящие в философии математики, вызваны не только вполне прогнозируемой сложностью отдельных математических теорий и математических проблем. Одной из ее причин является смысловое многообразие противостоящих концепций обоснования математики.

Исторически вторым фундаментальным исследованием, содержащим общую характеристику основных путей обоснования непротиворечивости математических теорий, а также краткое описание основных программ обоснования математики, выдвинутых в начале XX века, стала докторская диссертация В.Я. Перминова “Философские основания представлений о строгости математического доказательства”(1986). В частности, он утверждает: “Основной недостаток традиционных программ обоснования математики состоит в неразработанности их гносеологических оснований. Центральное для гильбертовской программы отождествление достоверности с финитностью неубедительно, по крайней мере в том положении, что достоверным обоснованием может быть только обоснование финитное. Являются произвольными и малообоснованными также и интуиционистские ограничения на логику доказательства” [330, с.21]. Поэтому он обращает особое внимание на важность анализа гносеологических предпосылок программ обоснования, поскольку на этом уровне могут быть оправданы логические требования программ, а также адекватно истолкованы полученные в рамках этих программ результаты.

С точки зрения философской рефлексии, программа обоснования сама нуждается в собственном обосновании – математическом и философском, соответствующем их задачам. Математический анализ проблемы связан с рассмотрением математической теории в соответствии с принципами принятой программы обоснования. Философский анализ проблемы опирается на общие характеристики научного познания, поэтому процедуры конкретизирующего обоснования в философии выполняются, вообще говоря, не с той последовательностью, методичностью и эксплицитностью, как это делается в точных науках. Для конкретизирующего обоснования своих познавательных теорий и схем философия математики обращается за помощью к самой математике. В своем фундаментальном исследовании “Философия и основания математики” В.Я. Перминов делает важнейший вывод, обосновывающий актуальность и необходимость проведения этого исследования, о том, что “общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения должна быть признана совершенно неудовлетворительной” [333, с.148]. Возможно в связи с этим, несмотря на некоторое продвижение в прояснении и обосновании допущений, имеющих гносеологический характер, проблема обоснования современной математики все еще далека от своего окончательного решения, многие вопросы которого остались неразрешенными, что определяет предмет и соответствующие задачи настоящего исследования.

Для этого, прежде всего, необходимо выяснить, как понимается обоснование математики в концептуальном плане в связи с прагматическим аспектом ее практической эффективности, с решением каких задач, способствующих реализации обосновательного замысла, связана проблема обоснования математики. В связи со знаменитым кризисом оснований математики, связанным с обнаружением парадоксов теории множеств, в философской литературе содержание категории “обоснование” традиционно сопрягается с содержанием категории “основа” (основание), как целостной сущности, которую составляет основание в философском единстве с обосновываемой теорией. В действительности “основание” составляет лишь часть сущности, тогда как другую часть сущности, которую можно рассматривать как “совокупность необходимых свойств и отношений, обусловленных главным определяющим звеном и развивающихся под воздействием этого главного звена (основания), составляет "обоснованное"” [46, с.141]. С учетом многообразия математического знания у математиков сформировались различные точки зрения на обоснование современной математики, требовавших решения вполне определенного комплекса профессиональных проблем, на которые никогда не ориентировалась философия математики. “Такое обоснование обнаруживается, если мы учтем, что математика – это не просто формальные теории и их интерпретации. Важен также и прагматический аспект, описывающий существование математических теорий в математическом сообществе” [126, с.118]. В таком контексте само словосочетание “обоснование математики” звучит, возможно, даже парадоксально, так как математика для других наук всегда считалась эталоном достоверности научного познания как совокупность практик, осуществляемых в соответствии с заданными математиками идеалами и нормами математических теорий.

Теоретизация проблемы обоснования математики находится в тесной связи с нахождением “предельных основоположений знания”, трудности выявления которых, порождаются природой обоснования как процедуры поиска “обосновывающего основания”, который в силу многообразия математического знания реально достичь невозможно. По мнению философа науки В.В. Ильина: “Единственный путь преодолеть regressus ad infinitum состоит в обрыве обоснования на каком-то его витке. Однако это вызывает новые трудности, представление о которых можно получить, оценивая возможности прекращения поиска обосновывающего основания” [231, с.153]. Он выделяет две такие возможности. Согласно первой, обрыв обоснования обеспечен тем, что некоторое основание обосновывается через “самозамыкание обоснования”, основанное на самоприменимости, что чревато новыми формальными парадоксами. Согласно другой возможности, обрыв обоснования происходит в результате того, что некоторое основание принимается как далее необоснуемое. Подчеркивая безысходность этой ситуации, представитель критического рационализма немецкий философ Ганс Альберт назвал ее “трилеммой Мюнхаузена”. Классический познавательный идеал, по его мнению, встречается с радикальными затруднениями, связанными с выявлением последнего основания: “Всякая попытка "абсолютного" обоснования оказывается такой же безнадежной, – поясняет А.В. Кезин, – как и попытка вытащить себя из болота за собственные волосы. Требование абсолютного обоснования ведет к трем возможным, но равным образом неприемлемым решениям: бесконечному регрессу, который неосуществим;

эпистемологическому кругу, который неэффективен; остановке процесса обоснования, которая всегда в той или иной степени произвольна” [184, с.315]. Несмотря на драматизм ситуации, в этой метафоре явно сгущены краски, так как, несмотря на утопичность идеи “всесторонней обоснованности”, в действительности в математике фиксируется лишь некий уровень обоснованности, отвечающий реальным запросам развития науки на данном этапе.

Другой этапной работой уже постсоветского периода в философии математики стала докторская диссертация В.Э. Войцеховича “Становление математической теории (философско-методологический анализ)” (1992), третья глава которой называется “Обоснование математической теории”. В частности, он анализирует трудности проблемы обоснования, которые встают перед математиком, желающим убедиться в адекватности теоремы и ее доказательства, начиная с оснований теории. “Основанием, – считает он, – называют условие, предпосылку, обеспечивающие существование явления, т.е. то, что предполагает или создает обоснованное. <…> В целом обоснование явления – это его согласование с основаниями. В столь сложном системном процессе, как становление теории, работают все виды оснований, но для нас важно выделить еще два их вида – внутриматематические, позволяющие определить, функционирует ли новая теория в системе математики, и внешние, внематематические, отвечающие на вопрос, работает ли теория в системе науки в целом (например, в качестве формального аппарата физической теории)” [98, с.24]. Дополнительные трудности ожидают исследователей в области философии математики при обосновании фундаментальной математической теории, образующей “скелет” всего здания теоретической математики, поскольку ее специфика и ценность состоят в новизне и несводимости к предыдущему знанию.

На примере истории становления теории категорий, которая, по мнению В.Э. Войцеховича, дала не только новый способ мышления в математике, но и способствовала развитию системно-структурного подхода в науке, он прослеживает общую схему формирования математических теорий, которые в своем развитии проходят три основных этапа: индуктивный, интуитивный и дедуктивный. “Первый, самый длительный этап – формирование предпосылок теории, которые возникают независимо друг от друга в различных областях математики. Затем выявляется сходство между теоремами разных теорий, объединяемых некоторой пока еще туманной идеей. И наконец, возникает необходимость синтеза этих теорем в каком-то новом, еще не созданном объекте (понятии). Его построение становится возможным на следующем – интуитивном этапе” [97, с.99]. На этом этапе формируется программа будущей теории, но в этом процессе существенную роль играет комбинирование старых идей и выбор из соответствующих комбинаций одной плодотворной. И только на третьем, “дедуктивном этапе” последовательно развертывается содержание новой программы исследования. При построении новой философской концепции обоснования современной математики мы будем условно придерживаться этих этапов формирования теории, рассматривая их, соответственно, в качестве предпосылочного, гипотетического и содержательного.

С точки зрения реализации указанных этапов, следует отметить, что, поскольку невозможно указать прямой путь познания, то приходится действовать опосредованно, через когнитивную деятельность концептуального осмысления возникающих проблем в качестве единого проблемного комплекса. С точки зрения математического подхода к решению проблемы обоснования современной математики, оно требует бескомпромиссного решения с помощью неразрывной цепи безупречных рассуждений. Немецкий математик Рихард Курант, в связи с непреодолимыми трудностями при решении математической проблемы, заметил, что некоторые исследователи пытаются переформулировать задачу или поставить другую, родственную ей, трудности которой они могут преодолеть. “Существует, – по его мнению, – и другой обходной путь: заново определить то, что считалось "решением проблемы"; в действительности подобная процедура представляет собой довольно общепринятый предварительный шаг к подлинному решению исходной задачи” [218, с.27]. Можно считать методологически важный тезис Куранта о гибкости мышления начальной гипотезой этого философского исследования по проблеме обоснования современной математики. Ведь в случае необходимости математик и философ математики могут пойти на компромисс с целью сохранения соответствия реальных направлений развития как чистой, так и прикладной математики.

Но для того, чтобы не потерять уже приобретенное знание в обосновательной деятельности его следует рассматривать как предпосылку познания в когнитивной деятельности. “Когнитивная деятельность здесь – это "окольный" путь познания посредством создания соответствующих моделей. В случае, когда когнитивные возможности какой-либо модели оказываются исчерпанными, нужно принимать другую модель, желательно не исключающую предыдущие, а определяющие для них границы применимости” [275, с.59]. Внутри самой математики традиционно разграничивается обосновательная деятельность, с одной стороны, как доказательство определенных свойств математических объектов, а с другой стороны, конструктивная деятельность по построению этих объектов. Поэтому обоснование нельзя трактовать только как производное от понятия доказательства, несмотря на усложненность абстрактных математических и физических теорий. Хотя в том, что математика и теоретическая физика становятся все более сложными и более абстрактными, принято видеть неизбежное следствие прогресса науки. Однако следует заметить, что схоластическая “чистая физика” тоже была чрезвычайно сложной и абстрактной, тогда как новая математическая физика Галилея и Ньютона опиралась на простые и ясные геометрические интуиции, что собственно и предопределило ее дальнейший грандиозный успех. Поэтому не следует заранее отвергать новые концептуальные подходы, которые могут способствовать прогрессу математики.

Для правильного понимания необходимости предварительного философско-методологического анализа в наших дальнейших рассуждениях обратим внимание на мнение выдающегося математика XX века Германа Вейля по этому вопросу: “Чтобы понять сложную математическую ситуацию, часто удобно разделять естественным образом различные стороны рассматриваемого вопроса, делать каждую сторону доступной с помощью сравнительно узкой и легко обозримой группы представлений и формулируемых посредством этих идей и фактов и, наконец, возвращаться к целому, объединив рассматриваемые ранее специализации полной картины. При этом последний акт – акт синтеза – обычно не требует никаких ухищрений. Искусство заключено в первом акте – акте анализа, разъединения целого на допускающие изучение части, в выборе подходящих обобщений” [79, с.7]. Неправильное понимание тенденции развития современной математики, предупреждает Вейль, состоит в том, что общность искалась только ради самой общности, правильнее сказать, что “сила современной математики состоит во взаимодействии аксиоматических и конструктивных методов”. Специфику математики В.А. Светлов поясняет в главе “Проблема обоснования математики” своего учебного пособия “Философия математики”, которая состоит в необходимости и независимости ее утверждений от опыта, интуитивном или априорном происхождении ее аксиом. Поэтому, считает он, процедура обоснования математики – это по существу следующая дилемма: “Математическое знание, как и всякое другое знание, требует внешнего обоснования. <…> Но, будучи необходимой, математика не может быть обоснована ничем внешним, эмпирическим, потому что последнее принципиально не является необходимым” [405, с.10–11]. В этом анализе упускается из вида естественный процесс внутреннего вызревания математических теорий, что можно назвать общей характеристикой всех теоретических систем.

Интересная концепция развития научно-теоретического знания с учетом исторических реалий и специфики математического творчества, в которой акцентировано философское внимание на проблеме рационализации предпосылок научно-теоретического мышления, разработана в докторской диссертации по философии математики Л.Б. Султановой “Неявное знание в развитии математики” (2005). В третьей главе этого исследования, которая называется “Роль неявных элементов в математическом обосновании”, исследуются роль и значение неявных предпосылок в основных обосновательных процедурах в математике. Целью этого исследования является получение новых дополнений к уже сложившейся в современной философии математики гносеологической оценке основных программ обоснования математики (логицизм, формализм и интуиционизм) с преимущественным вниманием на анализ программ формализма и интуиционизма. Она делает рекомендательный вывод о том, что “обоснование математики должно предполагать освобождение математической теории от неявных предпосылок в доказательствах, а также экспликацию базовых оснований математики, к которым традиционно относят основные понятия арифметики, теории множеств, а также основные понятия и аксиомы геометрии” [437, с.34]. Хотя теорему Гёделя о неполноте можно, например, интерпретировать как предложение о том, что в математике всегда могут найтись интуитивно ясные, но не выводимые из аксиом неявные предпосылки.

В современной науке проблемы обоснования математики трактуются в широком теоретико-познавательном аспекте, подходя с необходимой степенью строгости к философским выводам по вопросам обоснования математики, с учетом возможных нюансов, способствующих уточнению в философии математики самого понятия обоснования. “Философия математики, – по определению Л.Б. Султановой, – это прежде всего часть философии, занимающаяся вопросами обоснования математической науки, и в этом смысле по отношению к математике она самостоятельна, а ее выводы не должны рассматриваться как противоречащие выводам самой математики или вторичные по отношению к ним” [436, с.102]. Поэтому, с точки зрения реально протекающей истории математики, возможно развитие различных подходов к обоснованию математики. Наиболее перспективным в философии математики, считает она, представляется путь историко-философского исследования, заключающийся в изучении природы взаимосвязи строгости и надежности математического знания, которую нельзя считать исторически инвариантной в реально развивающемся историко-математическом обосновательном процессе. Следует подчеркнуть, что по существу это означает, что исторический процесс обоснования математики теоретически нельзя считать ограниченным во времени.

В структуре науки традиционно различаются два основных процесса, а именно, ее функционирование и ее формирование. “От функционирования науки процесс ее формирования (становления и развития) отличается тем, что здесь все три слоя науки (эмпирический, теоретический, оснований), а также отношения между ними или складываются, или видоизменяются” [381, с.28]. Современные математические теории представляют собой сложные развивающиеся системы, новые уровни обоснования которых, оказывают обратное воздействие на структуру ранее сложившихся уровней обоснования. Как утверждает академик В.С. Степин: “В качестве исходной единицы методологического анализа структуры теоретического знания следует принять не отдельно взятую теорию в ее взаимоотношении с опытом…, а научную дисциплину” [425, с.706]. Заметим также, что математика как научная дисциплина отличается от других дисциплин идеалами обоснования и доказательности, основания которой выступают системообразующим фактором. Исходя из всей истории математики, можно утверждать, что особенность фундаментальных математических теорий состоит в том, что они достигают предельного самообоснования, проявляющегося в реальной стабилизации ее принципов.

Современная методология обоснования математических теорий опирается на онтологическое различие математических структур, существенно учитывая при этом их логические и внелогические степени обоснованности. С учетом сказанного, можно сузить вопрос об обосновании следующим образом: какая именно часть современной математики нуждается в обосновании? “Аксиомы алгебраических структур, например, по большей части имеют конечные модели, а обоснование геометрических аксиоматик было сведено Гильбертом к обоснованию арифметики действительных чисел” [214, с.89]. Отсюда можно заключить, что по существу речь идет о математическом анализе, который начинается с теории действительных чисел, то есть, в конечном счете, с натуральных чисел и теории бесконечных множеств. Но при этом выявляется необычный ход логической аргументации, отмеченный американским математиком Морисом Клайном: “Вместо того, чтобы, начав с целых дробей и чисел, перейти к иррациональным и комплексным числам, алгебре и математическому анализу, ученые решали проблему обоснования математики в обратном порядке” [186, с.307]. Следует также добавить, что источником кризисной ситуации начала прошлого века стало не обнаружение теоретико-множественных антиномий, как это принято считать, а расхождение мнений о множестве действительных чисел, нуждающемся в обосновании, что способствовало пересмотру теоретико-множественных концепций.

В контексте данного исследования по философии математики несомненный интерес представляет докторская диссертация С.Н. Бычкова “Генезис теоретической математики как историко-научная и историко-философская проблема” (2008). Цель этого исследования состояла в нахождении специфических факторов социокультурного характера, обусловивших возникновение теоретической математики, в частности, в выяснении взаимоотношения аксиоматического метода и практически ориентированных наук. Говоря о различных точках зрения на проблему генезиса науки, он утверждает: “Поскольку каждая реконструкция основывается на более или менее осознанных субъективных установках методологического характера, предопределяющих выбор тех или иных факторов, то наличие нескольких конкурирующих концепций, в равной мере не противоречащих скудному запасу исторических сведений, представляется естественным, сопутствующим решению данной проблемы обстоятельством” [75, с.5]. С точки зрения проблемы обоснования, вопрос, следовательно, состоит в том, чтобы найти такой подход к ее решению, который исходил бы из существа рассматриваемой проблемы и был в этом смысле объективным.

Необходимость решения ряда задач, связанных с синтезом направлений обоснования математики, привела к пониманию ограниченности редукционистского подхода, противоположный к которому подход получил название системного. Принципиальным преимуществом системного подхода философ А.И. Ракитов считает следующее его достоинство: “В отчетливой форме он сформулирован в новой методологической установке, что целое (система) не только не детерминируется однозначно совокупностью его элементов или их групп и не сводится к ним, но, напротив, последние детерминируются целым и лишь в его рамках получают свое функциональное объяснение и оправдание” [368, с.54]. Обоснование математики требует целостного, системного подхода ко всем стадиям этого процесса, начиная с философско-методологического анализа и конкретного выявления целей и кончая выбором оптимального решения и формированием критериев эффективности. Системные методы помогают избежать односторонности и непоследовательности даже при философском анализе сравнительно хорошо изученных разделов математических теорий.

Например, в коллективной философской монографии “Системный подход в современной науке” (2004) раскрываются возможности применения системной методологии в естественнонаучном и гуманитарном знании. Но в ней нет, к сожалению, ни одной статьи, посвященной системному подходу в обосновании математики. Системный подход в обосновании современной математики впервые используется в данном исследовании, что определяет место этой работы среди других исследований по философии математики. Известно, что неудачи программ обоснования современной математики явились следствием слабости философско-методологических предпосылок, связанных с изобретением новых методов ее логического анализа. Обилие направлений, стремящихся дать обоснование математики, объясняется тем, что философско-методологический анализ проводился под различными углами зрения и это не могло привести к их унификации. Будущее философско-математических направлений, считает философ В.А. Канке, определяется разнонаправленными факторами: "Можно надеяться на: 1) возрастание относительной самостоятельности каждого направления; 2) учет его соотношения с другими философскими направлениями; 3) всемерную опору на проблемный потенциал субматематики; 4) учет трансдисциплинарного аспекта за счет философии науки; 5) использование должным образом артикулированных положений общей философии" [164, с.81]. Таковы гипотетические центростремительные силы, которые, считает он, направлены к философии математики, хотя каждый тезис имеет антитезис, то есть они имеют свои противоположности в виде центробежных сил.

Трудность построения программы обоснования математики состоит в том, что природа математических идеализаций такова, что никакой опыт не соответствует им с абсолютной точностью. Резюмируя историю неудачных попыток обоснования математики В.В. Мадер в главе "Проблема обоснования математики" своей книги о природе математики "Введение в методологию математики", делает следующий вывод: "Ожесточенные споры о методологических проблемах математики, о ее основаниях, о приемлемости исходных принципов математики привели к уточнению позиций участников дискуссии. Если раньше математики думали, что всякое разногласие обусловлено либо недостаточностью сведений, либо плохой постановкой вопросов, то сейчас, в данной дискуссии, выявилось различие в непримиримых взглядах – различие в математическом мировоззрении" [248, с.321]. Например, важнейшие в современной математике примеры существования абстрактных математических объектов основаны на применении метода категории и двойственности между мерой и категорией. С точки зрения математики, понятия категории и меры опираются на математическое понятие счетности. Отправным пунктом при изучении этих понятий служит знаменитая теорема Кантора, утверждающая, что никакой интервал действительных чисел не является счетным множеством. В начале нового тысячелетия именно вокруг этого фундаментального положения современной математики развернулась философско-математическая дискуссия между математиком А.А. Зенкиным [157, 158] и философом Я.В. Шрамко [487, 488]. А более конкретно по диагональной процедуре Кантора и проблеме логической обоснованности канторовских рассуждений о несчетности множества. В частности, поэтому можно предположить, что поскольку проблема обоснования математики все еще не получила признанного всеми решения, то, возможно, ее обоснование находится за пределами чисто логического подхода.

Прямым следствием сугубо математического подхода к проблеме обоснования математики при реализации трех классических программ – логицизма, формализма и интуиционизма – было то, что, в сущности, они представляли собой три различных способа редукции содержания математики к некоторому известному и безупречному основанию. Развитие указанных направлений обоснования современной математики вызывает необходимость их более тщательной экспликации. Характерные черты некоторой концепции обоснования математики легче всего выявлять не столько путем подробного описания этой концепции, сколько путем сопоставления ее с некоторыми другими концепциями. Наиболее глубоко причину кризиса логицистской программы обоснования математики вскрыл австрийский математик и логик Курт Гёдель, показавший, например, что система из "Principia mathematica" (1910–1913), построенная Б. Расселом и А. Уайтхедом, как и всякая иная система, средствами которой можно построить арифметику, существенно неполна. Последнее означает, что нельзя найти такую конечную систему аксиом, из которой можно было бы получить любое истинное предложение арифметики, а значит, и всей математики вообще. Важнейший вывод из исследований Рассела в области анализа концепций формальной логики Гёдель сформулировал так: "Анализируя парадоксы, к которым вела теория множеств Кантора, он освободил их от всех математических деталей, таким образом, открыв тот удивительный факт, что наши логические интуиции (то есть интуиции, касающиеся таких понятий как истина, концепция, бытие, класс и т.п.) являются самопротиворечивыми" [110, с.211]. Можно предположить, что математика не нуждается в логическом обосновании не потому, что оно невозможно, а в силу того, что саморазвитие математической теории можно рассматривать как постоянный процесс ее обоснования.

Рассмотрим теперь суть философских дискуссий направлений формализма и интуиционизма, относящихся к проблеме обоснования. Основоположник программы "формализма" – выдающийся немецкий математик Давид Гильберт – существенно опирался в процессе обоснования на метод формализации содержательной математики. Идея его плана спасения теории множеств состояла в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе разработанной им метаматематики, или теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость полученной системы аксиом. Философскую суть требования непротиворечивости можно понимать так: аксиоматически определенный математический аппарат вообще может работать. Гильберт взял у логицистов положение аксиоматизации и формализации математической теории, добавив в свою программу обоснования принцип финитизма, согласно которому оперирование с бесконечным можно сделать надежным только через конечное. Впоследствии оказалось, что финитистские методы пригодны для обоснования непротиворечивости сравнительно бедных формальных теорий, например, без аксиомы полной математической индукции. Более того, сколько-нибудь содержательная часть современной математики не может быть полностью формализована, а для той, которая формализована, непротиворечивость не может быть доказана в методологических рамках этой формализованной системы.

Своеобразную программу преодоления этих трудностей в математике, возникающих при попытке строить ее исключительно на базе теории множеств, предложил в самом начале XX века совсем тогда молодой голландский математик Лёйтзен Брауэр. Эта программа обоснования получила широкую известность в философии математики под обобщенным названием “интуиционизм”, которая в настоящее время объединяет также различные конструктивные направления и компьютерные течения в обосновании современной математики. При выяснении логической структуры положений, лежащих в основе различных программ математики, преследовались две цели, вообще говоря, не совпадающие между собой для математики в целом, которые можно назвать “программа-минимум” и “программа-максимум”. Если первая призвана обеспечить непротиворечивость и методическую ясность преподавания математических курсов, то вторая стремится обеспечить истинность всей математики как целостного знания. По этому поводу известный специалист по математическому моделированию Ю.П. Петров сказал: “Забегая вперед, отметим, что программа-минимум была выполнена, а программа-максимум не реализована и до настоящего времени. Можно предположить, что она и никогда не будет выполнена, поскольку уже в начале XIX века Гегелем было показано, что любое достаточно богатое понятие внутренне противоречиво” [343, с.77]. Тем не менее, интеллектуальным ядром современной математики остаются системные идеи, позволяющие размышлять над проблемами сложности математических моделей и эффективности вычислительных экспериментов.

Кроме того, классические программы обоснования математики, даже если в них не предполагается обращение к актуальной бесконечности, как, например, в программе интуиционизма, все же не свободны от неявных элементов, неизбежно порождающих неявно-интуитивный элемент формализации математической теории, не влияющий на ее дедуктивный статус. В конце XX века стали намечаться новые пути развития математики, и обращение к ее ретроспективе является одним из средств осмысления путей дальнейшего развития нового знания. В таком контексте исследование актуальных проблем философии математики предполагает соответствующую подготовку для адекватного анализа высказываний профессиональных математиков. Например, японский математик Мацуо Комацу считает, что в теории Кантора “единственным отличительным признаком множества в безграничном мире множеств является его мощность. Канторовская классификация множеств довольно грубая, до познания истинных свойств фигур здесь далеко, и геометрия не может быть построена только на ней” [198, с.123]. Это взгляд специалиста по геометрии, а не общий математический взгляд на теорию множеств, включающий мнение специалистов по математическому анализу. Но определенная доля истины в высказывании Комацу есть, так как, с точки зрения канторовской теории бесконечных множеств, множества точек отрезка и квадрата эквивалентны между собой, несмотря на их различие относительно размерности. Философия, подобно математике, опирается на аргументацию, поскольку обе науки используют логику, но в отличие от стандартов обоснования, принятых у математиков, стандарты аргументации философов сильно различаются даже во взглядах на одну проблему. Возможно поэтому, в связи с появлением математической логики как части математики, логика больше не является только областью философии, что косвенно способствовало размежеванию философов и математиков.

Теоретической основой этого исследования по философии и истории математики, а также по природе обоснования, единства и целостности научного знания, послужили работы: А.Д. Александрова [6–8], Е.И. Арепьева [14,15], А.Г. Барабашева [31], Б.В. Бирюкова [47–49], С.Н. Бычкова [71–75], Е.М. Вечтомова [84,85], Л. Витгенштена [89–91], В.Э. Войцеховича [96–99], Э. Гуссерля [124], С.С. Демидова [132–134], В.А. Еровенко [146–150], Н.И. Жукова [154], И. Канта [165–167], В.А. Карпунина [175,176], В.Н. Катасонова [178,179], О.И. Кедровского [182,183], М. Клайна [186], Г. Крайзеля [207,208], А.Н. Кричевца [212,213], И.С. Кузнецовой [216], И. Лакатоса [224–228], В.В. Мадера [248], В.Т. Мануйлова [261,262], Ф.А. Медведева [269–271], М.И. Монастырского [285,286], В.В. Мороз [287–289], А.Д. Мышкиса [295,296], Н.Н. Непейводы [303–306], М.И. Панова [320,321], В.А. Панфилова [322], В.Я. Перминова [330–339], Ю.П. Петрова [342–344], Б. Рассела [370–372], А.В. Родина [378–380], Г.И. Рузавина [389–393], Я. Стюарта [433,434], Л.Б. Султановой [435–438], В.Н. Тростникова [447–449], В.А. Успенского [452–454], Г. Фреге [459], В.В. Целищева [465–471], А.П. Юшкевича [497,498], Ю.И. Янова [501], С.А. Яновской [502,503], Б.Л. Яшина [508,509]. Оценивая в исторической перспективе обоснование математики, с точки зрения современного уровня разработки философских проблем научного знания, можно рассматривать его в качестве необходимого этапа в развитии философии математики, а также для понимания перспектив решения внутренних проблем математики.

Так, анализ внутренних проблем теории рядов Фурье и теории вещественных чисел привел Георга Кантора к созданию теории множеств – одному из самых поразительных созданий человеческой мысли. При передаче математической идеи с помощью ее словесного описания излишняя формализация, вообще говоря, может оказаться помехой. Так почему все же математические идеи можно передавать таким образом? Выдающийся современный ученый Роджер Пенроуз, возглавляющий кафедру математики Оксфордского университета, отвечает на этот вопрос так: “Лично мне представляется, что всякий раз, когда ум постигает математическую идею, он вступает в контакт с миром математических понятий Платона” [326, с.346]. Связь платонизма с тремя историческими сложившимися направлениями обоснования математики, с точки зрения философа математики В.А. Шапошникова, можно охарактеризовать следующим образом: “Логицизм есть "крайний" или абсолютный платонизм. Интуиционистско-конструктивистское направление – это программа полного отказа от платонизма (т.е. номинализм). Формалистская же программа Гильберта предстает … как умеренный, "ограниченный" платонизм” [481, с.129]. Необходимость платонистской компоненты в обосновании математики аргументируется тем, что процедуры, используемые в современной математике и опирающиеся на туманные рассуждения об “огромных” и сложных по структуре множествах, не являются полностью удовлетворительными. Строгий формальный подход в такой ситуации не выдерживает критики, поскольку понятие математической истины выходит за пределы теории формализма, о чем как раз и трактует математический платонизм современных математиков, согласно которому математическая истина простирается за пределы сотворенного человеком.

В философии и методологии математики был получен ряд результатов, которые, хотя и не привели к общему согласию в главных вопросах обоснования математики, но позволили гораздо лучше понять, что можно и чего нельзя сделать с помощью формальных методов современной математики. Например, с бесконечномерными пространствами связаны огромные области современной математики, включающие теорию линейных операторов, в том числе фредгольмовых операторов и их обобщений, теорию обобщенных функций, спектральную теорию операторов и многое другое. Историк и философ математики М.И. Монастырский удачно охарактеризовал специфику развития математики последних столетий следующим образом: “Если образно сравнивать математику XIX и XX столетий, то математика XIX столетия представляется как набор точек, образующих некоторое пространство, на которое мы смотрим из пространства более высокой размерности – математики XX столетия” [285, с.62]. При всей условности и размытости онтологических границ развития математики взгляд в прошлое выявляет некоторые “особые точки” новых мировоззренческих взглядов на генезис математических теорий.

Величайшим открытием философии математики конца XIX – начала XX веков было методологическое осознание того непреложного обстоятельства, что различные научные знания, использующие математику, сильно взаимосвязаны. Как считает математик Петр Вопенка, значение канторовской теории множеств определяется ее положением в математике: “Все математические объекты, созданные в дотеоретико-множественной математике, могут быть заново построены как структуры в теории множеств. Точнее, эти объекты можно задать в теории множеств их каноническими моделями так, чтобы изучение оригинальных объектов заменялось изучением соответствующих моделей” [102, с.12]. Это, в свою очередь, привело к возникновению новых математических дисциплин. В них прямо используются структуры множеств, как, например, в топологии, или они представляют собой “надструктуру” на классических структурах, как, например, функциональный анализ. Одним из главных достижений математики прошедшего столетия можно назвать понятие бесконечномерных пространств, которые в математике называются гильбертовыми пространствами, и их различными обобщениями, а именно, банаховыми, метрическими, топологическими и другими пространствами, что еще раз подтверждает тезис о том, что проблема бесконечности является одной из самых важных проблем современной философии математики. Бесконечное множество определяется проще, чем конечное. Привлекательной чертой актуальной бесконечности для современной математики является ее логическая простота, даже оперировать с ней проще, чем с потенциальной бесконечностью. Но, с философской точки зрения, элементарные арифметические и геометрические доказательства являются неопровержимыми в фактуальном смысле в немалой степени потому, что они не используют философско-математическое понятие актуальной бесконечности, без которого немыслима современная математика.

Общая тенденция развития теории познания и философии науки привела к необходимости переосмысления направлений обоснования математики в контексте сложности современного знания. Еще сравнительно недавно наука, стремясь к простоте, относилась к сложности негативно или, по крайней мере, нейтрально, не видя в ней продуктивной значимости и конструктивной составляющей ни в онтологическом, ни в эпистемологическом плане. Но историко-методологическая реконструкция феномена сложности знает немало примеров, когда ушедшие в прошлое споры оказывались вновь созвучными современному уровню развития науки. Самые известные проблемы такого рода в современной философии науки – это знаменитая теорема Гёделя о неполноте арифметики и противоречивое единство общеметодологических принципов в контексте принципа дополнительности Бора. Их философское осмысление показывает, что даже прямые рациональные действия в сложной философско-методологической ситуации приводят иногда к результатам, противоположным ожидаемым. В современной математике соответствующие аналогии можно проследить на примере введения чисто экзистенциальных доказательств, основанных на канторовской теории бесконечных множеств, оказавшей существенное влияние на генезис становления всей теоретической математики.

Может ли анализ философских проблем обоснования содействовать решению собственно математических задач и открытию новых фактов? Ответ на этот вопрос состоит в следующем: практическая значимость работ, относящихся к обоснованию математики, связана с тем, что такое обоснование является не только философско-методологическим анализом исходной математической теории, но и неизбежно наполняет ее смысловым содержанием, которое открывает новые методологические горизонты исследования в области математики. Как показало время, ответ на заданный методологический вопрос все же положительный. Исследование проблемы роста математического знания способствует продвижению философско-методологических исследований по его обоснованию. Заметим, что одной из фундаментальных функций науки является ее познавательная функция. “В этой функции наука гарантирует непрерывное накопление и переработку знания о мире, – отмечает философ науки Э.М. Сороко, – а также создание и развитие методов получения знания. Включает в качестве подфункций методологическую и мировоззренческую” [419, с.129]. Следует также отметить, что обоснование современной математики как таковое не ведет непосредственно к открытию новых фактов в самой математике, но в процессе обоснования могут создаваться методы, которые со временем приобретают самостоятельную философскую ценность.

Характерной особенностью данного исследования по философской проблеме обоснования математики является использование различных концептуально-методологических подходов к проблемам современной математики из работ профессиональных математиков: С.И. Адяна [4], Д.В. Аносова [11–13], В.И. Арнольда [17–23], С. Банаха [30], А.А. Болибруха [58], Л. Брауэра [64], Г. Вейля [78–81], В.С. Владимирова [93], В.В. Воеводина [94,95], К. Гёделя [109,110,521], Д. Гильберта [111–114], Б.В. Гнеденко [115], А. Гротендика [122], Ж. Дьедонне [139,140], Б. Дэвиса [519], Ю.Л. Ершова [117,152], Г. Кантора [168,169], А.Н. Колмогорова [193–197], П.Дж. Коэна [204–206], Р. Куранта [218,219], С.П. Курдюмова [188,220], Н.Н. Лузина [241], А.А. Ляпунова [245–247], С. Маклейна [252,253], Б. Мандельброта [257,258], Ю.И. Манина [259,260], А.А. Маркова [263–265], Н.Н. Моисеева [280–283], П.С. Новикова [312,313], С.П. Новикова [314,315], А.Н. Паршина [323–325], Р. Пенроуза [326–329], А. Пуанкаре [361,362], А.А. Самарского [401,402], С. Смейла [413], Р. Тома [444–446], Л.Д. Фаддеева [455], Г. Харди [462], И.Р. Шафаревича [483–485], Н.Н. Яненко [499,500] и многих других. Хотя никто не сомневается в важности методологических оценок математиков о современных тенденциях развития математического знания, каждый, кто работает в области философии математики, имеет дело прежде всего с собственным пониманием обоснования. Поэтому полезно изучать методологию математики непосредственно по оригинальным работам, то есть различным математическим источникам.

Если в контексте системного подхода рассматривать математическую теорию как специфическую самоорганизующуюся систему, проходящую различные этапы зрелости, на которых она освобождается от внутренних противоречий, то категории части и целого применительно к этим системам обретают новую характеристику – системное качество целого. В.С. Степин процедуру порождения новых уровней организации, представленную Гегелем, описывает следующим образом: “нечто (прежнее целое) порождает "свое иное", вступает с ним в рефлексивную связь, перестраивается под воздействием "своего иного" и затем этот процесс повторяется на новой основе. Важнейшим моментом этого процесса является "погружение в основание", изменение предшествующих состояний под воздействием новых уровней организации системы” [430, с.74]. В связи с этим интересно отметить, что в качестве предварительного условия применения математических умозаключений в геометрии, согласно Давиду Гильберту, должно быть дано “нечто”, а именно “внелогические конкретные объекты”, которые существуют наглядно. “Это – та основная философская установка, – писал Гильберт, – которую я считаю обязательной как для математики, так и вообще для всякого научного мышления, понимания и общения и без которой совершенно невозможна умственная деятельность” [111, с.351]. Хотя по отношению к естествознанию и математике категориальный аппарат, первоначально разрабатывавшийся в философии на социально-историческом материале духовной культуры, долгое время оставался избыточным, но благодаря междисциплинарным исследованиям, приведшим к становлению парадигмы синергетики и теории развивающихся систем, философами был обнаружен изоморфизм содержания ключевых гегелевских категорий и понятийного каркаса описания процессов самоорганизации.

Интересно отметить, что сам Гегель именно на примере математики поясняет важность системно-теоретического исследования. Как замечает философ науки Н.В. Мотрошилова, “он полагает, что математика как наука лишь тогда пришла к понятию бесконечно малых величин, когда ученые сделали для себя неразделимыми, взаимосвязанными бытие и ничто, когда они поняли, что надо найти нечто третье, иное, т. е. "промежуточное состояние" между бытием и ничто” [292, с.260–261]. Для Гегеля в становлении математических теорий заключался важнейший эвристический пример общефилософского характера, поскольку абстрактное рассуждение осмысливается в системном движении научного познания. Можно привести другой пример системной задачи – перехода от конечного к бесконечному. “Гегель великолепно фиксирует ступень анализа, которую нельзя миновать, но которую совершенно ошибочно абсолютизировать: бесконечное становится "просто иным" конечного, его отрицанием, а значит, первоначально выстроилось по образу и подобию конечного. В результате конечное и бесконечное представляются как бы двумя разными мирами, при-чем бесконечное якобы располагается "за границей" конечного, "над" ним, становится "отделенным" от него” [292, с.271]. То есть бесконечное связано с конечным как “оконеченная бесконечность”, в том смысле, что бесконечное не просто никогда не оканчивающееся конечное, а качественно нечто “иное”.

Системный подход позволяет не только объяснять образы идеальных объектов, но также и синтезировать их в единую, целостную и содержательную теоретическую модель. В качестве единого методологического основания в проблеме обоснования математики можно рассмотреть известную схему триадической спирали “тезис – антитезис – синтез”, которая в разных философских системах не обязана сводиться к единственной гегелевской триаде, лежащей в основе нового синтеза концепций обоснования современной математики. Философ математики В.В. Мороз выделяет следующие значения термина “синтез” как определенного философско-математического взаимодействия: 1) синтез как “способ рассуждения”, то есть последовательное получение нового знания ранее доказанных утверждений; 2) синтез как “мыслительная операция”, которая получается в результате соединения частей объектов в единое целое; 3) синтез как “познавательная операция”, имеющая множество различных форм при теоретическом обобщении данных исследования, в том числе и по принципу дополнительности. Она вводит новое понятие философско-математического синтеза, интерпретируя его как “особый тип философско-математического взаимодействия, в котором философия и математика, соединяясь тем или иным образом в процессе рассуждения, участвуют в построении целостной картины действительности” [288, с.44]. В контексте исследования обоснования современной математики возникает необходимость в системной триаде, то есть в такой синтезирующей структуре, в которой есть “структурная многомерность”, “системная коррелятивность” и “смысловая целостность”.

Теория множеств дала современной математике неисчерпаемое многообразие различных абстрактных структур. По определению Светослава Славкова: “Под математической структурой (в понимании Бурбаки) имеется в виду множество, где между элементами (соответственно между его элементами и некоторыми его подмножествами) существуют определенные соотношения и для них дефинированы некоторые операции, свойства которых описаны с помощью системы аксиом” [411, с.72]. Поскольку указанные соотношения по своей природе весьма разнообразны, то, следовательно, основные свойства соотношений и системы аксиом, описывающие эти свойства, тоже различны, поэтому и сами математические структуры бывают различного типа. Хорошо известны системные триады, сложившиеся в современной науке, например, триада базовых математических структур: алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры. Например, алгебраические структуры характеризуются тем, что соотношения между элементами множеств могут быть соотношениями между тремя элементами, при которых третий элемент однозначно определяется первыми двумя элементами. В структурах порядка устанавливается новый тип соотношений, при котором в заданном множестве могут существовать соотношения между парами элементов, рассматриваемых в определенном порядке. Наконец, в топологических структурах находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности, которые соответствуют представлениям о пространстве.

Более подробная информация о триадах есть в Международной библиографии тринитарной литературы “Bibliotheca Trinitariorum” (1984–1988), где собрано около шести тысяч работ по различным триадическим структурам [35, с.31]. Специфика математики проявляется в том, что современная математика как образец теоретической строгости представляет собой “жесткий” идеал научной теории. Однако триадические структуры в контексте проблемы обоснования современной математики, с точки зрения системной методологии, позволяют дать более “мягкую” оценку реально сложившейся ситуации в постгёделевской философии математики. Математика черпает свои идеи из двух источников – первым является реальный мир, а вторым – человеческое воображение. Если во второй половине XX века в науке был популярен системный анализ, рассматривавший некие общие свойства систем, которые возникают у них как у целого, то в современной философии и методологии науки при анализе сложных нелинейных систем науки и образования на смену ему постепенно приходит системный синтез. Замысел философско-методологического синтеза в обосновании реализуется в виде системного синтеза направлений обоснования математики, который определяет цель настоящего философского исследования, состоящую в том, чтобы связать непротиворечивость аксиоматики с ее фактологической истинностью в рамках системных понятий.

Большую роль в разработке теоретических и методологических подходов, использовавшихся в работе, сыграли философские исследования о системном подходе, трансформации рациональности и синтезе знаний, осуществляемом в синергетическом мировидении, а именно, результаты: Е.Б. Агашковой [2,3], И.С. Алексеева [9], В.И. Аршинова [25,26], Р.Г. Баранцева [32–36], Л. фон Берталанфи [44,45], И.В. Блауберга [50–53], И.И. Блехмана [54–56], Н. Бора [59,60], В.Г. Буданова [67,68], П. Гайденко [103], Дж. Гараедаги [104], Д. Дойча [137], В.П. Каратеева [172], Е.Н. Князевой [188], А.С. Колесникова [190], Б.Г. Кузнецова [215], Г.Д. Левина [232,233], В.А. Лекторского [234–237], К. Майнцера [250,251], Е.А. Мамчур [255,256], Л.А. Микешиной [278,279], Н.В. Мотрошиловой [291–293], Н.Ф. Овчинникова [316], Ю.А. Петрова [340,341], Л.А. Петрушенко [346], В.Н. Поруса [354–357], В.И. Разумова [366,367], Р.Е. Ровинского [375,376], В.Н. Садовского [396–400], Ю.В. Сачкова [403,404], Г.А. Смирнова [414,415], Э.М. Сороко [419], В.С. Степина [421–430], А.И. Уемова [451], Е.Л. Фейнберга [457,458], Д.С. Чернавского [476–478], У.Р. Эшби [490,515], Б.Г. Юдина [491–494], Э.Г. Юдина [495,496], Я.С. Яскевич [505,506]. Современный этап в разработке проблемы обоснования математики, в контексте практического сосуществования различных философских направлений обоснования современной математики связан с рассмотрением методологии системного подхода в его экспликации к близким по своим задачам исследования философским направлениям обоснования.

В философии науки принято различать два класса задач: анализа и синтеза. Их отличие состоит в том, что если в первом типе задач требуется выявить и оценить характеристики заданной системы, то во втором типе задач заданы свойства и характеристики, которыми должна обладать система, то есть необходимо подобрать такую структуру или составляющие системы, чтобы она соответствовала заданным свойствам и характеристикам. “При этом, – как замечает Герман Вейль, – последний акт – акт синтеза – обычно не требует никаких ухищрений. Искусство заключено в первом акте – акте анализа, разъединения целого на допускающие изучения части, в выборе подходящих обобщений” [79, с.7]. В контексте философско-методологического анализа проблемы обоснования математики, как сложной системы, наиболее трудный этап состоит в выявлении тех направлений обоснования, которые реально соответствуют современному этапу развития математики и могут участвовать в процессе синтеза. С точки зрения системного подхода, систему можно охарактеризовать как множество взаимосвязанных объектов, образующих целостное единство. Поэтому в процессе обоснования математических теорий используются все три типа научной рациональности по классификации академика В.С. Степина, а именно, классической, неклассической и постнеклассической. Философский смысл соответствующих изменений рациональности состоит в отмене одной целостности и замене ее другой целостностью. “Причем каждый новый уровень оказывает обратное воздействие на ранее сложившиеся, перестраивает их, в результате чего система обретает новую целостность” [426, с.7]. С точки зрения гегелевской философии, по существу совершается возвращение к пройденной категориальной стадии, но уже на новом уровне понимания и по существу к методологически новой по своему характеру системной задаче.

Синтез основных направлений обоснования современной математики как объектов данного исследования является новой концептуальной идеей философии математики. Ее суть состоит в том, что надо выявлять, упорядочивать и прогнозировать их результирующие пересечения, с целью создания обобщенной теоретико-мировоззренческой программы обоснования. Такую программу можно реализовать, если существенно доработать концепции обоснования математики, рассматривая их в качестве предпосылочного знания, которое глубоко исследовалось в философии математики двадцатого столетия. Кроме того, как отмечает философ науки Б.Г. Кузнецов, "синтезирующая функция математики опирается теперь не на ее неподвижность, а на ее изменчивость, распространенную на то, что только и может служить фундаментом универсального синтеза – на наиболее общие исходные принципы, на аксиоматику, которая стала онтологической и поэтому динамической, подвижной, зависящей от физического эксперимента" [215, с.338]. Для философско-методологического синтеза направлений обоснования математики нужна не диадная структура противоположных сущностей, а более емкая триадическая структура, хотя тринитарный опыт современной философии науки пока все еще находится на периферии современных конкретно-научных парадигм.

Оценить программу обоснования на вербальном уровне практически невозможно без описания соответствующей философской модели и объяснения релевантности методологии ее анализа. Исходной точкой любого научного исследования является предположение или гипотеза, рождаемые благодаря интуиции. Поскольку "логика принципиально – в силу своих исходных абстракций – не может дать сколько-нибудь целостную модель аргументации", то логический анализ аргументации, по мнению философа В.Н. Брюшинкина, "начинается с определения его логической макроструктуры – отношения между тезисом и поддерживающими его аргументами" [65, с.101]. При этом анализ макроструктуры системы философских аргументов, выявляющей взаимосвязь ее главных частей, происходит с помощью выделения главного тезиса или его фрагмента, затем выявления аргументов, которые поддерживают главный тезис и, наконец, реконструкции аргументов, которые необходимы для обоснования главного тезиса. Философия математики вынуждена признать смысловую исчерпанность традиционных подходов к обоснованию математики. Поэтому проблему обоснования математики надо перевести с логического на методологический уровень. В настоящей работе эксплицируются не только "позитивные" аспекты имеющихся в философии математики направлений обоснования математики, но и выявляется то, что связано с математической реальностью, точнее те отношения реальности, которые изучаются современной математикой.

Согласно основной гипотезе или “главному тезису” этого исследования, целостность программы обоснования современной математики эксплицируется с помощью философско-методологического анализа системной триады действующих направлений обоснования математики как взаимно дополняющих друг друга процедур обоснования, непосредственно связанных с прикладной математикой и с новой областью компьютерной математикой. В его поддержку сошлемся на мнение А.А. Ляпунова, который считал, что “наиболее глубокие вопросы, связанные с обоснованием математики, оказываются идейно родственными новым областям приложения математики” [247, с.16]. Но сформулировать главный тезис в общем виде легче, чем отстаивать его в деталях. Реализация намеченного подхода основывается на следующих аргументах, поддерживающих главный тезис. Во-первых, на анализе важнейшего в проблеме обоснования дополнительного тезиса о единстве современной математики, вытекающего из ее эволюции. Во-вторых, в качестве другого дополнительного тезиса рассматривается утверждение о необоснованных претензиях математики на абсолютную точность ее теорий и о недостижимости абсолютного обоснования математики. В-третьих, последний дополнительный тезис, но не менее важный для триадической структуры обоснования математики, состоит в отсутствии однозначного восприятия самого понятия “обоснование”, а также в разногласиях по поводу путей развития современной математики, что предполагает необходимость когнитивного релятивизма в обосновании.

Реконструкция этих аргументов, необходимых для обоснования главного тезиса, открывает потенциальную перспективу философско-методологического синтеза в проблеме обоснования. Для его реализации необходим философский анализ функционирования системы обоснования в целом, отправляясь от математических сведений, касающихся реального функционирования некоторых ее подсистем. Если принять как данность относительность некоторых характеристик развития современной математики, то можно попытаться объяснить сущность ее трансформации в постнеклассическом этапе философии науки на основе самоорганизации развивающихся систем.

* * *

Аналитический обзор литературы по исследуемой проблеме выявил недостаточность философских предпосылок классических программ обоснования математики. Ограниченность логического анализа способствовала пониманию недостаточности каждой в отдельности программы обоснования математики, которая заключается в отсутствии рациональных аргументов, определяющих границы обосновательных программ. Философско-методологический анализ трех классических программ обоснования математики показал, что они не являются вполне удовлетворительными, так как содержат в себе некоторую систему неявных допущений, имеющих гносеологический характер.

Анализ литературы по истории математики показал, что ее период развития, именуемый как “современная математика”, есть результат исторического развития последних двух столетий, который представляет собой очень сложную по внутреннему содержанию систему дисциплин и ее теорий. Он характеризуется разнообразием направлений, изучаемых современной математикой, в которых важнейшая роль отводится аксиоматическому методу, позволяющему системно обозреть различные возможности развития математических теорий, поэтому целесообразнее говорить о “современном этапе” развития математики на основе принципиально новых методов исследования.

Несостоятельность предыдущих философско-методологических установок на обоснование современной математики означает, что эта философская проблема нуждается сегодня в новой постановке на принципиально иной основе. Современная математика, несмотря на переусложненность ее теорий, не повлекла за собой утраты единства математического знания, что должно отражаться и в философии математики, которая раскрывает специфику проблемы обоснования математики на новом уровне. Философский подход, используемый в этом исследовании, – это философский принцип системности, суть которого в преломлении к проблеме обоснования в целом, раскрывается через понятия целостности, суммативности и единства, предполагающие определенный уровень самоорганизации ее подпрограмм.

Целостность программы обоснования в нем означает, что существенное изменение любой подпрограммы оказывает воздействие и на другие составляющие, что ведет к изменению всей концепции. Другое понятие – суммативности программы обоснования математики предполагает определенный уровень самоорганизации подпрограмм, хотя изменение всей программы обоснования является суммой изменений относительно самостоятельных подпрограмм обоснования. Методологию концепции программы обоснования можно трактовать как процесс увеличения взаимодействия подпрограмм при росте математического знания, то есть увеличения значимости синтеза и целостных характеристик направлений обоснования современной математики.

Опираясь на надежность математического мышления, а также методологический анализ проблемы обоснования, предлагается новое понимание обоснования современной математики, соответствующее реальному развитию математики как науки, которое опирается на системный синтез направлений формализма, платонизма и интуиционизма. При таком подходе к проблеме, с одной стороны, можно отказаться от философской традиции, имитирующей математическую точность умозаключений. Но, с другой стороны, необходимо осознавать, что философия обладает определенной избыточностью по отношению к запросам конкретной науки, поэтому философские основания математики не тождественны общефилософскому знанию по проблеме обоснования.

ГЛАВА 2.
СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ И ФИЛОСОФСКОЕ ЕДИНСТВО СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Философия математики как отдельное направление философии родилась почти сто лет назад. По отношению к современной философии математики существуют следующие полярные точки зрения. С одной стороны, исходя из признания того, что “ничего из этого не работает”, предпринимаются шаги по созданию новых направлений, пытающихся придать философии математики “новое дыхание”, поскольку можно по-философски говорить о возможности математического понятия и возможности математического образа. В действительности и то, и другое, во-первых, соответствует формальным процедурам “экспериментальной математики”, а во-вторых, противопоставлено физической реальности. Следовательно и понятие, и образ одинаково возможны, поскольку они могут быть актуализированы, хотя они возможны в разном смысле. “Можно представить себе невозможное понятие (Кант приводит пример плоской фигуры, ограниченной двумя прямыми). Но образ возможен всегда, поскольку является результатом завершенного синтеза” [125, с.122]. Поэтому в философии науки культивируется взгляд на математические образы как специального вида культурно-исторические объекты. Следуя ему математика должна вести самостоятельную социокультурную жизнь, определяя сама себе правила, возможно, отличные от стандартов классической философии математики.

С другой стороны, анализируя взаимоотношение математики и философии, есть и такое мнение, как полное отрицание любой философии математики. Например, Рубен Херш говорит, что “философия математики запоздала со своими Поппером, Куном, Лакатосом и Фейерабендом. Она запоздала с анализом того, что делают сами математики, и с соответствующими философскими рассмотрениями” [523, с.590]. В каждом столетии лишь немногие ученые могли глубоко проникнуть в основы знаний, чтобы разобраться в достаточно трудных философских вопросах. Незавершенность философских споров, мотивированных проблемой обоснования математики, проявляется в том, что забытые направления и теории переживают сейчас второе рождение. В подтверждение этого сошлемся на Фримена Дайсона: “Большинство ученых, в том числе и я, утешают себя словами французского математика Анри Лебега: "По-моему, математикам, постольку, поскольку они математики, нет нужды заниматься философией. К тому же это мнение не раз высказывали многие философы". Мы с радостью оставляем философию таким гигантам, как Бор и Вигнер, а сами довольствуемся более поверхностными исследованиями” [128, с.113]. Но стремительное развитие математики прошлого века показало, что, в силу многообразия направлений развития современной математики, для ее философского осмысления недостаточно участия в этом процессе отдельных выдающихся мыслителей, а необходимо совместное участие математиков и философов.

Но как в исторической ретроспективе соотносятся представления современного математика и современного философа на методологию познания? Представители конкретно-научного знания под методологией понимают такие рассуждения о науке, которые относятся к расхождениям в оценках методов исследования, точнее те рассуждения, которые имеют профессиональный характер и оказывают непосредственное влияние на адекватный выбор методов исследования конкретной задачи. Например, выбор соответствующей математической модели или критериев оценки при применении вероятностных методов в исследовании – это, безусловно, методологические вопросы математики в указанном выше смысле. Но можно ли отнести к методологии математики вопрос о природе математических абстракций или вопрос о специфике отражения реальности в абстрактных математических понятиях и структурах? Это по существу уже чисто философский вопрос, который, учитывая специфику философии науки, требует существенно иных подходов для аргументированного объяснения. “Современный математик отличается от математика XVII в. тем, что он вооружен законами высшей математики, основанными на понятии функции, предела и множества. Современный философ аналогично этому смотрит на явления через представления эволюции, диалектики и системности, которые полностью отсутствовали в философии XVII в.” [332, с.20]. Даже без конкретного прогноза о том, какие общезначимые представления будут привнесены в новом столетии в философию математики, можно предположить, что изменения в онтологии математики совершенно неизбежны.

В исследовании вопросов философии математики, включающих основные обосновательные процедуры современных математических теорий, с учетом бурного развития компьютерной математики, небесперспективным представляется путь историко-философского анализа, заключающийся в изучении роли философских и математических предпосылок в реально развивающемся историко-научном знании. Это способствует появлению новых позитивных оценок уже свершившихся негативных фактов, например, знаменитого теоретико-множественного кризиса в математике. По мнению профессионального математика Ю.И. Янова: “"Кризис" в математике, вызванный использованием чрезмерно расширенного понятия множества, привел в конечном счете к самому значительному прогрессу в математике, в результате которого математика освободилась от несвойственных ей ограничений, налагаемых на нее попытками связать ее с реальными моделями”

[501, с.28]. Многие парадоксы оказались связаны с самоприменимыми предикатами, с помощью которых формулировались философские парадоксы теории множеств, как в понятии “множества всех множеств”. Но, что касается понятия “множества всех множеств”, то с методологической и философской точки зрения его трудно признать законным математическим объектом, так как с математической точки зрения оно не удовлетворяет такому естественному свойству для всех множеств, как теоретическая возможность его потенциального расширения. Заметим, что роль философии математики и философии в целом возрастает в периоды кризисных ситуаций, когда понимание в рамках привычных культурных стандартов перестает удовлетворять тех, кто критически мыслит. “Важно подчеркнуть, – считает академик В.А. Лекторский, – что философия, претендуя на познание того, что есть, является средством создания новых типов интеллектуальной и практической деятельности” [237, с.30]. Можно даже предположить, что именно в союзе с философией у математики появляется теоретическое отношение к познанию мира, который способствует своеобразному удвоению реальности.

Тем не менее, острота философских дискуссий по проблемам математики снизилась в конце прошлого века, возможно, еще и потому, что сами математики устали от бурной полемики первой половины XX века, а реальные противоречия и новые кризисы второй половины XX века в обосновании математики оставались за пределами этих обсуждений. В докладе “Логические основания математики” Давид Гильберт обозначил свою главную задачу в исследовании проблемы обоснования математики: “Мои исследования по новому обоснованию математики имеют своей целью не что иное, как полностью устранить вошедшее в моду сомнение в надежности математических выводов. Насколько необходимо это исследование, мы видим, когда размышляем, как часто переменчивы и неточны были относящиеся к этому воззрения самых выдающихся математиков, или когда вспоминаем, что некоторыми известными математиками новейшего времени были отвергнуты выводы, до того считавшиеся незыблемыми” [114, с.418]. Напомним, что любое математическое утверждение становится достоверным с помощью формально-логического доказательства, которое является неотъемлемым атрибутом математического стиля мышления. В философии науки математическое доказательство называется надежным, если в нем отсутствуют контрпримеры, и называется строгим, если оно не содержит в себе неявных предпосылок, не оговоренных ранее. Но, в отличие от надежности, которую можно отнести к интуитивной основе математического доказательства, строгость характеризует его, прежде всего, с формальной стороны, с точки зрения корректности определений и полноты посылок. “Теоретико-множественная концепция не только доставила основной в настоящее время стандарт математической "строгости", – считал академик А.Н. Колмогоров, – но и позволила в значительной мере разобраться в разнообразии возможных математических теорий и их систематизировать” [196, с.67]. К этому можно добавить, что в более широком философском контексте строгой математической теорией можно назвать такую теорию, в которой интуитивный элемент используется не более чем это допустимо в рамках уже достигнутого уровня математической строгости. В таком контексте проблема обоснования математики сводится к анализу следующих двух вопросов: обоснованию строгости, или законченности, математических доказательств и к обоснованию непротиворечивости математических теорий, гарантирующих надежность содержательных теорий, которые составляют фундамент математического знания.

Но при таком подходе к обоснованию математики возникает постоянная необходимость подтверждения надежности математических теорий на новых более высоких уровнях строгости. В связи с этим заметим, что вопреки широко распространенному мнению жесткая формализация доказательства все же не является синонимом надежности и строгости математических рассуждений с точки зрения обоснования математики. Вот что, например, говорит академик В.С. Степин о проблеме обоснования: “Спецификой объектов научного исследования можно объяснить… основные отличительные признаки научных знаний как продукта научной деятельности. Они отличаются от обыденных, стихийно-эмпирических знаний. Последние чаще всего не систематизированы. <…> Их достоверность устанавливается благодаря непосредственному применению в наличных ситуациях производственной и повседневной практики. Что же касается научных знаний, то их достоверность уже не может быть обоснована только таким способом, поскольку в науке преимущественно исследуются объекты, еще не освоенные в производстве и обыденном опыте” [430, с.61]. Философско-методологический анализ наиболее успешно функционирующих программ обоснования современной математики, а именно, направлений формализма и интуиционизма, или его наиболее популярной ветви конструктивизма, показывает, что в философии современной математики последних десятилетий все более важное место занимает не только реальная основа математических объектов и математических структур, но и выявление методологических принципов. В таком контексте вполне можно говорить об умеренном платонизме как об особом типе реализма, соотносящего математические понятия с определенного рода идеями внечувствительной реальности.

В философии математики есть важная проблема онтологии и гносеологии современного математического знания, связанная со стремлением придать философскому исследованию проблемы обоснования форму методологической теории, и решить которую математики без обращения к философии не могут. Диалектический подход, используемый в этом исследовании, изначально восходит к Платону, который в последний период своего творчества развивал “математическую диалектику”, то есть занимался диалектическим обсуждением математических “начал-гипотез” ее теорий. Важнейшим видом умопостигаемого Платон называл то, чего наш разум достигает с помощью “диалектической способности”. Характеризуя специфику диалектического разума, выделяющую аксиоматическую геометрию среди прочих дисциплин, Платон в конце VI книги “Государство” писал, что “бытие и все умопостигаемое при помощи диалектики можно созерцать яснее, чем то, что рассматривается с помощью только так называемых наук, которые исходят из предположений” [349, с.254]. Разумеется, логически неконсистентно приписывать Платону экспликацию современных подходов к обоснованию математики. Но, в контексте современной философской интерпретации платонистских взглядов, именно диалектика с помощью своей методологии способна придать уверенность в истинности математических начал, показать не только их гипотетический характер, но и выявить “негипотетическое начало”, которое уже есть философское начало в собственном смысле слова. С точки зрения философского анализа, к таким началам, учитывая относительную самостоятельность современных разделов математики и генетическую организацию математических структур и теорий, можно отнести системную целостность направлений обоснования математики, реально доказавших свою практическую эффективность и востребованность.

В связи с этим возникает ряд философских вопросов. Например, как согласовать веру в абсолютную истинность математических аксиом и принципов с идеальными математическими абстракциями? Ответ на этот вопрос связан с анализом природы математических объектов в классических учениях. Исследование философско-методологических вопросов целесообразно проводить по двум взаимодополняющим направлениям – как со стороны “объективной” формально-дедуктивной структуры процесса становления математического знания, так и в “субъективном” аспекте, приводящем к выделению относительно автономной “духовной формации” в развитии современной математической мысли. Поэтому, для правильного понимания единства современной математики обратимся, вначале, к философской интерпретации “истинного” единого, введенного Платоном. Исходя из реконструкции текстов Платона, можно заключить, что “истинного” единого актуально не существует. “"Истинное" единое, не "раздробленное" бытием, может существовать только потенциально; актуализация единого мгновенно превращает его в многое. Не будучи актуальным, единое вместе с тем не является и "ничем", поскольку оно образует необходимую предпосылку актуализированного бытия” [201, с.123]. Ключ к пониманию неоднозначной проблемы “единого”, согласно Платону, лежит в методологической плоскости потенциального.

Чтобы не ограничиваться только онтологической интерпретацией “единого” в проблеме обоснования математики, заметим, что в таком контексте нельзя отвлекаться от философской ограниченности исследовательских возможностей. Такое отвлечение основатель конструктивистского направления в математике А.А. Марков, говоря о конструктивной математической логике, называет “абстракцией потенциальной осуществимости”. Применение абстракции потенциальной осуществимости, подчеркивающей, с одной стороны, ее практическую недостижимость и нереализуемость, а с другой – процессуальные качества, позволяющие совершать действия без потери информации, является большей частью неявным, что приводит к новой интерпретации платонистского направления в современной математике. В частности, А.А. Марков, говоря о сущности такой осуществимости, по-философски образно пояснял: “Абстракция потенциальной осуществимости, как и всякая абстракция, вносит туда, куда она привлекается, элемент фантастики. Он неизбежно присутствует во всякой абстрактной науке. <…> Различие между "классиками" и "конструктивистами" состоит в том, что они привлекают разные абстракции, то есть фантазируют по-разному” [264, с.10]. Вполне естественно, что разное “фантазирование” с точки зрения обоснования современной математики приводит к разным результатам, что проявляется, например, в том, что иногда классически строго доказанные теоремы не признаются конструктивистски убедительными.

Исследования в области оснований математики и математической логики, кроме расширения задач философии математики, преследуют также и важнейшие для математики общеметодологические цели. Именно они объединяют различные разделы современной математики в единую научную дисциплину. “Однако дело философии не в том, – размышлял академик Л.С. Понтрягин, – чтобы созерцательно объяснять мир, и не в том, чтобы умозрительно изобретать "философские принципы" или "основания" (например, математики), а в том, чтобы исследовать предметную деятельность, служа одновременно методологической основой ее преобразования и руководством к практическому действию” [352, с.103]. Но, следует заметить, что в философские основания и обоснования математики входят философские идеи и принципы, которые обеспечивают эвристику поиска. Из философской проблематики и вариантов ее решений, возникающих в культуре каждой исторической эпохи, математика использует в качестве обосновывающих структур лишь некоторые идеи и принципы. Поэтому все философские направления обоснования математики, в разных контекстах, стремились выявить или установить связь между математическими абстракциями, математическими структурами, математическими теориями и соответствующими отношениями к реальности.

Важнейшее формальное условие для гипотезы исследования состоит в том, что она должна формулироваться таким образом, чтобы из нее можно было определить, можно ли из нее выводить следствия и объясняет ли она рассматриваемые факты. Необходимо подчеркнуть, что научные гипотезы и философские теории по проблеме обоснования современной математики, вообще говоря, не являются логическими следствиями из предшествующих работ по философии математики, которые должны отбрасываться, когда появляются новые свидетельства реального развития математики. В этом исследовании упор делается на то, что любая гипотеза или теория обоснования связана разнообразными связями с элементами новой структуры как некоторого целого. Философ математики З.А. Сокулер поясняет это следующим образом: “Научные гипотезы и теории имеют как бы "подпорки" в виде явлений, в объяснении которых они используются, смежных теорий, обосновывающихся с их помощью, и пр. Чтобы теория или гипотеза была отброшена, недостаточно одного опровергающего свидетельства. Требуется что-то такое, что могло бы перевесить всю систему "подпорок"” [417, с.135]. Для этого необходимо знакомство с работами по истории и философии математики, которое не проходит бесследно для понимания эволюции и процессов развития современной математики, и благодаря которым можно “натолкнуться” на релевантную гипотезу решения проблемы. Но, что имеется в виду, когда утверждается, что одни гипотезы выражают “релевантную” связь фактов, а другие нет?

По мнению логиков Морриса Коэна и Эрнста Нагеля: “Гипотеза считается релевантной для данной проблемы, если она выражает определенные виды связей между набором фактов, среди которых присутствует изучаемый факт; во всех остальных случаях гипотеза считается нерелевантной” [203, с.283]. Проведенный философско-методологический анализ известных в философии математики фактов позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, стало ясно, что со стороны исключительно только философской деятельности, опирающейся на традиционные подходы к нерешенной проблеме обоснования математики, нет пока никаких оснований ожидать сколько-нибудь существенных продвижений в этом направлении философии математики, без анализа наиболее актуальных областей развития современной математики. Во-вторых, выяснилось, что философско-методологическая обосновательная деятельность остро нуждается в притоке свежих идей, которые концентрируются вокруг различных аспектов философского понимания единства и целостности как самой современной математики, так и существующих направлений ее обоснования. В-третьих, с учетом этого, сформировать гипотезу, согласно которой, опираясь на внутреннюю эволюцию математической науки, она более чем когда-либо упрочила единство путей своего развития и, исходя из принципов систематизации различных связей между развивающимися математическими теориями, можно применить системный подход к обоснованию математики. В связи с последним тезисом отметим, что в естественнонаучном исследовании гипотеза, доступная для прямого опровержения или верификации, является в достаточной степени полезной как ориентир для анализа проблемы, изначально породившей исследование. Но в философском исследовании такая гипотеза не способствует организации реального поля исследования поставленной проблемы. Поэтому можно предположить, что системный подход к обоснованию математики будет репрезентативнее, чем множество примеров, взятых только из одной области или направления обоснования современной математики.

Современное системное мышление в философии науки привело к “системноцентричности” взглядов на проблему обоснования математики. Сегодня системное мышление стало реальным фактом. “Базирующееся на исходном целостном видении объектов исследования системное мышление выступает в качестве альтернативы возникшему вместе с рождением науки Нового времени элементаристскому, механистическому взгляду на мир, основанному на разделении любого объекта исследования на составные части, элементы, тщательном анализе их отношений и взаимодействий и допустимом – в рамках такого подхода – синтезе таких взаимосвязанных частей в некоторую целостную картину” [399, с.64]. Наиболее трудным этапом этой программы был последний, а именно, синтез частей в целое, который удавалось реализовать в основном для сравнительно простых систем. Возможно, поэтому процесс реализации синтеза направлений обоснования математики целесообразно осуществлять с помощью метода последовательных приближений, который, в контексте проблемы обоснования, состоит в следующем: 1) производстве первоначальных рабочих гипотез с помощью философско-методологического анализа предмета исследования; 2) проверке и коррекции этих гипотез на основе реальных процессов становления современного математического знания; 3) расширении и развитии возникающих идей и философских понятий до тех пор, пока не будет получена убедительная концепция целостного обоснования математики.

При этом мы хотим обратить внимание на прогностический аспект системного подхода к обоснованию, который связан с рассмотрением перспектив дальнейшего развития концепции обоснования математики, ее возможного и научно предвидимого будущего. Однако следует заметить, что в отличие от генетического и всех прочих аспектов системного исследования прогностический аспект, не допускающий немедленной, а подчас и сравнительно успешной практической проверки, требует осторожного, гипотетического формулирования получаемых выводов, которые, как бы ни казались они основательными и прочно фундаментированными, остаются все же научными гипотезами. Чтобы сделать этот философский замысел более убедительным с точки зрения философско-методологического анализа проблемы обоснования математики, следует рассмотреть некоторые основные линии исторического вызревания разнообразных математических теорий. Как справедливо отмечает философ математики Г.И. Рузавин, “с диалектической точки зрения существование… разнообразных классов явлений, событий и процессов, не исключает, а, напротив, предполагает различные формы и типы связей между ними, которые свидетельствуют об универсальном единстве мира” [393, с.116]. Поэтому наряду с общефилософскими аргументами в пользу выявления специфики и сущности нового подхода к концепции обоснования современной математики такому пониманию способствуют аргументы методологического характера, в частности, представления о единстве современной математики, формируемые в ходе ее исторической системной эволюции.

2.1 Критика логицистского направления в обосновании математики и новые кризисы современной математики

На основе одних лишь только философских обобщений невозможно дать обстоятельный ответ на вопрос: что такое математика? Историк математики А.П. Юшкевич по этому поводу сказал: “Если меня спросят, что же такое математика, я не сумею ответить. Она не сводима к математической логике, как полагал Б. Рассел; математическая логика стала ее частью. Она не поддается философскому определению, ибо понятия философии недостаточно четко определены” [498, с.13]. Он не знал, “возможно ли одной, хотя бы и длинной фразой” определить, что же такое математика, хотя такие попытки предпринимались. Так известный математик и, по сути, философ по складу ума Н.В. Бугаев на исходе XIX века дал следующее определение: “Математика есть наука, изучающая сходства и различия в области явлений количественного изменения. Это самое общее ее определение. Все остальные ее определения вытекают из него, как его простые следствия. Идеи количественного изменения и порядка, которому подчиняются эти изменения, суть основные идеи математики” [66, с.85]. Для понимания сути идей обоснования математики на современном периоде ее развития в еще большей степени необходимо философское осмысление составляющих ее элементов, поскольку математика не обладает исключительной монополией на абстракцию.

Несмотря на некоторые пересечения, исследования в формальных науках принципиально отличаются от исследований в эмпирических науках. Если в эмпирических науках мы стремимся ограничить возможное, пытаясь свести, насколько это можно реализовать, к действительному, то в формальных науках мы стремимся ограничить предполагаемое необходимым, что ничего кроме разума не требует. Различие между эмпирическим и формальным знанием в значительной мере является не онтологическим, а методологическим. Хотя привычка “онтологизировать” математические понятия оказалась довольно устойчивой философской традицией. Отчасти это связано со спецификой математики, интересующейся свойствами и отношениями, присущими довольно большому числу объектов. Поэтому в современной философской методологии познания одно из центральных мест занимает проблема плюрализма исследовательских подходов к обоснованию математического знания. “В классической форме, – как утверждают философы Л.А. Микешина и М.Ю. Опенков, – проблема обоснования знания впервые поставлена Декартом, в дальнейшем она трансформируется в способ обоснования с привлечением понятия "трансцендентальный субъект" (И. Фихте, И. Кант, Э. Гуссерль и другие)” [278, с.40–41]. Рене Декарт продемонстрировал разницу между истинностью и правдоподобием с помощью своего метода правильного рассуждения. По его мнению, нет более безошибочного метода, чем тот, который основан на математике, поскольку только математикам удалось найти некоторые доказательства. Хотя научный метод не исключает иррациональных компонент группового “научного поведения”, когда за истинное что-то принимается не потому, что для этого есть рациональные аргументы, а потому, что так принято делать в этой исследовательской группе или в научной школе, которой она принадлежит.

Подобного рода затруднения побуждают некоторых философов науки вообще отказаться от содержательного определения рациональности, объявляя это понятие псевдометодологическим. Такую неопределенность можно отнести к философско-методологическим трудностям переходного периода. Поэтому вместо понятий “рациональный метод” или “рациональное суждение” многие современные исследователи предпочитают говорить о целесообразности, непротиворечивости, полноте и других, лучше определяемых терминах. Тема рациональности имеет многомерную структуру: “Языки и методы, которыми описывается и объясняется рациональность, являются сопряженными по смыслу: будучи оторванными друг от друга (рассмотренные как самодостаточные), они могут давать искаженный и даже противоречивый "образ" рациональности, но совместно они дают такой "образ", который в своем развитии приближается к понятию рациональности” [357, с.29]. Несмотря на то, что для последовательных рационалистов сила гибкости в подходе к обоснованию может выглядеть как проявление слабости, языковая неточность, соответствующая естественной гибкости языка, устраняется в контексте тернарного подхода, при котором составляющие методологическую триаду соседствующие компоненты придают обоснованию достаточную основательность, точность и убедительность. Теория рационального в современной математике развивается через выявление принципов, лежащих в основе интуитивных суждений, что может прояснить рациональную связь различных математических практик. Так как при этом на уровне теоретического сознания происходит актуализация многих аксиом обыденного сознания, то нужна философская рефлексия над математикой, которая представляет собой познавательный аспект философского постижения действительности. Появление новых смыслов в философии математики, например, различных типов рациональности, должно найти свое место в новом понимании предмета философии. “На мой взгляд, – анализирует новое понимание академик В.С. Степин, – эта задача решается, если философию определить как рефлексию над мировоззренческими универсалиями культуры и конструирование их новых смыслов” [427, с.10]. Парадокс бессознательного философствования математиков, которые вместе с тем не склонны в своей профессиональной деятельности к философской рефлексии по поводу своей науки, составляет одну из главных трудностей, осложняющих продвижение к решению проблемы обоснования современной математики.

Философия в своей познавательной деятельности выступает теоретическим ядром мировоззрения математиков. Проблема оснований стояла перед новыми областями высшей математики на протяжении всего XIX века. Философская идея сводимости математики к логике была высказана Готфридом Лейбницем и получила поддержку в XIX веке благодаря развитию методов математической логики. Это способствовало становлению логицистского подхода к обоснованию математики, который исходил из гипотетического предположения, что все понятия математики могут быть определены на основе общезначимых логических понятий. Например, в своей фундаментальной работе “Основоположения арифметики” (1884) немецкий математик и логик Готлоб Фреге наметил собственный путь обоснования арифметики на основе логического определения понятия числа. Он считал, что “к общим логическим основаниям нужно обратиться в несколько большей степени, чем считает необходимым большинство математиков” [459, с.23]. Поэтому исходной базой обоснования математики у него являются аксиомы логики, принимаемые в качестве понятий логической, или семантической, истины. А также следовало придерживаться следующих правил: строго отделять логическое от психологического; спрашивать о значении слова не в его обособленности, а в контексте предложения; не терять из виду различие между понятием и предметом. Если определения новых математических терминов и символов не наталкиваются на противоречия и позволяют познать связи между понятиями, кажущимися далекими друг от друга, способствуя тем самым более высокой упорядоченности теории, то их принимают как достаточные даже без логического оправдания.

Проблему обоснования пытались решить с помощью выражения основных понятий математического анализа через понятия арифметики, например, определить действительные числа в терминах натуральных чисел. Согласно одной из популярных дефиниций, “математика – это система структур, построенных на базе натурального ряда с помощью операций, допустимых любой принятой нами логической теорией” [498, с.13]. Но тогда остается неопределенным, что такое натуральный ряд, а также какие именно операции и логики допустимы. Проблема внутренней непротиворечивости математики тоже, считал он, “таит в себе не меньшие трудности”. Однако Фреге полагал, что непротиворечивость математической теории вытекает из истинности ее логических принципов, и вследствие этого у него не возникало вопросов о необходимости формального, или синтаксического, обоснования непротиворечивости арифметики. Исходя из своего убеждения, что вся математика может быть обоснована на основе арифметики, для него редукция арифметики к логике означала логическое обоснование математики в целом. Поэтому логицизм Фреге можно рассматривать как дальнейшее развитие программы арифметизации математики с целью поставить ее на прочное основание. В более широкой трактовке, логицизм известен как учение, согласно которому математика сводима к чистой логике, хотя такое определение понятия “логицизм” довольно расплывчато, поскольку не определен термин “чистая логика”. Можно сказать, что логицизм рассматривают не как единый взгляд на природу математики, а как специальный тезис об отношении логики к математике. В отличие от основоположника математической логики английского математика Джорджа Буля, построившего формальную логику в виде некоторого исчисления, то есть алгебру логики, как техническое средство для решения логических задач, Фреге понимал логику как искусственную знаковую систему, абстрагированную от содержания используемых знаков. Его целью являлся язык, а не просто исчисление, и он исходил из различения грамматических и логических структур.

Логицисты были убеждены, что одной логики достаточно для обоснования всей математики. В философско-математической литературе давно выявлено, что редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику математических понятий и принципов, связанных с бесконечностью. Логицистская редукция может быть осуществлена только при условии истинности некоторых важнейших аксиом теории множеств, а именно, аксиомы бесконечности и аксиомы выбора, а также при предположении, что принципы логики являются априорными истинами. Поскольку, если аксиомы логики не принадлежат к числу истин, то тогда логицизм не дает ответа на фундаментальный вопрос о непротиворечивости математики. Но, как хорошо известно профессиональным математикам, “несуразностей” в теории множеств довольно много, и это отчасти искажает картину, создавая впечатление бесконечного разнообразия, хотя первоисточников аномалий не так много. По существу – это понятие актуальной бесконечности и аксиома выбора. К ним можно еще добавить гипотезу континуума, которая также имеет теперь статус аксиомы. Но ее аномальные следствия не столь востребованы и лежат в стороне от проблемы редукции, хотя сама эта гипотеза в контексте гёделевских результатов заслуживает отдельной репрезентации. Следует отметить, что вполне самодостаточно выглядит и следующий уровень “методологической иерархии”, а именно, комбинации указанных “первопричин” с разными философскими и прикладными областями математики. Заметим, что Бертран Рассел, который после издания “Принципов математики” (1910–1913) не был убежден в том, что принципы логики являются априорными истинами, построил теорию типов, в которой исключается самоприменимость понятий, а значит и известные парадоксы теории множеств. Однако свести математику к логике, несмотря на все усилия логицистов Фреге, Рассела и Уайтхеда, не удалось.

Одна из причин этого в том, что в математических теориях, в том числе и в теории множеств, всегда присутствует некий содержательный остаток, не охватываемый аксиомами логики. Если бы программа Фреге оказалась реализуемой, и можно было бы найти метод для определения, является ли любое высказывание формальной логики истинным или ложным, то тогда появилась бы возможность определять истинность любого математического утверждения, независимо от его сложности. В связи с этим заметим также, что важнейшей характеристикой логики является ее конечность, поэтому несостоятельность установок программы логицизма следует из самого статуса логики как системы понятий, не связанной с математической идеей бесконечности. Человеческий разум конечен, он не может творить бесконечное, он может только открывать его, то есть логика принадлежит особому открываемому миру. В такой интерпретации логицизм включается в более широкую концепцию платонизма. Аргументируя этот тезис, сошлемся на мнение философа математики И.С. Кузнецовой, которая считает, что “логика рассматривается платонистами, как нечто данное, но не изобретаемое, нечто неизменное, во все времена действительное, а потому вечное” [216, с.9]. По существу для обоснования своей истинности аксиоматика арифметики кроме логики требует лишь допущение аксиомы бесконечности, которая может быть эксплицирована как экзистенциальное утверждение о бесконечности реального мира и его атрибутов. Но отказ от первоначальных целей логицистской программы как реального исторического направления в обосновании математики не означает полного отказа от развитых в ней методов анализа математической теории, которые используются в программах формализма и интуиционизма при обосновании теории множеств.

Выявленные дополнительные трудности обоснования математических теорий состоят, как пишет Курт Гёдель, в следующем: “Математическая логика так и не вышла на рубеж тех больших ожиданий, которые связывали с ней Пеано и другие (в соответствии с целью Лейбница), и которые надеялись, что она облегчит труд в теоретической математике в такой же мере, в какой десятичная система чисел облегчила числовые расчеты” [110, с.232]. Принято считать, что “крушение” направления логицизма обусловлено дефектами естественного языка, но можно также предположить, что трудности при построении логического основания арифметики вытекают из того, что арифметика и геометрия, как дополнительные структуры, имеют общий источник. Неудача развития логицизма явно зафиксировала то, что определенные неясности языка и математической терминологии нельзя преодолеть обращением к логике, то есть причины трудностей обоснования математики оказались более глубокими, чем это представлялось логицистам. Поскольку сами логические нормы не выводятся ни из принципов психологии, ни из принципов эмпирических наук, то они не могут быть обоснованы в обычном рациональном смысле, то есть с помощью выявления их принципов из утверждений другой природы, чтобы в качестве абсолютной предпосылки инкорпорироваться в теоретическое знание. “Знаменитые логические антиномии, – по мнению американского математика Пола Коэна, – никогда не играли заметной роли в математике просто потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми рассуждениями” [206, с.170]. Но это не ведет к отказу от других подходов к обоснованию. Для неклассической науки характерно, что секуляризация “логических устоев” охватывает математику в целом под влиянием ее возможных применений.

Решение философских вопросов, ответ на которые в принципе предопределен принятием определенной аксиоматической системы, часто оказывается довольно сложным. Например, одно из возражений академика А.Н. Колмогорова по поводу состоятельности программы логицизма состоит в том, что ее авторы "использовали достижения теоретико-множественной аксиоматики, которые на самом деле вскрывали большую, чем ранее предполагалось, широту связей математической теории с действительностью (возможность изучать в пределах одной теории много различных реальных кругов явлений), для провозглашения прямо противоположного тезиса о полной независимости математики от задач изучения материального мира" [196, с.69]. Кроме того, редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику понятий и принципов, связанных с бесконечностью, что противоречит статусу логики как системы понятий, не связанных с идеей бесконечности, а тем более с наиболее плодотворной в математике идеей актуальной бесконечности. Канторовская теория множеств – это математическая теория конечных и актуально бесконечных множеств. Все усилия математиков до конца постичь актуальную бесконечность оказались безуспешными. Но это не уменьшает важности и полезности канторовской теории множеств, которая остается свидетельством стремления математиков раздвинуть пределы познания способом, не имеющим ранее никакой аналогии в истории науки. Следует также отметить, что каждая программа обоснования математики является логико-гносеологической, так как содержит в качестве необходимого компонента философские представления о достоверности используемых методов логического анализа.

Заметим, что уже в "Науке логики" Георг Гегель заложил основы логицистской системы философии. Но даже у него реализация целей философских изысканий в рамках логицизма носит не просто логико-гносеологический, но и принципиально социально-исторический характер, ощущая тем самым потребность выхода в социально-философскую сферу, то есть в область философии духа. В контексте проблемы обоснования математики, против логицистской программы выдвигались не только философско-методологические, но также и математические возражения, относящиеся к качеству редукции, хорошо аргументированные в философии математики. Например, В.Я. Перминов утверждает, что "имеется строгое обоснование неосуществимости логицистского замысла уже по отношению к арифметике и в этом смысле программу логицизма в настоящее время следует считать полностью опровергнутой" [333, с.165]. Этот вывод является принципиально важным для анализа существующих подходов к обоснованию математики. Во-первых, он указывает на ошибочность мнения Г. Лейбница, Дж. Пеано, Г. Фреге и их последователей о том, что математика сводима к логике. Во-вторых, переносит акценты в обосновании математики на философский анализ допущений о достоверности используемых в математическом рассуждении методов, которые формализуются, как было выяснено, вне логики, но в рамках определенного направления философии математики. Поэтому логицизм, как направление в философии, в настоящее время является малопродуктивным. Это следует понимать в том смысле, что на кризисном этапе развития теории заканчивается однозначный эволюционный путь, характерный для ее предыдущего стационарного этапа. Но при этом возникает несколько путей потенциально возможных продолжений для выхода из кризиса. Кризис логицистского направления обоснования математики способствовал разработке новых подходов и методов к обоснованию современной математики.

Следует отметить, что в истории математики ситуация по поводу беспокойства насчет абсолютной определенности, например классической математики, имеет сравнительно недавнее происхождение. Французский философ, математик и физик Рене Декарт, формулируя свои представления о научности, полагал, что достоверное знание достижимо посредством интеллектуальной интуиции и дедукции. Напомним, что дедукция – это логический вывод, с необходимостью вытекающий из посылок, то есть опосредованное знание, а интуиция – это знание непосредственное. Подобной двойственностью отмечены различные проекты универсальных языков, разрабатывавшиеся в европейской философской мысли XVII–XVIII столетий. Однако исследования таких математических объектов, как многомерные континуумы, бесконечные множества, алгебраические категории и функторы показали, что двуединый процесс, как конструирования, так и обоснования абстрактно-рассудочных понятий не схватывается единым видом математической интуиции, например, как интуиции натурального числа. Никакой вид математической интуиции – ни арифметической, ни геометрической, ни алгебраической, ни теоретико-множественной – не является абсолютно непогрешимым. Даже вера в математические сущности – это результат опыта работы математиков, что представляется веским аргументом в защиту математического реализма, принимающего все ценности традиционной математики. Гегель подчеркивал, “что "вера становится истинной только через духовное развитие", т.е. через расширение духовного, мыслительного и научного содержания” [70, с.14]. В этой вере начинают сомневаться лишь при столкновении с онтологическими трудностями математического познания. Как пояснял эту ситуацию Пол Коэн, “если эти трудности особенно смущают математика, он спешит под прикрытие формализма, предпочитая, однако, в спокойное время обретаться где-то между двух миров, наслаждаясь лучшим, что есть в обоих” [206, с.171]. Поэтому для математического рассуждения характерна философская абстракция “отчуждения”, когда мыслительный процесс на некотором этапе своего развития сам становится объектом исследования.

Подобного рода методологические трудности обоснования математики удалось преодолеть грекам, и поэтому они постепенно стирались в мировоззрении математиков последующих поколений. Современное математическое творчество можно трактовать как “начало разумности”, которое выступает в форме иррациональности. Как отмечает английский филолог-классик Эрик Доддс, “люди, ставшие творцами первого европейского рационализма, никогда – вплоть до эллинистической эпохи – не являлись "чистыми" рационалистами: иначе говоря, они глубоко и образно понимали силу, чудо и опасности иррационального” [136, с.368]. Если в эпоху эллинизма многие делали “фатальную ошибку”, думая, что можно игнорировать иррациональные аспекты познания, то в наше время уже осознано, что иррациональные элементы присущи человеческой природе, поскольку они управляют нашим поведением, даже без нашего знания об этом, а также являются частью того, что мы считаем мышлением. Если рациональность интерпретировать как процесс рационализации, осуществляемый посредством исторически ограниченного инструментария, то тогда поддается объяснению существование иррационалистической традиции в философии и методологии науки. Иррациональное лишается своей негативной оценки, если оно понимается как интуитивная или неосознаваемая грань самого разума. В таком философском контексте иррациональное интерпретируется как новое, еще неотрефлексированное и не принявшее строго логически определенные формы знание. Например, после того как вошла в употребление допонятийная суть “воображаемого числа”, было выявлено, что комплексные числа можно задавать как пары вещественных чисел. Причем таким образом, что правила операций с парами чисел приводят с помощью мнимой единицы к такие же результатам, как и обычные операции, и это сразу позволило решать все квадратные уравнения одним и тем же способом.

Существует и другой способ введения комплексных чисел, подобный конструкции поля целых чисел по модулю простого числа. Общая математическая идея состоит в том, что поскольку для целых чисел по модулю 7 справедливо равенство 7 = 0, то в системе комплексных чисел для того, чтобы выполнялось равенство $x^2+1 = 0$, надо брать сравнения по модулю x^2+1. Хотя математически это более сложная конструкция, тем не менее, она снимает “философический покров таинственности” с комплексных чисел, которые несправедливо, по отношению к действительным числам, называют "мнимыми". Заметим также, что формальные правила обращения с иррациональными числами, как бесконечными последовательностями, аналогичны правилам действия с рациональными числами. Хотя сами последовательности чисел – это далеко не тривиальные математические понятия, математики выбирают именно их из-за удобства манипулирования с ними, по сравнению, например, с дедекиндовыми сечениями. Свойства действительных чисел, состоящих из рациональных чисел и определяемых с их помощью иррациональных чисел, являются тем фундаментом, на котором строится все здание современного математического анализа. Кроме того, переход на новый уровень абстрактного мышления обеспечивает общность и единство математического языка. "Но математика, – подчеркивают математики-прикладники Ю.П. Попов и академик А.А. Самарский, – это не только язык для описания, но и мощный инструмент для совершенствования окружающего мира" [353, с.75]. Например, от математических числовых совокупностей – вещественных и комплексных чисел – приходят к общему понятию поля, а от множеств функций и бесконечных последовательностей – к понятиям гильбертова или банахова пространства и еще более общим понятиям метрического и топологического векторного пространства.

Возвращаясь к влиянию логики на математику, следует отметить, что оно проявляется не только в согласованности математических теорий, их формализации и стандартах строгости. В пользу необходимости исторического этапа логицистского направления в обосновании математики можно добавить следующее философское наблюдение. Логицистское обоснование математической теории имеет определенный методологический смысл, но при жестком дополнительном условии. Оно состоит в том, что все ее аксиомы, кроме онтологически истинных, должны быть представлены в качестве логически общезначимых положений. Это обусловлено тем, что логика, в отличие от математики, является беспредпосылочным знанием, так как она обусловлена способом языкового мышления, независящего в своих формах от математики. В XX веке логика начала определять содержание нового направления строгого обоснования математики – интуиционизма и конструктивизма. Понимание роли интуитивной основы математического мышления позволило по новому посмотреть на старый философский спор о реальности математических абстракций: являются ли они изобретением человеческого ума или они отражают некоторое содержание, предопределенное структурой мира? В таком контексте на первый план философско-математических исследований выдвинулись основания математики, проблемы обоснования, строгого доказательства и задачи взаимодействия математики с естественными науками и ее приложениями. Чтобы понять сложность этой проблемы, добавим к этому высказывание одного из величайших математиков XX века Германа Вейля, сделанное им еще в 1944 году: “Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный "окончательный" ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками” (цит. по [186, с.12]). В вопросе об основаниях математики близкий к интуиционизму номиналистский подход основывается на предположении, что математические понятия можно интерпретировать как абстрагирование свойств реального мира.

Но, вопреки номиналистскому подходу к математике, по крайней мере, теория бесконечных множеств не является частью физического мира, в силу физической нереализуемости некоторых ее процедур. В духе номиналистского подхода к обоснованию математики подлинной надежностью в математике обладают только высказывания о таких объектах, как натуральные числа и операции с ними. В связи с этим обратим внимание на аргументацию философа математики Пола Бенацеррафа, согласно которой числа – это вообще не объекты, а знаки специфической системы с определенными законами. “Из того факта, что система объектов проявляет структуру целых чисел, следует, – утверждает он, – что элементы этой системы имеют некоторые свойства, которые не зависят от структуры. Тогда должна быть возможность индивидуализировать эти объекты независимо от той роли, которую они играют в структуре. Но это как раз и невозможно сделать с числами” [517]. Согласно его определению, числа есть “совокупность некоторых условий”, относящихся не к элементам структуры, а к отношениям, определенным на ней. По существу, главная проблема в обосновании математики для Бенацеррафа свелась к тому, чтобы объяснить, как с помощью числовых символов можно делать то, что связано с нашей способностью осознавать и понимать окружающий мир. Поскольку пояснения по поводу “основоположений арифметики” являются в больше мере философскими, чем это может показаться уместным профессиональным математикам, немецкий математик и логик Готлоб Фреге все же настаивал на том, что “основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски” [459, с.19]. Для философии и математики эта задача является общей. Не умоляя побуждающие философские мотивы в исследованиях о понятии натурального числа и учитывая также то, что это важнейшее понятие относится к философским проблемам обоснования математики, следует признать – в решении проблем арифметики приоритет принадлежит самой математике, а их философская интерпретация зависит от смысла, придаваемого соответствующими методологическими вопросами.

Современные философские взгляды на источники человеческого знания, а также трудности математического познания, опирающегося на онтологическое единство знаковых конструкций, обусловили плюралистические, на первый взгляд, несовместимые точки зрения на будущее математики. В главе “Куда идет математика?” своей популярной монографии “Математика. Утрата определенности” (1980) американский математик Морис Клайн писал: “Прогресс математики представляет собой цепочку великих интуитивных озарений, впоследствии получавших обоснования, которые возникают не за один прием, а путем последовательных поправок, долженствующих исправить различного рода ошибки и упущения, вводимых до тех пор, пока доказательство не достигнет приемлемого для своего времени уровня строгости” [186, с.540]. Уместно заметить, что тезис и антитезис обладают, в пределах соответствующих “точек отсчета”, относительной равнозначностью. Поэтому, с точки зрения полноценной аргументации, есть смысл доводить каждую философскую позицию до максимально возможной в пределах исследования строгости, системности и непротиворечивости. Если принять высказывание Клайна за тезис в защиту строгости в математике, то в качестве антитезиса можно сослаться на столь же убедительное мнение современного математика академика С.П. Новикова: “Строгомания постепенно превратилась в мифологию и веру, где много самообмана: спросите, кто читает эти доказательства, если они достаточно сложны? За последние годы выявилось много случаев, где решения ряда знаменитых математических проблем топологии, динамических систем, различных ветвей алгебры и анализа, как выяснилось, не проверялись никем очень много лет” [315, с.17]. Но наличие кризиса сообщества математиков в реализации подходов к науке и с точки зрения проблем математического образования, в контексте проблемы обоснования современной математики, следует отделять его от философско-методологического вопроса: есть ли кризис математики как науки?

Может быть кризиса нет, а лучшие работы в наиболее перспективных областях современной математики стали делать другие исследователи, например, выходцы из компьютерных наук или физики? “Здесь мы подходим к узловому вопросу, главной причине кризиса физико-математических наук, – утверждает С.П. Новиков, – к процессу распада образования. Смогут ли еще имеющиеся сейчас поколения компетентных математиков и физиков-теоретиков обучить столь же компетентных молодых наследников для XXI века? Ключ ко всему – в образовании, причем трудности проблемы, симптомы распада, начинаются с начальной и средней школы и продолжаются в университете” [315, с.20]. Для его преодоления, предлагает он, надо принять новый анализ, созданный физикой второй половины XX века, порой еще не строгий, то есть в принципе такой, каков он есть. Заметим, что, с одной стороны, разнообразие подходов к обоснованию математики можно аргументировать тем, что современная математика изучает такие конструкции, отношение которых к реальному миру, по меньшей мере, довольно проблематично. Даже в тех работах по теоретической прикладной математике, где, используя терминологию, взятую из реальности, и доказывают математически строгие теоремы о чем-то внешне похожем на реальность, на самом деле от реальности "бесконечно далеки". Это связано с тем, что математикам трудно вступать в контакт с миром естественных наук, где ведутся конкретные исследования, без заботы о математической строгости как специфическом научном подходе к обоснованию математики.

С другой стороны, есть определенная опасность в том, что математика может быть в итоге низведена к своеобразной игре, происходящей в некотором "специфическом искусственном мире". По мнению логика Петра Вопенки: "Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис современной математики. Он проявляется и в том, что часто глубокие и остроумные математические результаты не вызывают никакого интереса не только у людей, которые не являются математиками-профессионалами, но даже у математиков, в настоящее время работающих над проблемами с другим расположением фигур на шахматной доске" [102, с.14]. Но, даже ощущая этот кризис, во-первых, нельзя априори поставить под сомнение математическую деятельность в новых областях математики, а во-вторых, системный подход явился одним из тех методологических направлений современной философии науки, становление которого было связано с преодолением кризиса, охватившего все научное познание на протяжении XX века. В связи с этими проблемами обратим внимание на интересную философскую работу начала XXI века, английского математика Брайана Дэвиса с тем же названием, что и у Мориса Клайна, "Куда идет математика?". В ней формулируются новые философские тезисы в проблеме обоснования современной математики, согласно которым к концу прошлого века точнейшая из наук испытала потрясения, способные принципиально изменить характер полученных в ней результатов.

Логические прозрения Курта Гёделя привели в 30-е годы прошлого века к первому из трех кризисов обоснования математики. Например, "один из современников Гёделя, известный математик Герман Вейль писал об открытии Гёделя как о кризисе, который "постоянно подтачивал энтузиазм и решимость", с которой он занимался своими исследованиями" [37, с.86]. В качестве антитезиса к этому утверждению следует добавить, что критика формалистской программы, исходящая из теорем Гёделя, не может быть признана вполне корректной еще и потому, что она приписывает гёделевским теоремам большую общность, чем та, которой они обладают по логике своих доказательств. Прослеживая эволюцию математики и математического мышления XX века, академик С.П. Новиков выявил, тем не менее, еще одну философско-методологическую проблему обоснования современной математики: “Бесполезная всеусложняющая алгебраическая формализация языка математики, экранирующая суть дела и связи между областями, – это слишком широко распространившаяся болезнь, … это проявление кризиса, ведущего к определенной бессмысленности функционирования абстрактной математики, превращения ее в организм, потерявший единый разум, где органы дергаются без связи друг с другом” [315, с.17]. Это мнение разделяют и другие авторитетные математики. Так, следуя анализу Брайана Дэвиса, начиная с 70-х годов XX века, в современной математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный работой Гёделя. “Оба они, – считает Дэвис, – связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность” [519, с.1351]. В современной литературе по философии математики эта проблема пока еще не обсуждалась, хотя, можно предположить, что она заключается в возможных пределах формализации.

Второй кризис относится к математическим доказательствам, методологически проводимым с использованием компьютерных технологий, в правомерности которых некоторые выдающиеся математики, в частности Александр Гротендик, сомневались. Соответствующую философскую проблему можно, например, сформулировать так: можно ли считать математическим такое доказательство, которое выполнено на компьютере? Общепризнано, что одним из самых серьезных революционных технических изобретений прошедшего века, оказавшим огромное влияние на математику, можно считать компьютер. Поэтому в таком развитии прогресса математики, точнее, в новых инструментальных технологиях “основные проблемы – компьютеры и мышление” [249, с.31]. Если философски акцентировать эти проблемы, то по существу они сводятся к проблеме “доверия к компьютерам”. Этот мощный инструмент, первоначально создававшийся для математических расчетов, позволил проводить математическое моделирование огромного класса естественнонаучных и социально-гуманитарных процессов, что, безусловно, имеет отношение и к рассматриваемой проблеме обоснования математики. Появление компьютеров не только изменило лицо всей цивилизации, но и породило сомнение в надежной методологической обоснованности машинных способов доказательства математических теорем. Как применять такие результаты? Основная методологическая идея состоит в том, что это способ получения новой информации, которая не заметна в обычном строго математическом формализме. Но проблема в том, что онтологические и гносеологические основания разных с методологической точки зрения математических теорий не всегда совместимы. Именно это и является глубинной основой для существовавших и вновь возникающих в математике кризисов, для преодоления которых необходимо провести не только основательную внутриматематическую работу, но и приложить специальные философско-методологические усилия. Например, непонятно, почему столь существенна математическая проверка, выполненная именно человеком, ведь главное – что сделано, а не кто сделал, а в прошлом проверку осуществляли люди, потому что не было другой альтернативы.

Рассматривая аспекты критериев убедительности компьютерного доказательства, прежде всего следует уточнить само понятие "компьютерное доказательство", разделяя "инструмент", позволяющий осуществить доказательство, относя к нему программу, а также собственно компьютер, и полученный с помощью этого инструмента "результат доказательства", к которому относится текст доказательства. Поэтому компьютерное доказательство можно представить в виде триады: "программа – компьютер – результат". Философский анализ позволяет выявить причины, которые не позволяют считать любое компьютерное доказательство убедительным, несмотря на веру в то, что оно является идеалом формального доказательства. Во-первых, эта вера основывается на надежности работы современного компьютера, в работе которого случаются сбои и который может содержать ошибки в программном обеспечении. Во-вторых, хотя компьютерная программа формального доказательства пишется в соответствии с законами формальной логики, в нее тоже могут вкрасться ошибки. Как считает математик Ян Стюарт: "Критерием здесь должно являться одно – надежность результатов. До тех пор пока соблюдается это условие, вычисления, произведенные машиной, будут столь же убедительны, что и произведенные человеком" [434, с.43]. Для подтверждения этого заметим, что компьютерные доказательства применяются как для получения новых результатов, так и для численной проверки уже сделанных теоретических доказательств. Поэтому философский вопрос об убедительности методологии компьютерных доказательств в равной мере соотносится с по-прежнему актуальным вопросом об убедительности "ручного" доказательства, сделанного математиком.

Если рассматривать математику как созидательный процесс, то ее можно уподобить архитектуре, как это делала группа Бурбаки. Тогда ее кризисы можно интерпретировать как кризисы человеческой мысли, когда архитекторы науки осознали, что невозможно построить многокилометровое сооружение и поэтому нет смысла обсуждать, какими свойствами устойчивости оно бы обладало. Но нельзя и абсолютизировать эту ситуацию, так как вычислительная математика решает пока только те задачи, которые может решить, а не те, решение которых, в первую очередь, требуется. “В результате кризис современной вычислительной математики быстро углубляется, что вызвано ее неспособностью решать весьма большой объем текущих актуальных задач, и иметь потенциал развития, обеспечивающий необходимый темп расширения пространства конкретных приложений” [301, с.72]. Безусловно, сама констатация кризиса и даже выявление его причин проблемы не решает, но следует отметить, что в контексте единства математики, в идеологии вычислительной математики так или иначе находит применение многое из имеющегося аппарата классической математики. А по поводу второго кризиса, связанного с применением компьютера в доказательстве теорем, можно сказать, что никакой ясности в эту проблему внести пока не удалось, поскольку нет еще реальных компьютерных технологий доказательства корректности компьютерных программ. По поводу третьего кризиса, относящегося к возрастанию сложности математических доказательств, с точки зрения обоснования математики он должен быть воспринят как очередной вызов к обоснованию надежности математических рассуждений. Поэтому найти на него адекватный ответ вряд ли возможно без придания философии математики нового концептуального импульса.

Третий кризис переусложненности в определенном смысле для математиков наиболее серьезный из всех, так как связан с излишней сложностью современных математических доказательств. “Излишне усложненный формальный абстрактный язык, – по профессиональному заключению С.П. Новикова, – захватил не только алгебру, геометрию и топологию, но также значительную часть теории вероятностей и функциональный анализ. Анализ, дифференциальные уравнения, динамические системы оказались несколько менее ему подвержены. <…> Но другие нелепости захватили все это сообщество: математики – специалисты в этих областях – продолжают до сего дня программу, признающую лишь стопроцентно строгие теоремы, длина которых стала зачастую немыслимой” [315, с.17]. Например, доказательства некоторых знаменитых математических проблем напрямую связаны с проблемой обозримости доказательства. Рецензенты, анализирующие правильность полученных доказательств, все чаще встречаются с математическими статьями, в которых аргументы образуют настолько протяженную цепь доказательств, что они оказываются не в состоянии проследить за всеми ее существенными деталями. Важнейшим фактором, влияющим на убедительность доказательства, является его обозримость, то есть возможность его мысленного схватывания целиком. Нельзя не отметить, что с развитием математики, в частности с появлением все более сложных и длинных доказательств, они теряют свое главное методологическое свойство – свойство убедительности. Но основательное исследование рассматриваемой проблемы выходит за рамки философского анализа, так как для понимания сути проблемы необходимо участие работающих математиков.

Однако, говоря о необозримых процедурах, даже специалисты заявляют: “Мы оставляем в стороне ряд вопросов специально-методологического характера, связанных с трудностями практической осуществимости необозримых доказательств” [10, с.40]. Следует учесть также следующее философское возражение: обозримость математического доказательства не только не гарантирует его убедительности, но даже ничего методологически существенного не говорит об убедительности этого доказательства, так как последнее не является “самодостаточным фактором” и зависит от выбранного направления в обосновании математики. Например, в математическом доказательстве методологическая сопряженность целого и части по существу связана с убедительностью и обозримостью. “Если убедительность – это в известной мере осуществимость доказательства как целого, завершенного, но в котором особо выделены исходный и заключающий его пункты, – утверждает философ науки А.Н. Кочергин, – то обозримость – это осуществимость доказательства в каждом пункте сцепления доказательства без того, чтобы выявить противоречия в целостном, нарушить осуществимость доказательства как целого” [202, с.75]. Двойственность этих важных понятий проявляется, прежде всего, в том, что убедительность, в определенном смысле, отражает обозримость целого, а обозримость можно также интерпретировать как убедительность частей, составляющих математическое доказательство. Решение математической проблемы или задачи, сформулированной в нескольких предложениях, может занимать тысячи страниц математического текста. Как в таком случае оно может быть полностью понято и осмыслено отдельно взятым профессиональным математиком, пусть даже самой высочайшей квалификации?

Вот как комментирует эту ситуацию академик С.П. Новиков: “Я могу понять, что решенные … проблемы Ферма и четырех красок стоят длинного доказательства, и их проверят. Но постоянно жить в мире сверхдлинных доказательств, никем не читаемых, просто нелепо. Это – дорога в никуда, нелепый конец программы Гильберта” [315, с.17]. Например, в случае доказательства Великой теоремы Ферма, представленной английским математиком Эндрю Уайлсом, менее десятой части специалистов по теории чисел полностью понимали его рассуждения. Несмотря на лаконичность представленного текста, содержавшего около 200 страниц, для его тщательного анализа во всех деталях понадобилось бы уже не менее 1000 страниц, тем не менее, все сочли, что доказательство все же правильное. Те математики, которые не смогли до конца понять все тонкости доказательства, приняли его потому, что доказательство признали другие, а именно, те специалисты, которые все поняли, шаг за шагом проследили весь ход доказательства и проверили каждую деталь. Еще более ярким примером может служить доказательство классификации простых конечных групп, полученное в начале 80-х годов XX столетия, оно занимает общим объемом примерно 15 тысяч журнальных страниц. "Простыми эти группы являются в том смысле, что представляют собой строительные кирпичики или "атомы" теории групп. В известном смысле простые группы схожи с простыми числами, делителями которых могут быть только они сами и единица" [211, с.41]. Все конечные простые группы уже описаны и классифицированы. Эта классификация была проделана объединенными усилиями более ста математиков и опубликована на страницах различных научных журналов примерно в 500 статьях. Следует отметить характерную эстетическую черту всего математического творчества, например, состоящую в том, что математики до сих пор работают над упрощением этого необозримого доказательства, надеясь прояснить многие вопросы, касающиеся простых групп.

Американский математик Дэниел Горенстейн, сыгравший решающую роль в завершении доказательства этой грандиозной теоремы, разрабатывает классификационное доказательство второго поколения. "Если наша работа увенчается успехом, – писал он, – то доказательство второго поколения составит лишь одну пятую первого и приобретет во столько же раз большую идейную ясность" [118, с.74]. Однако по любым математическим стандартам доказательство в 3000 страниц все равно будет слишком длинным и необозримым. Хотя применение этой классификации за пределами математики пока еще не столь значительно, в современной математике этот результат уже нашел применения в разных областях. Это один из наиболее ярких примеров современной проблемы переусложненности математических доказательств без использования компьютера, хотя он с большим трудом выдерживает идеал локальной обозримости, у него есть проблемы в связи с другими критериями убедительности, а именно, с проблемой понимания и простотой. Кроме того, при чрезмерном возрастании объема доказательства расплывается представление о самом доказательстве. Это подобно тому, как расплывается понятие о натуральном числе для довольно больших чисел. Поэтому, для собирания фрагментов обоснования отдельных математических теорий воедино необходим целостный взгляд на проблему обоснования с помощью философско-методологического синтеза, после чего может наступить период уточнения деталей и формализации, придающей процессу обоснования математики некоторую завершенность.

Но пока эти идеи не вышли из стадии гипотезы, хотя сам ход эволюции современного математического знания не дает оснований полагать, что ситуация не изменится по мере дальнейшего развития. Открытие конструктивных путей выхода из упомянутых кризисов означает, что, например, проблеме обоснования математики изначально присуща не только разрушительная тенденция развития, но также созидательная тенденция, без которой невозможно объяснить возникновение нового. Выход из кризисного этапа можно считать конструктивным, если, например, система обоснования математики приобретает качественно новое философское состояние с более высоким методологическим уровнем организации, чем до кризиса. Слово "кризис" принято понимать как нечто отрицательное, свидетельствующее о слабости какой-то позиции. Но если у математиков спросить, являются ли выявленные самими математиками и философами математики кризисы показателем нездорового состояния математического знания, то ответ, скорее всего, будет – нет. Еще за год до появления важнейших результатов Гёделя, внесших математическую строгость в постановку вопросов обоснования математики, академик А.Н. Колмогоров писал, что "многие трудности, возникшие на окраинах современной математики по поводу недавно возникших крайне абстрактных теорий, не мешают, конечно, продолжать текущую работу в классических областях математики. При этом имеется довольно обоснованная уверенность, что наиболее ценные конкретные достижения современной математики устоят против ведущейся разрушительной критики" [197, с.509]. Но что можно сказать о новых кризисах в современной математике в контексте проблемы обоснования?

С философской точки зрения, кризисы в математике можно интерпретировать в смысле накопления противоречий, это как раз то, что Гегель емко назвал антитезисом. С методологической точки зрения, по мнению А.А. Любищева, "для беглой оценки того, развивается ли наука или не развивается, как раз отсутствие кризисов является подозрительным, и если такое "благополучное" состояние длится слишком долго, можно почти без ошибки сказать, что наука пришла в состояние догматического застоя" [244, с.96]. Математика продолжает развиваться и ее результаты по-прежнему имеют широчайшие применения в науке и реализуются на практике, поэтому доверие к ним не было подорвано. Почему же тогда появилось представление о кризисе как то, что можно назвать "кризисом сознания"? Одно из возможных мировоззренческих объяснений состоит в том, что новые кризисы математики "ставят под удар" не саму математику, а определенные философские представления о том, какой она должна быть. Философские цели трех грандиозных программ – логицизм Г. Фреге и Б. Рассела, интуиционизм Л. Брауэра и А. Гейтинга, формализм Д. Гильберта и Дж. фон Неймана – не были достигнуты, и сейчас философы математики не ближе к полному пониманию математики, чем основатели этих трех школ. Поэтому в рамках этого исследования предполагается, что преодоление кризиса гипотетически возможно за счет реального синтеза философских направлений обоснования современной математики. Однако при этом возникают философские проблемы пределов этого синтеза и научной результативности совместимости этих направлений в проблеме обоснования математики.

При методологическом анализе современной науки нередко, иногда явно, а иногда неявно, проводится мысль о том, что развитие познания связано с возрастанием сложности принципиальных философских подходов к исследованию и методологии научного познания. Конкретное обоснование этого взгляда реально демонстрируют новые кризисы современной математики. В связи с этим можно сослаться на мнение американского философа Ричарда Рорти, которое было высказано о познании: “Это просто значит, что ничего не может считаться обоснованием, пока оно не отсылает нас к тому, что мы уже приняли, и что невозможно выйти за пределы наших вер и нашего языка в поисках какой-то проверки, кроме как согласованности” [387, с.132]. Поэтому можно предположить, что задача современной философии математики состоит в том, чтобы избавиться от “пустого скептицизма”, препятствующего выявлению, как реальных оснований математического мышления, так и вполне допустимых подходов к обоснованию математических теорий на основе общего концептуального единства и системной целостности удивительного феномена современного математического знания.

2.2 Роль умеренного платонизма в формировании единства философских направлений обоснования математики

Философско-методологический анализ проблемы обоснования математики показал, что понимание сущности математики выходит за пределы логических понятий. Если в начале прошлого века преобладало убеждение, что основной методологический вопрос о возможности обоснования математики можно решить в рамках самой математики, то теперь уже стало понятно, что обоснование математики средствами только самой математики и логики недостижимо. Такие сдвиги в подходе к проблеме обоснования обусловлены логическим анализом математических структур, реальным развитием новых областей математики и философским пониманием природы математического мышления. В частности, в современной теории познания важная роль отводится предпосылочному знанию как “фундаментальному параметру науки”, которое входит в математическую теорию в виде философско-методологических принципов, формирующих стиль научного мышления.

Важнейшей особенностью математики является то, что в процедуру ее обоснования входит принятие некоторых предпосылок, практические выводы из которых необходимо сравнивать с экспериментальными фактами прикладной математики. Хотя идея математической реальности важна для понимания исходных представлений математики, она не может ограничивать внутренние потребности развития математических теорий. Это, безусловно, сказывается и на внутренней проблематике философии математики, которая исследует вопросы сущности и существования абстрактных математических объектов и способов математических рассуждений.

Но, обретя внутреннюю специфику и самостоятельность, философия математики не отделилась от других разделов философии в целом, то есть не стала для философии чуждой наукой. Это обусловлено тем, что при решении философией мировоззренческих проблем, которые характеризуют целостную картину жизненного мира, вырабатываются не только наиболее общие идеи, принципы и категориальные смыслы, но и создаются такие новые категориальные схемы, значимость которых для философии науки обнаруживается только на будущих этапах эволюции познания. “Нетождественность философских оснований науки всему многообразию идей, возникающих при разработке мировоззренческой проблематики в сфере философского познания, означает, – по мнению В.С. Степина, – что философия в целом обладает определенной избыточностью содержания по отношению к запросам науки каждой исторической эпохи” [422, с.159]. Проблема обоснования математики, над которой философы математики бьются до сих пор, начиная с начала XX века, стала толчком, побудившим к жизни философию математики как самостоятельную область знания. Для философско-методологического анализа проблемы обоснования надо использовать не только общефилософские, но и общематематические категории, имеющие общетеоретический характер в концептуальных системах философии. Следует заметить, что введение недостаточно четких философских соображений в философию математики не решает вопрос о сущности математики, поскольку он требует, прежде всего, подходящего истолкования самих философских категорий, которые появляются в результате многоступенчатого абстрагирования от реальных вещей, их свойств и отношений.

Когда исследование философско-методологических проблем математики доходит до “предельных оснований” математики, между философией и философией математики устанавливается определенный баланс, с точки зрения использования разрабатываемых новых идей в философии и математике. Можно даже вполне определенно сказать, что этот баланс – реальное достижение философии науки конца XIX – начала XX веков, которое зафиксировано в философии математики с момента появления программ обоснования математики. Кроме того, как утверждает философ математики А.Г. Барабашев, “теперь произошло "оборачивание применимости": философия математики (в лице философов математики) осознала себя как область, не только имеющая значение для решения чисто философских проблем (хотя такая ситуация имеет место, и многие философы обращаются к философии математики с целью почерпнуть отсюда новые идеи и представления, – скажем, о процессе абстрагирования, о сущности критериев научности, о природе идеального и т. п.), но и как черпающая из философии как внешней по отношению к себе” [31, с.88]. Феномен рождения математического метода по-разному оценивался многими философами, но при обсуждении этого вопроса нельзя не обратиться к греческой философии. Греческой философии мы обязаны появлением математического метода, когда стали исследовать не непосредственные природные объекты, а некоторое представление о них, как о субъективно воспринимаемой реальности. Изучая математику, Платон пришел к выводу, что существует два мира: мир идей (строгий, упорядоченный и гармоничный) и мир вещей (несовершенный, неточный и хаотичный). В частности, размышляя над философской проблемой возникновения чисел, Платон под влиянием пифагорейцев пришел также к мысли о том, что математические понятия и идеи следует выделить в особый вид бытия и, соответственно, в особый вид знания. Для понимания современной проблемы обоснования математики следует зафиксировать, что Платон вполне отчетливо выразил следующую точку зрения на математику: “математические понятия объективно существуют как особые сущности между миром идей и миром материальных вещей” (цит. по [216, с.8–9]). Особенно специфическим для Древней Греции являлось возникновение в рамках натурфилософских школ первых дедуктивных аксиоматических систем и введение идеи бесконечного.

В соответствии с учением Платона, каждая реальная вещь – это лишь приближенная реализация своей идеи. Но что можно сказать об отношении математических теорий к “внемыслительной” реальности? К этой реальности они имеют опосредованное отношение, а именно через применение к идеальным понятиям и концептуальным системам, создаваемым когнитивной системой, в которых зафиксированы теоретические допущения и гипотезы эмпирических наук. Заметим, что в онтологии Платона идея – это зрелище реально существующего, которое как истинное бытие всегда неизменно, определенно и совершенно. “Изучая Платона, – напоминает Бертран Рассел, – важно иметь в виду центральную роль математики в его учении. Это одна из черт, которая отличает Платона от Сократа, чьи интересы довольно рано отошли от науки и математики” [371, с.99–100]. Платон был в курсе всех новейших достижений математики своего времени, получая от занятия ею интеллектуальное наслаждение, и активно использовал математику в своих философских построениях. Кроме того он считал, что математика развивает ум и что философские размышления о мироздании способствуют тому, чтобы человек склонился к его общественному идеалу. Такая философская позиция Платона придавала математике более респектабельный характер. Хотя его возможности оригинального творчества в области математики были все же ограничены, влияние платонизма на философию математики проявляется и на современном этапе развития математики, в частности, с точки зрения философского подхода к пониманию природы математики, а именно ее реалистической интерпретации.

Несмотря на некоторую недостаточность теоретико-математических оснований, доступных философии его времени, Платон изменил само представление о природе математического метода, в котором конечный результат развития математических теорий является исходной позицией. Это по существу другое воззрение, согласно которому математическое знание есть одновременно и условие, и первооснова действительности. “Оно коренится в платоновском взгляде на математику, – считает немецкий философ Эрнст Кассирер, – в котором он видел нечто "среднее" между идеями и чувственными вещами” [177, с.157]. Мир Платона – это идеальный мир совершенных форм, отличный от физического мира, но являющийся основой для его понимания. Сегодня принято называть платонизмом любую философскую позицию, которая систему идеальных объектов человеческой мысли трактует как особый, важный и независимо существующий мир. По существу, в контексте обоснования математики, это представляет собой специфически философский идеал знания, который для самого Платона находился в непосредственной гармонии с его телеологическими идеями, связываясь с ними в единое мировоззрение. Согласно учению Платона, наблюдаемый нами мир, как мир чувственно воспринимаемых вещей, является лишь отражением объективного “мира идей”, которые вечны и неизменны, в отличие от непостоянных и изменчивых чувственных вещей. В платоновском диалоге “Тимей” признается, “что есть тождественная идея нерожденная и негибнущая, ничего не воспринимающая в себя откуда бы то ни было и сама ни во что не входящая, незримая и никак иначе не ощущаемая, но отданная на попечение мысли” [348, с.493]. Идеи постигаются умом, следовательно они, по Платону, являются предметом истинного знания, хотя при этом не следует смешивать математическую истину с самой этой истиной.

Для современного математика неизбежно бессознательное платонистское отношение к математическим объектам своего исследования. С точки зрения платонизма, математические объекты реально существуют в определенного рода вневременном высшем смысле, а человеческий ум имеет уникальную способность их познавать. Например, использование понятия актуальной бесконечности есть то, что в философии математики принято называть платонизмом в математике. Веру в существование абстрактных объектов можно назвать платонизмом, а веру в существование математических абстрактных объектов – математическим платонизмом. Заметим, что корни платонизма следует искать в XIX веке, когда математики стали пользоваться актуальной бесконечностью совершенно свободно, и актуально бесконечные множества объектов стали составлять основное содержание традиционной классической математики. Поэтому платонизм – самое известное философское направление в онтологии математики, поскольку он довольно тесно связан с философскими спорами относительно природы универсалий. “В любом случае, – заключает философ математики В.В. Целищев, – речь идет о философском направлении, согласно которому математика изучает сферу абстрактных объектов, чье существование не зависит от человеческого сознания” [469, с.10]. В частности, в отношении математики можно говорить об “онтологическом платонизме”, который включает приравнивание роли абстрактных математических объектов роли физических объектов, без попыток осуществить редукцию одних сущностей к другим. В философии науки выделяют еще так называемый “эпистемологический платонизм”, в основе которого лежит представление о том, как познаются абстрактные объекты математики. Можно упомянуть и “методологический платонизм”, для которого характерно широкое использование неконструктивных математических методов, в частности, закона исключенного третьего.

Следует отметить, что термин “платонизм” давно устоялся в философии математики. Но мало кто знает, что, несмотря на определенную близость идеологии работающих математиков к философии Платона, термин “математический платонизм” был введен в философское обращение относительно недавно, когда три классических направления в обосновании математики уже в достаточной степени сформировались, а именно, благодаря статье Пауля Бернайса “О платонизме в математике”, впервые напечатанной в 1934 году [43]. Ключевым моментом в платонистском направлении обоснования математики является допущение существования двух областей – физической области материальных тел и абстрактной математической области, которая посредством понятий, моделей и структур дает такое понимание, какое только возможно достичь. Абстрактные математические понятия, например, бесконечные множества, которые реализуются как множество всех чисел или как множество всех функций, понимаются как некие самостоятельные сущности, подлежащие идеальному познанию. Это собственно и есть платонизм в математике, так как Платон как раз и приписывал самостоятельное существование идеям. Несмотря на философские “странности” платонизма, с точки зрения проблемы обоснования математики, следует выявить, в какой философско-математической интерпретации направление платонизма неизбежно в обосновании и есть ли для него философские аналоги в объяснении становления математических теорий.

По мнению философа математики В.В. Целищева, “многие философы считают термин "платонизм" неудачным в том смысле, что он ассоциирует со специфическими вопросами математического мышления такие философские категории, контекст которых давно утерян. Поэтому часто употребляют другие термины, например, "математический реализм", хотя сам по себе термин "реализм" слишком многозначен и, заимствуя терминологию из философии науки, "теоретически нагружен"” [469, с.10]. Например, известный авторитет по основаниям математики американский математик Пол Коэн предпочитает называть платонизм “реализмом”, поскольку математики оперируют с абстрактными объектами как с некой реальностью, составляющей некоторое подобие мира, за которым для них нет другой подлинной реальности. Проблема реализма активно обсуждается в современной философии математики. Так “внутренний реализм”, появившийся в философской литературе благодаря авторитету Хилари Патнэма, предполагает, что все суждения о математических объектах определяются содержанием теории и связан с ее концептуальными особенностями. Напомним, что термин “реализм” происходит от латинского слова realis, то есть вещественный. Возможно поэтому умеренные реалисты уподобляют математические объекты вещественным предметам, хотя они при этом некритически используют представление о математической реальности. В частности Х. Патнэм высказал убеждение, состоящее в том, что принятие реализма в математике является единственным средством от превращения математики в “необъяснимое сказочное явление” [527, с.60]. Многие философы нефундаменталистского направления пытаются совместить отказ от наивного платонизма и реализма с социальной сконструированностью знания.

Например, реалист говорит, что “числа существуют”, а антиреалист говорит, что “числа не существуют”. Но при любом подходе вовсе необязательно сводить реальность математических объектов к коммуникативным операциям, то есть реальность объектов математического познания к его средствам. Анализируя философские трудности понимания двух видов реализма, философ математики Стюарт Шапиро разъяснял: “Реализм может иметь много смыслов. Один – что математические объекты существуют независимо от математиков. Это реализм в онтологии. Другой – что утверждения различных областей математики имеют объективные бивалентные истинностные значения независимо от конвенций, языка и правил математиков, и что основная часть утверждений компетентных математиков истинна. Это – реализм в истинностных значениях. Нет общего согласия относительно соотношения этих двух видов реализма” [530]. Смысл реализма в истинностных значениях состоит в том, что математикам необходимо признание незыблемости математической истины, которая в определенном смысле является частью математической реальности. Реализм способствует представлению о математике как о научной дисциплине на основе когнитивизма, используя в качестве методологического регулятива концепцию истины. Такого рода допущения, будучи четко сформулированными, превращаются в философии науки не только в гипотезы, но и в теории.

Платон придерживался мнения, что математика представляет собой истинную глубинную реальность, для которой физический мир является лишь “бледной тенью”, а Аристотель, напротив, считал ее поверхностным описанием части физической реальности. Реалисты, отталкиваясь от воззрений Платона и его теории идей, считали, что универсалии – это вещи, а номиналисты, взывая к авторитету Аристотеля, напротив, придерживались того мнения, что универсалии – это просто названия. “Так, согласно Платону, – поясняет академик В.А. Лекторский, – чувственное восприятие не может дать знание, по-настоящему можно знать только то, о чем учит математика. Поэтому с этой точки зрения в строгом смысле слова не может быть науки об эмпирических феноменах, идеал науки – геометрия Эвклида. По Аристотелю дело обстоит иначе: чувственный опыт говорит нечто о реальности. Опытная наука возможна, но она не может быть математической, ибо опыт качествен и не математизируем” [235, с.73]. Противостояние взглядов Платона и Аристотеля на взаимоотношения между математикой и окружающим миром стало предметом дискуссий в эпоху Средневековья. Английский естествоиспытатель и философ средневековья Роджер Бэкон, расширивший роль математики в природе и использовавший математику для доказательства свойств мироздания, занимал позицию где-то посредине между Платоном и Аристотелем. “Одна лишь математика…, – считал Бэкон, – остается для нас предельно достоверной и несомненной. Поэтому с ее помощью следует изучать и проверять все остальные науки” (цит. по [37, с.311]). Для него математика была важной частью естествознания, а не формальным искусством преобразования математических символов.

Такое представление о математике имеет явное отношение к платонизму, так как имплицитно оно предполагает существование математики, с помощью которой можно репрезентировать естественный мир, в том числе и естественность платонизма не только для чистой математики, но и для прикладной. Заметим, что обоснование фундаментальных математических теорий в процессе их развития проходило по двум каналам: во-первых, как их согласование с внутриматематическими основаниями, а во-вторых, как их согласование с внешними основаниями. “В последние десятилетия происходит смещение интересов в "чистой" философии математики, которое можно охарактеризовать как "эпистемологический поворот" – от поисков оснований математики к прояснению ситуации математического познания” [213, с.103]. Внутреннее обоснование фундаментальной теории в рамках принятых математических абстракций по существу сводится к ответам на вопросы: Каковы свойства объектов теории? Как эти объекты соотносятся с другими? В чем суть принципов построения теории? Ответы на эти вопросы можно рассматривать как эволюцию поисков “окончательного” основания математики в рамках известных концепций логицизма, формализма и интуиционизма. Но как заключает немецкий математик Рихард фон Мизес: “Ни одно из трех направлений в основаниях математики – интуиционизм, формализм и логицизм – не в состоянии полностью осмысливать отношения между тавтологическими системами и (внематематическими) опытными проверками, что является их истинным намерением, то есть сделать эти отношения частью самой математики” [277, с.43]. Внешние идеи обоснования вносятся в математику как через науки меньшей степени общности, например, естественные или технические, так и через науки такой же или даже большей общности, как, например, философия и логика.

Нельзя не отметить, что один из главных подходов к внешнему обоснованию математики реализуется в известной античной философской концепции платонизма. В контексте анализа проблемы обоснования математики следует отметить, что, во-первых, согласно Павлу Флоренскому, “платонизм и шире учения Платона и глубже его, хотя в Платоне нашел себе лучшего из выразителей” [482, с.6], а, во-вторых, как утверждает Пауль Бернайс, “не будет преувеличением сказать, что платонизм царит ныне в математике” [43]. Эта тенденция дает повод для многочисленных дискуссий, хотя они в основном опровергают лишь “крайний платонизм” или “абсолютный” платонизм. Когда математик, не углубляющийся в философские аргументы, берется за решение методологических вопросов, за объяснение природы своих результатов, он невольно привносит в рассуждения элементы платонизма. Но, как резюмирует В.А. Лекторский: “Новоевропейская наука, возникшая после Коперника и Галилея, по сути дела синтезировала программы Платона и Аристотеля в виде программы математического естествознания, основанного на эксперименте: эмпирическая наука возможна, но не на основе описания того, что дано в опыте, а на основе искусственного конструирования в эксперименте (а это предполагает использование математики) того, что исследуется” [235, с.73–74]. Тем не менее, тайны творческой силы профессиональных математиков искали именно в платонизме и для этого были весьма веские аргументы.

При этом недостаточно сослаться на Платона, а надо показать научную состоятельность его концепции идей. Как справедливо отмечает философ математики В.В. Целищев: “Платонизм выжил, и несмотря на его теологические претензии и анафему гражданам Науки, доминирующая философия продолжала предоставлять ему убежище” [466, с.139]. Избегая крайностей, следует признать, что коль скоро платонизм есть успешное с точки зрения математического сообщества объяснение природы математики все, что может сделать философия математики, это проанализировать, в какой степени математика ответственна за направление платонизма. В связи с этим необходимо отметить, что, с одной стороны, специфичность математического творчества касается, прежде всего, математической убедительности, которую традиционно было принято отождествлять с потенциальной убедительностью, понимаемой как истинность. Но, с другой стороны, отдельные математики не могут отделаться от некоторых суеверий, берущих начало от Пифагора и своеобразно воспринятых текстов Платона, и поэтому получивших в современной философии “негативное” название платонизма, восходящее к античному пониманию эпистемологического статуса математического знания. Математические понятия согласно концепции платонизма существуют если не в нашем мире, то в мире “более высокого порядка”, более реальном, чем наш мир, в смысле концептуального реализма, постулирующего существование мира идеальных объектов, содержащих все объекты и отношения математики. “Это абсолютный платонизм, – поясняет Пауль Бернайс, – непригодность которого была продемонстрирована с помощью антиномии, в частности, антиномий вроде парадокса Рассела-Цермело” [43]. Однако устойчивое развитие современного периода математики показывает, что математический платонизм обречен снова и снова возрождаться в философии, но уже на принципиально новой философской основе в своем более умеренном варианте. У Платона было совершенно фантастическое представление о природе математического знания, до сих пор будоражащее воображение современных математиков и философов науки.

Согласно Платону, душа человека, занимающегося математикой, обитавшая до его рождения в мире идей, в своей земной жизни постепенно вспоминает тот опыт, который она уже ранее обрела в другой жизни. Востребованность Платона состоит в том, что его философская система необычайно широка и диалектична в лучшем понимании этого слова. Важнейшая заслуга Платона состоит еще в том, что он первым указал на концептуальный характер любого, в том числе и математического знания. Он утверждал, что реальность и рациональность физического мира могут быть постигнуты только с помощью математики идеального мира. К этому можно добавить, что исторически сложившийся союз философии и математики определил не только методологический характер древнегреческой математики, но и самой философии, особенно такого ее направления, как платонизм.

Например, известный математик и физик-теоретик, профессор математики Оксфордского университета Роджер Пенроуз является убежденным платоником и верит, что существует лишь мир идей, который описывает физическую реальность. Концепция математизированного мироздания Пенроуза представляет собой онто-гносеологическую трактовку мира, основанную на философии Платона. Осознание того, что понимание Вселенной невозможно без математики, по его мнению, является важнейшим прорывом в науке. Обсуждая реальность математического мира Платона, Пенроуз утверждает, что эта идея, как выяснилось впоследствии, была очень продуктивной. “Но можно ли сказать, что платоновский математический мир действительно существует (в каком бы то ни было постижимом смысле этого слова)? Многие, в том числе и философы, сочтут такой "мир" чистым вымыслом – порождением исключительно необузданного воображения. И все же точка зрения Платона обладает огромной научной ценностью. Прежде всего, потому, что проводит четкое разделение между точными математическими объектами и теми приближениями, что мы наблюдаем в физическом мире вокруг нас” [328, с.34]. Именно при этом подходе проявляется влияние философии на математику в качестве методологического реализма как установки профессиональных математиков на допустимость абстрактных математических понятий и объектов, связанных, прежде всего, с понятием актуальной бесконечности, которое стало критерием размежевания в философии математики.

Кроме того, существует множество других тонкостей, которые нельзя не принять в расчет. Платоновский идеальный мир математических сущностей состоит не из осязаемых вещей, а из математических объектов, доступных нашему восприятию не физическим путем, а с помощью интеллекта. Если принять гипотезу об их существовании в некоем абстрактном платоновском мире, то непонятно, как мы, живущие в реальном пространстве и времени, можем что-либо знать о них. Предугадывая возможные возражения о реальности платоновского мира и иные взгляды на объективность математических концепций Пенроуз подчеркивал: “Можно, разумеется, принять и противоположную точку зрения: модели существуют исключительно в наших многочисленных разумах, и для их благополучного существования вовсе не требуется наделять платоновский мир какой бы то ни было абсолютностью или "реальностью". Однако полностью отрицая собственную реальность математических структур, мы рискуем, как мне представляется, упустить нечто важное” [328, с.34]. Всем известно, авторитетно заявляет ученый, насколько неточны, ненадежны и противоречивы в суждениях индивидуальные разумы, а от научных теорий мы ожидаем точности, достоверности и непротиворечивости, то есть того, чего не найти ни в одном, пусть самом выдающемся, из наших индивидуальных разумов. “Я не скрываю, – признается Роджер Пенроуз, – что практически целиком отдаю предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна, является внешней по отношению к любой теории и не базируется ни на каком "рукотворном" критерии; а математические объекты обладают свойством собственного существования, не зависящего ни от человеческого общества, ни от конкретного физического объекта” [326, с.104]. Такой подход к философско-методологической проблеме обоснования современной математики, в свою очередь, потребовал уточнить понятие математического платонизма с точки зрения современного развития и понимания дальнейших перспектив развития математики.

Несмотря на все попытки, философия математики, возникшая в начале прошлого века, не смогла строго очертить границы логико-онтологического обоснования математики. В связи с этим вполне естественным может стать следующий вопрос: Какого философского мировоззрения придерживаются математики? Хотя почти все математики в своих взглядах осознанно или неосознанно придерживаются той или иной степени платонизма, их представления варьируются от “крайнего платонистского реализма”, признающего математические абстракции в качестве вечных самостоятельно существующих идеальных сущностей, до признания того, что математические понятия все же не являются только конвенциями. Этот разброс взглядов дает основание предположить, что математическое мировоззрение, которого стихийно придерживаются многие математики, можно охарактеризовать как “умеренный платонизм”. Например, профессиональный математик и философ математики Е.М. Вечтомов утверждает: “Умеренный платонизм, освобожденный от крайностей и мистики и служащий реальной методологией действующих математиков, соответствует природе математики, является подходящей философией познания, способной правильно оценить, что такое математика” [85, с.119]. В отличие от математического платонизма умеренный платонизм, как “срединная позиция”, не предполагает первичности математического платонизма, а состоит в признании активности субъекта, а также определенной совокупности его знаний и представлений, имеющих собственное видение реальности. Например, даже формалистская программа Гильберта “предстает у Бернайса как умеренный, "ограниченный" платонизм” [481, с.129]. В качестве поясняющего математического примера, способствующего пониманию философской интерпретации умеренного платонизма в математике, рассмотрим различное отношение математиков к аксиоме выбора, в сущность которой вникать сейчас вовсе не обязательно.

Одни математики сочтут аксиому выбора “очевидно” истинной и таких математиков, вероятно, будет большинство. Другие, напротив, скажут, что это утверждение выглядит несколько сомнительно и поэтому оно может оказаться ложным. Третьи отнесут аксиому выбора к утверждениям, которые можно рассматривать по-разному, в зависимости от того, какую формальную систему аксиом они для себя выбирают. “Математиков, придерживающихся последней точки зрения (но признающих при этом объективность истинности простых и ясных математических утверждений…), тоже можно назвать платонистами, – считает Роджер Пенроуз, – только более мягкого толка. Те же, кто упорно отстаивает объективность истинности даже аксиомы выбора, принадлежат к лагерю платонистов ортодоксальных” [328, с.36]. Напомним, что системы, возникающие в реальном мире, являются подтверждениями реализаций общих идей, а вся современная математика дает возможность некоторого приближения к ним. Поэтому можно заключить, что “умеренный платонизм” в математике означает математический реализм, признаваемый не только в качестве математической идеализации, но и как некая “бытийность”, обусловленная априорностями и очевидностями, а также предполагает господство разумного и рационального в математике и признание его объективного характера. Такая трактовка умеренного платонизма в философии математики используется в дальнейших рассуждениях по проблеме обоснования математики, когда платонизм эксплицируется как особый тип реализма, соотносящий математические понятия с идеями из определенного рода внечувственной реальности. Математический реализм, отражающий методологические взгляды профессиональных математиков, сводится к утверждению, что в математике в качестве бесспорно истинных могут приниматься утверждения не только о конкретных математических объектах, но и утверждения об абстрактных сущностях, опирающихся на понятие актуальной бесконечности.

При таком подходе к обоснованию математики необходимо все же разделить методологическое и философское понимание математического реализма. В математике методологический реализм, в частности, означает, что в качестве непосредственно истинных математических предложений могут приниматься не только утверждения о конкретных математических объектах, но и об абстрактных сущностях, например, о множестве действительных чисел или о пространстве измеримых функций. Такое понимание математических абстракций оправдывает математический реализм в качестве приемлемой методологии обоснования математики. Даже если воспринимать альтернативные подходы к платонизму как философскую перестраховку, необходимо все же уточнить понимание математического платонизма с точки зрения профессиональных математиков. Прежде всего, необходимо зафиксировать, что, например, по мнению философа математики В.В. Целищева, платонистский взгляд в философии математики представляется вполне естественным большинству работающих математиков. Хотя, предостерегает он, “платонистское сознание работающих математиков зачастую не осознается ими как специфически философский взгляд, потому что лежащие в его основе представления абсолютно естественны и просты” [468, с.31]. Это утверждение требует уточнения, поскольку философское мировоззрение, которого придерживаются современные математики, следуя известному логику Н.Н. Непейвода, правильнее характеризовать, как “умеренный скептический платонизм”. Более обстоятельное обсуждение такой интерпретации платонизма в математике выходит за рамки этого исследования, поэтому говоря об “умеренном скептическом платонизме”, мы пользуемся кавычками. Он, вообще говоря, расходится с математическим платонизмом, предполагающим, что математика сможет ввести нас в мир абсолютных идей, поскольку в такой интерпретации именно там реально существуют математические понятия и утверждения, истинность которых объективна. “Мы считаем данное воззрение профанацией платоновского взгляда и самопереоценкой человека и его научного мышления” [304, с.XXIII]. В качестве философской аргументации такого взгляда заметим, что хотя сами структуры, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих идей, сами идеи мира Платона недоступны человеку, в силу того, что они бесконечно совершенны, в отличие от ограниченных возможностей человека.

Но, нельзя не признать, что активность и деятельность субъекта математического познания дает потенциальную возможность некоторого философско-математического приближения к миру идей. “Умеренный скептический платонизм”, как философская вера математиков, раскрывает также роль математического знания в познании мира. Гениальной мыслью древнего грека для современного математика можно называть интенцию о том, что математические высказывания описывают в действительности не реальные физические объекты, а некие идеальные сущности. Если платонизм, точнее его более умеренные интерпретации, как “рабочая вера” математиков не вызывает в целом у большинства работающих математиков никаких сомнений, то в философском отношении он дополнительно отягощен не очень позитивными аспектами, связанными с проблематичностью понятия существования в нематериальном мире и известными под названием “идеализм”. Но хотя платонизм не совместим с догматизмом, математиков интересует все же другой аспект этой проблемы: как можно прийти к идеальным высказываниям, используемым в математике? “Тут замечательно то – и это, во всяком случае, является благоприятным и говорящим в нашу пользу обстоятельством, – что для того, чтобы напасть на путь к ним, – говорил сам Давид Гильберт, – нам потребуется всего лишь естественным и последовательным образом продолжить то развитие, которое наука об основаниях математики уже получила к настоящему времени” [114, с.443]. В связи с этим, в качестве реакции на философски затруднительную версию платонизма, можно выделить два подхода к противостоянию “абстрактное – конкретное”, а именно, онтологическую и эпистемологическую версию. Традиционно платонизм считается спорным онтологически как концепция существования объектов, обитающих в сфере идеального, независимо от нашего разума, поэтому не понятно каким образом, например, числа и другие абстрактные объекты могут каузально взаимодействовать с нами. Эпистемологическое возражение против математического платонизма сосредоточено на невозможности доступа к таким объектам или взаимодействия с ними, поэтому в эпистемологическом отношении платонизм оставляет неясность в том смысле, что интуитивный акт, способствующий открытию математической реальности, с точки зрения методологии есть нечто непередаваемое.

Канадский философ науки Дж. Р. Браун отвергает оба эти аргумента по одной и той же причине: “Они предполагают, что "вызывать события" или "взаимодействовать с" должны пониматься в терминах действующей причинности” [63, с.26]. Хотя не известно, как разум способен “схватывать” или “постигать” математические объекты и истины, он считает, что ответ на это можно дать в терминах формальной причинности, которую используют, но не признают за таковую. В действительности в объяснении законов природы постулируются свойства и универсалии, понимаемые как реальные абстрактные сущности, но это явно не действующая причинность. Поэтому можно заключить, что умеренный платонизм, провозглашающий самостоятельное существование математических структур, по-философски не может быть опровергнут, однако это не устраняет трудности, возникающие при построении новой концепции обоснования современной математики. Аргументируя тезис о том, что подходящим местом для формы существования применительно к математической модели является платоновский мир математических форм, Роджер Пенроуз определенно заявляет, что “в математике неизмеримо больше здравого смысла, нежели можно обнаружить в любом отдельно взятом разуме. Не является ли это прямым указанием на то, что математика существует вне нас, что она обладает собственной реальностью, недоступной ни одному отдельному индивидууму?” [328, с.34]. Можно предположить, что платоническая концепция объективного существования математики для Пенроуза – это строго продуманная и хорошо осмысленная философская мысль.

С точки зрения проблемы обоснования математики важно зафиксировать, что произведенное Платоном разделение между рациональным и эмпирическим знанием не влечет за собой полного разделения для всей области научного познания. На уровне такого понимания происходит “контакт” с платоновской идеальной математической реальностью, существующей независимо от человека и вне времени. Напомним, что платонистские взгляды возродились в школе логицизма, представители которой допускали существование математических объектов, существующих в мире идей, независимых от познающего субъекта. Следует также отметить, что в конце XX века произошло возрождение пифагорейской проблематики в философии математики, продиктованное практическими нуждами, а также возрождение платонистских взглядов на мир, построенный на математической основе. “Одной из причин того, что математика стала в Древней Греции теоретической наукой, опирающейся на доказательство, был ее тесный союз с философией. Этот союз определил характер не только древнегреческой математики, но и философии, особенно таких ее направлений как пифагорейство, платонизм, а позднее – неоплатонизм” [103, с.18]. Специфичность эллинской математики состояла в том, что это был начальный период формирования математической теории и становления математики как науки, подлинный прогресс которой был связан с пифагорейской школой, сосредоточившейся на математизации наших знаний.

Говоря о связи платонизма и логицизма, сошлемся на мнение философа математики В.Я. Перминова: “Исследование логических оснований математики XX в. привело к возвращению к платоновскому реализму, к идее существования абстрактных математических объектов в некотором идеальном мире” [339, с.27]. Учитывая многоликость реализма в философии науки, например, различают онтологический и эпистемологический, наивный и научный реализм и другие его виды, то строго говоря, нельзя отождествлять платонизм с реализмом, поскольку реализм предполагает неязыковый или нементальный характер и вещественную природу объектов. Поэтому вопрос о реальности в смысле Платона постепенно утратил свою актуальность, но направления обоснования математики, возникшие в начале XX века, заставили все же провести внутреннее деление между математическими теориями, зависящее от различных онтологических представлений о том, какого рода существованием обладают математические объекты. Например, “логицисты и платонисты (такие как Фреге и Рассел) считали, что математические объекты действительно существуют сами по себе и что антиномии зависят просто от того, как мы о них говорим, так что нам надо только найти подходящее уточнение нашего языка” [1, с.42]. Следовательно, можно говорить о связи логицистского и платонистского направлений в обосновании математики. В качестве дополнительной философской аргументации можно еще раз привести более радикальную точку зрения на связь логицизма и платонизма, которая высказана философом математики В.А. Шапошниковым: “Логицизм есть "крайний" или абсолютный платонизм” [481, с.129]. Математики считают возможным рассматривать бесконечные множества как реальные объекты, то есть как завершенное единое целое, существующее не только в абстракции, несмотря на то, что дальнейшее развитие абстрактных математических теорий, целиком зависит от формальных соображений как вполне надежного аргумента. Очевидно, что знание, построенное вне логики, не является научным знанием, поскольку не является осмысленным и поэтому не может быть основой практической ориентации процесса познания.

Кроме того, поскольку математика имеет онтологическую основу, то можно предположить, что ее исходные положения являются априорными, что означает их интерсубъективность, как проявление в качестве необходимой формы математического мышления, которая укоренена в структуре математической реальности. Априоризм предполагает существование независимого от внешнего опыта источника знания, воплощенного в классической, неклассической и постнеклассической математике, в котором проявляется конструктивная деятельность мышления математиков. “Основной недостаток традиционного априоризма состоит в том, что он упускает из виду реальное основание априорного, не видит других путей обоснования абсолютности априорных структур мышления, кроме как через постулирование их абсолютной первичности перед опытом” [338, с.32]. Хотя все оценочные высказывания в области философии, а также философии математики, по необходимости субъективны, столь же критически относятся современные ученые и к философским воззрениям Иммануила Канта по проблеме априорного. Эта проблема побудила Канта исследовать вопрос о существовании критерия, который позволил бы исследователям из возможных рассудочных понятий выделить те, которые не приведут к появлению математически противоречивых объектов. По Канту, роль такого критерия может исполнять не логика, а чистое созерцание, то есть априорная интуиция. Он был уверен, что для математики этот критерий достаточен, как и критерий опыта для разума в эмпирическом познании.

Именно философское и математическое познание вместе взятые занимают, по Канту, две области всего априорного познания. Большую часть философско-математического учения Канта, на существовавшем в то время уровне развития науки, нельзя было ни подтвердить, ни опровергнуть. Граница между тем, чем мы обладаем априори, и тем, для чего необходим опыт, проводится в современном математическом познании иначе, чем у Канта. Для многих философов синтетические априорные суждения Канта, которые опираются на некоторое внешнее представление, не раскрываемое анализом понятий, продолжают служить доводом в пользу платонизма. Однако Гильберт считал, что Кант сильно переоценил роль и масштабы априорного знания. Уже в XIX веке многое из того, что считалось во времена Канта априорно истинным в математике, например, существование только единственной евклидовой геометрии, было признано ошибочным. Недостаток традиционного философского априоризма состоит также в том, что априорное знание вводится без теоретического обоснования, а, как иногда делают в математике для лучшего понимания, исключительно на основе примеров. Наиболее часто цитируемые в философской литературе математические практики – арифметика и геометрия – онтологически находятся между идеальным (априорным) миром идей и эмпирическим (апостеорным) миром вещей. Например, априорность арифметики вовсе не означает, что понятие числа имеет свои истоки исключительно в разуме, поскольку она задает и некоторого рода предметную онтологию, необходимую для структуризации объектов исследования.

Интересную трактовку априорности математики, основанную на понятии практики, предлагает В.Я. Перминов. Его праксеологическая концепция математического априоризма исходит из понимания математических очевидностей как универсальных структур мышления, проистекающих из необходимой деятельностной, или практической, ориентации мышления. “Праксеологический априоризм, таким образом, отличается от традиционного тем, – заключает Перминов, – что он является одновременно и реализмом. Связывая исходные математические идеализации с универсальной онтологией, праксеологический априоризм оправдывает традиционную веру математиков в реальную значимость математических объектов и теорий” [335, с.113]. Это по существу уже другой философский взгляд на платонистское направление в обосновании математики. Причина так называемого “идеализма” в математике в форме априоризма и платонизма состоит в том, что материалистическая трактовка математических понятий, выводящая их из опыта, не всегда способна объяснить наблюдаемые особенности этих понятий. Но, как предупреждал Давид Гильберт, “занимая позицию априоризма, необходимо соблюдать крайнюю осторожность; ведь многое из того, что когда-то считалось априорно истинным, ныне признано просто ошибочным. Наиболее ярким тому примером является представление об абсолютном настоящем” [113, с.462]. Строго говоря, “абсолютно настоящего” не существует, хотя мы привыкли принимать представление о нем, в силу того, что в нашей повседневной жизни речь всегда, как правило, идет лишь о небольших расстояниях и только Альберт Эйнштейн освободил будущих исследователей от предрассудка абсолютного времени. Поэтому можно заключить, что праксеологический априоризм и умеренный платонизм в современной философии математики представляют собой философскую попытку объяснить некоторые особенности математических понятий, которые не поддаются адекватному объяснению при их эмпирической трактовке.

Возрастание уровня теоретической строгости в математике стало историческим стимулом для профессиональных математиков в выявлении неявных предпосылок в математике, что в свою очередь способствовало не только уточнению “обосновательного слоя” конкретных математических теорий, то есть совокупности всех явных и обоснованных предпосылок, но и обоснованию представлений о единстве современного математического знания. Заметим, что неявные предпосылки и явные, но не обоснованные предпосылки, то есть имеющие интуитивный характер, по определению не входят в обосновательный слой математических теорий. Можно привести, например, еще такую аналогию, когда для понимания сути физических процессов в определенную “картину мира” включаются неявно сформулированные онтологические допущения о принципах устройства мира. Еще в “Началах” Евклида возникло стремление исключить все неявные компоненты математического рассуждения. “И хотя эта претензия на полную экспликацию и на точное обоснование всех мыслительных ходов оказалась несостоятельной, математики никогда не оставляли попыток довести дело до конца, прояснить и выразить в адекватных формальных конструкциях любое движение мысли” [126, с.118]. Во второй половине XX столетия, с учетом периодической переоценки уровня строгости и надежности математического знания, стала особенно заметной роль неявного знания в проблеме обоснования математики, поскольку неявные элементы, связанные с интуитивными механизмами мышления, неизбежно вторгаются в новые математические теории вследствие специфики их становления и развития.

С учетом вышесказанного, философ математики Л.Б. Султанова делает следующий важный для данного исследования вывод: “В основе такого представления о познании лежит платоновская идея о том, что знание – это припоминание того, что уже содержится в мышлении, но неосознанно, неявно. Очевидно, что с платоновской философией концепция неявного знания вполне согласуется” [436, с.107]. Это еще один аргумент в пользу платонистской компоненты в направлениях обоснования современной математики. К сказанному можно добавить, что неявное знание оказывается включенным в математику еще и благодаря существующему в ней априорному знанию, которое является частью содержания таких неопределяемых математических понятий, как множество, дискретность, непрерывность и многих других. Есть еще и такой взгляд на проблему обоснования, согласно которому платонизмом индуцируется взгляд на математику как на естественную науку, следовательно и математическое творчество, с этой точки зрения, – это поиск объективно предзаданного результата. Поэтому, в таком контексте, суть платонистской составляющей среди направлений обоснования современной математики состоит в том, что именно в математической объективности и истинности заключается главный смысл концепции математического платонизма. Платонистское существование математических понятий можно отождествлять с понятием абсолютной математической истинности. Гёделевские результаты демонстрируют, что математическая истина выходит за пределы любого формализма и не может быть ограничена только одной философской системой обоснования.

Суждения об истинности математических предложений не опираются на некоторую определенную формальную систему. Так, философ математики Пенелопа Мэдди на основе определенной аналогии между математическими и физическими теориями формирует концепцию “теоретико-множественного реализма” или своеобразного платонизма: “Центральной для этой концепции является убеждение, что математические утверждения либо истинны, либо ложны, что их истинностные значения зависят от свойств независимо существующих математических объектов (а не от структуры человеческого интеллекта, особенностей языка и прочего) и не зависят от нашей способности (или неспособности) определять, каковы именно эти истинностные значения” [526, с.495]. Рассуждениям формалистов о математической истине можно противопоставить философский принцип рефлексии, позволяющий сделать выход за рамки формальной системы и получить новые математические выражения, не выводимые из исходной системы аксиом и правил вывода. В духе концепции математического платонизма истинной считалась теория, которая соответствовала чему-то определенному, существующему вне нас. Однако со временем акценты определения истинности изменились, поскольку сам собой возник довольно коварный философский вопрос: А что значит “соответствует”? Роджер Пенроуз указывает также на следующую важную философскую проблему: “В рамках платонизма можно поставить вопрос о том, существуют ли в реальности объекты математической мысли или это только лишь понятие "математической истины", которое является абсолютным” [326, с.101]. Несмотря на отдельные “теологические претензии”, платонизм выжил благодаря мировоззренческим взглядам самих математиков. Не случайно математиков и теоретиков, и практиков иногда называют “стихийными платонистами”, поскольку они уверены в истинности математического знания, что принципиально важно для дальнейшего анализа проблемы обоснования математики. Ведь, согласно Платону, именно с математики начинался путь бесконечного постижения истины.

Вполне естественно предположить, что существует огромное число математических истин, некоторые из которых уже открыты, а большая их часть остается пока еще неоткрытой. Работа профессиональных математиков как раз и заключается в том, чтобы расширять область открытых истин. Пытаясь облечь свои аргументы в пользу действительного существования платоновского мира, для большей убедительности Пенроуз представляет их в несколько иной форме, а именно в терминах математических истин. “Когда я говорю о "существовании" платоновского мира, я имею в виду всего-навсего объективность математической истины. Существование платоновского мира, как я себе представляю, равносильно существованию некоего объективного внешнего стандарта, который не зависит ни от наших индивидуальных мнений, ни от особенностей нашей культуры” [328, с.35]. Таким “существованием” могут обладать и другие абстракции, даже далекие от математики, но проблема математической объективности с точки зрения анализа проблемы обоснования математики представляется менее запутанной. Поэтому платонистское направление в обосновании математики имеет достаточно философски аргументированное право на независимое существование. Устойчивость платонистской составляющей, как и любого другого феномена, имеет свою скрытую основу, состоящую в том, что основу платонистского восприятия математических объектов составляет их идеальная природа. Историю математики можно рассматривать и как историю преодоления различных психологических трудностей. “Те, кто отвергает платонизм, обычно сосредоточены на самой критике и не утруждают себя объяснением "рабочего платонизма", которое представляется лишь стереотипным заблуждением философски наивных математиков” [383, с.39]. Под “рабочим платонизмом” здесь понимается философия работающего математика. Напомним, что все программы обоснования математики, так или иначе, восходят к древнегреческой математике, а также к теории множеств Кантора как некоему первоисточнику, хотя и в разной степени критикуют его подход. Исходной философской позицией концепции Кантора, даже с учетом необходимых уточнений, был платонизм. Возможно, что он был последним крупным представителем платонического мышления в математике.

Заметим, что неклассическая математика существенно отличается от классической математики тем, что она не является полной в том смысле, что современному философско-математическому анализу поддаются лишь отдельные фрагменты процессов и явлений, исследуемые теорией, но не теория в целом со всей совокупностью ее основных принципов. Поэтому трудности обоснования, в конечном счете, восходят к общему источнику – идее бесконечности. Философские дискуссии по поводу канторовских бесконечных множеств, аксиомы выбора, континуум-гипотезы и других аналогичных базовых понятий современной математики связывались со спецификой абстрактной математики. По существу, все это сводились к следующему основному вопросу: в каком смысле можно утверждать, что абстрактные математические понятия существуют? Например, Георг Кантор, как последователь Платона, полагал, что математические идеи существуют в некоем объективном “мире идей”, не зависящем от человека. В частности, это означает, что и математический платонизм тоже может быть полезен для обоснования и объяснения специфики математических истин. Отметим также интересную тенденцию, на которую обратил внимание философ математики В.Н. Тростников, “если раньше высказывания платонистского толка делались главным образом математиками, а естествоиспытатели в лучшем случае соглашались с ними, то теперь инициатива перешла к тем, кто пользуется математикой” [447, с.90]. Для объяснения этого есть свои философско-математические аргументы. Хотя математики и исследуемые ими абстрактные объекты обитают в разных мирах, можно зафиксировать, что факт познания математических объектов налицо, поскольку мы имеем строго выверенные математические теории, которые эффективно применяются в естественных науках. Вот этот методологический аргумент востребованности и необходимости математики в познании играет важнейшую роль в защите умеренного платонизма в обосновании современной математики.

В математике XX века появились результаты, например, теорема Геделя о неполноте, которые дают основание для пересмотра прежних взглядов на рационализм, однако подавляющее большинство современных исследователей придерживается традиционных взглядов на рационализм, согласно которым разума человека достаточно для познания мира. Поэтому современная методология математики стремится не только добиться большей ясности в понимании этих трудностей, но и пытается разобраться в вопросе о том, в чем же заключаются истинные истоки той необъяснимой мощи, которую несет в себе идея рационализма. Интерес Курта Гёделя к этой тематике следует иметь в виду при оценке того, что называют его “платонизмом”. Двойственность его подхода состоит в следующем: с одной стороны, он не сомневался, что возможна часть математики, изучающая ее собственные конструкции, а с другой стороны, он не считал эту часть наиболее полезной для самой математики и уж тем более не отождествлял ее с математикой в целом. Гёделя называют иногда “крайним платонистом” в связи с его высказыванием о том, что “математические сущности” доступны интуиции математика точно так же, как физические объекты доступны чувственному восприятию. “Мне кажется, – писал Гёдель, – что предположения о таких объектах столь же допустимы, как и предположения о физических телах, и имеется столь же много причин верить в их существование” [110, с.217]. Такая способность внечувственного восприятия столь же необходима для получения удовлетворительного обоснования математики, как и чувственные восприятия физических тел в естественнонаучном знании.

Необходимость платонистской составляющей в направлениях обоснования математики состоит еще и в том, что трудно создать исключительно рациональный образ целостного единства концепции обоснования. Кроме мира платоновских идей, концептуализированных в математическом смысле, в идеях

Платона есть и другая сторона, характеризующаяся наличием элементов невычислимости, которую нельзя игнорировать в проблеме обоснования математики. Абсолютные платоновские идеи ассоциировались не только с истиной, другой их характеристикой выступала красота. Новая концепция обоснования математики включает в объект своего исследования также творческий, действующий субъект, поэтому выделение в качестве философских импликаций любых контактов с платоновскими идеями, которые доступны человеческому разуму, представляется в таком познавательном контексте чрезвычайно важным. Некоторым исследователям, далеким от математики, трудно представить себе существование этого мира, если они предпочитают считать математические понятия лишь идеализированными формами объектов физического мира. Конечно, в этом случае мир математических понятий можно рассматривать всего лишь как порождение нашего физического мира. Так, специалист по философии науки Нэнси Картрайт, рассуждая о реализме, заключает: “Я постоянно пропагандирую плюралистический взгляд на все науки, предлагая рассматривать науку в целом как ряд примерно равных по значению отдельных дисциплин, каждая из которых имеет собственное обоснование и занимается изучением различных классов взаимодействий, относящихся к исследуемой ею области и специфически характерных именно для этой области” [329, с.163]. Такой подход хорошо согласуется с естественной точкой зрения, состоящей в том, что наука представляет собой созданную интеллектуальными усилиями человеческого разума конструкцию, поэтому плюрализм мнений относительно обоснованности математических теорий не следует связывать с антиреалистическими взглядами, поскольку предметом спора выступает только степень или уровень обоснованности математических теорий.

Добавим к этому, что, если, например, воспринимать теорию бесконечных множеств как философско-математическое учение о бытии, то тогда в контексте философского понимания мира идей и математических истин онтологическая и эстетическая функции математической теории могут восприниматься как объединяющие коннотации платонистских представлений, которые содержат в себе и такое важное понятие, как красота. Отметим также, что сами эстетические суждения в качестве трудноуловимых платонистских сущностей тоже имеют двойственную функцию: во-первых, в качестве посредников между пониманием и разумом и, во-вторых, в качестве уравновешивающей внутренней силы между строго формальными и конструктивно-интуиционистскими математическими суждениями. Такие дополнительные описания могут способствовать целостному представлению математических феноменов. Уникальность и универсальность такого рода математических идей по своей природе существенно отличается от того, с чем обычно приходится сталкиваться в области искусства и техники. Как подчеркивает математик и физик из Кембриджского университета Джон Барроу: “Большинство физиков и математиков ведут себя так, словно философия платонизма является непреложным фактом, даже если не верят в это; иначе говоря, как первооткрыватели в неизведанном мире математики” [37, с.321]. Альтернативная точка зрения предлагается в рамках дефляционистской философии математики. Ее суть можно описать следующим образом: “Согласно этой антиреалистической философской теории, мы не можем знать о реальности математических сущностей, которые Платон принимал за данность, и у нас даже нет оснований верить в их существование. Но в отличие от приверженцев других антиреалистических подходов, дефляционисты не пренебрегают успешным применением математики в описании физического мира” [37, с.321]. При этом они пытаются объяснить эффективность математики, не прибегая к предположениям истинности математических утверждений или предположениям о действительном существовании абсолютных математических сущностей, а считая, что успешное применение математики зависит только от одного качества, а именно, “строгой” непротиворечивости.

Но проблемы методологии математики, безусловно содержащие в себе некоторые существенные философские аспекты, не могут быть решены исключительно в рамках абстрактной философии, поскольку методология математики остается прерогативой самих ученых-математиков. Математики придают большое значение не только точной экспликации правил математического рассуждения, но и способны профессионально прояснить для философов математики конечные следствия принимаемых ими установок и критериев познания. Поскольку процедура конструирования абстрактных понятий способна порождать сомнительные математические конструкции, то мы, в контексте исследования обоснования математики, говорим об умеренном платонизме. Поэтому при решении методологических вопросов математики опасно давать волю собственно платонистским привычкам. “Никто, однако, не будет отрицать, – утверждает математик и философ А.Н. Паршин, – что платонизм поставил, в рамках человеческого познания, вопрос о существовании умопостигаемого сверхчувственного мира и о его связи с миром чувственным” [325, с.57]. Помимо того, анализ платонизма, как учения о мире идей, по его мнению, особенно важен для понимания взаимодействия науки и религии. Следует также отметить совершенно новую тенденцию в теории познания, состоящую в следующем наблюдении. Например, В.Г. Пушкин акцентирует внимание на том, что “диадическое отношение между субъектом и объектом, познающим и познаваемым уступает место триадическому отношению между субъектом или тем, кто знает, объектом, как он явлен, и объектом, как он есть” [364, с.125]. Кроме того, в философии установлено, что субъект-объектные отношения можно анализировать, используя не двучленную “субъект – объект”, а трехчленную триадическую модель, включающую человеческую деятельность. Что, безусловно, в контексте понимания гносеологии математики, должно способствовать оправданию перехода от явления математического объекта к тому, что за ним реально стоит.

Уже в XIX веке математическая практика, вопреки упомянутому кантовскому критерию оценки математической достоверности, создала такие примеры и теории, которые не поддавались интуитивному контролю. Именно это обстоятельство служило иллюстрацией различных математических оплошностей и недоразумений. В их основе лежит то, что некоторые предположения теорем, “находясь в тени”, кажутся несущественными, поэтому выводы представляются вполне справедливыми и без них. В таких ситуациях возникает потребность в контрпримерах, которые реабилитируют малопонятные на неискушенный взгляд математические предосторожности. Они придают новую философско-методологическую окраску на первый взгляд простым доказательствам и способствуют правильному пониманию направления движения математики. Как ни странно, но в современной математике осознание ошибок прошлого дает больше для понимания, чем повторение стандартных истин. Проиллюстрируем сказанное на примере эволюции и истории становления современного математического понятия линии. Несмотря на то, что большинству из нас интуитивно ясно, что следует называть линией или кривой, достаточно общее, строгое и полное определение этого понятия стало возможным только благодаря современной топологической терминологии. История понятия кривой насчитывает более двух тысяч лет. Евклид в своих “Началах” определял линию как “длину без ширины” или “как границу поверхности”. С точки зрения современных канонов математики, это определение нельзя считать ни строгим, ни корректным, поскольку понятие линии определяется через другие неопределенные понятия, как длина, ширина и граница.

Распространено мнение, что первичные математические понятия являются совершенно очевидными, а менее очевидные высказывания доказуемы с помощью логических рассуждений. Но в действительности дело обстоит не так просто. Если математические истины убедительны, когда они выведены из постулатов с помощью строгой логики, то в чем гарантия истинности самих исходных постулатов? Как говорили древние римляне, “кто засвидетельствует, что свидетели не лгут?”. По мере развития теоретической части анализа и появления “патологических” кривых все больше назревала необходимость выработать строгое общее определение кривой, поскольку опровергающие примеры не решали проблемы по существу. Вопреки всяким ожиданиям, эта задача оказалась нелегкой. В конце XIX века французский математик Камиль Жордан предложил общее параметрическое определение плоской линии. В 1890 году итальянский математик Джузеппе Пеано доказал, что геометрические фигуры, вычерчиваемые движущейся точкой, то есть кривые, могут включать в себя целые участки плоскости. Такое движение не постигается интуицией, его можно понять только с помощью логического анализа. Поэтому математические интуиции, как совокупность разнообразных взаимодействующих установок, не постоянны, они пополняются, развиваются и обогащаются новыми идеями вместе с абстрактными разделами, устраняющими из теории все несущественное. Более того, хотя интуиция и стоит за естественным различием между природой изучаемого объекта и духом, она не может возникнуть в продвинутых абстрактных разделах математики без глубокого знания изучаемых объектов.

Для полноценной экспликации понятия линии, чтобы не пропустить что-то без ущерба для философско-математического мировоззрения, надо вспомнить кривую Пеано, под которой понимают любое непрерывное отображение отрезка [0,1] на квадрат [0,1]×[0,1]. Априори трудно оценить, возможно ли вообще такое? Интуиция говорит, что скорее, нет, поскольку взаимообратное преобразование не может устанавливать соответствие множеств разной размерности. Но первая такая кривая, то есть непрерывный образ (x(t), y(t)), t $\in$ [0,1], отрезка, заполняющий весь квадрат, была построена Дж. Пеано в 1890 году. Идея построения этой кривой, как любят иногда говорить математики, тривиальна. На первом шаге квадрат разбивается на четыре квадрата, нумеруемых по часовой стрелке, а [0,1] – на четыре четверти [0, 1/4], …, [3/4, 1], и отображение p_1: [0,1] → [0,1]×[0,1] выбирается так, чтобы траектория для t из i-й четверти находилась в i-м квадрате. На втором шаге эта процедура повторяется по отношению к “подквадратам” и “подчетвертям” предыдущего этапа построения и так далее. В результате этих итераций строится последовательность функций $\{p_n(\mathrm{t})\}$, в которой, вообще говоря, неважно как себя ведет p_n(t), лишь бы соблюдался установленный “регламент” попадания ее траектории в “правильный” квадрат. Эта последовательность фундаментальна и поэтому сходится к функции p^*(t), которая, в силу поточечной сходимости функций $p_n(\mathrm{t}) \to p^*(\mathrm{t})$, проходит через все точки квадрата [0,1]×[0,1]. Когда Жордан определял линию как “след от непрерывного движения точки”, он не предполагал такой неожиданной ситуации, когда следом может оказаться сплошной квадрат.

После того, как Пеано доказал существование линии Жордана, которая полностью заполняет квадрат, что никак не согласуется с нашим интуитивным представлением о линии, другой подход к определению понятия линии в терминах разрабатываемой им теории множеств выбрал немецкий математик

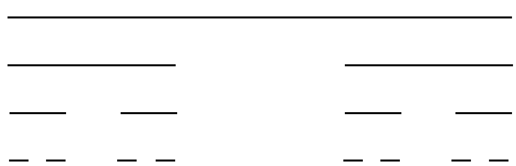
Георг Кантор. Он определил плоскую линию как “континуум, не имеющий внутренних точек”. Кривая Пеано, с точки зрения определения Кантора, линией не является, поскольку ее графиком является квадрат, представляющий собой континуум, но любая точка этого квадрата, которая не лежит на его стороне, является внутренней для него. С точки зрения философских проблем современной математики, термин “кривая”, вообще говоря, никогда не сможет полностью перейти из сферы интуитивного понимания в абстрактную сферу логического понимания. Это, как утверждает философ математики В.Н. Тростников, не произойдет потому, что “математика и логика не ставят целью подавление нашей интуиции” [448, с.36]. В нашем обыденном понимании существуют две “кривые” – общеязыковая и математическая – как дополнительные понятия, которые выполняют разные методические функции. Разобранную ситуацию с эволюцией понятия линии можно рассматривать как проявление характерной для всей математики дихотомии ценности математических результатов: “строгое – интуитивное”, “простое – сложное”, “полное – неполное”, “конкретное – абстрактное”, наконец, “практичное – непрактичное”. Заметим, что определение Кантора непригодно для пространственных кривых. С интуитивной точки зрения, линия должна быть одномерным образованием, возможно, что, пытаясь выразить эту идею, Евклид определял ее как “длину без ширины”. Задача определения линии для пространственных кривых как “одномерного континуума” была окончательно решена в 20-х годах XX века талантливым русским математиком П.С. Урысоном в рамках созданной им теории размерности. В это определение входит непростое математическое понятие размерности компакта, которое можно охарактеризовать, пользуясь только его топологией или метрикой соответствующего метрического пространства.

Рассмотрим теперь пример канторова множества из неклассической математики. В классической математике понятие размерности употребляется, в силу его определения, сугубо дискретно, например, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и так далее. В современной математике существуют математические объекты, реально используемые в математической практике, для вычисления размерности которых классического определения явно недостаточно. Для решения такого рода современных проблем неклассической математики используется понятие дробной, или фрактальной, размерности, которое появилось в 1919 году в работе немецкого математика Феликса Хаусдорфа. Методологическая сущность понятия фрактальной размерности состоит в том, что она позволяет различать философско-математические категории “гладкий” и “хаотичный”, точнее гладкие и негладкие фигуры. Как утверждает американский ученый Бенуа Мандельброт, удачно эксплицировавший эвристический потенциал понятия хаусдорфовой размерности: “Для подавляющего большинства действующих математиков оно было каким угодно, но уж никак не интуитивным, а фактически весьма туманным, хотя одновременно и классическим для нескольких работавших с ним ученых” [257, с.139]. Если бы Мандельброту не удалось бы развить формальный подход и сопоставить его с интуитивным восприятием этого весьма общего понятия, то, может быть, и не было нового математического направления постнеклассической науки. В современной математике существует несколько определений размерности, соответствующих совершенно разным понятиям. Можно тезисно репрезентировать важнейшие из них. Заметим, что аналитические характеристики математических объектов выражаются через алгебраические, топологические и порядковые структуры математики.

Первое классическое определение связано с минимальным числом координат, необходимым для однозначного определения точки. Естественно, что в таком определении размерность всегда является целым числом. В другом, топологическом определении размерность любого множества полагается на единицу большей, чем размерность разреза, делящего его на две несвязные части. При таком подходе считается, что множество, состоящее из конечного или счетного числа точек, нульмерно, а объемное геометрическое тело трехмерно. Такая размерность также может быть только целой. Перейдем теперь к третьему, самому интересному для нас определению дробной размерности, точнее, к определению целого класса близких по смыслу понятий размерности. Строго математическое определение нужной нам размерности дается с помощью технически сложного понятия меры Хаусдорфа, но его суть можно прояснить следующим образом. Пусть отрезок длины A покрывается отрезками длины ε, или квадрат площадью A покрывается квадратами со стороной длины ε, или куб объемом A покрывается кубами со стороной длины ε. Тогда, соответственно, для отрезка $A = N(\varepsilon)\varepsilon$, для квадрата $A = N(\varepsilon)\varepsilon^2$ и для куба $A = N(\varepsilon)\varepsilon^3$, где $N(\varepsilon)$ – обозначает минимальное число отрезков, соответственно, квадратов или кубов, необходимых для покрытия множества A. В приведенных примерах показатель степени у ε в каждом случае совпадает с классической размерностью рассмотренных математических объектов, поэтому можно записать, что $A = N(\varepsilon)\varepsilon^d$, где d – размерность, и, следовательно, при $\varepsilon \to \infty$ имеем, что $N(\varepsilon)$ растет пропорционально ε^{-d}. Прологарифмировав последнее равенство для A получим, что $d = (ln\, A - ln\, N(\varepsilon)) \,/\, ln\ \varepsilon$. Поэтому хаусдорфова размерность произвольного объекта в n-мерном пространстве определяется по формуле:

$$d = -\ lim\ (ln\ N(\varepsilon)) \,/\, ln\ \varepsilon \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0.$$

Посчитаем хаусдорфову размерность канторова множества, которое было построено Кантором, при попытке найти промежуточное по мощности множество между рядом натуральных чисел $\mathbb{N}$ и континуумом вида [0, 1]. Это множество можно рассматривать как теоретический конструкт образцовых патологий, так как бесконечность, втиснутая в ограниченный отрезок [0, 1], просто “искрит аномалиями”. Канторово множество получается последовательным выбрасыванием третей из сегмента [0, 1], то есть, единичный отрезок прямой делится на три равные части и средняя часть выбрасывается. С каждой из двух оставшихся частей совершается такая же операция.



Продолжая этот процесс, получим, что на n-м шаге имеем $N(\varepsilon) = 2^n$ кусков отрезка длины $\varepsilon = 3^{-n}$. Таким образом, их суммарная длина будет равна $A_n = (2/3)^n$, а при $n \to \infty$ получаем, что $A_n \to 0$. Нетрудно понять, что в пределе от отрезка [0, 1] почти ничего не остается, а то, что остается, называется “канторовым множеством”. Действительно, так как длина выброшенных третей равна $1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots + (2^{n-1}) / (3^n) + \ldots = 1$, то, по существу, “вся длина” отрезка [0, 1] выбрасывается, то есть мера Лебега оставшегося множества равна нулю. Однако феноменальность этой процедуры состоит в том, что оставшееся после выбрасывания третей “тощее множество”, которое было названо канторовым, оказалось равномощным континууму [0, 1]. Для Георга Кантора это был настоящий шок! Такого рода “тонкие”, или тощие, множества образуют то, что теперь называют “фрактальной пылью”. Даже с точки зрения здравого смысла, эта пыль не может быть границей какого бы то ни было множества независимо от его типа. Но пример канторова множества мы рассматривали ради того, чтобы посчитать его хаусдорфову размерность, которая равна $d = ln\,2 / ln\,3 = log_3 2 = 0{,}631\ldots < 1$, так что размерность канторова множества больше, чем у точки, но меньше, чем у линии. Интуитивные фантазии о размерности формируются с помощью пространственных наблюдений, которые способствуют расширению стандартных представлений за пределы чувственного опыта. Следует признать, что некоторый математический дискомфорт, в связи с ощущением парадоксальности рассмотренного примера дробной размерности, дает использование уже занятого имени, а именно, размерности. Но такое заимствование методологически оправдано тем, что для математически “добропорядочных множеств” размерность Хаусдорфа равна обычной размерности. Заметим также, что Кантор является не только одним из основателей современной теории множеств, но он также построил один из старейших фракталов, а именно, рассмотренное выше канторово множество –

это простейший пример фрактального множества, то есть фрактала Кантора, который с определенными на то основаниями можно отнести к объектам постнеклассической математики.

Отметим, что термин “фрактал” был впервые введен Бенуа Мандельбротом в 1975 году в связи с его пионерскими работами в области фрактальной геометрии, положившими начало систематическому изучению фракталов и их приложений. Но многие математические идеи оформились задолго до этого, еще в конце XIX века, в выдающихся открытиях Георга Кантора, Карла Вейерштрасса, Джузеппе Пеано и других математиков. Кроме того, канторово однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости подорвало уверенность в том, что плоскость богаче точками, нежели прямая, и что еще важнее, показало, что размерность можно изменять однозначным преобразованием. А непрерывное отображение интервала на всю площадь квадрата опровергло убеждение в том, что размерность можно определить как наименьшее число непрерывных вещественных параметров, требуемых для описания пространства. Объекты, которые в современной математике называются фракталами, вначале появились в воображении математиков начала прошлого столетия как идеальные платонистские сущности. Причем без всякой надежды на то, что в окружающей нас природе встретится что-нибудь похожее на эти необычные геометрическе фигуры. Однако впоследствии была выявлена позитивная роль фрактальных множеств, рассматриваемых ранее в философии и теории познания в качестве бесполезных парадоксов. Эта роль, по мнению Мандельброта, состоит в том, что, например, “канторову пыль можно рассматривать в этой связи как своего рода миротворца, сглаживающего напряженность древнего парадокса: она является бесконечно делимой, но не непрерывной” [258, с.562]. В связи с этим уместно заметить, что бесполезных парадоксов в философии математики, вообще говоря, не бывает.

Философия математики пытается разрешить фундаментальные проблемы, связанные с эпистемологическим статусом математических утверждений и онтологическим статусом, соответствующих им, математических объектов, пусть даже и экзотических, таких как, например, канторово множество. Как правило, при решении эпистемологических вопросов приходится также рассматривать важнейший онтологический вопрос о существовании математических объектов и природе математических сущностей. На проблему существования различного рода экзотических объектов обращал внимание академик Н.Н. Лузин, рассматривавший математическое знание с философской точки зрения: “Понятие существования математического объекта в абсолютном смысле кажется при современном состоянии науки слишком неясным, чтобы приписать ему смысл. Все, что можно сделать, это просто говорить о существовании, установленном тем или другим методом, т.е. об относительном существовании” [241, с.54]. По этой причине математики, говоря о существовании математических объектов в контексте интуиционистской программы, указывают метод, по которому может быть установлено рассматриваемое существование, а в контексте формалистской программы предпочитают принять это существование как постулат в виде аксиом и извлечь из него все полезные следствия. Необычные и даже загадочные эффекты могут быть вполне адекватно описаны математически. Конкретнее эту мысль можно пояснить на примере так называемого “невозможного треугольника”, то есть такой геометрической фигуры, для которой можно дать ее полное математическое описание, исходя из определенных “правил склейки” его трех деталей – угловых брусков. Глядя на его “изображение”, нельзя указать место, определяющее “невозможность” существования такого объекта. Даже нельзя указать место локализации того, что собственно эксплицирует такую невозможность.

Необычность теоретической конструкции невозможного треугольника основана на том, что если закрыть небольшой участок изображения, например, любой из его углов, то эта фигура становится вполне реальной в физическом смысле. “Невероятность или невозможность в этом случае, – подчеркивает Р. Пенроуз, – свойство всей структуры, рассматриваемой в качестве единого целого” [329, с.136]. Математическим понятием, наиболее подходящим для описания рассмотренного объекта, является “когомология”, которая, по его мнению, позволяет даже вычислить “степень невозможности” этой фигуры. Выделяя указанное представление “единого целого” в качестве философской импликации невозможного существования, следует подчеркнуть, что, хотя такого рода парадоксальные объекты можно рассматривать с математической точки зрения, проблемы “идеальное – реальное” и “обоснованное – необоснованное” столь же относительны как и все другие философские проблемы. Но философия и математика были рождены как раз в попытках выяснить возможные пути познания истины, благодаря напряженным усилиям человеческого разума. Исходя из реальности существования различных направлений современной математики, проблема их совмещения не всегда решается на более высоком уровне теоретического знания. Прагматический подход не позволяет надеяться на то, что формалистская или интуиционистская концепции развития математики будут признаны ложными. Формализм реально стремится к достижению максимальной строгости в математике, что порождает искусственные построения, недопустимые с точки зрения интуиционизма, который, в свою очередь, настолько абсолютизирует интуитивные критерии математической истинности, что это значительно снижает область его применимости.

Хотя математические науки в абстрактных построениях далеко ушли от классического понимания математической строгости, остается неизменной ориентация на математический идеал научности как на всеобщий научный идеал, несмотря на определенный скептицизм в отношении абсолютной строгости современных математических доказательств. Абстрактные математические понятия, например, актуально бесконечные множества, понимаются как самостоятельные сущности в идеальном познании. Приемлемость таких абстрактных математических объектов и есть платонизм в математике. Бесконечные множества обладают уникальным свойством – они могут быть равномощны своим собственным подмножествам. Это удивительное свойство мешало многим математикам до Кантора. Оно удерживало многих от того, чтобы рассматривать бесконечные множества как завершенные математические объекты. Это и сегодня один из основных вопросов философии обоснования математики. В абстрактной теории множеств особое положение занимает одна аксиома, которую часть математиков с трудом принимала на веру, как в свое время и известный постулат о параллельных в геометрии. Речь идет об аксиоме выбора. Напомним, что это одна из важнейших аксиом теории множеств, несводимых, наряду с аксиомой бесконечности, к логике. Аксиому выбора можно сформулировать следующим образом: “В любом семействе непустых множеств Ф в каждом множестве $X \in Ф$ можно выбрать по одному элементу”. Хотя до работ немецкого математика Эрнеста Цермело это утверждение как очевидный факт широко использовалось в математических рассуждениях, но будучи явно сформулировано оно вызвало серьезную полемику и довольно жесткую критику.

Например, академик Н.Н. Лузин неодобрительно относился к использованию аксиомы выбора: “Против аксиомы говорит именно эта самая чрезвычайная легкость ее применения, немедленность даваемых ею советов, так как математические сущности, сформированные при помощи ее, не крепки, не обладают устойчивостью, имея слишком расплывчатые, неопределенные свойства, чтобы практически служить затем точкой опоры для математических рассуждений, направленных уже на классические математические предметы” (цит. по [62, с.41]). Суть этой аксиомы можно объяснить следующим образом. Если имеется непустое множество, то мы всегда можем взять из него какой-нибудь элемент, так как если оно не пусто, то в нем есть хотя бы один элемент, вот этот элемент и возьмем. Если есть конечное число непустых множеств, то можно взять сначала в первом множестве какой-нибудь элемент, затем во втором множестве какой-нибудь элемент и так далее. А если непустых множеств бесконечно много, то просто так взять по одному элементу из них мы не можем, так как этих множеств бесконечно много. Вот в этой ситуации и нужна аксиома выбора. Напомним, что почти двадцать лет понадобилось на устранение в аксиоматике теории множеств таких противоречий, как парадокс Рассела, путем включения в нее такого сильного математического средства, как аксиома выбора. Этот постулат, как и любую независимую аксиому, можно принимать или не принимать, сравнивая приобретения и потери. Но главная причина ее принятия математическим сообществом состояла в том, что без нее нельзя было доказать целый ряд важнейших результатов математического и функционального анализа, поскольку только при наличии аксиомы выбора многие математические процедуры могут быть реализованы в бесконечномерном случае.

Именно благодаря аксиоме выбора для счетного числа множеств в классической математике сохраняется весь математический анализ. Методологическая особенность аксиомы выбора заключается в разительном контрасте между естественностью ее формулировки и практической “невероятностью” некоторых ее математических следствий. Она демонстративно неэффективна, и шок, вызванный ею и появившимися практически тогда же парадоксами теории множеств, заставил, наконец, осознать, что, многое в математике конца XIX века стало неконструктивным. Своего рода “опровергающим примером” для аксиомы выбора является теорема Банаха–Тарского о кусочно-изометрическом отображении одной сферы на две. В философской интерпретации это означает, что данная аксиома не может претендовать на статус, например, аксиом арифметики. Но так как, с математической точки зрения, аксиома выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств, то нет причин не применять ее в математических доказательствах. С точки зрения платонистов, вопрос об истинности аксиомы выбора имеет объективный характер. Поэтому одни из них, в соответствии со своей позицией, принимают ее, другие отрицают ее, а есть и такие, кто принимает аксиому выбора с рядом ограничений. Согласно Платону, математические идеи имеют собственное бытие в некоем идеальном мире, доступном благодаря работе нашего интеллекта. Необходимо все же уточнить, что, по мнению философа математики А.В. Родина, Платон не рассматривает математические объекты как полностью самотождественные и автономные: “Математические предметы для Платона не самостоятельны постольку, поскольку зависят от гипотез, на которых основывает свои выводы математика, а всякое принятие гипотезы, как простое восприятие мнения есть зависимость от иного” [378, с.128]. Но математические сущности все же более автономны для Платона, чем мнения, так как математическая гипотеза предполагает относительно самостоятельную деятельность рассудка.

А в чем тогда выражается польза от платонистского мира идей для профессиональных математиков, придерживающихся различных философско-методологических подходов к обоснованию? Необходимость присутствия платонистской компоненты в обосновании математики объясняется следующим: так как каждый профессиональный математик может установить, образно выражаясь, собственный “непосредственный контакт” с общим миром идей Платона, то можно предположить, что их взаимодействие и общение тогда будет проходить более эффективно, чем это можно было бы изначально ожидать. Несовместимость онтологических и эпистемологических подходов к концепции платонизма, по мнению философа математики В.В. Целищева, проявляется в том, что “платонизм кажется ясным, когда вы думаете о математической истине, но невозможным, когда вы думаете о математическом познании” [468, с.38]. В определенном смысле, признание аксиомы выбора – это тоже акт математической веры, приведший к тому, что к ней принято сейчас относиться довольно терпимо. Заметим, что в современной математике существуют многочисленные нетривиальные эквивалентные утверждения или аналоги аксиомы выбора, что, впрочем, и не удивительно, если вспомнить о подобном феномене, сопровождавшем аксиому параллельности в геометрии. В методологической математической литературе приведены различные, хотя внешне эквивалентные, формулировки аксиомы выбора, а также ее следствия и альтернативы, но ее философская глубина дает о себе знать в самых безобидных на вид математических ситуациях. Сомнения и споры вызывали в основном следующие два принципиальных момента. Во-первых, речь идет о реализации математического выбора бесконечной последовательности элементов, во-вторых, выбор элемента из произвольного неупорядоченного множества – это тоже логическая проблема. Выбираемые с ее помощью множества или функции определяются не единственным образом; их существование принимается, но принципиально не дается средства предпочесть что-либо одно. Специалисты по математической логике высказывают сомнения в том, что вопрос о логической независимости этой аксиомы действительно точно отражает сущность проблемы. Эти мнения отражают различие подходов к внутренним и внешним аспектам обоснования.

В основе концепции строения современной математической теории лежит фундаментальная дихотомия внешнего и внутреннего ограничения. С одной стороны, внутренние проблемы математики включены в сам процесс генезиса математических теорий. Это можно интерпретировать в том смысле, что, выясняя границы применимости математических методов и интерпретируя новые теории на основе построения конструктивных аналогов других теорий, философы математики занимаются именно внутренним обоснованием, вполне естественным для математики, укрепляя тем самым веру в надежность ее теорий и методов. “С другой же стороны, – рассуждает академик

Л.С. Понтрягин, – некоторые разделы математики, посвященные лишь ее внутренним проблемам, оставаясь "вещью в себе", постепенно вырождаются и почти наверняка в конце концов оказываются ни для чего не нужными. Думаю, что для впавших в грех таких математических упражнений никакие "философские" обоснования "формальной теории" не служат ни оправданием, ни утешением” [352, с.103]. С точки зрения внутреннего обоснования математики, традиционный взгляд на положение теории множеств в современной математике состоит в том, что ее сравнивают с фундаментом, на котором возводится все здание этой науки. Появление парадоксов теории множеств, с одной стороны, ставило под сомнение ценность всех теоретико-множественных построений, но, с другой стороны, возникал естественный вопрос, а не может ли случиться так, что рано или поздно мы натолкнемся на какое-нибудь противоречие уже в таких классических математических теориях, как геометрия или арифметика. В качестве критических философских аргументов можно рассмотреть следующие тезисы и антитезисы. В частности, “несмотря на свои внутренние проблемы теория множеств действительно послужила основой для объединения и организации математики в XX в. Однако серьезным недостатком такой организации стало то, что понятие множества (в той специфической форме, в которой это базовое понятие описывается данной теорией) оказалось либо вовсе не связанным с базовыми понятиями современной физики, либо связанным с ними неудовлетворительным образом” [380, с.69]. Несмотря на это можно заключить, что с точки зрения реконструкции проблем философии математики, наиболее важным и значительным является то, что современная теория множеств выросла из насущных потребностей развития математики в целом и развивалась как раз в связи с ее успешными приложениями в различных математических дисциплинах.

Поэтому и осуществленный в свое время пересмотр курсов математики, в основу которых был положен теоретико-множественный подход, отличающийся повышенной степенью абстракции, можно считать прогрессивным явлением. В результате такой перестройки безукоризненное проведение аксиоматического изложения и исследования математических теорий, которое способствовало достижению полной ясности и избавлению от ошибок, все больше входило во всеобщее употребление. В качестве тезиса, аргументирующего плодотворность теоретико-множественного подхода в математике, сошлемся на мнение академика А.Н. Колмогорова: “Теория множеств, успешное построение большинства математических теорий на основе теоретико-множественной аксиоматики и успехов математической логики (с входящей в нее теорией алгоритмов) являются весьма важными предпосылками для разрешения многих философских проблем современной математики” [196, с.69]. Для философии математики теоретико-множественная аксиоматика дала новое понимание и конкретизацию современного математического мышления. В качестве антитезиса приведем мнение академика Л.С. Понтрягина по поводу роли теоретико-множественной концепции в современной математике, который отмечает: “На определенном этапе развития математики высокоабстрактная теоретико-множественная концепция ввиду ее новизны стала модной, а увлечение ею – превалировать над конкретными исследованиями. Но теоретико-множественный подход – лишь удобный для математиков-профессионалов язык научных исследований. Действительная же тенденция развития математики заключается в ее движении к конкретным задачам, к практике” [352, с.105]. Суть такого рода возражений сводится к тому, что понятие математической теории, имеющей практическое применение, существенно шире, чем понятие дедуктивной аксиоматически выстроенной теории в смысле формальной логики.

Современную интерпретацию теории множеств в контексте проблемы обоснования математики репрезентирует известный российский математик С.С. Кутателадзе следующим образом: “Теория множеств, гениальное творение Георга Кантора, в 20-м веке стала рассматриваться как единственно возможное обоснование современной математики. Математика начала превращаться в часть канторовой теории множеств. Тезис о невозможности обоснования математики вне теории множеств воспринимается многими действующими математиками, педагогами и философами как очевидный и не требующий доказательства. Парадоксальным образом теоретико-множественная установка превратилась в устойчивый догмат, то есть в явно выраженное запрещение мыслить (по меткому выражению Л. Фейербаха)” [221, с.А5]. Но такой доктринерский взгляд на обоснование математики противоречит взглядам самого Кантора, заявлявшего, “что гораздо большая опасность заключается во всяком излишнем ограничении математического стремления к творчеству, опасность тем большая, что в пользу этих ограничений нельзя привести никаких доводов из сущности науки. Ведь сущность математики заключается именно в ее свободе” [169, с.327]. Хотя математика совершенно свободна в своем развитии, она связана естественным условием, проявляющимся в том, что математические понятия должны быть свободны от внутренних противоречий. Свобода математики поддерживается философским принципом освобождения, который можно интерпретировать следующим образом. Освобождение как философский принцип познания означает, что в процессе развития математики за текущие столетия исходный математический объект освобождается от множества случайных связей, навязанных чуждой его духу материей, например, физическим миром. Но следует все же заметить, что с точки зрения возрастающей сложности обоснования математики, сами математики не злоупотребляли чрезмерной свободой в создании произвольных математических структур.

Напомним, главный тезис этого исследования, состоит в том, что экспликация проблемы обоснования осуществляется с помощью философско-методологического анализа системной триады действующих направлений обоснования математики. Для дальнейшего конструктивного анализа важнейшего в проблеме обоснования дополнительного аргумента рассмотрим, исходя из исторической эволюции математического знания, тезис о единстве современной математики, необходимый на пути системного подхода к обоснованию математики. Однако вопрос о том, что конституирует единство математического знания довольно обширен. Поэтому все, что можно предварительно сделать, это указать на некоторые проблемы, связанные с соответствующей аргументацией в поддержку тезиса о единстве математики. В споре представленных далее тезисов и антитезисов трудно сохранить нейтральность, поскольку приходится выбирать то или иное в поддержку своих взглядов на проблему единства современной математики. Но, при таком подходе к аргументации, доказательство тезиса о единстве математики в принципе очень просто. Заметим, что процедуру объяснения, непосредственно связанную со структурой и организацией математического знания, а, следовательно, и с информацией о нем, можно рассматривать в качестве разновидности фундаментальной познавательной процедуры, а именно, целостной концепции обоснования в контексте единства всего современного математического знания. “Именно поэтому важно раскрыть информационную природу принципа единства в многообразии (единства разнообразного), – по мнению специалиста по структурной гармонии систем Э.М. Сороко, – основного принципа гармонии, выяснить роль разнообразия структурных составляющих системы в обеспечении ее жизнедеятельности, в достижении присущего ей режима функционирования” [419, с.119]. В единстве разнообразных подходов к обоснованию математики, вытекающего из единства самой современной математики, состоит суть используемого подхода.

С точки зрения проблемы обоснования, для этого надо выяснить: в каком смысле можно говорить о целостности и согласованности программы обоснования современной математики, если не выявлены аналогичные вопросы относительно единства самой математики? “Одним словом, – заостряли проблему Н. Бурбаки, – существует в настоящее время одна математика или несколько математик?” [69, с.246]. Хотя этот вопрос не нов, он до сих пор актуален в контексте проблемы обоснования современной математики. Сначала необходимо выяснить, а можно ли вообще дать удовлетворительное для всех определение современной математики. Предварительно зафиксируем, что в философии математики нет четкого концептуального определения математики как науки. “Даже лучшие из существующих сочинений, посвященные этому вопросу – яркий пример представляет собой известная книга С. Маклейна – ограничиваются перечислением составляющих ее частей (алгебра, геометрия, анализ) и рассказом о том, чем и как каждая такая часть занимается. В чем же состоит их единство (почему они объединяются в единую математику) и чем они отличаются от других наук, – остается четко не сформулированным” [358, с.83]. Поэтому, для начала мировоззренчески важно отвлечься от второстепенных деталей и определить, что объединяет, а не разъединяет разные математические теории.

Начнем с того, что многими исследователями отмечалась особая роль математики в научном познании. Например, историк математики А.И. Володарский, исследуя внешнее сходство математики в период ее зарождения, утверждает, “что при нынешнем уровне историко-математических знаний можно перейти от сходства в развитии математики между отдельными странами к утверждению единства практической математики во всех цивилизациях” [100, с.77]. Но в математике есть и внутреннее взаимодействие теорий, которое тоже можно интерпретировать как ее единство. Для подтверждения этого достаточно вспомнить задачу о квадратуре круга, которую безуспешно пытались решить еще математики Древней Греции. Вот ее доступная для всех формулировка. На плоскости имеется круг. При помощи циркуля и линейки надо построить квадрат, площадь которого равна площади этого круга. Рассмотрим набросок аргументов к невозможности ее решения. Пусть дан круг радиуса 1, то есть имеется отрезок длины 1. Так как площадь этого круга равна π, то построение искомого квадрата сводится к построению отрезка длины $\sqrt{\pi}$. С помощью циркуля и линейки можно строить только такие отрезки, длины которых могут быть получены из рациональных чисел с помощью операций извлечения квадратного корня, а также сложения и умножения. Но все такие числа являются алгебраическими и только в 1882 году немецкий математик Карл Линдерман доказал, что число π трансцендентно, следовательно, трансцендентно и число $\sqrt{\pi}$. Поэтому построить отрезок длины $\sqrt{\pi}$ при помощи циркуля и линейки невозможно, что влечет решение геометрической задачи. Как заключает академик А.А. Болибрух: “Это еще один яркий пример тесной связи между различными областями математики” [58, с.20]. В связи с внутренними проблемами обоснования математических теорий напомним, что цель математической строгости состоит в том, чтобы узаконить через математическую аргументацию и методологическое объяснение новые завоевания математической интуиции. Для этого одни выделяли формальную общность структур современной математики, другие подчеркивали единство чистой и прикладной математики, третьи видели единство математики в ее языке и связи с естественнонаучным знанием. Рассмотрим последовательно эти три аргумента в поддержку тезиса о единстве, следуя терминологии академика А.Н. Колмогорова, “современного периода развития математики”.

Во-первых, сложность философской оценки реконструкции математического знания, точнее оценка прошлого в терминах настоящего, связана с генезисом методологической концепции абстрактной математической структуры. Не вдаваясь в историко-математическую полемику, обратим внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считает, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. “Точка зрения Бурбаки такова: существует одна математика со многими разнообразными математическими дисциплинами. Объединяет разные математические дисциплины в одну единую науку понятие "математическая структура" и аксиоматический метод” [411, с.76]. Наиболее важной чертой инструментальной ценности математических структур является то, что, пользуясь аксиоматическим методом, они репрезентируют философскую “экологию мысли”. Сошлемся также на мнение А.Н. Колмогорова, который считал, что теоретико-множественная аксиоматика “позволяет с единой точки зрения рассмотреть строение специальных математических теорий, предметное содержание которых закрепляется при помощи соответствующей системы аксиом, и, таким образом, до известной степени осветить как вопрос об отношении математической теории к действительности, так и вопрос о своеобразии математического метода исследования” [196, с.69]. Структуры являются инструментальным средством в том смысле, что каждый раз, когда математик замечает, что между изучаемыми им объектами имеют место отношения, для которых выполняются аксиомы структуры определенного типа, то он сразу может воспользоваться всем набором доказанных теорем, относящихся к структурам этого типа. Поэтому можно заключить, что в настоящее время внутренняя эволюция математики вопреки видимости более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является связной и целостной системой, что не всегда заметно в ее внешних проявлениях. Самым существенным в эволюции математических теорий, по мнению Бурбаки, была систематизация отношений между различными математическими теориями, которую называют аксиоматическим методом.

Важнейшим философским утверждением, на которое опирается современная математика при достижении предельного уровня новизны, является утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Для подтверждения этого тезиса заметим, что со структурами математики связаны философские вопросы математического познания. Они также имеют непосредственное отношение к изучению истории математики, поскольку мы имеем в ней дело с основными концепциями, описывающими как сами эти структуры, их появление, расширение и развертывание, так и случайность либо обязательность правил действия с ними. Для убедительного примера достаточно привести господство концепции абстрактной группы, поскольку проявления групповых свойств оказалось возможным увидеть и в математике прошлого, а после введения понятия группы различные разделы математики обрели ясность и единообразие. Можно указать и другую аргументацию, так как по существу идея А.Н. Колмогорова о социокультурной обусловленности теоретической математики подрывает всю идеологию Бурбаки, согласно которой единственным объектом теоретической математики являются некие идеальные сущности или структуры. Но если не привязываться жестко к математическим структурам в генезисе развития математики, то следует отметить, что в теории алгебраических числовых полей были решены труднейшие проблемы и вместе с тем открыты трансцендентные функции, связанные с числовыми полями, которые удалось выявить благодаря разнообразным, ранее скрытым теоретико-числовым истинам. Можно выявить и встречный процесс, когда “способы образования понятий в теории идеалов были с большим успехом перенесены далеко за пределы теории чисел, в алгебру и в теорию функций, и тем самым, – утверждает Давид Гильберт, – большой комплекс математических дисциплин был приведен в единую систему” [113, с.449]. Можно также заключить, что старые надежды бурбакистов – показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств или их комбинаций – оказались несбыточной мечтой. Однако это ничуть не умаляет представления о математике как единой науке, поскольку благодаря теории категорий все более отчетливо проявляется единство математических теорий, естественно объединяющих логику и математику.

Во-вторых, в экспликации единства современной математики необходимо понять, в чем разница, например, между чистой и прикладной математикой. Но чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить мотивы исследования чистой и прикладной математики. Предварительно сошлемся на мнение, принадлежащее Георгу Кантору по поводу его трактовки, целиком в духе платонизма, термина “чистая” математика: “В виду этого исключительного положения, отличающего ее от всех других наук и объясняющего сравнительную легкость и отсутствие принуждения в занятии ею, она заслуживает совершенно особенным образом имени свободной математики – название, которое я, будь мне предоставлен выбор, дал бы ей охотнее, чем ставшее обычным наименование "чистой" математики” [169, с.326]. Хотя имеется много математических понятий и утверждений, которые в чистой и прикладной математике трактуются одинаково, существуют понятия, трактовки которых все же различаются. Здесь имеется в виду само понятие “существование”, долгое время вообще остававшееся без определений и философских пояснений. С одной стороны, под существованием математических объектов можно понимать отсутствие противоречий в понятиях об этих объектах, а с другой стороны, существование предполагает, что математический объект фактически конструируется с приемлемой точностью. Другое различие заключается в том, что в отличие от чистой математики прикладная математика не имеет строго дедуктивного характера, поэтому одним из важнейших ее направлений является постоянное уточнение области применения математических конструкций. К сказанному непосредственно примыкает вопрос об интуитивной убедительности математического рассуждения. Как неформальное понятие оно зачастую отвергается приверженцами чистой математики при окончательном изложении математического результата. Но в прикладной математике интуитивная убедительность может служить важнейшим критерием правильности, что отчасти является даже обоснованием решений прикладных задач. В отличие от такого методологического подхода в строго построенных разделах чистой математики интуиция была и остается источником, но не конечным критерием математической истины.

В качестве поддержки важного тезиса о единстве математики приведем вначале мнение математиков-прикладников: “Широко распространена точка зрения, согласно которой вообще нет чистой и прикладной математики, а есть единая наука – математика, которая, в частности, обслуживает и другие дисциплины. С этой точки зрения, казалось бы, можно согласиться, если уточнить, что же надо включать в математику. Однако после такого уточнения выясняется, что в рамки понятия "математика" войдет чрезвычайно пестрая совокупность идей, методов, фактов и единство математики оказывается призрачным” [54, с.197]. В поддержку этого тезиса заметим, что в понятии “прикладная математика” тоже можно выделить два смысла. В первом смысле под прикладной математикой чаще всего понимаются вычислительные средства, цифровое моделирование и численные методы. Второй смысл прикладной математики возникает при анализе простейших моделей, описываемых, например, несколькими дифференциальными уравнениями со случайными членами или без них, но при попытках усложнять модель часто говорят, что тогда она будет доступна лишь вычислительным машинам. Следует обратить внимание также на то, что, с одной стороны, эти модели являются чисто абстрактными математическими построениями, предполагающими постановку вопроса о внутренней непротиворечивости модели в рамках методологий теоретической математики, то есть в описании модели должна быть определенная точность. А, с другой стороны, необходимая степень точности достижима в рамках методологии прикладной математики лишь при условии, что рассматриваемая модель является математической, в противном случае нельзя гарантировать, что на поставленные вопросы можно будет дать вполне определенные ответы.

Поэтому кажется вполне естественной и необходимой теоретическая и прикладная специализация в современной математической исследовательской деятельности, поскольку любое математическое исследование потенциально полезно, а будущее применение трудно предвидеть заранее. Не настаивая на строгом определении понятия “прикладная математика” как специальной дисциплины и оставляя его в “легком тумане ассоциативной базы”, процитируем как одно из возможных, но не исчерпывающих ее сущности определений: “Прикладная математика – это совокупность методов решения математическими средствами задач, возникших вне математики” [83, с.40]. Ее, как правило, противопоставляют “чистой математике”, для которой характерен полный отрыв от каких бы то ни было приложений, непосредственных или потенциальных. В то же время, “прикладная математика – это аспект математики, как бы то, что получается в процессе проектирования математики на все ее приложения, т.е. вся специфика, вся методика, которые возникают в процессе приложения математики” [296, с.14]. Тогда можно говорить о некоем ядре, отвечающем чистой математике, и об обширной его оболочке, отвечающей прикладной математике. Однако при такой интерпретации единства математики надо помнить также о том, что имеются пункты, по которым подходы к чистой (или теоретической) и прикладной математике оказываются различными. С философской точки зрения одним из таких пунктов является понятие существования математического объекта, а с методологической точки зрения различия выявляются при применении бесконечных процессов. Например, если задача решается с помощью метода итераций, то в теоретической математике он является обоснованным, если, например, доказана его сходимость. Но такое теоретико-математическое обоснование имеет косвенное отношение к практическому применению метода, так как если доказана лишь сходимость метода, то важнейший для прикладной математики вопрос о том, на какой итерации следует остановиться, остается все же открытым.

В самом широком философском контексте условное схематическое деление на чистую и прикладную математику состоит в следующем. Математики, специализирующиеся в первой области, имеют дело с математическими символами, их комбинациями и свойствами в основном в формализованном виде, а математики, ведущие исследования в другой области, интересуются значениями математических символов и смысловым содержанием математических теорий, связанных с реальным миром. Методологически неправомерно ставить акценты исключительно на области приложений, так как прикладная математика изучает методы использования неформальных соображений в решении формализованных задач, а конкретной областью приложений определяются классы этих задач. С точки зрения возражения к существующему различию чистой и прикладной математики сошлемся еще на мнение немецкого математика Рихарда Куранта: “На самом деле между "чистой" и "прикладной" математикой невозможно провести четкую грань. Поэтому-то в математике и не должно быть разделения на касту верховных жрецов, поклоняющихся непогрешимой математической красоте и внимающих только своим склонностям, и на работников, обслуживающих их. Подобная "кастовость" – в лучшем случае симптом человеческой ограниченности, удерживающей большинство людей от свободного странствования по необъятным просторам человеческих интересов” [218, с.27]. Познакомившись с современной математикой даже на уровне университетских курсов, можно убедиться в тесном взаимодействии и взаимопроникновении фундаментальных математических теорий и сферы их приложений.

Основная черта современной математики как науки о структурах характерна как для чистой, так и для прикладной математики. Наиболее глубокие открытия и результаты современной математики, а также решение трудных классических проблем, в контексте многообразия современного математического знания, требуют синтеза различных разделов чистой и прикладной математики, подчас с помощью новых информационных технологий компьютерной математики. Даже “деление "чистой математики" на "формальную и содержательную", – утверждал академик Л.С. Понтрягин, – не имеет никакого смысла и непонятно математикам” [352, с.101]. В пользу единства современной математики говорит и то, что решение многих конкретных прикладных задач часто упирается в чисто теоретические дедуктивные построения. Но следует отметить, что построения, которые при их создании казались совершенно абстрактными, в дальнейшем активно применялись в приложениях. Традиционный путь внедрения математических методов в технологические процессы состоит в том, что математические результаты, прежде всего, становятся достоянием фундаментальных разделов математики. Поэтому в прикладных науках, там, где нужна хорошая теория, ее часто не бывает, в результате чего приходится работать, по образному выражению академика А.А. Самарского, без “волшебного фонаря математики”. Для методологии науки представляет интерес и то, как он по существу философски различает теоретическую и прикладную математику: “Бытуют также представления о том, что теоретическая математика делает что может, но как нужно, а прикладная – что нужно, но как может. Подобные взгляды обусловлены спецификой математики, многие идеи и методы которой возникают как итог ее внутреннего развития, своеобразной логики творчества и поэтому не всегда напрямую связаны с насущными проблемами. Нисколько не умаляя значения этих тенденций, надо признать: для математики настала пора делать что нужно и как нужно” [402, с.87]. Есть еще один аспект единства математики, на который обращают внимание философы математики. Он заключается в том, что теперь, начиная с XX века, не существует национальных математик с точки зрения характерных особенностей изучаемых математических объектов.

Математика, как наука, стала не только внутренне, но и внешне единой и целостной мировой системой, существенные изменения в которой возможны не на локальном, а на глобальном уровне. За единство математики – теоретической (чистой) и прикладной – неоднократно высказывались крупнейшие математики современности. Так, академики В.С. Владимиров и Л.Д. Фаддеев в этой связи подчеркивают: “Более того, в самой теоретической математике стирается традиционное деление на алгебру, геометрию и анализ, возникают промежуточные разделы – дифференциальная геометрия, алгебраическая топология, алгебраическая геометрия, банаховы алгебры и т. д.” [93, с.97]. Таким образом, можно предположить, что невозможно разделить математику на чистую и прикладную, поскольку есть одна математика, которую можно, учитывая ее высокого уровня абстрактность и способность к саморазвитию, называть современной математикой. Тем не менее, хотя трудно охарактеризовать всю ее специфику, прикладную математику можно частично описать как применения чистой математики, направленные на решение конкретных проблем реальности. Трудности разделения математики на чистую и прикладную математики можно объяснить с помощью следующей метафоры: “У Льюиса Кэрролла описывается Чеширский кот, обладавший способностью становиться невидимым, причем в этом процессе наступал момент, когда кот уже полностью растворялся в пространстве, но еще оставалась видна его улыбка. Отделить прикладную математику от чистой не проще, чем отделить улыбку Чеширского кота от него самого” [27, с.16]. Можно, наконец, заключить, что прикладная математика – это направленная на внешний мир важнейшая сторона чистой математики, точнее, с точки зрения обоснования математики, свидетельство ее эффективности в целом, а также философского единства всей математики. Поэтому правильнее говорить не о существовании двух математик – чистой и прикладной, а философски интерпретировать прикладные задачи как специальный вид семантики для математических теорий, поскольку отделить прикладную математику от чистой математики невозможно.

В-третьих, общепринято считать, что математика – это язык науки, точнее, формальный язык науки, используемый в математических теориях и в естествознании. Следует сразу же подчеркнуть, один из основных признаков, отличающих математику от естественных наук, который состоит в том, что в большей части современной математики математические объекты не претендуют на роль адекватных аналогов реальных объектов. Современная математика обладает богатым и хорошо развитым символическим аппаратом, поскольку символика служит одним из существенных факторов, способствующих уточнению математического языка. Но проблема в том, что введение математических символов связано с глубокой перестройкой языка и характера соответствующих математических систем. С одной стороны, по мнению академика В.И. Арнольда: “Продолжающийся более полувека процесс алгебраизации и аксиоматизации математики привел к опасному разрыву между языком современной математической литературы и естествознанием. Особенный вред принесло представление о математике как о своеобразной логической игре – анализе следствий из произвольных систем аксиом” [17, с.117]. С другой стороны, для сохранения реального единства математики сами математики пытаются “ликвидировать “ореол непознаваемости”, созданный вокруг математики дедуктивно-аксиоматическим ее изложением” [17, с.118]. Хотя на аксиоматических идеях и идеях теории множеств осуществлялось исследование в большинстве разделов теоретической математики и ее приложений, это, наряду с положительными результатами, привело и к отрицательным последствиям. Анализируя тенденции развития современной математики на новом этапе, которая пошла по “ультраабстрактному пути”, пропагандируемому французской математической школой, возникшей в XX веке, можно заключить, что именно они создавали непонимание между математикой и естественными науками, а также культивировали и углубляли этот разрыв.

Кроме того, группа парижских математиков выступала в качестве идеологов полной и единой формализации математического образования, включая школьное, в духе программы, называемой “бурбакизм”. Современная математика и так реально сложна. “Стал исчезать, – по мнению академика С.П. Новикова, – контакт теоретической математики с естественными науками, особенно с наиболее развитой из них – теоретической физикой; в конце 50-х годов начал ослабевать контакт между разными разделами математики, началось отдельное развитие абстрактных математических языков разных областей, препятствующее переходам ученых из одной области в другую” [314, с.4]. Поэтому формализация языка науки, осуществленная в бурбакистском стиле в преподавании, – это, по существу, образно говоря “паразитная формализация”, усложняющая не только понимание, но и изучение математики, что в свою очередь мешает как единству самой математики, так и ее единству с приложениями. По заключению академика Ю.И. Журавлева: “Нельзя заниматься современной математикой и не использовать современного математического языка. Но это должен быть язык реальной живой математики, а не формализм Бурбаки” [155, с.197]. Но, несмотря на определенную замкнутость математики как науки, не нуждающейся в каких-либо внешних критериях истинности ее теорем, она эффективно используется для решения естественнонаучных задач. Возможно, это обстоятельство послужило косвенным поводом считать математику, с точки зрения некоторых математиков, естественной наукой. Заметим также, что основу единства знания Нильс Бор искал не в построении единого языка науки, а в нахождении методологического сходства теоретико-познавательных ситуаций, требующих для своего анализа дополнительной системы понятий, которая способствовала бы устранению субъективных элементов и расширению объективного описания. Тот уровень понимания действительности, который достигнут в настоящее время, требует построения столь длинных цепочек логических умозаключений, что в них вряд ли возможно продвинуться далеко, не прибегая к методологии чистой математики, а только благодаря новым тенденциям в доказательствах с помощью современных компьютеров. Но не стоит абсолютизировать и преувеличивать формальную сторону изложения математики в процессе использования математических методов, так как для этого нет излишне негативных оснований.

К этому можно еще добавить, что в реальности методы работы физика-теоретика далеко не адекватны чисто математическим методам, а это говорит об определенной автономности развития теоретической математики. Сошлемся также на мнение французского математика Жана Дьедонне: “Я не собираюсь утверждать, что тесный контакт с иными областями, такими, как теоретическая физика, не выгоден для обеих сторон. Однако совершенно ясно, что из всех поразительных достижений… ни одно, за возможным исключением теории распределений, ни в малейшей степени не пригодно для физических применений” [139, с.11]. Давид Гильберт тоже говорил о силе общих математических методов и о едином характере математики, обусловленном внутренней сущностью математики, как “основы всего точного естествознания”. Например, шестая проблема Гильберта носит чрезвычайно общий характер – аксиоматизация физики и теории вероятностей. Но хотя Гильберт и провозгласил “программу единой аксиоматизации математики и теоретической физики”, он понимал ее нетривиально, как полезную формализацию. “Надо идти против течения, – настаивает С.П. Новиков, – чтобы бороться за сохранение прозрачного общенаучного стиля, который может сохранять единство математики, объединить математику с физикой, с приложениями” [315, с.16]. Если сделать совокупность достижений современной математики XX века максимально доступной и как можно более компьютеризированной, то это, по его мнению, могло бы возродить нормальное изложение, в частности, чтобы “платоновская физика”, как набор стоящих за явлениями природы идеальных понятий, не отходила от реальности, точнее от реальной физики.

Обратим также внимание и на мнение американского специалиста по квантовой теории Дэвида Дойча, который говорит о двух тенденциях будущих перспектив математики и физики: “Первая тенденция в том, что человеческое знание в целом продолжало принимать единую структуру. <…> И вторая тенденция в том, что сама единая структура должна состоять из непрерывно углубляющейся и расширяющейся теории фундаментальной физики” [137, с.347]. Именно в русле взаимодействия знания развивалась современная математика, что подтвердил директор института высших исследований в Принстоне (США) Филлип Гриффитс на симпозиуме “Границы интеллекта в XXI веке” (1999), который начал свой доклад фразой: “Одним из величайших открытий XX века было осознание того обстоятельства, что различные научные знания, включая математику, сильно взаимосвязаны” (цит. по [285, с.58]). Границы, определяемые философской идеологией теоретической и прикладной математики, к началу нового тысячелетия стали стираться. С точки зрения философии науки, учет всех системных аспектов развития математики на современном этапе в контексте общефилософских принципов позволяет преодолеть одностороннее представление о ее структуре в целом. Можно предположить, что тенденции к объединению со временем только окрепнут, и единство математики возродится на новой основе. Поэтому вопрос о единстве математического знания, по существу, во многом обусловлен степенью развития математических теорий. Тем не менее можно заключить, что современная математика остается единой наукой также в силу ее дедуктивного характера, который в принципе не может измениться. Конечно, специализация математических направлений сохранится, а концептуальность подходов к проблеме обоснования будет использоваться для философского осмысления конкретных математических задач. Именно единство современной математики служит основой проникновения философии и методологии науки в проблему обоснования современной математики, находя свое выражение в конкретном многообразии математических теорий.

Многие философы пытались ответить на вопрос, какое знание можно считать “обоснованным”. Можно выделить два подхода к обоснованию: “методистский” принцип, согласующийся с неким нормативным принципом, и позицию “партикуляризма”, предполагающего приоритет частных случаев. Согласно первому подходу, “строгий методизм” предусматривает, что критерии выбора релевантных свидетельств формируются в соответствии с неким априорным теоретическим стандартом, тогда как в противоположном подходе проверка обоснованности может осуществляться без видимой зависимости от каких-либо теоретических стандартов. Применительно к рассматриваемой ситуации это предполагает вполне определенный критерий отбора релевантных свидетельств. Вообще говоря, “знание по презумпции” не исключает случаев, когда признание обоснованности продиктовано “стандартами”, но и не ограничивается этими случаями, если оно не вызывает сомнений. С точки зрения разрабатываемой методологии обоснования математики для нас сейчас важно зафиксировать тот факт, что единство современной математики должно отражаться на единстве направлений обоснования математики. Во-первых, единство направлений обоснования современной математики концептуализируется в процессе успешной алгоритмизации и построения новых математических моделей, прежде всего благодаря синтезу теоретической и прикладной математики как способа систематизации математического знания, закрепляющего целостность подходов к его обоснованию. Проанализировав диалектику существования совокупности объектов с общей, но различающейся сущностью, Э.М. Сороко философски резюмирует, что “когда элементы совокупности обнаруживают пронизывающую всех их сквозную связь, когда они "схвачены" единым для всех отношением, замыслом, планом, алгоритмом, идеей, фиксированы посредством единой меры, эталона, нормы, стандарта, проявляя тем самым свои различия на фоне общей всем им субстанции, можно вести речь об их гармонизации в пределах их совокупности” [419, с.117]. К этому можно добавить, что реальная проблема обоснования всех разделов математики гораздо сложнее и глубже, чем набивший оскомину вопрос о единстве математики.

Во-вторых, философско-методологическое единство основных программ обоснования математики – это результат отражения единого реального мира во всем его многообразии и целостности в контексте различных направлений развития современной математики, несмотря на неоднородность философских подходов к проблеме обоснования математики. Например, в то время, когда направление логицизма в обосновании еще переживало период становления, математики, примкнувшие к интуиционистскому направлению в обосновании, предложили совершенно противоположный логицизму подход к математике. Эту ситуацию историк математики Морис Клайн прокомментировал так: “Один из интереснейших парадоксов в истории математики состоял в том, что в то время как логицисты в поисках надежных оснований математики все более полагались на изощренную логику, их основные соперники отворачивались от логики и даже в каком-то отношении отказались от нее” [186, с.397]. Но, важно отметить, что цель, которую преследовали представители направлений логицизма и интуиционизма в обосновании математики, была единой. В такой мировоззренческой интерпретации мы говорим о единстве направлений обоснования современной математики. Например, несмотря на отличие подходов в разных программах обоснования математики, существование актуальной бесконечности не противоречит математической интуиции, и такая бесконечность воспринимается математиками даже лучше, чем потенциальная бесконечность, которую философы не зря прозвали “дурной”. Эталонным примером бесконечного со времен Пифагора является ряд натуральных чисел, бесконечность которого Гегель назвал “дурной”.

Логическим и математическим основанием для столь пренебрежительного “определения” бесконечности данного ряда является, по мнению математика А.А. Зенкина, следующая аргументация: “С точки зрения фундаментального свойства "быть натуральным числом", переход от n к $n+1$ не зависит от величины n, т.е. такой переход не порождает никакого нового качества относительно применимости операции "+1" к очередному n, независимо от того, каким бы большим ни было это n, т.е. здесь вновь нарушается диалектический закон перехода количества в новое качество. … Правда, уже после первой сотни онтологическое "наполнение" числительных начинает размываться, а после первой тысячи все числительные "коллапсируют" в абстрактное "много"” [159, с.425]. Это существенный момент, который позволяет понять смысл движения на категориальной стадии количества, поскольку на категориальной стадии качества он способствует новому пониманию парадокса дурной бесконечности, то есть скучного прогресса в бесконечность. Поэтому, с точки зрения философии, важна многомерность развития, противостоящая тому, что Гегель называл “дурной бесконечностью”, понимаемой как скучное суммирование чего-то однородного. Поскольку развитие как процесс, или система, связывается с множеством измерений, то в силу этого результат тоже должен быть многомерным. Философский и содержательный аспект этой проблемы проясняет философ Н.В. Мотрошилова: “Согласно Гегелю, должна быть "положена" не только возможность выходить за пределы определенного количества в его "иное" – что как будто бы и есть бесконечность, но нужно, чтобы стала "исчезающей" и эта неистинная, дурная бесконечность” [292, с.291]. Гегель показывает, что именно в системном движении познания постигаются противоположные аспекты, с точки зрения их единства, поскольку постижение единства, например, натурального ряда чисел, происходит не раньше, чем совершается переход от конечного к бесконечному, а потом осуществляется новое отрицание и новый переход к конечному. Понятие бесконечности встречается во многих научных системах. Но важно отметить, что использование понятий актуальной и потенциальной бесконечности в теории множеств, как правило, не связано с предметно-практической и эмпирической познавательной деятельностью.

Следует также отметить, что философски притягательной чертой актуальной бесконечности для математики является ее логическая простота, так как с актуальной бесконечностью легче обращаться, чем с потенциальной бесконечностью. Поэтому философская идеология актуально-бесконечных множеств проникла в сознание математиков задолго до строгого обоснования теории вещественных чисел. Для человека как духовного существа вполне понятны реалии “горнего мира”, как царства бесконечности и вечности, поскольку там нет ни времени, ни пространства. “Сейчас нам ясно, – пишет философ математики В.Н. Тростников, – что математика так же двухприродна, как и сам человек: одна часть ее занимается числами, а другая бесконечностью. Но, как для человека горний мир важнее дольнего, так и в математике вторая ее часть важнее первой, так как ее познавательные ресурсы богаче, что показано Парисом и Харрингтоном” [449, с.149]. Речь идет о том, что познавательный потенциал поднялся на новый уровень благодаря фигурирующему в дифференциальном и интегральном исчислении понятию актуальной бесконечности, невыразимому в логико-арифметическом языке. Математики и логики Джеф Парис и Лео Харрингтон высказали предположение, что некоторое потенциально-бесконечное арифметическое множество обладает определенным арифметическим свойством, а затем показали, что это предположение нельзя доказать в арифметике. После этого они допустили существование некоего актуально-бесконечного множества и только на этом допущении, не используя никаких свойств этого множества, доказали свое предположение. С точки зрения современной методологии математики, теорема Париса-Харрингтона означает, что математический анализ не сводим к арифметике, поскольку арифметика оперирует только с рациональными числами, а анализ – с вещественными числами, выразимыми в философской категории актуальной бесконечности, которую нельзя определить через потенциальную бесконечность с помощью абстрактного математического понятия предельного перехода.

С одной стороны, отличительным признаком полной структурной стабилизации развитых математических теорий является их аксиоматизация. Но, с другой стороны, нельзя не отметить, что несущую конструкцию современной математики можно представить в виде постепенного накопления “некорректируемых структур”, к которым, несомненно, относятся теория чисел, аналитическая и алгебраическая геометрия, дифференциальные и интегральные уравнения, вещественный, комплексный и функциональный анализ и многие другие теории. Проиллюстрируем этот тезис на примере функционального анализа. Одна из классических интерпретаций функционального анализа, отраженная в соответствующем университетском курсе, состоит в том, что его основная задача – давать теоремы существования и единственности решений уравнений в частных производных, что вполне справедливо для линейной теории, получившей значительное развитие. Но, как отмечает современный французский математик Рене Том: “истинная цель нелинейного анализа остается весьма неопределенной. Вполне возможно, что изучение "общего" уравнения в частных производных не представляет большого интереса, так как оно, по-видимому, не имеет локальных решений. Локальные решения, существующие при аналитических ограничениях (как в случае Коши – Ковалевской), по-видимому, не обладают достаточно сильной устойчивостью, за исключением немногих известных случаев, связанных с гиперболическими операторами” [444, с.52]. Тенденции развития современной математики показывают, что уменьшается вклад чисто бесконечномерных аспектов математических теорий, например, в дискретной математике. Классический функциональный анализ можно, например, охарактеризовать как обобщение линейной алгебры на случай бесконечномерных пространств. Подчеркивая его бесконечномерную специфику, принято напоминать, что в функциональных пространствах линейные операторы не обязательно непрерывны, а примеры соответствующих разрывных линейных операторов как раз и строятся с помощью аксиомы выбора. Склонный к топологии математик может считать, что современный функциональный анализ в значительной мере представляет собой изучение бесконечно мерных пространств.

Справедливости ради следует все же отметить, что наиболее интересные находки в современной математике обычно весьма живучи, в том смысле, что “излечимы” от технических ошибок в математических доказательствах, хотя и требуют иногда уточнений и расширений условий выполнения теорем. Определенные сложности обоснования математики связаны еще и с тем, что в связи с развитием многозначных логик, нестандартного анализа и нечетких множеств, не говоря уже о переходе на вероятностный язык, философы математики, столкнувшись с “онтологической неточностью”, стремились описывать ее точно. Новые тенденции в обосновании единства математики обусловлены также применением компьютера, который рассматривается не как калькулятор, а как незаменимый инструмент математического познания. Но для эффективного использования компьютерной математики надо решить следующую философскую задачу: как найти способы делать более реальные модели без потери информативности. В контексте рассматриваемой в этом исследовании новой концепции обоснования математики сошлемся на прогностическое высказывание Стивена Строгаца: “Если мы хотим достигнуть эры пробуждения разума, нам необходимо бежать от демона размерности. Надеюсь, в этом помогут компьютеры. Когда-нибудь они сумеют визуализировать любое количество измерений. Они уже делают за нас грязную работу, создавая модели. Придет день, и они выведут закон самоорганизации сложных систем” [432, с.110]. Возросшая потребность в средствах методологического обеспечения математических исследований в контексте единства математики в значительной мере обусловлена усилением взаимодействия, взаимозависимости и взаимопроникновения различных новых областей и разделов математической деятельности, а также усложнением взаимно обусловленных связей ценностных, истинностных и практических сторон современной научной деятельности.

При реализации этого прогноза необходимо помнить о вере в духовную особенность математики – она представляет собой “создание чистого духа по Платону”. Вера в абсолютную ценность математики связана не только с верой в существование абстрактных математических объектов, но и со справедливостью ее теорий. Например, В.И. Арнольд ссылается на следующее высказывание академика А.Н. Колмогорова из беседы с ним: “Я ничего не вывожу из исходных аксиом или определений (как говорят физики, из "первых принципов"): мои результаты не доказаны, а верны, и это гораздо важнее!” [20, с.29]. Это по существу платонистский призыв, которой можно рассматривать как один из аспектов философии и познавательной деятельности работающего математика, хотя он не устраняет методологическое требование к математической деятельности быть точной и строгой. К этому можно добавить, что, занимаясь развитием нового математического исчисления, математики вряд ли смогли бы получить свои результаты, если бы они были вынуждены постоянно “просеивать их через сито” современных критериев строгости. В частности, математические вычисления отражают необычайную веру в могущество символизма, а многочисленные практические результаты, полученные с его помощью, только укрепляют эту веру. Поэтому можно предположить, что умеренный вариант математического платонизма – это философская вера занимающихся наукой математиков, которая способствует не только пониманию философского единства современной математики, но и формированию единства философских направлений обоснования математики в контексте системного подхода.

Польский математик Гуго Штейнгауз оправдывает ее следующим образом: “Вера в абсолютную ценность математики связана с верой в существование таких математических объектов, как числа, функции, точки, множества или поверхности. Это удивительная религия, и в этом она подобна большинству других религий с гораздо большим числом адептов, которые верят, что некоторые сверхъестественные создания наделены особым видом существования, с позиций которого обычное существование является чем-то иллюзорным и преходящим" [489, с.146]. Платонистская вера необходима математикам еще и потому, что стремительное развитие математического анализа привело к конструированию таких математических объектов, которые становились все менее доступными для интуиции, например, как функции комплексного переменного. Такая философская доктрина, или по существу концепция самообоснования математики, вытекает из специфической философско-методологической точки зрения и имеет многочисленных сторонников в кругах математиков, далеких от реальной математической практики. Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что математические структуры существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в математической реальности. Помимо экстраполяции накопленного математического опыта реальный прогресс математики неизменно стимулировался озарениями внутри самой математики, подчеркивающими единство многообразия математического знания, что непременно должно сказаться и на понимании единства направлений обоснования современной математики, доведя его до приемлемого, с точки зрения философского анализа, уровня аргументированности и строгости.

Недостаточно только различать существующие направления обоснования математики, необходимо объединять их в качестве единства противоположностей, гарантом которого выступает математическое мышление. Например, умеренный платонизм полезен и эффективен в процессе обоснования математики в контексте единства направлений обоснования математики, прежде всего, в вопросах онтологизации объектов математической мысли, а также связан с понятием математической истины, которое выходит за пределы теории формализма и является в определенном смысле абсолютным, о чем свидетельствует умеренный платонизм профессиональных математиков. Однако, с одной стороны, "платонизм – это лишь теория. В нем предполагается то, что должно быть доказано – что математические истины существуют в некотором особом царстве, никак не соотносящемся с человеческой деятельностью по формулированию математических утверждений" [192, с.7]. Но, с другой стороны, как уже было установлено, логика недостаточна для обоснования даже принципов арифметики, а сама арифметика не может оправдать использование понятия бесконечного множества – базового понятия современной математики. Индуктивистская идея обоснования математики “снизу вверх” не соответствует реальной логике генезиса развития современного математического знания. Поэтому можно попытаться соединить в современной философии математики направления формализма, интуиционизма и платонизма, чтобы показать плодотворность такого синтеза в контексте проблемы обоснования математики. Рассматривая содержательные математические аспекты классических эпистемологических учений, современная философская мысль вынуждена заимствовать для новых подходов к проблеме обоснования современной математики отдельные элементы своего метода у этих учений. Опора на такие предпосылки является принципиальным подходом в разработке новой концепции обоснования математики, делающей возможной преемственность философского и математического опыта, не отказываясь от действующих классических программ обоснования, а только ограничивая их сферу действия.

Для этого надо признать существование абстрактных понятий, данных в интуиции и математическим способом формализованных, в качестве самостоятельных платонистских сущностей. Умеренный платонизм играет важную роль в дальнейшем исследовании, а именно в системной триаде новой методологической концепции программы обоснования математики. Для аргументации этого положения с помощью философско-методологического анализа проблемы обоснования необходимо предварительно выявить общую схему, по которой строятся в настоящее время обобщенные системные концепции. “Идея системности заявлена именно в Предисловии к "Феноменологии духа", причем столь определенно, – утверждает Н.В. Мотрошилова, – что в мировой литературе и после Гегеля трудно, пожалуй, найти такую апологию системного принципа” [292, с.120]. Учитывая разнообразие подходов к исследованию систем и структур, на первых этапах анализа такое исследование, как правило, сопряжено с некоторым приближением к реальной ситуации. Это обусловлено тем, что системный подход – это не созидание, не воссоздание, не конструирование, а реконструкция системы. Соответственно получаются два метода реконструкции системы: с одной стороны, анализ, то есть разложение целого на части, а с другой стороны, концептуальный синтез, то есть придание системе упорядоченности, единства и целостности. Системный подход в проблеме обоснования современной математики рассматривает исследуемые направления обоснования как сложные структуры, состоящие из многих взаимосвязанных элементов в контексте единства математического знания. Однако осознание единства современной математики как системы научных знаний требует выяснения вопроса о статусе математических понятий и сопоставления их с реалиями бытия.

2.3 Системный подход к проблеме обоснования математики в контексте гегелевской концепции саморазвития

Философский анализ выявляет три возможных подхода к обоснованию современной математики: онтологический, логико-гносеологический и системно-методологический, которые можно рассматривать как различные формы рефлексии в философии математики, развитые философами, логиками и математиками. С этими подходами хорошо коррелируются исторически обусловленные интерпретации системности научного знания. Системным представлениям о науке, в частности математике, по мнению философа науки А.П. Огурцова, свойственны несколько следующих важных аспектов: "Во-первых, системность научного знания может анализироваться под углом зрения системности понятий, развитых в той или иной теории. Это гносеологический аспект системности научного знания. Во-вторых, системность научного знания может рассматриваться под углом зрения некоторой системной модели предмета исследования – онтологический аспект. В-третьих, системные представления о науке могут получить методологическую форму. В этом случае речь идет об определенных нормах построения систем теоретического знания" [317, с.154]. Именно на рубеже XIX–XX веков возникает новый способ анализа системности научного знания, отличающийся от предыдущих тем, что упор в нем делается на методы конструирования теоретических систем. Хотя на всех исторических этапах интерпретации системности математического знания эти три подхода выступают в философском единстве, один из них, в контексте проблемы обоснования математики, в определенный период становился главенствующим. Проанализируем выявленные подходы к обоснованию более подробно.

Онтологический подход к проблеме обоснования связан с экспликацией непротиворечивых математических теорий, исходя из онтологической истинности их оснований и несомненной истинности их принципов, что, в свою очередь, требует философского и методологического прояснения понятия математической истинности. Говоря о плодотворности этого подхода в обосновании, можно выделить следующие наиболее существенные его философские аспекты. Прежде всего, важный вопрос касается онтологии как способа существования математических объектов, поскольку первичные представления математики покоятся на идеализациях, точнее, на предметной онтологии, порожденной деятельностной ориентацией математического мышления. В частности, философское понимание простейших математических теорий, как формальной онтологии, содержит в себе существенный момент истины. Понятие истины в теоретической математике является достаточно сложным понятием для современных математических теорий в связи с ее интерпретациями в рамках различных концепций обоснования в постгёделевской философии математики. Математическую онтологию можно интерпретировать как “онтологию возможного”, поскольку математическая онтология – это еще не реальность, а только путь к постижению математической реальности. Онтологический аспект специфики математики проявляется еще в том, что в ее абстрактных структурах содержатся базисные интуиции математического понимания, которые синтезируются в составе математических теорий и структур. Но, как утверждает В.Я. Перминов, самоочевидность исходных математических представлений имеет вполне объективное основание – “это признак онтологической значимости этих представлений, принадлежности их к универсальной форме мышления” [333, с.50]. А принятие математического доказательства как завершенного – это не акт согласия математического сообщества, а констатация свершившегося факта на уровне категориальных представлений. Кроме того, понимание онтологической природы исходных математических идеализаций дает объяснение философскому факту их синтетичности. Однако в целом использование понятия “обоснование” в онтологическом аспекте оказалось малопродуктивным, так как главным недостатком в онтологическом подходе к обоснованию математики явилось отождествление этого понятия с объектом исследования, то есть с математикой. Поэтому, например, при обосновании синтетичности математики следует исходить не из конкретных математических примеров, а из обоснования логико-гносеологического статуса математической теории в целом.

Логико-гносеологический подход к проблеме обоснования связан со снятием неоправданных запретов на исходные принципы и логику редукции программ обоснования, выдвинутых в начале прошлого века, через рационализацию их гносеологических допущений. Он придает особый статус вопросам теории познания в философии, поскольку в логико-гносеологическом плане обоснования математики – это те фундаментальные принципы и идеи, которые направляют общий ход научного поиска. Заметим, что разные принципы направлений обоснования математики, по существу, опираются на различные как математические, так и гносеологические принципы. Например, с гносеологической точки зрения причина кризиса теоретико-множественного обоснования математики заключается в следующих причинах. Во-первых, в абсолютизации возможной применимости принципов теоретико-множественного мышления в математическом познании, а во-вторых, в крайней степени абстрагирования и идеализации, на которых основаны сами принципы теоретико-множественного способа мышления. Философский анализ причин этого кризиса убеждает в недооценке различных направлений в обосновании современной математики. Так как современную математику можно характеризовать как систему абстрактных математических структур, то при раскрытии концептуальных различий отдельных программ, в известной мере абстрагируясь от указанных формальных структур, приходится иногда переносить акценты на концептуальный и методологический инструментарий. Тем не менее, значение математических абстракций может быть раскрыто лишь в системе абстрактных математических структур. “Но абстрактность, по определению, есть характеристика "системной модели", следовательно, – предполагает Л.К. Науменко, – релятивная система должна быть "взвешена" в какой-то другой системе, в которой эта релятивность имеет уже не логико-гносеологический, а объектно-диалектический смысл” [302, с.101]. Поэтому постепенно складывалось предположение, что онтологический и логико-гносеологический подходы к обоснованию математики переплетаются. Хотя, в связи с усложненностью абстрактных математических объектов, в современной математике отдельные онтологические и гносеологические основания, необходимые для целостного философского обоснования, не совместимы. Для понимания этого есть реальные философские аргументы, так как “онтология (математики) должна ответить на вопрос, какие типы "математических объектов" допустимы в математических рассуждениях, а гносеология – на вопрос о том, какие (гносеологические) операции или процедуры допустимы с подобными объектами” [180, с.92]. К недостаткам логико-гносеологического подхода к обоснованию математики можно отнести то, что, существенно уточнив смысл понятия “обоснование” и выявив, с точки зрения редукции программ логицизма, формализма и интуиционизма, ряд его важнейших признаков, он не вышел на путь понимания системности самой процедуры обоснования математики.

С точки зрения методологии обоснования математики, именно системный подход представляет собой философски развернутый процесс восхождения от абстрактного к практически реализуемому, с помощью решения проблемы отношения содержания и формы современного математического познания. Системный подход к исследованию науки в его современном виде – это по существу огромное достижение философии науки XX века. Аргументировать новое словосочетание “системно-методологический” подход в применении к проблеме обоснования математики можно следующим образом. Согласно философскому определению А.И. Ракитова: “Системный подход в его современном понимании представляет собой некоторую особую методологическую (в широком смысле) установку, регулирующую направление тех или иных философских и специально научных исследований, выбор соответствующих объектов, а также теоретических и экспериментальных средств для их изучения” [368, с.53]. Применение математических методов для обоснования решений в различных областях человеческой деятельности требует обоснования самой математики, для чего необходим целостный, системный подход ко всем стадиям этого процесса. Философский подход к проблеме обоснования вследствие своей общности не может раскрыть специфических механизмов обоснования современных математических теорий, поскольку на каждом новом уровне развития математики их взаимодействие обогащается новым конкретным содержанием. Поэтому с философско-математической точки зрения представляет особый интерес системно-методологический подход к проблеме обоснования, так как он способствует выявлению новых методологических подходов к проблеме обоснования современной математики. В частности, многообразие системных моделей обоснования выдвигает методологическую проблему их синтеза, что в свою очередь ставит системный подход к обоснованию математики в проблемную ситуацию. Синтез направлений обоснования математики оборачивается проблемой интеграции целей математики как науки, которые оказываются функциями либо системной организации самой математики, либо социокультурных запросов общества, либо ее практического применения, то есть функцией системно-методологической, а не логико-гносеологической.

Методологическая составляющая системно-методологического подхода к обоснованию математики состоит в исследовании методологии математического познания, соотношения между различными методами познания, а также в определении сферы их эффективности и применимости. Методологическая тональность исследования, преодолевающая “гносеологический пласт” вопросов, была задана в системном движении философии науки с начала его возникновения. Например, заслуга Иммануила Канта в интерпретации системности научного знания “состоит не только в четко осознанном системном характере научно-теоретического знания, но и в превращении этой проблемы в методологическую проблему” [317, с.174]. Хотя системное движение затронуло все аспекты научной деятельности, философские работы в области теоретических основ системных исследований фактически охватывают три проблемы: онтологические основания системных исследований; гносеологическое обоснование системных исследований; методологические подходы системного познания. При этом естественно возникала двойственность толкования в зависимости от того, с каких позиций ведется рассмотрение. Поэтому большинство философских работ в области системной проблематики оказалось вынужденным затрагивать одновременно весь спектр онтологических, гносеологических и методологических аспектов, не прибегая, как правило, к четкому их разграничению. Все это непосредственно относится и к проблеме обоснования математики, поскольку системный подход способствует как анализу математического стиля мышления, так и формированию концептуальной системы обоснования современной математики. Это обусловлено тем, что математическое знание всегда системно. Следовательно, с точки зрения обоснования математики, вопрос заключается не в том, является ли математическое знание системным образованием, а в том, как понимать эту системность в контексте проблемы обоснования. Прежде всего следует подчеркнуть, что проблема обоснования математики оказалась гораздо сложнее, чем первоначально предполагалось.

В современной философской литературе упоминаются различные системно-методологические концепции. Специалист в области системной методологии В.Н. Садовский утверждает, что "в завершившемся столетии таких концепций было, как минимум, пять" [400, с.25]. Среди них он выделяет хорошо известную "общую теорию систем" Людвига фон Берталанфи, представленную научному сообществу в середине 30-х годов прошлого века, и направление в системно-методологическом подходе, связанное с развитием синергетики и построением теорий самоорганизации, которые также оказываются системными образованиями. Философский анализ литературы позволил выделить следующие положения, характеризующие развитие системно-синергетического подхода. Во-первых, современные направления системного подхода, к которым можно отнести и системно-синергетический подход, отличает акцентированное фокусирование на специальных классах систем, что позволяет выделить и исследовать особенности их структуры и функций, не выявляемые ранее при изучении систем в общем случае. Во-вторых, специальные классы систем объединяет процессная ориентация, заключающаяся в переходе от рассмотрения системы как единства взаимосвязанных элементов к пониманию системы как единства конституирующих ее целостность процессов, а также артикулирование сложности системы в качестве фундаментальной характеристики строения системы. В-третьих, системно-синергетический подход, с точки зрения обоснования математики, допускает поворот к релятивизму, поскольку все утверждения о неизменных основаниях оказались относительными в современной эпистемологии, в связи с чем возрастает роль субъекта познания, который признается социально и культурно обусловленным субъектом.

Различие естественных источников формирования математических стилей и традиций исследования через неоднородность эпистемологического статуса философско-математического познания проявляется в особенностях системного подхода к программам обоснования математики. Но для уточнения функций системного подхода в указанном контексте необходимо дать хотя бы относительно развернутое философское представление об этих функциях. "Основные функции нормативного методологического исследования, – в соответствии с философским анализом Э.Г. Юдина, – состоят в: 1) обеспечении правильной постановки подлежащих научному анализу проблем, 2) определении средств для решения поставленных задач и проблем, 3) разработке способов совершенствования организации научных исследований” [496, с.140]. Практика системных исследований в философии науки показывает, что из перечисленных функций нормативной методологии, по его утверждению, именно системный подход имеет непосредственное отношение к важнейшему этапу правильной постановки научной проблемы. Роль системного подхода в решении уже поставленных проблем, например, проблемы обоснования математики, значительно скромнее, чем в их постановке, поскольку в системном подходе до сих пор не разработан эффективный инструментарий универсальных методов решения философских проблем. Здесь уместно вспомнить рассуждение Гегеля о том, что ни одно определение не представляется содержательным до тех пор, пока не выявлен смысл входящих в него понятий. Поэтому, следуя Гегелю, прежде всего необходимо выяснить, что такое система? “Это задача системной методологии, – поясняет Л. фон Берталанфи, – поиск ответа на вопрос, что понимать под "системой" и как системы реализуются на различных уровнях наблюдаемого мира. Что следует определять и описывать как систему – вопрос не из тех, на которые можно дать очевидный или тривиальный ответ” [45, с.34]. С учетом сказанного определим место, занимаемое системным подходом в философской проблеме обоснования современной математики.

В качестве предварительного анализа сошлемся вначале на следующую интересную реконструкцию: “Принципы системности знания разрабатывались еще в древнегреческой философии и науке. По сути, уже Евклид строил свою геометрию как систему, и именно такое изложение ей придал Платон. Однако применительно к знанию термин "система" античной философией и наукой не использовался” [2, с.172]. Слово “systema”, как известно, греческого происхождения и подобно многим философским понятиям выражает определенные акты деятельности, например, “нечто, поставленное вместе” или “нечто, приведенное в порядок”. Представление о системе у древних греков опиралось на системность бытия, которая обусловливает системность знания. “Мысль о системности бытия развертывается у Платона не в рассудочно-дискурсивных понятиях, а в некотором множестве интуиций, характеризующих упорядоченность бытия, его организованность в числовых пропорциях. Употребление Платоном слова "система" менее всего базируется на концептуальных дистинкциях. Его мышление интуитивно и постоянно обращается к смысловым моделям, имеющим наглядно вещественный и телесный, но вместе с тем идеально-математический лик” [317, с.158]. В тех диалогах, где используется понятийный смысл слова “система”, говорится о числовом сочетании или гармоническом единстве, что указывает на арифметические истоки интерпретации Платоном системности бытия. По существу понятие “система” не имело у Платона однозначного понятийного смысла.

Поэтому в контексте философской постановки проблемы обоснования математики требуется, во-первых, более четкое определение понятия “система”, во-вторых, анализ системных характеристик математического знания, способных отразить специфику системного знания, и, в-третьих, выявление принципов построения нового математического знания, фиксирующих специфику его предметного содержания. В Новое время ряд важнейших для философского мышления понятий был поставлен в теснейшую связь с понятием “система”, в частности с понятиями действительное знание, истина и наука. Было также введено понятие “научная система”, поскольку, согласно Гегелю, “истинной формой, в которой существует истина, может быть лишь научная система ее” [292, с.120]. В XX веке на основе научной методологии и эпистемологии был осуществлен философский прорыв в универсализации предмета познания через понятие “система” как форму представления предмета познания. В философии науки исследуемый объект рассматривается как система, если результирующий процесс можно рассматривать как продукт взаимодействия его частей. “Первоначально, в широком смысле и не очень точно, – оговаривается Р.Л. Акоф, – систему можно определить как любую сущность, концептуальную или физическую, которая состоит из взаимозависимых частей” [5, с.145]. Заметим, что определение понятия “система” это лишь подготовительная стадия для осуществления философско-методологического исследования и изучения процессов математического познания. Рассматривать или не рассматривать в качестве системы некоторую сущность, состоящую из частей, зависит от поставленной задачи, точнее, интересуют ли нас сущностные характеристики частей и их взаимодействий. Одним из требований, предъявляемым философами науки к системной классификации, наряду с упорядоченностью, является структурированность. Кроме того, различные современные методологии научного мышления по-своему тяготеют к рационализму. Их объединяет общая цель – строго придерживаться рационалистических принципов науки, хотя то, что, например, современная физика называет действительностью, – это не всегда действительность, а, скорее, тот или иной миф о действительности.

В работе “Ценность науки” французский математик, физик и философ Анри Пуанкаре объясняет это так: “Вы можете подняться к вашему логическому идеалу, только порвав те связи, которые соединяют вас с реальностью. Ваша наука непогрешима, но она может оставаться такою, только замыкаясь в свою раковину и запрещая себе всякое сношение с внешним миром” [361, с.164]. Поэтому системный подход, используемый в анализе проблемы обоснования, можно рассматривать как новый путь к обоснованию современной математики на основе идеи эволюции и развития математических теорий. Но в чем конкретно состоит и выражается методологическая природа системного подхода? В лингвистическом смысле ответ на этот вопрос содержится в самом термине “системный подход”. Более конкретно можно сказать, что “методологическая ценность этого направления состоит прежде всего в том, что оно содержит и в развернутой форме выражает требование нового, по сравнению с предшествующими, подхода к объекту изучения. Этот момент очень важно подчеркнуть: системный подход сам по себе как таковой не дает решения проблемы непосредственно, он является орудием новой постановки проблем” [495, с.43]. С точки зрения анализа проблемы обоснования математики, детализация методологических функций, выполняемых системным подходом, связана с его двойственной сущностью в научном познании. С одной стороны, системный подход представляет собой общенаучную методологию, которая развивается под воздействием потребностей научного мышления в целом. С другой стороны, методологическая эффективность системного подхода, не представляющего специально-научную методологию, все же измеряется тем, в какой мере он способствует конструктивному построению и реальному развитию конкретных предметов исследования. Системный подход претендует на философскую универсальность специального рода. Это проявляется в том, что системный подход к объекту исследования по существу тождественен его целостности, выявление которой не может быть ограничено одним типом связей, а охватывает всю их совокупность по отношению к данному объекту.

Для конкретизации этого положения сначала можно привести ряд аргументов Людвига Витгенштейна, связанных с темой системности и целостности: “Начиная верить чему-то, мы верим не единичному предложению, а целой системе предложений. <…> И очевидной для меня делается не единичная аксиома, а система, в которой следствия и посылки взаимно поддерживают друг друга” [89, с.341]. По существу это означает, что на роль обоснования годится не отдельное направление, а сложная система, представляющая собой “целокупность суждений”. Для этого необходимо обсудить, что понимается под сложными системами, а именно, что делает сложную систему сложной? С философской точки зрения сложность – это понятие относительное. Сложность системы не сводится исключительно к тому, что она состоит из большого количества элементов (подсистем). Это не главное, определяющим фактором здесь является нетривиальность и “запутанность” отношений между элементами (подсистемами) системы, то есть все упирается в количество и характер взаимоотношений. Как заключает Герман Хакен, “современная наука сама по себе является сложной системой, что становится совершенно ясным, если принять во внимание огромное число разнообразных областей знания” [461, с.20–21]. Тем не менее, можно говорить и о сложном поведении системы. Современная философия науки выявила такие необходимые и сущностные основания сложного, как взаимодействие и информация. Без этих понятий обоснование сложного поведения системы было невозможно. Поэтому системное движение в философии науки было направлено на выявление оснований, порождающих свойства сложных объектов с помощью реконструкции научного знания, и закрепление философско-методологических процедур в системной методологии научного познания. Оно привело к пониманию системы как единства оснований и обосновываемого, и это отношение среди всего многообразия отношений между составляющими сложной системы, например программы обоснования современной математики, является системообразующим. Отсюда вытекает, что система, а в дальнейшей реализации обоснования математики системная триада, как форма обоснования есть именно та фундаментальная познавательная конструкция, которая способна выражать процедуру обоснования современной математики. Углубление методологического анализа обоснования математической теории приводит к ее экспликации и концептуализации, не ставя под сомнение логику внутреннего развития математики и ее практические результаты.

С точки зрения философии науки, системный подход – это такое направление в методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение исследуемых объектов как систем, ориентирующих на раскрытие целостности объекта, во всем многообразии его внешних и внутренних связей. Поэтому необходимо четко ответить на следующий вопрос: в каком смысле объекты математики выступают, а не произвольно рассматриваются субъектом, как системы? Еще в XVIII веке немецкий математик и философ И.Г. Ламберт подчеркивал, что “всякая наука, как и ее часть, предстает как система, поскольку система есть совокупность идей и принципов, которая может трактоваться как целое” (цит. по [317, с.174]). Конкретизация системного подхода в предметном поле философского и методологического обоснования математики представляет собой реализацию целостного подхода к проблеме обоснования. Здесь системный подход привязывает познание отдельных направлений, или частей, обоснования математики к познанию целого, точнее целостной концепции обоснования, при котором осуществляется движение как от частей к целому, так и от целого к частям. “Математика есть система правил, и этим объясняется ее природа, а также дается решение "проблемы обоснования". Математика достоверна, ибо не подлежит сомнению. Но ее достоверность имеет совсем иную природу, нежели достоверность эмпирических наук” [417, с.128]. В контексте системного подхода к математическому познанию и проблеме достоверности математического знания методология как философское учение о принципах научного познания должна в этом случае сформулировать принципы организации системного строения математических теорий. В условиях сложнейшей дифференцированности математического знания это способствует как выявлению путей философско-методологического синтеза направлений обоснования математики, так и осмыслению их неизбежной взаимной дополнительности, учитывающей другие методологические подходы.

Системный подход к проблеме обоснования математики эксплицирует также самоценность современных математических методов в контексте углубления философского понимания математического взгляда на мир действительности. Соответственно, под “принципом системности” в проблемном поле обоснования математики понимаются новые идеи, концепции и теории, удовлетворяющие некоторой философской парадигме, позволяющие в своей совокупности и взаимосвязи раскрыть методологическую целостность математического знания и способствующие философскому анализу реального развития современной математики на данном этапе развития науки. Нельзя не согласиться с Ю.В. Сачковым, который утверждает, что “системный подход видоизменяет наши взгляды и на методы познания целостных характеристик систем. Если ранее представления о целостных свойствах объектов и систем складывались на основе анализа их внешних взаимодействий, на основе того, как они проявляют себя во взаимодействиях со средой, то системный подход дополняет изучение целостности систем анализом их внутренней дифференциации. Тем самым целостные свойства систем получают обоснование, связанное с проникновением в их внутренний мир” [404, с.84]. Хотя философские предпосылки системного подхода в разных направлениях человеческой мысли уходят в глубокую древность, в науке он оформился лишь к середине XX века, когда была осознана важность рассмотрения методологии сложных объектов как системных образований. Заметим, что специалисты в области математики, имеющие перед собой вполне определенный предмет исследования, обычно не занимаются разработкой методологии процесса математического исследования, то есть решением иной, чем стоящая передними непосредственно задачи, поскольку анализ разработки методологических принципов математики – это задача философии математики.

Современная математизация естественнонаучного и гуманитарного знания также может рассматриваться как одна из форм реализации в неклассической науке положений системного подхода. Но, поскольку в философской литературе встречаются различные представления о системном подходе, то сам системный подход должен стать объектом системного рассмотрения. “Поэтому, – считает М.С. Каган, – сейчас главная методологическая задача состоит в применении системного подхода к самому системному подходу, т.е. осмыслению его как организованного множества конкретных аспектов исследования, необходимых и достаточных для полноты характеристики изучаемых объектов и находящихся в определенной взаимосвязи и взаимодействии” [162, с.35]. В контексте проблемы обоснования математики идея системности возникает при переходе к неклассической и постнеклассической науке при изучении новых направлений обоснования как системной целостности, которые могут быть охарактеризованы через взаимосвязи составляющих элементов целостной программы. Для понимания генезиса системного подхода обратимся к истории этого вопроса. Учитывая специфику математического знания, методология системного исследования в обосновании математики должна быть разработана с учетом всего диапазона системных исследований, включая самые сложные типы объектов. Это означает, что исторический аспект исследования не только не может быть выведен за пределы анализа системного подхода, но он не может быть только формально признан необходимым аспектом при сведении системного исследования к структурному анализу, осуществляемому математическими средствами. Попытка распространить теоретический аппарат термодинамики на биологические системы привела австрийского биолога Людвига фон Берталанфи к философской формулировке “общей теории систем”. Отметим, что в рамках этой системной теории изучаются формальные свойства различных сложных систем независимо от того, какова философская природа составляющих их компонентов и протекающих в них процессов.

Особый акцент Берталанфи делает на том, что “общая теория систем” не сводится к исследованию поверхностных аналогий между физическими, биологическими и социальными системами. Он “мыслит общую теорию систем как рабочую гипотезу; будучи ученым практиком, он видит главную функцию теоретических моделей в объяснении и предсказании еще не исследованных явлений и управлении ими” [44, с.39]. Например, математики могут с равными на то основаниями подчеркивать важность аксиоматического метода, но в любых подходах есть опасность слишком поспешного рассмотрения теоретической модели как завершенной и окончательной. Тем не менее, хотя строго определенный понятийный аппарат общей теории систем отсутствовал, даже несмотря на ее описательный характер, философам удалось эксплицировать главное отличие ее объектов, состоящее в свойстве особой целостности, то есть определимости свойств объекта в составе системы как целого. “Говоря "материальным" языком, – поясняют В.А. Лекторский и В.Н. Садовский, – мир, то есть целостность наблюдаемых явлений, обнаруживает структурное подобие, проявляющееся в изоморфизме структур разных уровней. В результате Людвиг фон Берталанфи приходит к концепции синтеза наук, которую в противоположность "редукционизму" (то есть сведению всех наук к физике) он называет "перспективизмом"" [234, с.72]. В философской литературе достаточно подробно проанализированы принципы исследования Берталанфи в контектсе его общей теории систем. Во-первых, им используется изоморфизм, но как строгое математическое понятие, оно имеет четкие границы применимости, поэтому, в силу своих логических ограничений, оно плохо способствует философскому проникновению в суть дела. Во-вторых, это путь "перспективизма" в реализации единства науки, который ведет к ограничению задачи науки чисто феноменальным описанием процессов, облеченным в математическую форму. Кроме того, употребляя философский термин "редукционизм", Берталанфи смешивает сведение сложных закономерностей к простым закономерностям и выведение из простых закономерностей более сложных закономерностей.

Подчеркнем, что то, что реально удалось сделать Людвигу фон Берталанфи, относилось больше к исследованию определенных классов систем, например, открытых систем, чем к анализу законов, относящихся к системам в целом. "Безусловным вкладом общей теории систем является выработка ряда общих понятий, одинаково описывающих сходные явления из разных областей науки, – подчеркивает математик В.А. Малышев, – например, конкуренция, передача информации, устойчивость, самоорганизация, рост, формообразование, открытые и замкнутые системы, подсистемы и т.д." [254, с.81]. Хотя многие из них существовали и ранее, но в философии несомненна польза от выработки единого взгляда на их общее употребление и общего языка в философии науки. С одной стороны, этим понятиям были найдены аналоги в современной математике, например, устойчивость и предельные циклы в качественной теории дифференциальных уравнений. Но, с другой стороны, единый взгляд создает опасную иллюзию возможности все объяснить простым или не столь простым дифференциальным уравнением. Поэтому, правильнее будет исходить из интуитивного представления о системности как некоей "направленной упорядоченности". Это следует понимать в том смысле, что системность противопоставляется бессистемности как связь особого рода, подчиняющаяся системообразующему принципу.

Хотя это не гарантирует учет всех сторон функционирования системы, поскольку "системообразующий принцип всегда что-то "обрубает", "огрубляет", "высекает" из бесконечного разнообразия конечное, но упорядоченное множество элементов и отношений между ними" [395, с.71]. С точки зрения философской проблемы обоснования математики, получив виртуальную иллюзию объяснения, можно потерять реальную возможность предсказания, что может стать тормозом в развитии науки. Следует все же отметить вполне определенную связь системного подхода с математикой, так как, например, общая теория систем развивалась в математических понятиях, поскольку точный язык математики позволяет на основе дедукции подтверждать или опровергать теории. Не случайно Людвиг фон Берталанфи по этому поводу сказал: “Системно-теоретические подходы включают общую теорию систем (в узком смысле), кибернетику, теорию автоматов, теорию управления, теорию информации, теорию множеств, теорию графов, теорию сетей, реляционную математику, теорию игр и решений, вычислительную математику, моделирование и т.п.” [45, с.28]. Но, с другой стороны, и в современной математике системный подход реализуется, например, при применении математической логики к алгебраическим понятиям. Благодаря работам, основанным на идеях системности, представляющих новую парадигму науки, происходит смена методологических ориентаций обоснования математики.

Традиционная парадигма обоснования математики опиралась на структурное или формальное представление математической теории как наиболее адекватно соответствующей постановке проблемы обоснования. Представление о парадигме ввел американский философ и историк науки Томас Кун. Согласно интерпретации методолога математики В.В. Налимова: “Парадигму можно представлять как некую весьма размытую систему аксиом, которая в каждый момент определяет, что считать научным в науке” [299, с.65]. Ее роль в философии математики противоречива. С одной стороны, парадигма позволяет концентрировать совместные усилия ученых на заданном направлении с помощью каналов научных коммуникаций, а с другой стороны, парадигма может оказывать тормозящее влияние на математику, в силу того, что научным может стать то, что раньше считалось ненаучным. По этому поводу уместно сослаться на следующее методологическое замечание академика Н.Н. Моисеева: “Один из крупнейших русских математиков А.М. Ляпунов считал необходимым любую, однажды поставленную физическую задачу изучать в дальнейшем как задачу "чистой математики", т.е. не использовать никаких соображений неформального характера” [281, с.15]. Но, например, в задачах исследования операций последовательно придерживаться этой точки зрения очень трудно, поскольку успешное завершение исследования требует на всех его этапах соображений неформального характера. Так как Т. Кун не предложил четкого определения понятия “парадигма”, которое стало предметом многочисленных философских дискуссий, то, чтобы избежать непонимания необходимо определить смысл, придаваемый этому понятию.

Можно сказать, что ученые используют одну и ту же парадигму при выполнении следующих общих условий: 1) если они стремятся разрешать родственные по смыслу или тесно связанные между собой проблемы; 2) если они используют единый или близкий понятийный аппарат; 3) если они применяют одну и ту же близкую методологию. Это весьма близко к тому смыслу, который сегодня вкладывают в данное понятие ученые, в частности математики, не достаточно хорошо знакомые с философией науки. С учетом укоренившихся эпистемологических противоречий направлений научной мысли по философии и истории науки для понимания методологии обоснования математики следует обратить внимание на работу венгерского философа и экономиста Я. Корнаи, который ввел понятие “системная парадигма”. Одним из главных свойств системной парадигмы он считает следующее: “Ученые, мыслящие в рамках системной парадигмы, заняты изучением системы в целом и взаимосвязей между этим целым и его частями. Узкий, частичный анализ может быть важным инструментом исследования, но он не вписывается в рамки системной парадигмы” [199, с.10]. С точки зрения методологического анализа проблемы обоснования математики, в контексте системной парадигмы надо уделять особое внимание взаимосвязям различных направлений развития современной математики, поскольку у всех систем есть свои недостатки, или дисфункции, специфичные именно для них. Мышление тех, кто работает в рамках системной парадигмы, отличается от мышления тех, кто ее не использует, в частности тем, что они интересуются большими изменениями и более глубокими трансформациями. Это напрямую связано с философско-методологическим анализом проблемы обоснования математики, например, в связи с новыми кризисами переусложненности современных математических теорий.

Базовым понятием системного подхода к проблеме обоснования является понятие структуры, характеризующее специфику системного подхода и его организации. Структура задает способ связи различных элементов в системе как со стороны анализа свойств составляющих ее элементов, так и со стороны изучения целостных свойств системы. Развитие системных исследований повлияло на способы познания отдельных программ обоснования математики, которые стали рассматриваться как элементы системы общей программы обоснования математики, в рамках которой они ставятся в зависимость от других программ обоснования, составляющих основу этой системы. “Свойства отдельных объектов все в большей степени рассматриваются не просто как их индивидуальные "отчужденные" свойства, а как системообразующие, соответственно, более "глубокие" свойства отдельных объектов обнаруживают себя, когда объекты образуют системы, входят в состав определенных систем” [403, с.47]. По мере развития математического познания обнаруживается также недостаточность представлений об отчужденных или противоборствующих программах обоснования современной математики в анализе математической реальности, само существование которых взаимно обусловлено. Такой взгляд на проблему обоснования современной математики определяется вхождением в исследования представлений о структуре обоснования, в которой целостные свойства оказываются в зависимости от вида и типа особенностей структурных взаимоотношений. Следует также подчеркнуть, что "системный метод обосновал глубокую внутреннюю связь не только между целым (системой) и ее частями (элементами), но и между простым и сложным" [393, с.113]. Сказанное о системном подходе к обоснованию математики дает основание для утверждения о том, что он непосредственно связан с разработкой базовой модели математического познания на основе структурной динамики целостных объектов.

Суть принципа системности можно свести к следующим положениям: это целостный характер объектов внешнего мира и предметов познания, взаимосвязь элементов исследуемого предмета с другими объектами и примат внутренних закономерностей объекта, его самоорганизации, над внешними связями. Эффективная системная методология должна заниматься не только проблемами взаимосвязи существующих направлений обоснования математики, но и выявлять скрытый смысл их самоорганизующегося целенаправленного поведения. Поэтому для дальнейшего философско-методологического анализа полезно иметь подходящее определение самоорганизации. Воспользуемся для начала физическим определением, данным одним из классиков синергетики Германом Хакеном: "Мы называем систему самоорганизующейся, если она без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру. Под специфическим внешним воздействием мы понимаем такое, которое навязывает системе структуру или функционирование. В случае же самоорганизации система испытывает извне неспецифическое воздействие" [461, с.29]. Именно такой философский подход к проблеме обоснования современной математики представляется наиболее целесообразным в связи с накоплением фактического материала о реальных направлениях развития математики, когда ситуация с обоснованием усложняется, и систематизация этого направления философии математики становится методологической проблемой, требующей специального внимания не только философов математики, но и самих математиков.

Современную математику в целом можно философски интерпретировать как большую систему, то есть такую систему, которой невозможно дать полное описание. Во-первых, отчасти из-за того, что для этого было бы необходимо привлечь слишком большое количество сведений, а во-вторых, получение некоторых из них затруднительно в силу процесса развития математического знания, что привело бы к использованию неполной или частичной информации. “Изменения же типа самоорганизации, – подчеркивает академик В.С. Степин, – это качественные трансформации системы. Они предполагают фазовые переходы. На этих этапах прежняя организованность нарушается, рвутся внутренние связи системы, и она вступает в полосу динамического хаоса” [430, с.64]. Это по существу характеристика смыслового значения сложности, как сложного поведения системы, способной осуществлять переходы между различными режимами. При системном анализе больших и сложных систем, к которым относится и современная математика, главная методологическая трудность состоит не в выборе наилучшего способа достижения цели, например, решения философской проблемы обоснования современной математики, а в концептуальном установлении самой цели. Чем можно еще аргументировать необходимость системного подхода к обоснованию математики?

При ответе на этот принципиальный вопрос сошлемся на мнение известного математика А.А. Ляпунова: “Складывается впечатление, что имеется глубокое родство между аксиоматическими подходами к изучению множеств и системным подходом к изучению больших систем. И там и здесь имеется иерархическая конструкция, с помощью которой вся система объектов, подлежащих изучению, формируется из некоторых исходных элементов” [247, с.16]. Заметим, что рационалистическая линия в философии науки, ориентирующаяся на математику, рассматривала аксиоматический метод изложения как наиболее адекватный способ систематизации научного знания. Правда, есть некоторый произвол в выборе системы для описания изучаемого множества объектов, поэтому полученные результаты относятся, как правило, не только к самой системе, но и к способу ее описания. В связи с тем, что обоснованием математики занимаются как математики, так и философы математики, следует отметить еще одно важное обстоятельство. “Имея дело с большой системой, нельзя забывать, что в ее состав обычно входят люди и их коллективы. При исследовании таких систем нужно учитывать специфику эксперимента с людьми. Здесь наблюдается нечто вроде "принципа неопределенности" Гейзенберга, когда само по себе наличие эксперимента неизбежно влияет на ход явления” [83, с.54]. Характерными признаками больших систем являются сложная структура и сложное поведение с разнообразными связями, организованные некоторым образом в единое целое, то есть составляющие целостное образование.

Неслучайно, понятие сложности по-разному интерпретировалось в философии и истории науки. Как отмечает Г.И. Рузавин, “с точки зрения соотношения категорий простого и сложного позиция современного редукционизма, как и их предшественников, заключается в том, что весь познаваемый нами мир оказывается, в принципе, однородным и простым, а мир сложности – это неисследованный и нераскрытый пока мир простого” [393, с.116]. Трудность однозначной философской интерпретации “сложного” в конкретном научном знании состоит в том, что понятие сложности относительно в том смысле, что мы говорим о сложности или простоте одних элементов или систем относительно других. Например, в теории систем сложность означает не только нелинейность, но и совокупность элементов с большим числом степеней свободы. Поэтому, в контексте обоснования математики, систему следует признать сложной относительно составляющих ее элементов, если она характеризуется тем, что приобретает качества, не присущие ни одному из своих элементов. При подходе к обоснованию математики, как сложной системе, системный подход делает акцент на идеях сложности и целостности в противовес идеям элементаризма и редукционизма.

Необходимо также подчеркнуть, что при интерпретации системности обоснования математического знания можно вычленить различные характеристики системы в соответствии с их функциями. Во-первых, с целями, которым служит данная система, во-вторых, с анализом связующих сил, объединяющих части в единое целое, в-третьих, с пониманием взаимной дополнительности связей, формирующих из частей целостную структуру программы обоснования. Одна из основных задач, которую приходится решать исследователям сложных систем, состоит в определении целей, поэтому такого рода исследования получили название “системный анализ”. С точки зрения математических основ теории систем, “системный анализ – научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению структурных связей между переменными или элементами исследуемой системы” [160, с.8]. Он опирается на комплекс общенаучных, математических и философских методов и подходов. Поэтому, вообще говоря, следует отличать системный анализ как методологию, ориентированную на решение конкретной проблемы обоснования математики, от системного подхода как общенаучного методологического направления. Смысл термина “системный анализ” со временем расширился благодаря его математической спецификации. “Теперь термином "системный анализ" фактически обозначается новая научная дисциплина, – разъясняет академик Н.Н. Моисеев, – включающая методы исследования операций как составную часть своего методологического арсенала” [280, с.98]. Он говорил о необходимости создания синтетического курса “Введение в системный анализ” на математических факультетах. Этот математический курс, по его мнению, должен был бы связать вместе целый ряд различных дисциплин, которые обычно читаются в университетах, в частности – это методы оптимизации, элементы исследования операций, теория оптимального управления и дополнительные главы дифференциальных уравнений, с эвристическими процедурами, без которых полноценный анализ более или менее сложных систем невозможен.

Отметим, что с точки зрения прикладной математики основу системного анализа составляют математическое и компьютерное моделирование, способствующие описанию изучаемых сложных явлений. О математической и компьютерной модели принято говорить в том случае, если в модельном описании наряду с другими используется язык математики. С точки зрения системного подхода, объединяющим началом здесь должны быть идеи имитации и человеко-машинного диалога, организация которого постепенно вырастает в новое математическое и философско-методологическое направление. Философ науки В.Н. Садовский выделяет два основных подхода при решении вопроса о преимущественных методах исследования системных объектов – "один из них подчеркивает значение (I) анализа, другой – (II) синтеза, причем в последнем случае синтез нередко трактуется как противоположное рациональному интуитивное постижение" [397, с.45]. Очевидно, что все многообразие философско-методологических позиций о способах математического познания невозможно рассмотреть в рамках одной, хотя и очень важной, дихотомии "анализ – синтез". Характерная особенность системного подхода к анализу современной науки как методологического направления состоит в том, что оно связано с изучением, представлением и конструированием изучаемых объектов как систем. Поэтому системный подход можно интерпретировать как форму внутринаучной рефлексии.

В частности, в философской литературе установлено, что "понимание системного подхода как общенаучной методологической концепции позволяет уточнить постановку вопроса о его месте в современном научном знании, о типе и характере познавательных задач, решаемых с его помощью" [52, с.49]. Например, его возникновение и функционирование в рамках современной математики отражает как естественную тенденцию к усиливающейся специализации и дифференциации ее разделов, так и возникновение в ней новых типов связей, обеспечивающих единство и целостность современной математики. Все это позволяет говорить о необходимости применения системного подхода к обоснованию современной математики как перспективного направления, которое в общефилософском плане сформировалось во второй половине XX века в связи с задачами развития современной науки, и которому должен соответствовать синтез многообразия методологических подходов к проблеме обоснования. Следует отметить, что системная методология дает также довольно перспективный и убедительный подход к решению проблемы обоснования математики, учитывающий специфику математики и опирающийся на несомненный факт удивительной стабильности ее основополагающих аксиом. Например, как подтверждает В.Я. Перминов: “Теория множеств удовлетворяет всем признакам непротиворечивости содержательной математической теории и с системной точки зрения может быть поставлена под сомнение в этом отношении не больше, чем арифметика или элементарная геометрия” [333, с.273]. Поэтому математики должны по-новому посмотреть на ее обосновательные утверждения для того, чтобы разделить их по степени надежности и оправданности.

Возвращаясь к общефилософской интерпретации принципов системности, заметим, что “суть принципа системности можно свести к следующим положениям: 1. Целостный характер объектов внешнего мира и предметов познания. 2. Взаимосвязь элементов любого объекта (предмета) и данного объекта с множеством других объектов. 3. Динамическая природа любого объекта. 4. Функционирование и развитие любого объекта в результате взаимодействия с окружающей его средой при примате внутренних закономерностей объекта (его самодвижения) над внешними” [397, с.46–47]. Но в конкретном системном исследовании используется все же не вся совокупность принципов системного исследования, а лишь некоторые из них. В частности с точки зрения развития математики системный анализ можно определить следующим образом: “системный анализ – это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации” [281, с.5]. В частности, истоки системного анализа и его методологических концепций лежат в тех разделах, которые занимаются проблемами обоснования принятия решений. В контексте дальнейшей конкретизации принципа системности прогресс следует ожидать также в уточнении методологической структуры системного подхода к проблеме обоснования математики.

С философской точки зрения о системности научного знания можно говорить в разных аспектах. При проведении философского анализа системности математического знания необходимо различать: во-первых, реальную научно-исследовательскую деятельность, осуществляемую активно работающими учеными, а во-вторых, модели науки и научного знания, представляющие собой продукты философской и методологической рефлексии о науке. Поэтому естественно предположить, что системностью обладает как сам процесс математической деятельности, так и те модели математического знания, которые строятся историками, методологами и философами математики. Например, в качестве системы Иммануил Кант рассматривал все, начиная от человека, как особой системы, и его духовного мира, как “системного устройства”. Понятие системы он тесно связывал с философской категорией единства. “Системность – это мостик между мыслящей и телесной частями природы, выражение единства между этими ее подсистемами” [346, с.96]. Поэтому он считал, что соединение таких категорий, как единство и множественность, дает целокупность, то есть важнейшую характеристику, присущую системе. Возрастающая сложность современной науки и ее приложений приводит к определенной привлекательности системного анализа внутренних проблем теоретической математики по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. В математике взаимодействуют две сферы – это сфера творческой деятельности, открытий, содержательных приложений и сфера теоретической рефлексии математики, в которой ведутся поиски логических отношений и аксиоматических представлений процессов абстрагирования.

Например, предметом интенсивных исследований в первой половине XX века стали банаховы пространства, открытые выдающимся польским математиком Стефаном Банахом в начале 20-х годов. Его работы в области функционального анализа впервые выявили успех синтеза алгебраического и геометрического подходов к разнообразным задачам линейного анализа рассмотренных в общем случае линейных функциональных пространств. Вначале казалось, что теория Банаха является формализмом, который вызывал определенное скептическое отношение, несмотря на изобилие ранее неизвестных нетривиальных теорем, полученных с ее помощью. Но в наше время эту теорию можно рассматривать, как изумительный образец научной интуиции, который объединил усилия многих математиков, работающих в огромной области вещественного, комплексного и функционального анализа. Общая теория линейных операторов в банаховом пространстве, изданная Банахом под названием “Теория линейных операций” [30], стала очень популярной математической теорией в качестве важнейшего математического инструмента современного анализа и все еще проявляет свою эффективность в качестве научного метода.

Польский математик Гуго Штейнгауз в своем выступлении, посвященном памяти Стефана Банаха, говорил: “Его заграничные конкуренты по теории линейных операторов трактовали пространство слишком обобщенно, вследствие чего получали только банальные результаты, либо слишком много основывали на этих пространствах, сводя сферу их применения к немногочисленным и искусственным примерам – гений Банаха проявился в нахождении золотой середины” [489, с.326]. Причина его успеха заключается в том, что банахово пространство стало универсальной методологической концепцией, на основе которой появляются все новые математические работы в области функционального анализа. Широта ассортимента банаховых функциональных пространств играла позитивную роль при выборе нужного пространства для решения новых задач, а методологический размах функционального анализа был настолько широк, что среди его “методологических пациентов” были даже крупные по математическим меркам разделы и дисциплины. Затем интерес к этому классическому разделу линейного функционального анализа несколько упал, поскольку накопившиеся нерешаемые трудные проблемы, поставленные классиками, ограничивали применение этой теории к другим разделам математики. Вновь пробудившийся интерес к этой области математики связан с доказательством ряда труднейших проблем теории банаховых пространств. Математической сенсацией стало отрицательное решение Пером Энфло в 1973 году знаменитой проблемы о существовании базиса. В результате этой важнейшей работы можно было выделить широкий класс банаховых пространств, обладающих специальными базисами Шаудера.

Развитие этого раздела функционального анализа стимулировалось искусным построением весьма неожиданных контрпримеров, часто в довольно “исхоженных” и традиционных областях высшей математики. В соответствии с теоремой Бернштейна из теории бесконечных множеств, называемой также теоремой Кантора–Бернштейна или теоремой Шрёдера–Бернштейна, два множества, каждое из которых равномощно подмножеству другого множества, равномощны. Проблема Шрёдера–Бернштейна для банаховых пространств, являющаяся аналогом указанной теоремы, получила довольно неожиданное решение. Эта проблема формулируется следующим образом: будут ли два банаховых пространства, каждое из которых изоморфно подпространству другого пространства, изоморфны между собой? В это трудно поверить, но Тиммоти Гоуэрс построил примеры неизоморфных банаховых пространств, удовлетворяющих условию Шрёдера–Бернштейна для банаховых пространств [522]. Интуиция здесь бессильна. С точки зрения истории науки, математика не очень склонна терпеть неразрешимые предложения. В конце концов, такое предложение после многократного успешного употребления можно возвести в ранг аксиомы. Такова, например, в абстрактной математике судьба аксиомы выбора и гипотезы континуума. В современной философии математики до сих пор обсуждаются эпистемологические различия между ситуациями, сложившимися в геометрии после открытия недоказуемости пятого постулата Евклида и в теории множеств после получения К. Гёделем и П. Коэном результата о недоказуемости континуум-гипотезы Кантора, что в контексте такого “решения” сделало анахронизмом и само слово “гипотеза”.

Возникающие, в связи с этим, вопросы о построении разных геометрий и возможных теорий множеств можно отнести к проблемам “математического реализма”. Вопрос об истинности геометрической теории решается в рамках физической реальности, но объекты теории множеств не принадлежат ей. Поэтому, несмотря на “удаленность” аксиом теории множеств от чувственного опыта, математической интуиции как дополнительному способу описания математики доверяют не меньше, чем тем восприятиям, которые приводят физиков к построению физических теорий в надежде, что будущий чувственный опыт будет согласован с ними. Различие подходов в вопросе об обоснованиях математики ярко проявляется при рассмотрении проблем, связанных с идеей бесконечности. Сформулированная Кантором континуум-гипотеза состоит в предположении, что по количеству элементов континуум действительных чисел идет сразу вслед за натуральным рядом чисел. Таким образом, согласно гипотезе Кантора, не существует множества большей мощности, чем счетная мощность, но меньшей, чем мощность континуума. Требование доказать или опровергнуть эту гипотезу называют проблемой континуума. Оказалось, что ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание не противоречат аксиоматике теории множеств. Уникальность полученного решения проблематизирует не математическую, а философскую значимость теоремы Гёделя, поскольку, по существу, получается узаконенным явное “противоречие”. Ведь ничто не запрещает рассмотреть множество всех подмножеств континуума, в котором либо есть множество, промежуточное по мощности между натуральным рядом и континуумом, либо – нет, но говорить “есть или нет” в отсутствие инструментов проверки и конструирования бессмысленно.

Математикам известно, что всякое взаимно однозначное соответствие или несоответствие, лежащее в основе упорядоченности по мощности, должно математически инструментально подтверждаться, пусть даже не конструктивно, но обязательно аксиоматически доказательно. Не случайно использование континуум-гипотезы при решении учебных математических задач не предполагается, в отличие от аксиомы выбора, которая, как правило, принимается безоговорочно. Отсутствие необходимых математических инструментов влияет на средства постановки вопросов, поэтому имеющиеся инструменты целесообразно применять системно. Для правильного научного подхода к понятию формальной математической теории нужна соответствующая философско-методологическая основа и необходим определенный опыт конкретизации содержания бесконечного в частных науках. Диалектически противоречивый характер математического понятия актуальной бесконечности требует применения новых подходов к проблеме обоснования математики, проявляющейся в том, что актуальная бесконечность, не выразимая в завершенном виде, математически мыслится в теории множеств как завершенная. Напомним, что аксиома бесконечности – это последняя аксиома теории Цермело–Френкеля, без которой, имея в запасе лишь конечные множества, даже в их наивном понимании, не удается построить ни одного бесконечного множества. Аксиома бесконечности формулируется следующим образом: “Существуют бесконечные множества, то есть такие множества А, что

A равномощно $A \cup \{A\}$". Равномощность означает, что для указанных множеств существует взаимно однозначное отображение $f\colon A \to A \cup \{A\}$. Для бесконечных множеств "евклидов принцип": целое больше своей части – следует уточнить: целое больше или равно, точнее равномощно, своей части. Для бесконечных множеств, слово "мощность" значит то же самое, что для конечных множеств "число элементов".

Известно, что если к конечному множеству добавить элемент, то полученное множество неравномощно тому множеству, которое было. Именно в этом суть различия между конечными и бесконечными множествами. Вовсе не случайно, что математики довольно долго настороженно относились к абстрактному понятию множества. "Понятно почему: возникли парадокс брадобрея, парадокс с нерефлексивным прилагательным и другие очень странные множества, например, бесконечные, свойства которых иногда очень не похожи на свойства конечных множеств" [510, с.11]. Даже Евклид в формулировке своей знаменитой теоремы о том, что простых чисел бесконечно много, опасался использовать бесконечные множества. Самим математикам решиться на философский анализ бесконечных множеств, опираясь только лишь на абстрактные математические соображения и выявляя их объективное содержание, было непросто. В этом смысле принципы философской рефлексии, на долю которых приходится конкретизация рефлексивной деятельности сознания как механизма систематизации, можно противопоставить рассуждениям формалистов, поскольку системное обоснование математических теорий несравненно более абстрактно, чем логическое обоснование математики, базирующееся на некоторой редукции. Такие неожиданные мировоззренческие искания – характерная особенность духовной жизни различных форм математического сознания на определенных стадиях его развития. К ним обращались даже тогда, когда о математической науке или ее отдаленных предпосылках речь еще не шла. Наше познание реальности свидетельствует о невероятном переплетении в человеке разумного (или рационального) с иррациональным началом. Противопоставление рационализма и иррационализма имеет много различных смыслов. Первый фундаментальный смысл идет от математического образа соотношения рациональных и иррациональных чисел.

Выдающийся немецкий философ Георг Вильгельм Фридрих Гегель пытался обобщить в собственной философии все знания и оказал очень большое влияние на всю последующую философскую мысль. С точки зрения системного подхода к анализу проблемы обоснования необходимо отметить, что Гегель развил "логицистский принцип системности, связывая поиски истины с "осознанием природы и ценности всех мыслительных отношений", которые "объединяют воедино и определяют содержание" всех существующих отношений” [70, с.13]. Проблема рождения теоретической математики, обладающей своими специфическими приемами обоснования истинности результатов, традиционно предстает в философии как проблема возникновения рационального мышления. Мыслительные процессы с мгновениями гениальных озарений трудно поддаются рациональному объяснению, что можно пояснить на хорошо известном примере построения и обоснования иррациональных чисел. Поэтому именно “мышление” является для Гегеля носителем системности, в котором проявляется диалектическая содержательность принципа системности. “Гегелевская философия системна, – утверждает философ М.Ф. Быкова, – а система диалектична” [70, с.16]. Отсюда можно заключить, что его диалектика – не “логика”, а стратегия исследования. Это специфическая особенность системной логики Гегеля как диалектики, включающая в анализ развитие изучаемой области, что отличает ее от других, более поздних системных построений.

Обстоятельное исследование философских воззрений Гегеля на математику обнаруживает интересные идеи, требующие логико-философского осмысления и критического анализа. При таком анализе следует иметь в виду, что учение Гегеля о математике носит сложный и противоречивый характер, но его исследование особенностей математики нацелено, прежде всего, на отыскание нового в философии науки. Следует также отметить, что он по существу различает элементарную и высшую математику. Будучи философом, Гегель, тем не менее, довольно хорошо был знаком с важнейшими достижениями в области математики, в частности с творчеством таких выдающихся математиков, как Гаусс, Коши, Лобачевский. Он оценивал возможности высшей математики, с точки зрения ее взаимодействия с философией, гораздо выше, чем соответствующие возможности элементарной математики. Например, философски анализируя понятие бесконечно малых величин в высшей математике, Гегель считал, что ученые пришли к нему, когда поняли, что надо найти нечто третье, “иное”, то есть некое “промежуточное состояние” между бытием и ничто. В этом опыте математики для Гегеля был заключен значимый эвристический урок потенциально более общего философского характера: “Математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок” [292, с.261]. Безусловно, чтобы обнаружить математические объекты, которые как бы указывают на пробелы в казуальности мышления, несомненно, нужна природная наблюдательность и соответствующая математическая подготовка для их философского восприятия. Теоретические работы, способствующие новой интерпретации ранее разработанных философских идей, обогащают их новыми смыслами и составляют важнейший аспект философских исследований науки.

Решая задачу соотношения гегелевской идеи о саморазвитии с методологическими запросами и философскими проблемами современной науки, академик В.С. Степин сформулировал следующий нетривиальный тезис: “Идея развития получила у Гегеля особую трактовку – как развитие системной целостности, организованности, которая дифференцируется в процессе своей истории, порождая новые состояния и перестраивая свою внутреннюю структуру” [428, с.5]. Это можно уточнить в том смысле, что Гегелем были выработаны “первые эскизные представления” к системному подходу, которые коррелируют с современными установками теоретических поисков в философии математики, акцентируя внимание на динамике процесса познания. “Подлинная сила системного анализа, развивающегося на базе диалектики, в том, что он постигает в системе моделей все новые и новые элементы и отношения сложной системы путем все большего и большего совершенствования средств формализации, не сводя последние к одним лишь количественным выражениям, а используя и суждения интуиции…” [311, с.24]. В частности, философско-методологический синтез направлений обоснования современной математики происходит в результате комплексного и системного изучения предмета исследования благодаря проникновению идей и методов одних философских подходов в другие.

В определенном смысле, методология комплексного исследования программ обоснования является методологией особого рода, поскольку она не может быть сведена к какой-либо одной из широко известных программ обоснования математики. В “Науке логики” вопрос о формах воздействия философии на математику в контексте ее обоснования получил новое принципиальное развитие. История развития взаимодействия математики и философии свидетельствует о том, что их связь является необходимостью и нормой философско-математического мышления. “Гегель считает, что только философия может дать истинное обоснование основным положениям математики” [272, с.83]. Напомним, что с философской точки зрения к обосновательным процедурам современной математики, включающим такие ее направления, как формализм, интуиционизм, платонизм, можно также отнести, наряду с экспликацией математических доказательств, и аксиоматизацию математизированных теорий естествознания, которые можно рассматривать как дополнения к сложившимся в философии математики гносеологическим оценкам известных программ обоснования математики. Философия математики репрезентирует мировоззренческое оправдание современной математики, выявляя при этом эффективные идеалы и нормы математической научно-познавательной деятельности. Методологическая трудность обоснования современной математики, в основе которой лежит важнейшая философская проблема непротиворечивости аксиоматической системы, не позволяет однозначно выделить какую-либо одну из известных философско-математических программ обоснования.

Поскольку, с одной стороны, аксиоматические теории содержат в себе неформализуемые аспекты, которые опираются на некоторые очевидности, то их, вообще говоря, нельзя принять в качестве онтологически истинных без какого-либо обоснования. Но, с другой стороны, едва ли можно привести пример реального математического направления, где работающий математик очень сомневался бы в непротиворечивости своих методов исследования. Для разрешения указанных противоречий необходим принципиально новый философский взгляд, который невозможен в линейной, а точнее сказать в одномерной, структуре. Заметим, в связи с этим, что, например, с точки зрения современной тернарной методологии, развиваемой в современных концепциях естествознания в течение последних десятилетий, можно различать следующие типы триад. Во-первых, это линейные или “переходные” триады как, например, хорошо известная гегелевская триада развития “тезис – антитезис – синтез”, которая декларирует снятие противоречия, но не указывает в общем случае на механизм раскрытия его движущей силы. Тем не менее, Гегель указывает истоки порождения новых уровней организации саморазвивающихся систем с помощью процедуры порождения “свое иное” как процесса, повторяющегося на новой основе, выявленного В.С. Степиным: “Здесь не просто реализуется знаменитая триада "тезис – антитезис – синтез", но обнаруживаются механизмы этой реализации. Их Гегель обнаруживает, исследуя порождение новых категорий, где каждая из них вначале выступает как потенциальное состояние ранее возникших категориальных смыслов, а затем отделяется от них, актуализируется как самостоятельная категория, которая оказывает воздействие на ранее породившие ее категориальные смыслы и создает предпосылки для возникновения новых категорий” [429, с.625]. В современной интерпретации каждый новый уровень организации системы перестраивает ее основания, создавая новую целостность.

Для иллюстрации гегелевской триады развития рассмотрим в качестве математического примера равномерную сходимость последовательности функций. Благодаря контрпримерам известно, что последовательность непрерывных функций не обязана поточечно сходиться к непрерывной функции, но при равномерной сходимости последнее будет уже справедливо. Отличие понятия равномерной сходимости от понятия поточечной сходимости состоит в том, что равномерная сходимость есть свойство последовательности функций на множестве, тогда как поточечная сходимость может быть определена в одной точке. Далее будем следовать анализу генезиса понятия равномерной сходимости, осуществленному Имре Лакатосом: “Тезис. Это специфическая версия принципа непрерывности Лейбница, который гласит, что предельная функция для любой последовательности непрерывных функций является непрерывной (основное предположение). Антитезис. Определение непрерывности по Коши возводит данный тезис на новый уровень. Это дефиниционное решение придает законность контрапримерам Фурье" [227, с.213]. Такого рода решение исключает возможный компромисс, состоящий в восстановлении непрерывности функций в точках разрыва перпендикулярными линиями. При этом актуализируется как "отрицательный полюс" антитезиса, который усиливается контрпримерами к основному предположению, так и "положительный полюс" антитезиса, который усиливается доказательством Коши, являющимся предшественником понятия равномерной сходимости. Наконец, наступает синтез, благодаря которому элиминируются контрпримеры, и уточняется с помощью понятия равномерной сходимости основное предположение: "Здесь проявляются характерные компоненты синтеза: теорема и соответствующее понятие равномерной сходимости, порожденное доказательством" [227, с.213]. Поэтому вполне можно заключить, что гегелевская триада способна в некоторых случаях воспроизвести механизмы развития современного этапа развития математики.

Кроме того, в диалектике Гегелю, с помощью своей триады "тезис – антитезис – синтез", удалось обобщить и сформулировать главное свойство развивающихся систем, а именно, смену стадий их развития. Особое значение у Гегеля придается диалектической структуре мышления, поскольку адекватно отразить действительность может не отдельное суждение, а только единство двух сторон противоречия, достигаемое в диалектическом процессе: тезис – антитезис – синтез. Хотя Гегель сформулировал эту формулу как вербальное правило, а не с помощью математического формализма, можно сказать, что его триада развития является необходимым условием возникновения новой информации. Но вопрос, как проявляется механизм появления "антитезиса" и "синтеза", в рамках диалектики тогда не ставился. Дело в том, что во времена Гегеля, почти двести лет тому назад, не было соответствующего математического аппарата, который бы, с точки зрения представителей точных наук, позволял делать однозначные предсказания, поскольку он еще только формировался. Так как в диалектике Гегеля такого инструментария не было, то на вопрос, можно ли предсказать, когда именно одна противоположность сменит другую и когда наступит "синтез", ответ был довольно расплывчатый, в том смысле, что синтез будет, но неизвестно когда. Поэтому, "математики и физики отнеслись к диалектике скорее негативно. Основная причина этого – отсутствие математического аппарата и, следовательно, количественных оценок" [478, с.117]. В действительности тезис следует понимать как динамическую стадию процесса, в котором "синтез" содержит уже гораздо большее количество информации, а антитезис – как противоположность динамически упорядоченной стадии процесса, то есть, в синергетической интерпретации, его хаотической стадии.

В конце XX века в философии науки произошли события, которые существенно изменили как методологию науки, так и саму науку. “Сейчас сторонник диалектического мышления, – как считает специалист по синергетике Д.С. Чернавский, – может ответить любому математику на его каверзный вопрос о том, когда наступит "синтез". Ответ прост: постройте математическую модель процесса и сами увидите, когда именно тезис перейдет в антитезис и когда наступит синтез” [477, с.230]. В таком контексте современная синергетика является математической основой развивающихся систем, а триаду Гегеля можно эксплицировать как философское описание процесса генерации нового знания. По существу Гегелю удалось сформулировать достаточно общие свойства, характерные для открытых и развивающихся систем, хотя во времена Гегеля понятия “открытая” и “развивающаяся система” еще не были сформулированы. “Сейчас можно сказать, что триада Гегеля – образное описание процесса генерации ценной информации включающего, как этап, перемешивающий слой” [476, с.54]. Этот этап наступает на стадии столкновения противоречивых положений, аксиом или появления парадоксов, когда необходим акт научного творчества для создания, например, новой аксиоматики, в рамках которой парадокс философски и методологически разрешается. Здесь опять возникает вопрос о способах его реализации. Заметим в связи с этим, что философию вообще можно рассматривать как сферу “вечных вопросов”, и философия математики в этом контексте не исключение.

Наука обеспечивает единство духовного мира и непрерывность духовного процесса, отображая тем самым единство и непрерывность любого процесса познания. Философия математики в целом, как и сама математика, тоже является реакцией на единство в русле целостности духовных и материальных ценностей. “Хорошо известно, что Гегель строил свою философию как систему взаимосвязанных дисциплин и разделов – логики, философии природы, философии духа (дальнейшие подразделения последней – феноменология духа, философия права, философия истории, история философии, философия религии)” [291, с.138]. Наиболее точно и полно это единство было описано Г.В.Ф. Гегелем, но не в его переходной триаде “тезис – антитезис – синтез”, а в его “системной триаде философии” [35, с.59]. Напомним, что триадой называется совокупность из трех элементов, которые каким-то образом связаны между собой. Системная триада Гегеля способствовала выработке идеологии тринитарного формализма. В философских традициях его времени эту триаду можно описать так:

философия духа
/ \
наука логики — философия природы.

Наука логики Гегеля делится по принципу триады на учение о бытии, учение о сущности и учение о понятии. Для математического познания наиболее интересно учение о сущности, основной проблемой которого является проблема противоречий. Понятие противоречия Гегель выводит из логических категорий тождества, разности и противоположности. Единство тождества и разности образует противоположность, которая, выступая в едином, становится противоречием, составляющим основу всякого движения и развития. "Гегелевский вывод категории противоречия на самом деле сложнее. Противоречие рождается из столкновения противоположностей" [39, с.482]. Внутренние противоречия математической теории могут быть выявлены через философски осмысленную историю становления математики и ее оснований, которые в данном контексте берут на себя роль математического опыта. Гносеологически противоречия отчасти снимаются в практической математике, так как внешние факторы становления математической теории активно воздействуют на структуру математического знания. Но поскольку противоречия идут от оснований, точнее от тождества и различия вещей, то сущность определяется Гегелем как основание. Этот результат стал принципиально важен для обоснования современной математики после того, как выяснилось, что математическое мышление покоится на существенно иных основаниях, чем усложненные логические определения. В частности потому, что логика принципиально конечна в содержании своих понятий, а введение в формальную математическую теорию бесконечности связано с особенностями математического мышления, способствовавшими появлению противоречий теории бесконечных множеств. Но в таком контексте гегелевский вывод о том, что противоречие есть основа и источник всякого саморазвития, является важнейшим положением и для философии математики.

Для понимания составляющих элементов гегелевской системной триады подчеркнем, что Гегель также выявил, как из философского противоречия чувственно-достоверного и абстрактно-всеобщего возникает новое образование развивающейся философии духа – рассудок. Поскольку философия выступает рефлексией над всеми формами духа, то она включает и себя как форму познания, что вполне естественно, так как духовная природа человека заключается в разуме. Именно в разуме и духовности заключается подлинная природа человека. Согласно Гегелю, только мышление делает душу духом. При таком вполне естественном философском подходе к духовной культуре разум и духовность, вообще говоря, неотделимы друг от друга. Категориальные состояния духа включают в себя понятийное содержание, которое он рассматривает как исторически возникающие формы познания и сознания. Фиксируя развивающиеся основания духовной культуры, Гегель стремился осуществить переход к структурному видению органично развивающейся целостности. По мнению академика В.С. Степина: “Гегель не просто выделил духовную культуру как объективное состояние общественной жизни, но и определил ее внутреннюю архитектонику, ее основную несущую конструкцию, представленную развивающейся системой категориальных смыслов, структур, которые определяют понимание, переживание и осмысление человеком мира и своего места в мире” [428, с.14]. По существу, Гегель сделал новый шаг в развитии идеи категориального синтеза опыта, порождающего конкретно-научные понятия, рассматривая категориальные смыслы как развивающиеся в различных сферах духа. “Создавая интерсубъективную модель абсолютного духа, Гегель абстрагировал основания культуры от других подсистем социальной жизни и наделил эти основания субстанциональным статусом. Таким путем была сконструирована идеализация, теоретический конструкт, представляющий в познании сущностные характеристики культуры как исторически развивающейся системы” [429, с.624]. Следует также отметить, что, опираясь на эту философскую идеализацию и мысленно развертывая скрытое в ней содержание, Гегель разработал категориальный аппарат, выражающий системно-структурные характеристики и ряд закономерностей саморазвивающихся систем.

Анализируя системную триаду Гегеля, необходимо разделять “науки о природе” и “науки о духе”. Их отличие состоит в том, что познавательная функция наук о природе – это объяснение, а основная познавательная функция “наук о духе” – это понимание. Рассуждения об объяснении практически не говорят о понимании как о методологическом термине, фиксирующем определенную функцию науки. Но в контексте гегелевской системной триады такое противостояние объяснения и понимания ошибочно, так как в ней они рассматриваются как взаимно дополнительные составляющие триады. Поэтому, хотя диалектическая концепция природы в состоянии науки гегелевского периода не имела еще достаточного аппаратного математического обоснования, “смысловые лакуны” своей концепции философии природы Гегель заполнял натуралистическими гипотезами, не имеющими подкрепления в науке его времени. В качестве соответствующего философского рассуждения укажем на то, что “Гегель определяет идеальное через "снятие" – термин, хорошо выражающий "системный" смысл категории "быть": "быть в системе", "быть в другом"” [302, с.99–100]. В частности, в современной философии науки для объяснения релевантности гегелевского тезиса “искусственное есть естественное”, с точки зрения его согласования с системой естественнонаучного знания, нужно интерпретировать изменение природных объектов как новые состояния саморазвивающихся систем, которые представляют собой более сложный тип системной целостности, чем самоорганизующиеся системы. Анализ актуальных проблем философии науки показывает, что современная наука уже имеет дело и со сложными саморазвивающимися системами.

Косвенным подтверждением связи системной триады философии и математики является то, что видимо вовсе не случайно польский математик Гуго Штейнгауз свои интересные философские размышления о природе и структуре математики объединил в сборнике статей под многозначительным названием “Математика – посредник между духом и материей” [489]. Известно, что математик находит множество подсказок в материальной реальности или физическом опыте, то есть в экспериментальном наблюдении математических фактов. Но “сущность математики, ее дух заключается в том, чтобы вырваться за пределы здравого смысла и обыденного опыта, чтобы оперировать с идеальными объектами – линиями, лишенными ширины, поверхностями, лишенными толщины, – лишь посредством силы логической мысли, независимой от какого-либо эксперимента или опыта” [463, с.97]. До Гегеля известные философы, включая Канта, знали математику как системно построенное научное знание и как важнейший методологический инструментарий для тех, кто считал себя профессиональным философом. Он владел математикой настолько свободно, что, будучи директором Нюрнбергской гимназии, мог в случае необходимости заменить преподавателя высшей математики. На его хорошую математическую образованность указывает исследователь его творчества В.А. Мейдер: “Гегель знал математику настолько, что никто из его учеников не был в состоянии издать оставшиеся после него многочисленные математические рукописи” [272, с.77]. Добавим, что изучение математики Гегель рассматривал в качестве необходимой части профессиональных знаний философа.

В связи с этим заметим, что отдельные рассуждения о мнимой “антиматематичности” Гегеля основываются в основном на выхваченных деталях теоретической и смысловой взаимосвязи из “Науки логики”. Например, замечает Йожеф Сигети: “Те, кто повторяет обвинения Гегеля в антиматематичности и в другой связи видит преимущество электронно-вычислительных машин именно в том, чтобы освободить дух от механической рутинной работы” [408, с.147]. Забывая при этом, соотнести некоторые его высказывания о математике с педагогическими соображениями, например, когда речь у него идет о счете, то есть только о чисто внешней стороне математического мышления. Но, хотя Гегель знал доступную ему математику, может быть глубже многих современных философов, он все же не имел в области естествознания оригинальных работ. Тем интереснее отметить, что с его философской триадой методологически хорошо сочетается подход философа естествознания Поппера, который, фиксируя недостаточность мира физических сущностей и мира духовных состояний, развил концепцию третьего мира. Этот мир содержит в себе свойства и связи, которые могут быть нам неизвестны, и порождает проблемы, о которых мы еще не думали. Заметим, что концепция Карла Поппера при таком подходе оказывается очень удобной. Его критический рационализм позволяет математикам следовать своей естественной установке. Если методологическое самоопределение современной науки осуществлять в терминах парадигм, то попперовскую концепцию трех миров можно интерпретировать в качестве новой объединяющей коннотации, которая потенциально способна стать основой "парадигмального синтеза". Согласно Попперу, логика науки должна быть не только логикой открытия, которая согласно его философским взглядам соответствует методу проб и ошибок в контексте открытия, но и логикой научного прогресса в контексте обоснования.

Познание возможно лишь потому, что в мире уже существуют формы и духовное содержание, а творческим оно становится тогда, когда от простого восприятия переходит к духовному открытию нового содержания. Сам Гегель развивает и конкретизирует эту идею следующим образом: "То, что истинное действительно только как система, или то, что субстанция по существу есть субъект, выражено в представлении, которое провозглашает абсолютное духом, – самое возвышенное понятие, и притом понятие, которое принадлежит новому времени и его религии" (цит. по [292, с.121]). В этом высказывании интересна гегелевская мысль о взаимопроникающем или взаимодействующем развертывании субстанции и субъекта. Если математическая теория становится духовной ценностью, в смысле поиска истины, выявления красоты и эстетического переживания, то она проявляет, в современной терминологии, аксиологическую функцию. Духовное содержание современного научного знания стремится преодолеть "философию сознания", основанную на субъектно-объектных отношениях и противопоставлении материи и духа. Значит одна из важнейших проблем интерпретации в науке – это проблема соотношения субъекта и объекта. Одно из наиболее значимых следствий гегелевской триады состоит в идее высокой духовной активности субъекта в процессе познания. Несмотря на чрезмерную абстрактность познающего субъекта, в силу сложности и многообразия объектов реальности, именно субъект определяет, что станет объектом познания. "Поэтому теория познания нуждается в такой категории субъекта, когда он понимается в своей целостности, как микрокосм, органически вписанный в макрокосм, содержащий не только когнитивные, логико-гносеологические, но и личностные, культурно-исторические "параметры" в их понятийно-абстрактной форме” [278, с.41]. В такой интерпретации гегелевской триады философии познание становится не только познанием мирового разума или духа, но и, собственно, характеристикой человеческого сознания.

Философ и методолог науки В.К. Лукашевич на основе рефлексивного осмысления структуры научного метода делает следующий вывод, обосновывающий выбранную методологию исследования: “Непрерывность процессов ассимиляции новыми методами растущего предметного знания и обеспечиваемое этим расширенное воспроизводство продуктивного потенциала методов науки позволяет квалифицировать их развитие как динамический (постоянно видоизменяющийся) синтез предметно-когнитивного и инструментального содержания научного прогресса” [242, с.74]. Проанализируем вторую составляющую указанного динамического синтеза, а именно, в чем ценность математики как инструмента познания? Во-первых, следует учитывать исторический характер предмета математики, и, во-вторых, итоги взаимодействия математики как с помощью внутренних, так и внешних оснований. Так, теория вероятностей, которая знаменита большим количеством недоразумений, характеризующих все же не математическую теорию, а нашу интуицию, в любом приложении остается чисто математическим инструментом даже не зависящим, от того, как устроен реальный мир. В современных определениях математики “через себя” выделяется то, что – это наука об абстрактных структурах и об абстрактных операциях над математическими объектами достаточно общей природы, законах их развития и функционирования, а также взаимосвязях между ними. Когда на вопрос: что изучает математика? Отвечают: множества с заданными в них отношениями или математические структуры, то это вряд ли, считает академик И.Р. Шафаревич, можно признать ответом: “Ведь среди континуума мыслимых множеств с заданными в них отношениями или структур реально привлекает математиков очень редкое, дискретное подмножество, и смысл вопроса как раз и заключается в том, чтобы понять, чем же особенно ценна эта исчезающе-малая часть, вкрапленная в аморфную массу. Точно так же, смысл математического понятия далеко не содержится в его формальном определении” [483, с.7]. В контексте этого философского исследования методологически важно зафиксировать, что современная математика, с помощью своих инструментов интеллектуального порядка, является формой выражения важнейших закономерностей хорошо развитых естественнонаучных теорий.

Это обусловлено тем, что в математике можно выделить первичные базисные объекты, непосредственно соотнесенные с предметной онтологией, которые составляют основу математики, приоритетную по отношению к любой формальной системе аксиом. В частности, “в нашем обыденном познании мы ограничиваемся лишь сугубо инструментальной функцией математических формализмов и не делаем далеко идущих выводов о внутренней "присущности" реальным физическим объектам (вещам) свойств идеальных концептуальных объектов и формальных структур математики” [273, с.133]. Даже в отсутствие инструментов конструирования абстрактных объектов их математическое существование должно инструментально подтверждаться. Пусть и не конструктивно, если это невозможно, но тогда обязательно аксиоматически доказательно. Более того, серьезным аргументом в пользу какой-либо аксиомы или теоремы является то, что их можно рассматривать как инструменты познания. Например, эффективным инструментом, избавляющим от необходимости тратить силы на преодоление препятствий, не относящихся к существу задачи, является математическая теорема Кантора–Бернштейна о критерии равномощности множеств, с помощью которой доказывается, что отрезок и квадрат равномощны. Что касается программ обоснования современной математики, предполагавших в качестве инструментов обоснования редукцию одних формальных систем к другим в поиске непротиворечивости исходных систем, то они, вообще говоря, не могут реализовать этот план в рамках формализации математики. Прежде всего по той причине, что формально-логическое обоснование, в силу эволюции философских представлений о единстве математики, является следствием гораздо более широких представлений.

Наблюдая за развитием такого мощного современного направления, как компьютерная математика и отвечающая ей логика, которое принято называть сейчас “информатикой”, можно предположить, что она вместе с утонченным формализмом современной математической логики может стать основанием синтеза в философии математики. Такой философско-методологический синтез способен сблизить направления развития разветвленного и утонченного математического формализма в духе математического реализма, хотя с реальностью у математики всегда были специфические отношения. “Длительные усилия создать арифметику по образу и подобию реальности не увенчались успехом из-за неопределенности самой реальности. Поэтому арифметика создала новую реальность по своему подобию” [130, с.158]. Но, следует признать, что бесконечные процессы преуспели именно там, где рациональные числа потерпели неудачу, хотя “числа правят миром”.

Алгоритмы, вычислительная техника и современная компьютерная математика – это именно те три опоры, на которых строится новое фундаментальное научное направление “Отображение проблемы вычислительной математики на архитектуру вычислительных систем”, возникновение которого можно отнести к концу 70-х годов прошлого века. Как бы ни были велики реальные достижения в области вычислительной техники, она является лишь инструментом для решения прикладных математических задач. “Инструментом, – подчеркивает академик В.В. Воеводин, – который создается и совершенствуется по своим законам, определяемым успехами микроэлектроники, авторскими идеями, чьими-то амбициями и много чем другим, не всегда полезным при проведении практических расчетов” [94, с.38]. Такого рода математические инструменты второй половины XX века почти всегда претендуют на некую универсальность своего использования в силу взаимно дополнительного сочетания фундаментальных математических теорий, обосновываемых в контексте программ конструктивизма и формализма, что тем самым создает определенные методологические трудности при решении конкретных задач. Поэтому решение математической “проблемы отображения”, как и других, методологически сложных прикладных задач, начиналось с разработки фундаментального математического аппарата, позволяющего описывать и детально исследовать информационную структуру математических алгоритмов.

Перестройка классического познавательного инструментария в современном стиле математического мышления возникает в связи с концептуализацией основ философии возможного, которые можно рассматривать в качестве исходных и для философии математического познания. Инструментальная ценность математики в развитии познания состоит еще в том, что на ее абстрактном языке выражается внутренняя организация естественнонаучных знаний, среди которых ведущим является физическое, и проводится теоретический анализ в наиболее математизированных областях науки. Например, при анализе логически независимых интерпретаций квантовой механики выделяют “минимальную инструменталистскую интерпретацию”, связывающую математический аппарат квантовой теории с эмпирическими фактами, который обеспечивает теоретическую возможность решения физических задач. Такая минимальная инструменталистская интерпретация образует исходный логический уровень и исходный инструментарий для идентификации остальных интерпретаций, в частности к тем или иным трактовкам теоретико-множественной математики. Дополнительные трудности в выявлении соответствующего инструментария связаны со своеобразной “инфляцией” классического философского инструментария, во главе которого стоял приоритет “онтологической реальности мысли” над ее истинностью и когнитивным своеобразием, в ущерб вниманию и внутренней понятийной логике развития мысли. Заметим, что одно из проявлений сознания – чувственность, а другое – рассудок. В этом состоит двоичность сознания, то есть в чувственном созерцании и мышлении. Если учесть, что сам способ “бытия математики” – это живой ход роста математических теорий от одного зафиксированного достижения, которое можно рассматривать как предпосылочное знание, к новому математическому достижению, то всякое духовное познание не может быть с самого начала задано как целостный замысел, проявляющийся затем в динамическом осуществлении.

В связи с этим нельзя не отметить, что XX век ознаменовался значительными достижениями человеческого духа, в частности, компьютерной революцией. Говоря об опасности, к которой приближает человечество новая технологическая цивилизация, академик И.Р. Шафаревич указывает на духовную сторону математики, которая “глубоко связана с эстетическим чувством” и способна служить в некотором смысле неким противоядием наметившейся тенденции абсолютизации “алгоритмического машинообразного мышления” [485, с.78]. Хотя формальные математические структуры обладают определенной внутренней красотой, чтобы понимать современную математику, надо научиться видеть эту красоту, а это требует, вообще говоря, незаурядных эстетических способностей. Заметим, что даже те исследователи, которые хотели бы минимизировать значимость эстетической составляющей в математике, не пытаются отрицать ее реальность при обсуждении математических результатов. Например, еще в античные времена задачи на построение стали эстетической вершиной математики. Позитивный смысл такого рода высказываний сводится к тому, что, красивые математические рассуждения демонстрируют огромные возможности человеческого интеллекта, как индивидуального, так и совокупного математического интеллекта. Отметим также, что эстетическая функция абстрактной математической теории, в отличие от эвристической функции, способствующей получению нового знания, состоит в развитии чувства прекрасного. Кроме того, полиморфизм и сложность науки обусловлены не только многообразием подходов к действительности, но и различным гносеологическим статусом ее математического инструментария, эффективность которого по-разному проявляется в конкретных познавательных ситуациях.

Все это, считает швейцарский философ Эвандро Агацци, в значительной мере обусловило происхождение особой философии математики, процветавшей на протяжении прошлого века. Ее предметом “были онтология математических объектов, значение когнитивных методов, применяемых в математике, отношения между непротиворечивостью и существованием в математике, смысл понятия математической истины, отношения между доказуемостью и истинностью и даже различие между человеческим мышлением и алгоритмическим функционированием компьютеров” [1, с.42]. Эти аспекты философии математики, представляющей сейчас прочно сформированный раздел философии науки в ее современном смысле, будут далее детально проанализированы с точки зрения проблемы обоснования современной математики. При определенном философско-методологическом взгляде на математическую реальность направления обоснования математики выглядят не только антагонистичными, а в философских терминах системного подхода вполне соизмеримыми и нуждающимися друг в друге. Заметим, что синтез элементов как метод исследования предваряется их выделением из нерасчлененного целого. Это необходимо для философско-методологического анализа их отличия друг от друга с целью соединения их частей на новом теоретическом уровне, в контексте единства математических теорий на современном этапе развития математики.

Несмотря на то, что в обширной математической практике нет удовлетворительного истолкования понятия “единство математического знания”, многозначность философской категории единства предполагает взаимную согласованность, взаимную обусловленность и взаимную зависимость противоположных подходов к обоснованию наиболее продуктивных разделов современной математики, придающих ему единство совокупным смыслом. В начале XXI века, наконец, было осознано, что поскольку абсолютная полнота недостижима, то от современной математики, при условии сохранения ее достаточной строгости и точности, требуется лишь сохранять единство и целостность математического знания, опираясь на онтологическую истинность его исходных положений. Базовый инструментарий, который можно использовать, несмотря на все концептуальные различия отдельных подходов к обоснованию, сводится к философскому понятию самообоснования. При таком методологическом подходе синтез направлений обоснования математики может быть осуществлен в условиях особого дифференцированного взгляда на основные программы обоснования, находящиеся в отношении дополнительности.

* * *

К анализу математического метода, раскрытию его содержания необходимо подходить исторически, с позиций общей концепции программы обоснования математики. Несостоятельность программы логицизма следует, прежде всего, из статуса логики как системы понятий, не связанной с идеей бесконечности. Логицистская редукция может быть осуществлена только при условии истинности аксиомы бесконечности и аксиомы выбора, а также при дополнительном предположении, что принципы логики являются априорными истинами. Но отказ от первоначальных целей логицистской программы не означает полного отказа от развитых в ней методов анализа математической теории, используемых в программе формализма. Математические умозаключения основываются не только на формальной дедукции, но и на свидетельствах ясного и интуитивно понятного процесса, подобного процессу порождения натуральных чисел, с помощью которых происходит арифметизация анализа. Необходимость нового концептуального подхода к обоснованию связана и с новыми кризисами переусложненности математики XX века.

Анализ генезиса единства математического знания является одновременно и аргументацией единства направлений обоснования математики, которую можно философски интерпретировать как единство целей обоснования. Поэтому для этих целей можно выделить, во-первых, формальную общность структур современной математики, во-вторых, единство чистой и прикладной математики, в-третьих, единство математики в ее языке и связи с естественнонаучным знанием. Кроме того, математика остается единой наукой в силу ее дедуктивного характера и специфики объекта познания. Такое понимание обоснования открывает новую перспективу рационального оправдания философско-методологического синтеза. В контексте обоснования современной математики целесообразно говорить о теоретическом синтезе направлений обоснования как единстве философско-методологических обосновательных подходов, характеризующем тенденцию к их соединению в рамках общей системы теоретических и прикладных математических знаний. Поскольку любая интерпретация развития математики может в итоге оказаться односторонней и неполной, то, если речь не идет о принципиальных методологических вопросах, следует наряду со своим взглядом признавать и альтернативный ему взгляд.

Многие методы современной математики основаны на использовании множеств с бесконечным числом членов, которые рассматриваются как реальные объекты, существующие не только в абстракции. Эти математически точные объекты обитают не в реальном мире физических вещей, а в платоновском идеальном мире математических понятий. Эффективность математики, хорошо приспособленной для формулировки естественнонаучных законов, свидетельствует о живучести платонистского взгляда на математику. Умеренный платонизм можно понимать как особый реализм и как потенциальную убедительность, когда истинной считается теория, соответствующая чему-то, существующему вне нас. Необходимость платонистской компоненты в программе обоснования современной математики обусловлена тем, что человеческий разум контактирует с идеальным миром Платона при открытии математической истины, постигаемой с помощью формальных математических рассуждений и интуитивных догадок. Поэтому основной вывод состоит в том, что, хотя как творческий метод современных математиков умеренный платонизм весьма эффективен, при решении методологических вопросов его роль не столь значительна. При этом выявлена значимость и плодотворность системного подхода к философским и методологическим критериям при формировании новой концепции обоснования современной математики.

Полезно сравнить претензии оснований, относящиеся к формализму или конструктивизму в принципе, с конкретным опытом современной математики, чтобы убедиться в том, до какой степени соответствующие идеализации имеют отношение к делу. Теория познания пока еще не достигла полной ясности в проблеме обоснования современной математики, так как она не имеет убедительного для всех течений философии математики объяснения и "уразумения" сущностной природы математики. Это связано, прежде всего, с тем, что методологическое упрочение оснований динамично развивающихся разделов современной математики не имеет пределов, хотя благодаря развитию абстрактной математики появился универсальный аппарат для изучения различных явлений реального мира. В таком контексте иногда говорят о сосуществовании двух математик – теоретической и прикладной, но с точки зрения единства математики, целесообразно считать прикладные задачи современной математики специальным видом семантики математических теорий.

История развития математики подтверждает, что никакая ограниченная "идейная база", никакой фиксированный метод не дают возможности решать все проблемы математики, даже при достаточности и неизменности ее аксиом. Не существует общего метода, который определял бы по описанию теории, противоречива она или нет. Идеальные понятия математики – это эффективные орудия человеческой мысли, способствующие решению новых проблем, требующих новых фундаментальных идей. Математические понятия с развитием математической практики становятся настолько реальными, что эта реальность иногда выходит за пределы мыслительных процессов математики. С точки зрения дополнительных категорий в эпистемологии, можно утверждать, что классические и неклассические стратегии познания характеризуют целостное математическое мышление. В этом проявляется суть системного подхода к обоснованию математики, хотя сам по себе системный подход не решает и не может решать содержательных математических задач.

Поиски окончательного ответа на вопросы обоснования не должны выливаться в имитацию математического исследования, когда философия математики пытается следовать в собственных стандартах строгости за самой математикой. Хотя современная математика все еще остается наиболее методологически строгим научным знанием, ее притязания на уникальный статус становятся все менее обоснованными. Надежда на решение методологической задачи по достижению полной определенности путем формирования прочных оснований математики была поколеблена сначала гёделевскими результатами, а затем и возможным появлением в обозримом будущем математических рассуждений такой сложности, о которой никто из математиков помыслить пока не может. Для углубления философии математики необходим синтез различных потоков философской и математической мысли, в том числе и ставших достоянием истории философии математики, поскольку все они контекстуально написаны на языке философии и методологии математики.

Например, гегелевская триада “тезис – антитезис – синтез” способна в некоторых случаях воспроизвести механизмы развития современной математики и смену этапов ее развития. Важнейший философско-методологический вывод из проведенного анализа эволюции философских представлений о единстве современной математики состоит в том, что синтезирующая функция системного подхода в отношении направлений обоснования современной математики основывается на общих характеристиках различных математических структур, в контексте гегелевской концепции саморазвития научного знания. Адекватно отразить действительность может не отдельное суждение, а только единство двух сторон противоречия, достигаемое в диалектическом процессе познания. Поэтому задача философии математики сегодня состоит не только в том, чтобы осмысливать полученные научные результаты, но и в том, чтобы вносить свой вклад в философско-методологический анализ, способствующий выявлению новых подходов к обоснованию математики.

Знание философских проблем обоснования математики способствует формированию понимаемой математики в учебной аудитории, поскольку не всегда наиболее ясными и простыми теориями в математике являются те, к которым приходят с помощью логической дедукции с самого начала. Возможно, поэтому “школьная математика” логикой рассуждений отличается от “высшей математики”, поскольку последняя на качественно углубленном аксиоматическом уровне начинает формирование критического мышления, философской рефлексии и способствует осмысленной математической деятельности. С точки зрения философии математического образования, диалектический синтез современных взглядов на проблему “строгомании в математике” можно интерпретировать следующим образом. С одной стороны, его можно реализовать в создании более “прозрачных и упрощенных учебников”, с акцентом на понимаемую математику, а с другой стороны, следует стимулировать образовательную деятельность с ориентацией на будущих профессиональных математиков, обязательно включая в новые учебники методологически неформализованное изложение.

ГЛАВА 3
ПОСТНЕКЛАССИЧЕСКАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ И СОВРЕМЕННЫЕ СРЕДСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ

Гносеологический механизм исторического обоснования математики, обеспечивающий прирост нового математического знания, представляет собой экспликацию предпосылочного научного знания в новом подходе к проблеме обоснования, способствующей повышению общего уровня логической строгости математических теорий. Напомним, что стандарт требований к логической строгости, господствовавший на протяжении XX века, был основан на теоретико-множественной концепции строения математической теории. Согласно определению академика А.Н. Колмогорова, “теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при ее развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние” [195, с.29]. Поэтому, принимая во внимание предпосылочные аргументы, мы переходим в область проблематичного знания, так как различные подходы к обоснованию основываются на том, что философы и математики исходят, вообще говоря, из различных концепций.

В докладе “Проблемы обоснования математики”, прочитанном на Международном математическом конгрессе в Болонье, Давид Гильберт сказал: “Поэтому в последнее время в ряде докладов по обоснованиям математики я выбрал новый путь для разрешения проблем обоснования. С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо может быть названо теорией доказательства, я надеюсь с вопросами обоснования математики, как таковыми, покончить тем, что каждое математическое высказывание я превращу в конкретно предъявляемую и строго выводимую формулу и тем самым перемещу весь комплекс вопросов в область чистой математики” [113, с.450]. Но поскольку в конкретной исторической перспективе философии математики этот процесс, по крайней мере, на формально-теоретическом уровне, ничем не регламентирован, то это осложняет обоснование современной математики за обозримый промежуток исторического времени. Говоря об этих трудностях заметим, что Давид Гильберт выдвинул важное методологическое требование, согласно которому в его теории доказательств разрешалось применять только так называемые “финитные”, или конечные, методы. Но, как утверждает венгерский математик Имре Ружа: “Понятие финитных методов было определено так же расплывчато, как и понятие конструируемости у интуиционистов” [388, с.323]. По мере развития рабочего аппарата программ обоснования формализма и интуиционизма выявилась необходимость учета третьего типа обоснования в духе платонистского подхода к обоснованию математики. В философской литературе аналогичным подходом является то, что вместо хорошо изученной диады “определенное – неопределенное” появилась триада “определенное – произвольное – неопределенное”. Хотя в любом конкретном случае остается неопределенным, почему математики придерживаются определенных теорий или методов, зависящих то ли от устройства реальности, то ли от наших привычек, определяемых социально принятыми правилами.

В таких случаях согласие ученого сообщества заменяет математикам ту уверенность в своей правоте, которую можно обосновать только доказательством. С философской точки зрения, можно говорить о некоторой расчлененности методологии и математического доказательства, если реальные методологические установки отделять от теоретических доказательств. Философско-методологический анализ взглядов на современные математические теории показывает наличие различных, диалектически дополняющих друг друга подходов к обоснованию, подтверждающих неисчерпаемость феномена математического знания, предназначенного для достижения тех или иных целей, но при этом неизменно сохраняющем дедуктивную природу математического рассуждения. Например, как отмечает философ математики В.А. Карпунин: “Хотя цели, которые ставили перед собой Гильберт и интуиционисты в поисках надежных (допустимых) логических средств, были во многом противопоказаны, результаты поисков, как известно, оказались сходны: финитные средства Гильберта в значительной степени совпали со средствами интуиционистской логики” [176, с.63]. Философское обоснование современной математической теории предполагает, что критерии метатеоретического обоснования математики удовлетворяют определенным требованиям философского характера. В вопросах подходов к философскому обоснованию современной математики дискуссии возможны и даже, в определенном смысле, неизбежны. Вопрос о формализации, математической строгости и надежности математических теорий, а также гильбертовском идеале чистоты методов оказался намного тоньше, чем это было принято считать до философско-логических результатов Гёделя.

В связи с трудностями обоснования современной математики философы **науки пытаются “смягчить” прежнюю жесткость принципа рациональности,** обычно отождествляемого с дедуктивно-аксиоматическим доказательством, обращаясь к содержательным методам исследования математики, в духе неклассической и постнеклассической методологии развития науки. У каждой системы есть свои недостатки и присущие ей негативные свойства, которые можно лишь смягчить, но не устранить, поскольку их способность к самовоспроизводству глубоко укоренена в самой системе. Поэтому проблема заключается в изучении внутренних дисфункций рассматриваемой системы обоснования. Логическая составляющая этого вопроса направлена на то, чтобы установить пределы возможностей достижения "чистоты" методов, если не во всей математике, то хотя бы в самой логике и метаматематике. Другая составляющая – это методологический вопрос о том, в какой мере для абстрактной математической теории обоснованность метода – фундаментальное понятие. В каждой философско-методологической системе обоснования есть своя доля истины и их синтез возможен и необходим, если необходимо взаимопонимание различных направлений философии математики. "Философско-математический синтез в концепциях классического рационализма базируется на убеждении, – подчеркивает философ математики В.В. Мороз, – что истинное знание не может быть достигнуто иначе, чем ясным и отчетливым усмотрением умом предмета исследования или его дедуктивным выведением из очевидных истин" [288, с.47]. Становление философской идеи неизбежно проходит стадию сравнительных исследований. В этот период понятие "сравнение", в контексте нашего исследования, приобретает значение понимания, осмысления и усвоения ценностей различных программ обоснования математики.

Заметим, что в философской литературе понятия "сравнительная философия" и "философская компаративистика", в широком смысле слова, рассматриваются как синонимы. Широко понимаемая сравнительная философия существовала всегда, так как любой исследователь философских проблем рассматривает несколько альтернативных точек зрения и пытается сравнить их для поиска лучшего решения проблемы. В контексте системной методологии, одним из наиболее типичных методов системной парадигмы является сравнение. Различные свойства исследуемой системы объясняются путем сравнения их с соответствующими свойствами другой системы, путем сходств и различий между ними. Например, сравнение основных направлений обоснования формализма и интуиционизма осуществляется в основном на качественном методологическом уровне. В духе системного подхода к проблеме обоснования математики это способствует более полному восприятию реальности, а не только одной из ее сторон. Поскольку резюмирует В.Я. Перминов: "Обоснование опытной теории, как обоснование ее истинности, всегда только относительно и эта относительность присуще всем ее положениям: мы не можем указать здесь круга принципов, который был бы уже вне критики" [331, с.149]. Поэтому понятие "философская компаративистика" в большей мере отражает именно методологический аспект, то есть компаративистский подход можно рассматривать как сравнительно-исторический метод в философии науки, присутствующий во всяком историко-философском исследовании.

Компаративистский подход к исследованию проблемы обоснования – это неизбежный этап познания, следующий за реконструкцией истории философско-методологических программ математики. “Философская компаративистика обращает внимание на то, что всегда существовало, но приобретает принципиальное значение именно в современной ситуации множественности философских дискурсов” [190, с.143]. С точки зрения компаративистики, философия математики, сравнивая и сопоставляя философские традиции в подходе к обоснованию, стремится выявить скрытые идеи и неявные предположения, входящие в различные комбинации хорошо известных философско-методологических программ обоснования. В контексте набирающей силу тенденции к синтезу противостоящих методологий, цель философского сравнения связана с созданием новой идеи и поиском новых синтезированных оснований методологического сравнения направлений обоснования современной математики. В философской компаративистике такой идеей является утверждение синтеза действующих в настоящее время философских направлений обоснования современной математики, поскольку обоснование синтезированного характера этих методологий решается на пути аддитивного подхода, поднимающего тем самым уровень его эвристической значимости.

Осознание незнания того, как именно мы познаем, – это процесс, приведший к формулированию неклассических принципов, среди которых необходимо выделить важнейший общенаучный принцип дополнительности. Применение принципа дополнительности к проблеме обоснования математики означает независимость и принципиальную частичность отдельных направлений обоснования математических теорий. Системная методология показывает, как философские направления дополняют друг друга на пути к целостности. Что же касается системного подхода, рассматриваемого в контексте методологического подхода этого исследования, то поскольку он исходит из представления об изучаемой системе как о целостности, то вычленение элементов, или подсистем, образующих эту целостность, должно представлять их как необходимые и достаточные условия для самого существования данной системы. Но прежде, чем делать акцент на философской идее целостности в обосновании математики, следует проанализировать понятие дополнительности, необходимое для описания философско-методологической триады направлений обоснования математики. “Это определяет задачу рассмотрения феномена целостности, понимаемой как философско-методологический принцип, имеющий множество историкосодержательных преломлений, далеко не всегда соотносимых с собственно понятием "целостность"” [268, с.69]. Сравнительная философия стремится к разрешению трех фундаментальных проблем: проблемы знания, проблемы реальности и проблемы ценностей.

Сравнительная философия выявляет идеи, порождающие проблему стандартов для сравнений. Когнитивный релятивизм и компаративистская методология в философии математики, которые являются методологической основой новой философской традиции XXI века, естественно расширяют границы методологического поиска, поскольку лежат в основе любой попытки создания концептуального каркаса для синтеза философских направлений обоснования математических теорий. Аналогичные процессы можно проследить в работах математиков, логиков и философов математики по проблемам обоснования современной математики. Главная проблема философии современного этапа развития математики состоит в том, как приспособить ее перспективные направления к всестороннему и целостному обоснованию всех разделов современной математики, поскольку ее содержательные теории порождены реальными потребностями научного познания.

3.1 Философский анализ идеи дополнительности и когнитивного релятивизма в обосновании математики

Специфика философии математики как раздела философии науки определяется тем, что являясь частью философии, занимающейся вопросами обоснования современной математики, она фокусирует внимание на общефилософских подходах, а не на узкоспециальных или вторичных по отношению к обоснованию математических процедурах. Причем преимущественное внимание сейчас уделяется анализу формализма и интуиционизма, поскольку с помощью этих программ обоснования были преодолены парадоксы теоретико-множественной концепции математики. Одним из достоинств точной науки является то, что ее понятия превращены в термины, и поэтому не должно возникать никаких двусмысленностей при их истолковании. Но понятия, используемые в контексте одного направления обоснования математики, должны быть включены в контекст совершенно другого направления обоснования. Говоря о “неуловимой очевидности”, входящей в процесс обоснования, сошлемся также на мнение Эдмунда Гуссерля по поводу теоретико-познавательного обоснования и его прояснения: “Любая в привычном смысле историческая постановка вопроса, любое указание уже предполагает историю как универсальный вопросительный горизонт, не явно, но все же как горизонт имплицитной достоверности, который при всей своей в основе смутной неопределенности есть предпосылка всякой определимости или даже всяких намерений искать и устанавливать определенные факты” [124, с.238]. Историческая изменчивость идеалов и критериев достоверности математического знания не способствует фиксации процедуры фактического обоснования развитой математической теории, которое в некоторых областях прикладной математики целиком определяется согласованностью с другими теориями. Речь, в частности, идет о том, что когда в этих областях критерий достоверности математической теории принимается математическим сообществом, то он по существу получает статус факта и уже в качестве предпосылочного знания с ним необходимо согласовывать новые методологические требования к процедуре обоснования.

К другим недостаткам точной науки можно отнести, например, то, что неявные предположения, иногда довольно критичные для рассматриваемой теории, прячутся в применяемый общий математический аппарат. Их не осознают даже специалисты. Следует отметить, что концептуальные подходы в понимании неявного знания обладают методологической спецификой, которая недостаточно раскрыта в философии науки. Эти трудности заставляют философов математики вспомнить о методологическом опыте, накопленном физиками при изучении квантово-механических явлений, используя принцип дополнительности, и в области философско-методологических исследований по проблемам обоснования математики. В любом общем понятии, даже безотносительно к его предметному содержанию, имеется апория, которую можно сформулировать как “невозможность возможного”. Именно математическому мышлению присуще особое специфическое свойство соединять возможное с невозможным. В работе “Математика и естествознание” (1956) один из создателей современной физики, выдающийся датский мыслитель Нильс Бор писал: “То обстоятельство, что греческим философам были известны парадоксы, встречающиеся в проблемах, связанных с бесконечными последовательностями (как, например, комическая история с состязанием в беге между Ахиллесом и черепахой), повышало требования к строгости математических доказательств” [59, с.498]. В основе этого парадокса древнегреческого философа Зенона Элейского лежала возможность разбить отрезок на бесконечное множество частей. “Хотя для самого Зенона критика математических представлений того времени, – замечает академик Д.В. Аносов, – не очень-то четко оформленных, но общепринятых или по крайней мере широко распространенных, служила основой его критики протяженности и множественности вещей вообще, объективно ее значение было в другом: она показала, что математики должны позаботиться о точности своих исходных понятий” [12, с.168]. После безуспешных попыток опровержения таких парадоксов понятие бесконечности было восстановлено в мировоззренческих правах лишь в XVII веке, когда было осмыслено, какова его роль в математике и как оно влияет на формирование нового математического знания.

Без ведущей идеи философско-математической концептуализации понятия бесконечности различные его интерпретации рассыпались в набор “полумистических сентенций”. Например, именно математическая экспликация идеи бесконечного числового ряда способствовала созданию современного математического анализа. Отношение к бесконечным множествам всегда было критерием мировоззренческого размежевания математиков. Подобно тому, как известная зеноновская апория “Ахиллес и черепаха” решается при допущении непрерывности движения, аналогичная ей апория “мыслимое не станет действительным” решается при существенном допущении непрерывности мышления, соединяющем потенциально мыслимое с актуально мыслящим. Постоянно философски дискутируемая тема двойственности “актуальное – потенциальное” интересна в контексте реализации подходов к обоснованию математики как теоретически сложной системы. Философский анализ показывает, что двойственность связана с дополнительностью, но не только, она также предстает то как ставшее в платонистском смысле, то как становящееся в неплатонистской интерпретации, связанной с принципом математического становления, то есть идеи “математики без отрицания” как в интуиционистском направлении и конструктивизме, где отсутствует двойник исходного объекта из наиболее популярного формалистского направления, содержащего популярную процедуру доказательства от противного, то есть отрицание этого объекта. Можно сказать, что математическое бытие – это и то, и это. В таком контексте представляется очень интересным философское рассуждение В.Н. Садовского об актуальном существовании сложной системы и ее потенциальном бытии: “Наблюдается только актуализированное воплощение сложной системы; ее потенциальное бытие может быть описано лишь теоретически, о нем можно судить и его можно наблюдать лишь при его возможной актуализации или при его воздействии на актуализированную систему” [400, с.30]. С математической точки зрения, априорный характер потенциальной бесконечности как входящей в наиболее стабильное и надежное ядро математики не вызывает сомнения хотя понятие актуальной бесконечности является в контексте обоснования более проблематичным.

Идея бесконечности впервые возникла в древнегреческой философии как идея вечности и бесконечности пространства. Так, философ Анаксимандр высказал предположение о бесконечности миров в бесконечной вселенной. Греческие философы говорили: “Где бы ни стал воин, он сможет протянуть свое копье еще дальше” (цит. по [88, с.6]). В философском и мировоззренческом отношениях это можно рассматривать как существенную философскую дисгармонию или как фундаментальный парадокс, в смысле противоречия естественных ожиданий и космических веяний. Но, с точки зрения методологии современной математики, следует отметить, что процитированное выше рассуждение доказывает лишь неограниченность пространства, но, вообще говоря, не обосновывает его бесконечности. Математическое различие между неограниченностью и бесконечностью можно проиллюстрировать на примере открытого шара конечного радиуса, у которого нет границы, хотя его объем ограничен. Заметим также, что даже если удается определить место бесконечности в структуре универсальной онтологии, не всегда получается ожидаемый результат. Проблема в том, что по мере накопления универсальных правил и под напором критического рационализма приходится рассматривать вопрос методологической обоснованности принимаемых положений. Поэтому, если удается выделить среди этих правил простейшие, то затем все же приходится показывать, что остальные, возможно, сводятся к ним. Кроме того, во-первых, важнейшее математическое понятие актуальной бесконечности, как и потенциальной бесконечности, обусловлено онтологией, а во-вторых, актуальная бесконечность необходима математикам в качестве важнейшего конструкта математического мышления.

С точки зрения философии современной математики, решение проблем, связанных с понятием бесконечности, сведено к обоснованию и критической рефлексии над содержанием понятия бесконечного множества. Как подчеркивал академик А.Н. Колмогоров, “теоретико-множественное построение всех основных математических теорий, начиная с арифметики натуральных и действительных чисел, требует обращения именно к теории бесконечных множеств, а их теория сама требует логического обоснования, так как абстракция, приводящая к понятию бесконечного множества, законна и осмысленна лишь при определенных условиях, которые еще далеко не выяснены” [195, с.30]. Знаменитые логические парадоксы и антиномии никогда не играли заметной роли в чистой математике, и тем более они были далеки от проблем прикладной математики именно потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми в математике рассуждениями. По этой же причине парадоксы Зенона не производили на математиков впечатления “демонстрации серьезных трудностей”, ради чего собственно они и были придуманы. Трудности такого рода можно отнести к исторической стадии развития понятия формальной системы. Философская проблема здесь концентрируется не только на отставании соответствующей математической теории. Новым в апориях Зенона, что буквально означает “безысходность”, было данное им обоснование иллюзорности чувственного опыта. Не случайно, как отмечает академик Д.В. Аносов: “Аристотель называл его "основателем диалектики", понимаемой вначале как искусство спора (при котором тезис противника опровергается путем приведения к абсурду), а более глубоко – как средство выяснить истину путем критического обсуждения” [12, с.167]. Заметим, что противоречие между физическим процессом и наблюдением аналогично противоречию между формализмом и сознательным мышлением в гильбертовой программе обоснования математики.

В физике, так же как и в математике, бесконечность относится к нашим идеализациям, источники которой следует искать в особенностях нашего мышления. Многие математические объекты содержат в себе одну из фундаментальных математических двойственностей – конечное и бесконечное. Например, в “Науке логики” Георг Гегель писал: “Математическое бесконечное интересно, с одной стороны, ввиду расширения [сферы] математики и ввиду великих результатов, достигнутых благодаря введению его в математику; с другой же стороны, оно достойно внимания по той причине, что этой науке еще не удалось посредством понятия (понятия в собственном смысле) обосновать правомерность его применения” [105, с.254]. В этой связи отметим, что в конце XX века появилось много работ, благодаря которым современная физика стала источником новых математических идей, поэтому не только математика является языком физики, но и физика становится языком математики. Примером, поясняющим расплывчатость некоторых исходных математических идей, служит использование формальной математической операции образования “множества всех подмножеств” при построении иерархии множеств. Да и само понятие множества балансирует на хрупкой грани осмысленного и неосмысленного. Идущие против общего течения конструктивисты, высказывая претензии к теории множеств, в частности, остроумно подтрунивали в связи с этим над “множеством всех человеческих добродетелей”. Великие идеи важны для развития математики, но они часто неясны и расплывчаты, поэтому должны быть записаны в точной математической форме, без какой-либо неопределенности, как, например, идея гладкости, приводящая к понятиям непрерывности, дифференцируемости и аналитичности, или идея композиции двух операций, приводящая к теории групп, полугрупп и категориям. Но, следует отметить, что благодаря расплывчатости по-настоящему значительных научных истин, они поддаются многим полезным уточнениям и интерпретациям. Это следствие того, что незнание гораздо разнообразнее по своим формам, чем знание. Умножая свое знание, мы еще больше умножаем незнание, избавляясь от иллюзий здравого смысла, когда оказывается, что ответы на многие вопросы на самом деле нам неизвестны. Математики уже сталкивались с такими феноменами в обосновании своей науки, для понимания которых они нуждаются в какой-то другой более глубокой уверенности. Тогда они обращались к религиозным точкам зрения и к трансцендентной сущности некоторых математических понятий.

Математиков иногда упрекают в том, что они присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных множествах справедливы, поставив себя на место, с которого эти множества можно созерцать. В качестве наиболее впечатляющего примера подобной смелости можно привести работу Георга Кантора над теорией бесконечных множеств, проблемы которой так и не удалось полностью решить науке в прошедшем веке. Вряд ли кто-либо из выдающихся математиков старался так обосновать свою науку и включить ее в общефилософскую систему, как немецкий математик и философ Георг Кантор. Ради этой цели он выполнил обширное историко-философское исследование, целиком оправданное, поскольку его исследования касаются таких методологических категорий, как бесконечность и континуум, которые со времен античности были предметом философской рефлексии. Основываясь на гениальной и, как впоследствии оказалось, простой мысли, что понятие количества является вторичным по отношению к понятию равенства количеств, Кантор сделал великое открытие, обнаружив неэквивалентные бесконечные множества. Заметим, что антитеза актуальной и потенциальной бесконечности поставила перед математическим естествознанием того времени наряду с логическими и философскими проблемами также и богословские проблемы. Как бы то ни было, ни современники Кантора, ни математики XX столетия, в целом, не проявили интереса к канторовской “теологической подкладке” теории бесконечных множеств. Однако теологические мотивировки не удалось устранить из математики окончательно. Хотя они были устранены из сознания, но тем прочнее они обосновались в подсознании. Поэтому в качестве важного философского аргумента в проблеме обоснования математики можно указать на мировоззренческую силу принципа дополнительности, которая настолько велика, что многочисленные попытки “подрывного характера” вызывают сейчас философски осознанный резонанс в поддержку его методологической необходимости, даже независимо от убедительности теоретических объяснений.

Философская интерпретация дополнительности предполагает, что математические структуры природы представляют собой сложную иерархию двухполюсных систем, подразделяющихся на “дискретное – связное”, “случайное – необходимое”, “конечное – бесконечное” и другие системы. Сложность понятия конечности состоит в том, что оно оказывается невыразимым на языке классической логики. Философская сущность понятия бесконечности, по мнению академика А.Д. Александрова, проявляется в следующем: “Бесконечность, не мыслимая как завершенная, мыслится как завершенная. Это и есть диалектика, есть переход в противоположность, изменение понятия вплоть до отождествления противоположностей, осознание полного отрицания как в некотором смысле "того же самого", как отрицательное число есть тоже число” [7, с.258]. Такой подход отличается от дуализма Нового времени, возникшего в связи с вопросом о соотношении идеального и материального. Поскольку мышление – это психический процесс, то логика изучает законы и формы этого нормального процесса психической деятельности людей. Математическое мышление дуалистично, так как объект и субъект рассматриваются в нем как внешние категории по отношению друг к другу. Например, говоря о компьютерной математике и компьютерных устройствах обработки информации, мы применяем слова “смысл” и “понимание”, обозначающие категории человеческого поведения. Однако, как замечает специалист по математическому программированию, академик А.П. Ершов: “Суть дела состоит в том, что такое словоупотребление плодотворно, поскольку оно побуждает к постоянному сопоставлению человеческих и машинных процедур” [151, с.117]. Поэтому выявление роли субъекта в познавательной математической деятельности занимает особое место в обосновании принимаемых приемов рассуждения. Известно, что в современном естествознании используются два взаимно дополнительных способа описания физических явлений природы: классический и квантовый. Средством разрешения эпистемологических проблем, возникающих в связи с разграничением субъекта и объекта, Нильс Бор считал дополнительный способ описания, успешно примененный им в квантовой физике.

Физическая система “объект + прибор” представляет собой новое единое как единство кванта действия, которое одновременно мыслится и как многое, поскольку, будучи физическим и наблюдаемым, оно также обладает и физическим бытием с его “неизбежной множественностью”, которая причастна к единому. Эмпирические указания, иллюстрирующие известную дилемму о корпускулярных и волновых свойствах материальных частиц и электромагнитного излучения, свидетельствовали о наличии соотношений нового типа, не имеющих аналога в классической физике. В работе “О понятиях причинности и дополнительности” (1948) Бор писал: “Тот факт, что квантовые явления не могут быть проанализированы на классической основе, означает невозможность отделить поведение атомных объектов от взаимодействия этих объектов с измерительными приборами, необходимыми для определения условий, в которых протекают рассматриваемые явления” [60, с.393]. Он обозначил эту зависимость термином “дополнительность”, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что в противоречащих друг другу явлениях мы имеем дело с различными, но одинаково существенными аспектами единого комплекса сведений об объектах. Похожая методологическая ситуация сложилась и с гносеологически противостоящими подходами к проблеме обоснования современной математики. В концепции Бора можно усмотреть рациональные моменты философии Канта и других мыслителей прошлого.

Однако кантовское понимание философского взаимодействия разума и внешнего мира, включающее метафизику естествознания, содержит различные противоречия, которые ограничивают влияние кантовских интуиций на развитие науки.

Вообще говоря, философски рассуждать об интуиции абстрактных математических объектов довольно трудно, в том смысле, что каждый математик создает свой индивидуальный мысленный образ, который в каких-то аспектах даже нельзя сравнивать с мыслеобразами других людей. Многие положения интуиционизма были предвосхищены Кантом. Хотя со временем пришло понимание того, что ощущения или восприятия, являясь отражением внешнего мира, не дают нам абсолютного знания, поскольку содержат элементы взаимодействия между воспринимаемым объектом или процессом и тем, кто его воспринимает. "Кроме того, – замечает математик и логик В.А. Успенский, – с усложнением доказательства возрастает элемент его субъективности. Конечно, формальное доказательство объективно. Но, во-первых, формальными доказательствами обладают не сами суждения, а их выражения, записи в формализованных языках. Во-вторых, проверка утверждения, что данный текст является формальным доказательством, хотя и осуществляется алгоритмически, может, при объемистом тексте, вызвать значительные практические трудности" [454, с.458]. Разум анализирует восприятия и применяет свое понимание пространства и времени к опытным данным. Не опыт, по Канту, является источником знания, хотя оно и может начинаться с опыта. Знание, считал он, берется из разума, а человек, побуждаемый научным духом, желает знать, прежде всего, для того, чтобы ставить осмысленные и точные вопросы. Одним из способов решения проблем, поставленных Кантом, но в контексте, отличном от кантовского, является концепция дополнительности, хотя предпосылки дополнительного способа описания можно усмотреть и в кантовской дихотомии априорных форм чувственности и рассудка. Реальные соотношения различных компонентов научного знания не всегда адекватно отражаются в методологии и философии науки, потому что сами элементы научного знания лишь после анализа всех своих следствий предстают с течением времени в завершенном виде. Поэтому неудивительно, что в соответствии с взглядами Бора, вся система понятий классической физики основана на предпосылке, что можно отделить поведение материальных объектов от вопроса об их наблюдении.

Такую же философскую проблему пробовали решить многие мыслители прошлого, пытаясь согласовать наше двойственное положение как зрителей, так и действующих лиц в великой драме нашего земного существования. Признавая границы разума, философы науки не ограничивают нашу удивительную способность познания, поскольку даже частичное знание также является знанием, а неполная уверенность имеет свою ценность, когда известна степень этой уверенности. Пониманию этой проблемы может способствовать применение концепции дополнительности к некоторым фактам реальной языковой действительности и логической природы рассуждений. Здесь необходимо пояснить, в чем состоит отличие между узким и широким толкованием идеи дополнительности. В первом случае, хотя два подмножества высказываний взаимно исключают друг друга, они эквивалентны по своей значимости и являются факторами взаимоотношения наблюдателя и наблюдаемого. Во втором случае два подмножества высказываний по-прежнему необходимы для воспроизведения целостной картины исследуемого явления, но они не ограничены в полном объеме указанными выше специфическими характеристиками. “Но важно еще раз подчеркнуть, – считает академик В.С. Степин, – что в исследовательской деятельности нельзя отбрасывать установку на поиск фундаментальных структур и элементов целого, равно как и альтернативную ей установку на поиск интегральных характеристик целого. Представление о саморазвивающихся системах, объединяет обе эти установки. Они дополнительны, в смысле Бора, и обе необходимы для описания саморазвивающихся систем” [426, с.11]. Идея дополнительности имеет прямое отношение к проблеме уточнения функций математического языка. Хотя, например, алгебраические выкладки, в конечном счете, выражаются в виде формул, связанных между собой с помощью латинских букв *a*, *b*, *c* и так далее, это отнюдь не означает, что алгебра сводится к латинскому языку. В дополнение к этому язык, применяемый математиками в своих рассуждениях, обладает некоторыми недостатками, которые не устраняются математической символикой, поскольку для ее связи используются предложения естественного языка. Но если связывать математические рассуждения только с языковыми средствами, то тогда трудно понять, каким образом математики оценивают качество наиболее сложных математических доказательств, которые не могут не содержать ошибки.

Математика рассматривалась Бором как своеобразное расширение “обычного языка”, который он отождествлял с языком понятий классической физики. Хотя сам Бор не был приверженцем математического направления в физике, а был силен в эпистемологическом анализе и физических интерпретациях, особую ценность математического описания квантово-механической специфики он видел в том, что она дает надлежащие средства для устранения субъективного элемента и для расширения объективного описания. Для философии познания важно осознание того, что по отношению к математике дополнительность интуитивного познания может работать в обе стороны как для понимания какого-то математического явления, так и для понимания себя самой. Без противоположностей ничто не обнаруживается. Бор даже говорил, что противоположности – не противоречия, они – дополнения. Существенную роль в копенгагенской интерпретации квантовой механики играет идея Бора о том, что квантово-механическое описание свойств атомного объекта должно сочетаться с описанием средств наблюдения на языке классической физики, в силе необходимости рассматривать весь эксперимент в целом. И хотя физики, в своем большинстве, избегали определения своей позиции в рамках философской дилеммы “идеализм – реализм”, или “идеализм – материализм”, философы и методологи физики В.П. Демуцкий и Р.В. Половин свое субъективное отношение к копенгагенской интерпретации выразили так: “Постулаты квантовой механики противоречат не диалектическому материализму, а превращенным в догму, постулатам классической механики” [135, с.147]. Парадоксальность квантовой механики, по их мнению, заключается даже не столько в особых эффектах, необъяснимых с точки зрения классической теории, сколько в существовании противоречащих друг другу классических эффектов.

Заметим, что, например, антиномии и парадоксы рассматривались религиозными мыслителями как критерии истинности веры. Для понимания веры математиков в надежность их доказательств необходимо ответить на следующие вопросы: обладают ли они способностью “не впадать в ошибки” при анализе математических утверждений и могут ли они достичь такой “завершенности доказательства”, которая не подвержена какому-либо пересмотру в будущем? Диалектика математического мышления состоит в дополнительности и совместимости отрицательного ответа на первый вопрос и положительного ответа на второй вопрос. В частности, анализируя эвристическую роль математики при формировании физических теорий, академик Л.И. Мандельштам пришел к философско-методологическому выводу, согласно которому, “всякая физическая теория состоит из двух дополняющих друг друга частей. В первой части с физическими величинами сопоставляются математические. Вторая часть – математический аппарат, описывающий все возможные соотношения между этими математическими величинами” (цит. по [96, с.21]). В современной физике, выявляя существенные структурные особенности физических явлений, ищут для них адекватный математический инструментарий, а затем интерпретируют его в рамках соответствующих феноменологических теорий и проверяют на опыте. Поэтому можно также предположить дополнительность реальной деятельности и ее рефлексивных отображений. Например, дополнительность двух описаний математической деятельности: либо фиксирующей программы обоснования математики, в рамках которой она осуществляется, либо выявляющей математическое содержание в контексте практической целесообразности.

Напомним, что если в классической механике известно начальное состояние системы (координаты и их первые производные – скорости), то, согласно дифференциальным уравнениям Лагранжа второго порядка, можно рассчитать дальнейшую траекторию системы. Поскольку в квантовой теории нельзя одновременно измерить координаты и скорость, то понятие траектории теряет смысл и, с точки зрения классических понятий, частицы движутся как бы скачками. Проблема создания фундаментальной теории осложняется своеобразием новой области явлений, требующей для своего описания понятий, расходящихся с привычной концептуальной схемой. “Если в "классике" физическая интерпретация, как правило, предшествовала математической формулировке теории, – утверждает историк физики Вл.П. Визгин, – то в неклассической физике, как это признал и Бор, математический формализм теории зачастую далеко опережал физическое истолкование” [87, с.142]. Неклассическая физика стала использовать математические методы и структуры, которые ранее не применялись в естествознании, например, некоторые разделы алгебры, гармонического и функционального анализа, нашедшие неожиданные применения в квантовой механике и квантовой теории поля. Сущность развития теоретической математики состоит во взаимодействии процессов дифференциации и интеграции знания, а поскольку в основе такого взаимодействия заложено противоречие, то и понимание проблемы природы математических объектов и проблемы истинности математического знания, соответственно, эволюционирует. Следует отметить, что математика отчасти потенциально свободна от влияния культурной среды в своем развитии, поскольку объективный мир обладает некоторой устойчивостью, которую мы можем лишь более или менее адекватно отображать в своих условно абстрактных логико-математических построениях.

Сформулированный Бором принцип дополнительности имеет универсальную методологическую значимость для философии науки и понимания трансформации рациональности. Прежде всего, с точки зрения проблемы обоснования математики, необходимо зафиксировать, что в общефилософском контексте этот принцип требует, чтобы для воспроизведения целостности исследуемого объекта применялись дополнительные подходы или даже дополнительные классы понятий, которые, будучи взяты раздельно, могут, например, взаимно исключать друг друга. Отсюда, в частности, исходят представления о различных типах рациональности. В контексте идеи дополнительности, заслуживает внимания интуитивное постижение понятия целостности как субстанциального аспекта системы, реконструированное специалистом по тернарной методологии Р.Г. Баранцевым: “При взгляде на объект извне это понятие ассоциируется с обособленностью, самостоятельностью, замкнутостью. Если же смотреть изнутри, то это слово обретает смысл лишь тогда, когда появляется представление о внешнем, т.е. при наличии открытости… Таким образом, целостность соединяет в себе противоположные свойства (замкнутость и открытость), которые должны находиться в соотношении дополнительности, не отдавая друг другу полной победы” [35, с.44]. Исходя из такого положения вещей, следует быть готовым к тому, что всесторонний философский анализ, например обоснования математики, может потребовать различных точек зрения по поводу таких фундаментальных понятий математики, как число, множество и так далее, которые препятствуют однозначному описанию.

Даже глубокий анализ любого понятия и его непосредственное применение, по мнению Бора, взаимно исключают друг друга. Эти расхождения и привели к выделению альтернативных программ обоснования математики. “Смысл обоснования состоит в том, что совокупность компонент основания с необходимостью приводит к обосновываемому как к следствию. В идеале система как форма обоснования целого через части есть такое представление целого через такие части, которые с необходимостью дают свойства целого” [3, с.64]. Реакцией на возникшие опасения по поводу того, не лежат ли в основаниях математики необнаруженные скрытые противоречия, явилось формирование различных направлений обоснования математики. Существенным фактором их создания была философская деятельность, точнее то, что различия между первоначальными вариантами программ обоснования имели не только специфически математический, но и ярко выраженный философский характер. Математические теории, с точки зрения философии науки, являются системами норм деятельности в “универсуме идеальных объектов”, которые ими неявно подразумеваются. Как утверждает философ математики А.Н. Кричивец, “математические средства работы с идеальными объектами можно, по крайней мере частично, упорядочить по степени согласия со здравым смыслом, но мы никогда не найдем основания для проведения четкого разграничения этих средств на a priori годные и негодные” [212, с.159–160]. Поэтому, с точки зрения релевантности отстаиваемого методологического решения, обоснование математики в целом – это, прежде всего, его согласование с основаниями, точнее с “несовершенной” аксиоматикой, устанавливающей относительное методическое единство математических утверждений и позволяющей сделать всю систему математических теорем целостной и логически законченной в рамках определенных математических теорий.

Напомним, что современный стандарт требований к логической строгости математических доказательств, остающийся до настоящего времени основным критерием в практической работе математиков, сложился к концу XIX века. Обнаруженные в конце XIX века парадоксы теории множеств поставили под удар не саму математику, а определенные философские представления о том, какой она должна быть в стихийно распространенной философии. С одной стороны, в основе современной математики лежит теоретико-множественная концепция формализованных математических теорий, ограничивающая извне область применения данной теории. Действительно, подтверждает академик С.П. Новиков: “Первая половина XX века – это период безраздельного господства теории множеств в идеологии математики. Развитие самой теории множеств привело к столь общим абстрактным концепциям и мысленным построениям, что возник вопрос об их осмысленности, непротиворечивости. Это способствовало интенсивному развитию математической логики, обсуждению непротиворечивости, аксиоматической полноты самой теории множеств и всей математики” [315, с.5]. Но, с другой стороны, теоретико-множественный подход не дает никаких указаний относительно логических средств, при помощи которых математическую теорию придется развивать и уточнять, поэтому другую сторону строения любой математической теории освещает не только математическая логика, но и методологические подходы к обоснованию современных математических теорий. Сходные процессы происходили в философских дискуссиях физиков по проблеме обоснования квантовой механики.

Современную ориентацию не только на методологическое совершенство теорий, но и на практику их применений можно проследить, сравнивая две крупнейшие дискуссии прошлого века. Во-первых, между немецким физиком Альбертом Эйнштейном и датским физиком Нильсом Бором по вопросам квантовой механики и, во-вторых, между немецким математиком Давидом Гильбертом и голландским математиком Лёйтзеном Брауэром по вопросам обоснования математики. В ходе создания квантовой механики возникло несколько конкурирующих программ ее осмысления и обоснования, которые физики, а затем и философы физики назвали интерпретациями, соответственно “эйнштейновской” и “копенгагенской”. По мнению философа физики А.И. Липкина: “Этот спор концентрировался вокруг нескольких основных вопросов: 1) Существует ли состояние квантовой системы объективно и независимо от измерения? 2) Полна ли "новая" квантовая механика, или в ней существуют фундаментальные "парадоксы" вокруг измерения состояний квантовой частицы (микрочастицы)? 3) Является ли вероятностное описание отдельной микрочастицы принципиальным фактом квантовой механики?” [238, с.374]. Эйнштейн и его последователи настаивали на положительном ответе на первый вопрос и отрицательном ответе на два последних. Приверженцы копенгагенской интерпретации, выдвинутой Бором, наоборот, давали отрицательный ответ на первый и положительные ответы на два последних вопроса. Философская проблема квантовой механики возникла в рамках спора групп Бора и Эйнштейна вокруг классического набора “парадоксов”, возникающих в формулировке квантово-механических процессов. Но для ответов на сформулированные вопросы надо иметь в виду такое существенное обстоятельство, что инварианты философии – это не только ее позитивные утверждения, но и противоречия.

Принятая сейчас в литературе по квантовой механике демаркационная линия связана, соответственно, с “ортодоксальной” и “неортодоксальной” интерпретацией. Согласно ортодоксальной копенгагенской интерпретации, свойства электрона фактически порождаются процедурой взаимодействия с измерительным прибором. С такой неклассической трактовкой отношения между состоянием физической системы и измерением, как раз связан принцип дополнительности Бора, который можно рассматривать в качестве “методологического фундамента” квантовой механики, позволяющего разъяснить существующие в этой области особенности постановки физической задачи о наблюдении. В связи с этим любопытно отметить то обстоятельство, что математическое сообщество обладает общепринятой способностью отделять правильные доказательства от ошибочных доказательств и устанавливать окончательность доказательства в исторически ограниченный срок. Однако окончательное принятие математической гипотезы может оказаться иллюзорным, поскольку то, что ранее было даже социализировано, способно снова перейти в разряд проблематичного в силу изменения общих представлений о допустимом и недопустимом в математике. Есть определенная аналогия дискуссии Эйнштейна – Бора с дискуссией Гильберта – Брауэра. В частности, и Бор, и Брауэр выступают как критики классических подходов и как создатели новых направлений, поэтому весьма прозрачна аналогия между неклассической физикой и интуиционизмом.

Цель гильбертовской программы обоснования математики фактически состояла в обосновании истинности всей классической математики. Для этого, согласно его концепции обоснования, необходимо было: во-первых, формализовать аксиоматику математических теорий, то есть сделать ее независимой от смысла и значений математических терминов и предложений; во-вторых, установить, что формальные аксиомы представляют собой формально непротиворечивое множество; в-третьих, показать истинность утверждения о непротиворечивости только с помощью финитных методов. Сторонники конкурирующей брауэровской программы обоснования математики считали, что в таком виде ее нельзя реализовать, так как под вопросом остается истинность суждений об актуально бесконечных множествах, ввиду их интуитивной неясности. Поэтому для сторонников интуиционистского направления, в отличие от формалистского направления в обосновании, важнейшим критерием является интуитивная ясность определений математических объектов и интуитивная ясность законов логики, с помощью которых выводятся математические суждения. Похожую философскую установку можно найти у Нильса Бора, считавшего, что ограничение возможности говорить о физических явлениях как объективно существующих, наложенное на нас самой природой, находит свое выражение именно в формулировке квантовой механики. Возможно, поэтому правильнее говорить не о полноте теории, а о непонятности исходного состояния "корпускулярно-волнового дуализма" в квантовой механике или о смысле первичного идеального объекта "абстракции актуально и потенциально бесконечного" в теории множеств, например, в контексте дополнительности программ обоснования формализма и интуиционизма.

Следует отметить, что большая философская общность принципа дополнительности и возможность его применения к сложным системам связана с тем, что он приложим к такому множеству состояний, которое не требует ни линейности, ни непрерывности, ни упорядоченности. Не ставя перед собой трудно разрешимую задачу экспликации всего философско-теоретического ядра методологических программ формализма и интуиционизма, в плане критического анализа контекста их дополнительности, необходимо все же зафиксировать наличие таких направлений обоснования в современной математике. Точнее указать какие понятия, утверждения и методы доказательств могут быть приняты как не внушающие опасения в рамках указанных программ обоснования математики. С точки зрения современной философии математики, идея программы Гильберта состояла в нахождении применительно к любой отдельно взятой области математики набора аксиом и правил вывода, которые были бы достаточно полными для всех возможных в данной области корректных математических рассуждений. Такой методологический подход в философии математики получил название "формализма". По поводу восприятия этого термина В.Н. Тростников сказал так: "Слово "формализм" приобрело по историческим причинам столь устойчивый отрицательный для материалистов привкус, что нередко уже само звучание этого слова вызывало предвзятое отношение. Но нам следует сейчас обсуждать не удачность или неудачность термина, а существо выдвинутой Гильбертом программы" [447, с.92]. Его философская суть состоит в том, что можно отчасти пренебрегать смысловыми значениями математических выражений, рассматривая их строками символов некоторой формальной математической системы.

Хотя традиционно в философии математики методологическое направление Давида Гильберта в обосновании математики принято называть формалистическим, в действительности программа под названием "теория доказательств" все же лучше отражает мировоззренческие взгляды Гильберта и его последователей как основное направление обоснования современной математики, чем формалистическое понимание математического знания. Говоря о математических доказательствах, он охотно цитировал следующую поговорку: “когда дом готов, леса убирают”, которую, однако, не применял к своей теории доказательств. Фундаментальная сложность современного математического познания состоит в том, что “леса” теории доказательств, даже если они состоят из ложных представлений, убрать невозможно, хотя они по существу заслоняют собой величественное здание формальных математических доказательств. Для полного разрешения принципиальных трудностей необходима теория математического доказательства, вполне обоснованно считал Гильберт. Он говорил и о своих дальнейших планах по обоснованию математики: “В сотрудничестве с Паулем Бернайсом и при его существенной помощи я теперь развил эту теорию настолько далеко, что фактически получил безукоризненное обоснование анализа и теории множеств; я даже думаю, что теперь мы продвинулись достаточно, чтобы можно было приняться за великие классические проблемы теории множеств типа проблемы континуума и не менее важные все еще открытые проблемы математической логики” [114, с.418]. Выдвинутый Гильбертом план спасения теории множеств состоял в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе разработанной им теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость установленной системы аксиом.

Эта труднейшая задача, поставленная Гильбертом, так до сих пор и не решена. “Хотя в период разработки формализма господствовало убеждение, что формулы суть отображения более абстрактных и, главное, более истинных математических высказываний, – подтверждает Герман Вейль, – они и манипуляции с ними не были самоцелью; формулы служили для того, чтобы выразить и передать математические факты” [81, с.64]. Формальные структуры не дают исчерпывающего описания специфики тех или иных отношений. Для этого необходимо дополнить описание этих отношений содержательными характеристиками. В противоположность интуиционизму и логицизму Гильберт хотел сохранить все разнообразие содержательных результатов классической математики, поставив ее на надежную основу формального математического обоснования. Заметим, что при всей противоположности исходных принципиальных позиций Брауэр в своей программе реформирования математики тоже изначально пытался сохранить все то, что не противоречит исходным принципам конструктивности. Ради этого он вначале занялся классической математикой, получив в ней первоклассные результаты. Например, в золотой фонд современной математики вошла теорема Брауэра о существовании неподвижной точки, в которой утверждается, что любое непрерывное отображение n-мерного шара в себя имеет неподвижную точку.

Затем он приступил к переосмыслению методологии математики на новой философской основе, согласно которой каждое доказательство должно давать построение, подчеркивая при этом неформализуемость интуиционистской математики и не желая в связи с этим явно выписывать ее аксиомы. Еще до теоремы Гёделя о неполноте математики отметили, что понятия “существовать” и “построить” стали заметно различаться в современной математике, то есть появились “чистые” теоремы существования, в которых нет построения объекта, чье существование доказывается.

Вот как объясняет методологические достоинства такого подхода к пониманию существования математических объектов Давид Гильберт: “Ценность чистого доказательства существования в том именно и состоит, что благодаря ему исключаются отдельные построения и многие разнообразные построения объединяются одной основной идеей, вследствие чего четко выступает только то, что существенно для доказательства: смысл доказательства существования состоит в сокращении и экономии мысли” [111, с.382]. Но в современной математике понятие существования многозначно и многоаспектно. Например, в рамках математической модели элемент может существовать в некотором содержательном смысле, хотя совокупность соотношений, которому он удовлетворяет, не обязательно совместна. Поэтому, с точки зрения философии конструктивистов, им, возможно, больше бы подошло условное название “нечистых” теорем. Одно время казалось, что соответствующие трудности обусловлены аксиомой выбора, и это было действительно справедливое обвинение, в связи с тем, что при наличии аксиомы выбора многие конечномерные математические процедуры можно реализовать и в бесконечномерном случае. Принципиально другой подход к рассмотрению этой проблемы предложил Лёйтзен Брауэр. Критически анализируя идеи Рассела о сведении математики к логике, он пытался доказать, что математика не только не зависит от логики, а даже, наоборот, используемая логика зависит от математики. Нужно либо полностью отказаться от бесконечных совокупностей объектов, либо перейти к другой логике, либо признать идеальный характер математических утверждений без какого-либо содержательного смысла.

После защиты диссертации Брауэра “Об основании математики” (1907) и завершения работы, претендующей на новое обоснование математики, с неожиданным названием “Обоснование теории множеств независимо от логического принципа исключенного третьего” (1918) в математике и логике появилось новое философское направление, называемое “интуиционизм”. Это название в философии науки не совсем удачно, так как ассоциируется с понятием математической интуиции. С точки зрения философии математики, суть этого направления совсем в другом. Вот как объясняет философско-математическую специфику интуиционистского направления в обосновании математики сам Лёйтзен Брауэр. Если цель формалистов базируется на "непреложной вере в волшебный характер языка", то интуиционизм "выдвигает на первый план существование чистой математики, независимой от языка, и на этой основе пытается доказать истинность математики, построенной до сих пор" [64, с.257]. Он исследует, насколько логические принципы, которые играли существенную роль в генезисе современной математики, могут быть применены – не исключая математического понимания бесконечного – как надежное средство для связи чисто математических построений. Интуиционисты воспринимали математику как естественную функцию интеллекта. В таком контексте математика являлась для них продуктом человеческого ума. Новая логика, по мнению интуиционистов, понятнее, чем классическая, так как описывает математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как специальные предложения о возможности выполнить некоторое "умственное построение".

Эта проблема возникла в связи с тем, что с чисто логической точки зрения при исследовании конкретных вопросов классического математического анализа применяются те же самые методы, которые в более общих теориях приводят к затруднениям. Например, "доказательство существования верхнего предела числовой последовательности обосновывается рассуждениями совершено такого же рода, как те, которые в общей теории множеств приводят к противоречиям (антиномиям)" [197, с.509]. Заметим, что поскольку математическое построение – это философская сущность высокого теоретического уровня, то для его обоснования недостаточно апеллировать к теоретической и эмпирической математической практике. Поэтому математикам удобнее было ссылаться в качестве первоисточника на идеи, косвенным воплощением которых они считают теоретическую математику. Но так как для новых философских идей по обоснованию математики, осознанных Брауэром, в философии науки его времени не были выработаны механизмы концептуализации в виде точного понятия алгоритма, то он предпочел ссылаться на интуицию как инструмент познания. В соответствии с таким эскизным подходом к обоснованию математики он дал ему название "интуиционизм", хотя, подчеркивая процессуальную роль конструкции в этом направлении обоснования, использовал также название "конструктивизм". Как подчеркивает В.Н. Тростников, "брауэровский интуиционизм не просто повлиял на философский подход к математике, а дал боковую ветвь, называемую конструктивным направлением в математике, авторитет которой все возрастает, которая вербует новых сторонников и получает серьезные конкретные результаты" [447, с.95]. В современной математике это направление реализуется в бурно развивающейся области "компьютерной математики”. Но, с точки зрения данного исследования по проблеме обоснования математики, предпочтительнее употреблять первое название, интуиционизм, так как оно отводит ведущую философскую роль понятиям истины и обоснования, а не понятиям задачи и конструкции.

В то же время в пользу конструктивистского направления в математике необходимо добавить, что оно сейчас особенно востребовано в связи с новыми веяниями теории алгоритмов, где под “алгоритмом” понимается программа, определяющая работу компьютера, на любом универсальном языке программирования. Брауэр настаивал также на том, что для соответствующих конструктивных построений требуется применять особую интуиционистскую логику, в которой ни закон исключенного третьего, ни закон снятия двойного отрицания уже не могут претендовать на роль универсальных логических принципов. “Но математическая интуиция таит в себе и опасность, ибо, – по мнению физика Фримена Дайсона, – многие ситуации в науке требуют для уяснения той или иной проблемы как раз усиленного обдумывания, а не уклонения от него” [128, с.117]. Основная идея критики интуиционистами закона исключенного третьего заключается в том, что математическое утверждение, которое является дизъюнкцией нескольких суждений, должно считаться истинным только в том случае, если, по крайней мере, один из дизъюнктов является истинным. С интуиционистской точки зрения, этот закон является не только логическим принципом, но по существу предпосылочным знанием некоторого прогнозируемого результата, который получается с помощью конкретного математического исследования. Хотя закон исключенного третьего критиковали и до Брауэра, именно он предположил, что безграничное применение этого логического принципа способствовало появлению парадоксов теории множеств. В частности, хотя принцип исключенного третьего в интуиционистской математике не является верным, но если он применяется только для конечных совокупностей свойств, то он тогда непротиворечив.

Поэтому Брауэр ограничивал его применение только конечными множествами и, принимая лишь абстракцию потенциальной бесконечности, ограничивался рассмотрением конструктивных математических объектов, требующих иной логики, связанной с проверкой возможности реализации таких объектов, либо установления, что такой реализации не существует. Заметим, например, что поскольку элементарная геометрия полна, то закон исключенного третьего в ней полностью корректен, так как в принципе любое утверждение можно проверить на истинность либо ложность, не конкретизируя, сколько реальных ресурсов для этого потребуется. Но, если мы интересуемся вычислимостью с помощью допустимых средств, то закон исключенного третьего, с конструктивистской точки зрения, может приниматься лишь в том случае, когда используемый язык настолько ограничен, что все выразимые в нем свойства разрешимы. К этому можно добавить, что компьютерная математика предъявляет новые требования к вычислительным алгоритмам – это требование устойчивости в целом и устойчивости относительно ошибок округления в частности. Конкретный пример приводит академик Н.Н. Яненко: “Так, с точки зрения теоретика, конструктивность теоремы о существовании и единственности решения системы линейных алгебраических уравнений, основанная на алгоритме (правиле) Крамера, является неоспоримой. С точки зрения математика-вычислителя, эта теорема и правило Крамера недостаточны. Математику-вычислителю требуются разумное количество операций и устойчивость относительно ошибок округления. Ни тем, ни другим свойством алгоритм Крамера не обладает” [499, с.65]. Кроме того, если ограничиваться только конструктивными проблемами, то тогда не останется математических проблем, неразрешимость которых могла бы быть доказана, а допущение о том, что каждая проблема разрешима, выглядит совершенно нереалистичным. Математическое доказательство в таком контексте состоит из соответствующего конструктивного построения с помощью эффективных математических методов и его логического обоснования.

Разрешение такого рода разногласий приходится искать вне математики, то есть выходить за пределы собственно математической аргументации и опираться на ту или иную философскую теорию математического познания. До настоящего времени именно направления формализма и интуиционизма пытались разрешить затруднения, волнующие математиков. Вот как анализировал сложившуюся ситуацию академик А.Н. Колмогоров: “Возглавляемый Гильбертом формализм предполагает сделать это посредством превращения математики в чистую игру символами, в которой все позволено под единственным условием уметь доказать отсутствие в этой игре противоречий. Интуиционизм Броуэра [Брауэра], напротив, предлагает изгнать из математики все, что не имеет твердого основания в общей всем интуиции. Большинство математиков, внимательно присматриваясь к обоим течениям, занимает выжидательную позицию” [197, с.510]. По поводу игры символами (формулами) Гильберт говорил, что помимо математической ценности она имеет важное общефилософское значение, так как “эта игра формулами совершатся по вполне определенным правилам, в которых выражается техника нашего мышления” [111, с.382]. Кроме того, основой интуиционистской философии математики является натурфилософия понятия бесконечного. Ее суть состоит в том, что человек практически не имеет дела с бесконечностью, и, следовательно, не может адекватно мыслить о бесконечности, не теряя достоверности. Например, интуиционисты отрицали континуум как множество точек, связывая его с понятием “свободно становящейся последовательности”, хотя в совокупности с логическими запретами эта идея мало что оставляла от знаменитых теорем классической математики. С точки зрения реального положения дел в современной математике, континуум берется из конечного рассуждения и с помощью одного шага от противного делается заключение о его несчетности на основе закона исключенного третьего.

Но, как бы там ни было, можно заключить, даже если интуиционисты в чем-то не правы и не последовательны, важнейшая заслуга этого направления обоснования в математике состоит в выявлении малой информативности сильных логических средств классической математики. Речь идет о том, что, с точки зрения математики, противоречивые объекты не существуют, но, как выяснилось в начале прошлого века, теория множеств все таки допускала существование множеств с противоречивыми свойствами. Эта ситуация породила различные философско-методологические попытки определения понятия математического существования. Поэтому велась активная полемика между формалистами, для которых математическое существование было равносильно непротиворечивости, и интуиционистами, для которых можно было говорить о существовании математического объекта, только в том случае, если доказательство этого существования представляло эффективный способ его построения. Философский вопрос об экзистенциальных математических высказываниях, то есть о высказываниях, которые утверждают существование математических объектов, представляет интерес не только в связи с проблемами, поднятыми в программе обоснования Брауэра. С такой же остротой он стоит и в физических теориях. Так, понятие формального существования элементарных частиц приобретает смысл в рамках теоретической системы или, как принято сейчас говорить, парадигмы, используемой для описания природы. Безусловно, тезис Брауэра “существовать – значит быть построенным”, разумеется, потенциально, произвел огромное впечатление на его современников. Из этого тезиса о доказательстве экзистенциального высказывания вытекают все ограничения, налагаемые интуиционизмом на допустимые методы математики.

Заметим, что нахождение истинностного значения утверждения “существует такое x, что верно $A(x)$” означает, что найдется хотя бы одно значение c, при котором $A(c)$ истинно. Такая проверка может составлять значительную методологическую проблему. Для пояснения релевантности этой проблемы в теоретической математике на простых стандартных примерах, связанных с загадками натуральных чисел, рассмотрим сначала следующее вспомогательное определение. Натуральное число называется “совершенным”, если сумма его делителей, исключая его самого, в точности равна ему самому. Пифагорейцы считали их особенно важными. Например, такие числа, как 6 и 28

– совершенные, потому, что 6 = 1+2+3 и 28 = 1+2+4+7+14, третье совершенное число 496, четвертое – 8128, пятое – 33550336, шестое – 8589869056. Самое большое из известных совершенных чисел, найденное с помощью современного компьютера, содержит в своей десятичной записи уже 130000 цифр и компактно записывается в виде $2^{216090}(2^{216090} – 1)$. Еще Пифагор заметил следующее изящное свойство совершенных чисел, состоящее в том, что они всегда равны сумме нескольких последовательных натуральных чисел, действительно, 6 = 1+2+3, 28 = 1+2+3+4+5+6+7, 496 = 1+2+3+4+5+6+7+ … +30+31. “На первый взгляд, совершенство – свойство, сравнительно простое для понимания. Тем не менее, древние греки так и не сумели постичь некоторые фундаментальные особенности совершенных чисел” [410, с.28]. Отметим также удивительное общее свойство известных совершенных чисел, которое состоит в том, что они четны. С точки зрения математики, для заданного числа его проверка на то, является ли оно совершенным, представляет собой чисто формальный алгоритмический процесс. Но проблематизирует эту проверку то, что нерешенная проблема “Существует ли нечетное совершенное число?” стоит уже более 2000 лет.

Хотя никакого практического значения, или принципиально нового философско-математического императива, эта задача не имела, ее решение могло бы прояснить математическую природу совершенного, внутренне присущего таким числам, чтобы еще раз поразмыслить над философской сущностью “совершенства мира”. Другая сложная методологическая проблема, связанная с совершенными числами, состоит в выявлении возможности доказательства того, что запас совершенных чисел можно исчерпать за конечное число шагов. Привлекательность математики для многих исследователей, в том числе и непрофессионалов, проявляется еще и в том, что в ней всегда находятся для них нерешенные просто формулируемые проблемы. Однако интуитивная потребность во всеохватывающих доказательствах в отдельных областях современной математики не всегда методологически оправдана. Это положение можно эксплицировать на более сложном примере уравнений с частными производными, которые за редкими исключениями не решаются, безусловно, с учетом такого принципиально важного методологического аспекта, как, в каком именно обобщенном смысле ищется соответствующее решение. Однако многое из того, что остается, вполне постижимо с помощью методов функционального анализа, хотя своими наиболее солидными разделами, насыщенными разнообразными контрпримерами, современный функциональный анализ лежит за пределами общего высшего математического образования. Противоречивые подходы к обоснованию приходится анализировать, прежде всего, в философии математики. Противоречия часто возникают в результате того, что математики мыслят совместно те сущности, которые совместны только в процессе, а не в статике. Если задаться целью, выявить в методологических установках направлений обоснования математики проявления исторических закономерностей, то станет ясно, что соответствующее развитие касается не только целых разделов математики, но и отдельных математических понятий, репрезентирующих с помощью математических абстракций конкретные природные объекты.

Мотивы, которые побуждали математиков принимать некоторые положения интуиционистской, а затем и развивающей ее конструктивистской программы обоснования математики, носили и чисто математический, и философский характер. Они вытекали из размышлений о роли интуиции в математическом познании вообще. Согласно интуиционизму, математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, которое должно быть ясным само по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. В интуиционистской программе можно выделить негативный и позитивный аспекты: первый состоит в отрицании существования некоторых основных понятий теоретико-множественной математики, а второй – в разработке конструктивных аспектов математики. Заметим, что финитизм программы формализма был, все же, не столь радикален, как финитизм программы интуиционизма. Если Гильберт считал возможным сохранить понятие актуальной бесконечности в классической математике в тех пределах, в которых оно допускает финитное обоснование, то Брауэр вообще хотел устранить это понятие из математики. Поэтому вопрос об оценке интуиционистской концепции Брауэра, с философской и, прежде всего, математической точки зрения, довольно сложен. Поскольку она представляет собой реформу, а не анализ классической математики, то практического опыта одной традиционной математики, вообще говоря, недостаточно. Хотя современная математика во многих своих направлениях дает возможность некоторого приближения к идеям интуиционизма и конструктивизма, что является основной причиной практической эффективности математики в приложениях к тем наукам, которые поддаются формализации, значительная часть математических теорий строится на неконструктивной основе, но при этом тоже порождает массу практически полезных результатов.

Следует отметить, что некоторые положения интуиционизма конкретизируются теоремами Гёделя о неполноте, хотя сам Брауэр, после появления логических результатов Гёделя, принципиально не желал ими пользоваться для обоснования своих конструкций, так как не относил их к сущности классической математики. В определенной мере он был прав, поскольку результаты Гёделя имеют отношение к достаточно богатой формализации любой математической теории. С точки зрения сторонников интуиционистской доктрины, никакая формальная система не способна охватить все верные методы доказательства. Вторую теорему Гёделя о неполноте можно, например, интерпретировать в таком же смысле, что никакая формальная система не может “охватить” всех методов, использующих ее собственную методологическую корректность. Даже, несмотря на методологически оправданное стремление искать конструктивное решение проблемы существования математических объектов, направление интуиционизма в некоторых своих проявлениях все же излишне радикально. Принципиальный недостаток логики Брауэра, который неявно эксплицирован в философской литературе, состоит также в том, что получение результатов, построенных по интуиционистским формальным правилам, имеет тот же порядок сложности, что и для классических подходов. Критические аспекты программы интуиционизма произвели, по мнению философа математики М.И. Панова, большое впечатление на математиков: “Представители классической математики были вынуждены реагировать на брауэровскую критику хотя бы в плане поиска более строгого обоснования теоретико-множественной точки зрения” [321, с.270]. Поэтому математическая правильность общего философско-методологического принципа интуиционистского обоснования современной математики не может быть поставлена под сомнение, хотя нельзя не признать, что направление интуиционизма обусловлено недостаточной развитостью гносеологических аспектов направлений обоснования математики и определенной узостью методологических ограничений.

Поскольку, с точки зрения интуиционизма, математическое доказательство должно вместе с обоснованием давать требуемое построение, то методы, дающие такое построение, Брауэр и его последователи называли эффективными. Они считали, что математическое построение – это такая сущность, для обоснования которой недостаточно одних ссылок на практику, поскольку иногда приходится рассуждать одновременно на нескольких уровнях обоснования. Если противники интуиционизма использовали логику в качестве средства доказательства недостоверности интуиции, то Брауэр использовал интуицию для аргументации недостаточности логики для математики. Естественно, что представители современного математического интуиционизма не полагаются на чистую интуицию в кантовском понимании. Но многие понятия и методы, важные для математики, не могут быть реконструированы в соответствии с требованиями интуиционистской программы. Более того, ни интуиционистский, ни конструктивный подходы ничего кардинально не меняют в исторически сложившемся понимании современной математики как строгой и дедуктивной научной дисциплины. В формалистской программе обоснования математики абстрактным понятиям не приписывают никакой интуитивной реальности. Отчасти такой подход представляет собой большую свободу действий, по сравнению с интуиционистской позицией, как для абстрактных математических теорий, так и для их приложений. Исходя из своего опыта исторической реконструкции математического знания, Карл Вейерштрасс разъяснял: “На вопрос, можно ли в действительности извлечь что-нибудь полезное из абстрактных теорий, которыми, на первый взгляд, так увлечена современная математика, можно ответить, что, основываясь на одних только абстрактных умопостроениях, греческие математики вывели свойства конических сечений, причем случилось это задолго до того, как было установлено, что по траекториям, имеющим форму конических сечений, движутся планеты вокруг Солнца” (цит. по [258, с.583]). Поэтому иногда полезно выявлять философские причины, побуждающие математиков заниматься теми или иными исследованиями, не забывая при этом о естественной истории генезиса современных математических объектов.

Сравнивая формалистский и интуиционистский подходы к обоснованию математики, необходимо учитывать следующий неоспоримый факт: методы конструктивной теории показали свою неограниченную широту и глубину, поскольку каждая решенная проблема ставит новую, для которой тоже можно найти убедительные решения. Когда было философски осознано, что само представление о том, будто математическая теория строится на одних аксиомах, вообще говоря, неверно в силу того, что она еще строится посредством логических рассуждений, то идеал аксиоматического метода в его теоретико-множественной реализации стал постепенно методологически размываться. Но, несмотря на различные мнения об аксиоматически построенных теориях, формальная программа Гильберта сыграла выдающуюся роль и оказалась наиболее продвинутой как в самой современной математике, так и в вопросах обоснования математики. Вопреки устоявшемуся в философии математики мнению, его программа содержит не только собственно формальные, но также и содержательные аспекты. Как поясняет сам Давид Гильберт: “Наряду с собственно математикой, формализованной указанным выше образом, возникает в определенной мере новая математика, метаматематика, необходимая для обеспечения надежности собственно математики, в которой (в отличие от чисто формальных выводов собственно математики) используются содержательные выводы, но только для доказательства непротиворечивости аксиом. В этой метаматематике оперируют доказательствами собственно математики, и эти доказательства и составляют предмет содержательного исследования” [114, с.419]. Более того, ее достоинство состоит еще в том, что в методологической программе Гильберта удалось систематизировать весь накопившийся в теоретической математике опыт предыдущих исследований. Философия математики не должна игнорировать реконструкцию реальной истории математики, если не по формальным соображениям, то хотя бы в силу “жесткой философской объективности”.

Целью формалистской программы обоснования математики, предложенной Гильбертом, являлась не редукция математики к логике или арифметике, а редукция к метатеории как истинной части математики, благодаря непротиворечивости каждой математической теории в силу принятых принципов и в соответствии с выделенным им критерием финитности. Если принять это в качестве тезиса, то в качестве антитезиса можно рассмотреть следующее рассуждение. “Может показаться, что достижение единых норм доказательства в математике могло бы, по крайней мере, помочь нам во всеобщем стремлении к объединению – то есть "углублению" нашего знания, – по-философски рассуждает специалист по квантовым вычислениям Дэвид Дойч. – Однако происходит обратное. Подобно предсказательной "теории всего" в физике, правила Гильберта почти ничего не сказали бы нам о структуре реальности. Они реализовали бы, в пределах математики, предельное видение редукционистов, предсказывающее все (в принципе), но ничего не объясняющее” [137, с.239]. Кроме того, современная история эволюции и роста математического знания показала, что принципиальное для этой программы Гильберта методологическое допущение с финитностью оказалось не достаточно убедительным в той части положений, согласно которым достоверным обоснованием математической теории может быть только финитное обоснование. К тому же, поскольку в процедурах гильбертовского формализма содержательные утверждения математики заменяются формальными символами, то необходимо учитывать такую методологическую особенность, как возможность идентификации математических символов субъектом познания в силу неограниченности способов их введения в математику. Соответствующая проблема понимания тоже нигде не формулируется и накапливается в виде неявных элементов обоснования. Общеизвестно, что математики традиционно придают большое значение экспликации правил математического рассуждения. С одной стороны, формальное обоснование математической теории всегда рассматривалось как необходимое условие ее признания в математическом сообществе. Но, с другой стороны, реальная математическая деятельность немыслима без неявных и неформальных интуиций, также как и без инструментальных навыков и техники рассуждений, существующих почти что на бессознательном уровне. Можно заключить, что, с точки зрения философско-методологического синтеза, на современном этапе математической работы сочетаются обе стороны математической деятельности.

Согласно главному тезису этого исследования, новая программа обоснования математики эксплицируется с помощью философско-методологического синтеза действующих направлений обоснования математики, как дополнительных процедур обоснования. Поэтому, в качестве второго дополнительного аргумента, поддерживающего главный тезис этого исследования, кроме реальной дополнительности направлений обоснования математики, можно сослаться на методологически важное заключение философа математики Л.Б. Султановой, согласно которому “исследуя специфику математического знания и особенности его исторического развития, представляется возможным вскрыть механизм исторического изменения уровня строгости для математической теории, а также подтвердить недостижимость абсолютного обоснования математики” [436, с.103]. Проблематика совершенного обоснования вовсе не случайно составляет предмет метаисследований, так как подобно большинству методологических категорий понятия точности и строгости внутренне дифференцированы и в определенном смысле абсолютная точность и строгость лишены смысла, хотя бы в силу релятивности понятия “приближенного решения” в вычислительной и компьютерной математике. Вера в абсолютное знание, в частности в абсолютное обоснование, широко распространена, но ничем не оправдана. По существу “нет большой разницы между абсолютистскими претензиями на знание профессионального философа и наивным убеждением обычного, непрофессионального индивида, не имеющего философской подготовки и опыта” [385, с.27]. Оба они полагают, что имеют доступ к абсолютному знанию, только первый предполагает, что он действительно может доказать то, что считает абсолютным, а второй утверждает свою претензию на основании своего опыта догматически, принимая ее без какого-либо философского оправдания.

Критическое представление об абсолютном знании вынуждает признать релятивность знания в качестве неотъемлемого и довольно значимого аспекта познавательной деятельности проблемы обоснования математики. О релятивизме в проблеме обоснования математики можно по-философски рассуждать тогда, когда будут выявлены и сформулированы различные точки зрения о существующих направлениях обоснования современной математики, а затем с помощью гносеологических аргументов будет показано, что все они в методологическом смысле равноценны. Отличительные черты математического познания характеризуют, хотя и очень важный, но только один из моментов познавательной деятельности. Например, невозможность полной реализации гильбертовой программы обоснования математики лишь подтверждает философский тезис о том, что нет ничего “абсолютно абсолютного”. Поиск абсолютной надежности математики был основной мотивировкой для конкурирующих концепций Брауэра и Гильберта. Поэтому можно задать и такой вопрос: нужна ли математике для своего оправдания абсолютная надежность? Ни к какой другой науке не предъявляются такие жесткие требования. Хочется еще раз подчеркнуть, что нет и не может быть ни абсолютной строгости, ни абсолютной точности. Уровень строгости различен в разных областях научного знания, меняясь вместе с развитием этих областей, в частности, в математике различные уровни строгости различаются строгостью анализа доказательства. "Строгость в обычном, неформализованном смысле, – по мнению современного французского математика Рене Тома, – состоит в том, что каждый этап доказательства абсолютно ясен каждому читающему, если принять еще во внимание уже произведенные на более ранних этапах расширения смысла" [446, с.16]. Эти вопросы можно решать и в нефундаменталистском ключе, хотя соответствующее направление в философии математики пока еще не имеет таких же традиций, как исследования в русле течений фундаментализма.

Сейчас можно уже говорить о завершении периода фундаментализма в философии математики как конце "картезианской мечты о совершенном знании", с помощью которого фундаментальная наука развивалась в ходе решения возникающих внутри ее проблем. Роджер Бэкон верил, что математическое знание заложено в каждого человека от природы и математика является уникальной формой мышления, присущей как нам, так и природе. Ее уникальность для него характеризуется тем, что она позволяет достичь абсолютной точности и достоверности знания, а значит, всем нашим прочим знаниям мы можем доверять лишь постольку, поскольку они основаны на математических принципах. Поэтому современная математика тоже содержит в себе такого рода противоречие, которое постоянно преодолевается в процессе внутреннего развития теоретической математики во взаимодействии с математической практикой. С середины XIX века классическая наука подверглась критике, благодаря которой абсолютные и вечные истины стали философски интерпретироваться как относительными и условными, поскольку методологические принципы однозначности и определенности, справедливые для физического макромира, противоречили результатам исследований микромира. Поэтому появились новые подходы, принципы и методы, среди которых в первую очередь следует выделить вероятностный подход, соотношение неопределенностей Гейзенберга и принцип дополнительности Бора. Кроме того, появившиеся в XIX веке неевклидовые геометрии, а позднее теория относительности и квантовая механика вынудили признать, что даже математика не открывает одни только абсолютные истины. С мировоззренческой точки зрения, релятивизм "размыл" сциентистскую доктрину, согласно которой наука является единственной надежной формой человеческого познания. Рассмотрим подробнее, как этот процесс проявляется в математике. Напомним, что современная математика имеет очень сложное строение, постепенно становящееся необозримым.

Доказательства становятся настолько громоздкими, что, учитывая их объем, в доказательстве принято использовать теоремы, полученные ранее, в виде готовых формулировок без соответствующих доказательств, поскольку их проверка требует чрезвычайно большого времени и терпения. Но, будет ли такое рассуждение убедительным доказательством для тех, кто незнаком с доказательствами используемых теорем? Такой авторитет в этой области как математик и логик В.А. Успенский утверждает: “Мы не беремся дать однозначный ответ на этот вопрос. Заметим еще, что само слово "ранее" вносит дополнительный субъективный "релятивистский" момент (хронологическая последовательность двух почти одновременно доказанных теорем может по-разному определяться разными наблюдателями)” [454, с.450]. Для дальнейшего философского анализа важно отметить, что в исследовании проблемы обоснования математики, которое, как уже выяснено, является системным, системная постановка этой проблемы находит дальнейшее развитие в опоре на неспецифические несистемные средства исследования. Вполне естественно, что системный подход к обоснованию, как и любая развитая конкретно-научная методология, опирается на некоторую совокупность направлений обоснования и, кроме того, дополняется другими методологическими идеями и средствами. Логика развития неклассической и постнеклассической науки обусловливает более широкое толкование дополнительности. “Дополнительность с этой точки зрения – следствие полиморфности, ипостасности, гетерогенности принимаемой онтологии с атрибутивной потенциальностью” [161, с.25]. В таком философском контексте в системном подходе к обоснованию математики должны отражаться противоречия и противостояния различных направлений обоснования на пути к единой и целостной концепции обоснования.

Однако следует подчеркнуть, что в качестве специфической черты неклассической математики релятивизм, поддерживающий свободу выбора, не может быть отождествлен с субъективизмом, поскольку он опирается на объективные критерии познавательных норм и состоятельность математического познания. Философская проблема релятивизма в обосновании научного знания сегодня по-прежнему актуальна в философии математики, в силу новых источников развития современного математического познания, например, мощного и эффективного направления компьютерной математики. Общеизвестно, что требование истинности математических суждений предполагает элемент идеализации, поэтому, хотя “реальная истина” одна, мы вынуждены принять некоторые ограничения, налагаемые несовершенством отображения реального мира, а также с учетом того, что разные исследователи имеют разные представления об истинном положении дел. Согласно философскому определению американского исследователя Николаса Решера, “релятивизм есть доктрина, согласно которой люди делают выводы на основе стандартов и критериев, не имеющих внутренней обоснованности или убедительности, поскольку их ранг и статус полностью зависят от их принятия группой” [374, с.35]. В силу того, что мы заведомо ограничены знанием только отдельных фрагментов всей системы математического знания, мы вынуждены говорить о принципиальной относительности любого описания системы направлений обоснования математики. Релятивизм как философская концепция признает относительность норм, правил и критериев познавательной деятельности, зависящих от культурно-исторических, социальных и ценностных факторов.

Хотя релятивизм не является самостоятельной тенденцией развития науки, он сейчас настойчиво проявляет себя как неотъемлемое свойство математического познания. “Очевидно, – заключает Л.А. Микешина, – что релятивизм, долгие годы пребывавший на "обочине" гносеологических и методологических исследований и олицетворявший препятствие для получения истинного знания, в современной эпистемологии должен быть переоценен и переосмыслен как концептуальное выражение неотъемлемой релятивности знания, его динамизма и историчности” [279, с.53]. В качестве примера, подтверждающего такого рода тенденции в математике, рассмотрим типичную реакцию на парадокс Сколема, проявившуюся в релятивизации концепции множества в зависимости от приятой аксиоматики. В серии работ, начатых шведским логиком Леопольдом Левенгеймом, а затем продолженных норвежским математиком Туральфом Сколемом в начале XX века, была выявлена новая проблема относительности понятия мощности множества. Суть их основного результата, получившего название теоремы Левенгейма–Сколема, сводится к тому, что согласно этой теореме, любая теория, которая может быть формализована в исчислении предикатов первого порядка, имеющая несчетную модель, имеет также счетную модель. Отсюда следует поразительный вывод, называемый парадоксом Сколема, согласно которому понятие мощности множества, как и понятие бесконечного множества, не является абсолютным, а зависит от той аксиоматики, в которой рассматривается данное множество. Релятивистская интерпретация этой теоремы в философии математики принадлежит самому Сколему, который сделал философски нетривиальный вывод о том, что не существует “абсолютной” несчетности, а существует несчетность относительно формальной системы, когда множество, которое несчетно в формальной теории, является счетным вне этой теории, в другом метаязыке.

При анализе такого рода рассуждений в философии математики, имеющих парадоксальный характер, весьма значительное место занимают обсуждения философских следствий из важнейших математических результатов, производя иногда неправильное впечатление, что такие интерпретации неизбежно следуют из формулировок теорем. Здесь проявляется реальная опасность смешения двух позиций, когда ограничения в ресурсах, которые имеет любой формальный аппарат математического доказательства соответствующих теорем, автоматически или неосознанно переносятся на неформализованную математическую практику. "Другими словами, – комментирует эту ситуацию философ математики В.В. Целищев, – следует быть предельно аккуратным при выведении философских следствий из математических теорем, поскольку часто происходит вышеупомянутое смешение деталей, относящихся к разным областям знания, имеющим разные критерии адекватности и обоснования. Именно такое положение дел наблюдается в связи с философскими следствиями из теоремы Левенгейма–Сколема" [467, с.28]. Они означают, что если несчетное множество имеет пересчет, осуществляемый средствами модели, то этот пересчет не может быть получен внутри самой аксиоматической теории. Аксиоматические системы, к которым применима теорема Левенгейма–Сколема, предназначаются для задания одной вполне конкретной интерпретации, а когда они применяются к совершено различным моделям, то они тем самым не соответствуют своему назначению. В частности, эта теорема не влечет за собой счетности множества тех математических объектов, с которыми имеет дело аксиоматическая система Цермело–Френкеля, в том числе и счетности самих этих объектов. Действительно, согласно сколемовскому релятивизму мощностей, если эта система аксиом Цермело–Френкеля вообще имеет модель, то есть теоретико-множественную интерпретацию этой аксиоматики с помощью совокупностей, являющихся множествами в ней, то тогда теория множеств имеет и нестандартные модели, то есть она имеет и счетную модель.

Именно релятивизм представляет собой наибольшую трудность в обосновании математики, так как оказалось, что аксиоматическая система может быть некатегоричной, в том смысле, что она возможно связана с существованием дополнительных неопределяемых понятий, содержащихся в каждой непротиворечивой системе аксиом, и поэтому может быть по-разному интерпретирована в контексте своеобразного принципа математической относительности. Чтобы обсуждать проблему релятивизма в обосновании математики, надо уточнить терминологию, принятую в современной философии науки. Так, эпистемологический релятивизм – это концепция, согласно широкому толкованию которой, среди множества точек зрения и теорий относительно какого-либо объекта не существует единственно верной. "Согласно Гегелю, различные точки зрения, выражающие знание, достигают кульминации в знании, как оно дано в полностью философской перспективе"

[384, с.90]. В современной эпистемологии осознана необходимость различать релятивность как свойство самого знания и релятивизм как тенденцию абсолютизации релятивности знания. Например, релятивность превращается в релятивизм, когда констатируют, что среди различных математических концепций генезиса числа нет преимущественной концепции. Релятивность как относительность наших знаний по отношению к определенному типу рациональности вполне адекватна реальной научной практике. Общий тезис об относительности знания проявляется не только в изменении областей познанного и непознанного, но также и в изменении характера самого познания, а именно в том, что признается познанным и какие средства рассуждения при этом допускаются. Философский тезис об относительности научного знания приобретает особую актуальность при сравнении методов познания в чистой и прикладной математике.

Но, с точки зрения теоретического осмысления проблемы обоснования математики релятивизм создает определенные дополнительные сложности. Они проявляются в философских спорах между релятивистами и фундаменталистами, поскольку трудно примерить две альтернативные позиции в философии математики: фундаментализм, ориентирующийся на структурные ценности математики, провозгласив целью обоснования математики как структурной ценности установление ее непротиворечивости, и антифундаментализм, опирающийся на релятивистскую аргументацию и отстаивающий приоритетность процесса развития перед структурным обоснованием. Чтобы понять, кто в этом споре прав, Е.А. Мамчур выделяет три типа эпистемологического релятивизма, назвав их условно “персоналистский”, “когнитивный” и “культурный”. С точки зрения обоснования современной математики, методологический интерес представляет второй тип эпистемологического релятивизма, имеющий свою предысторию. Немецкий математик, физик и философ Готфрид Лейбниц полагал, что каждый наблюдатель рассматривает всю вселенную с точки зрения, отличной от других, что можно трактовать как одну из ранних форм когнитивного релятивизма, хотя западная философия того времени предъявляла более жесткие нерелятивистские когнитивные претензии к познанию. “Суть когнитивного релятивизма в утверждении, что в научном познании не существует критериев адекватности научных теорий действительности, в связи с чем выбор между различными концепциями и теориями невозможен” [256, с.76–77]. С точки зрения когнитивного релятивизма, обоснование математики на современном этапе ее развития, с учетом ее взаимодействия с социально-культурным контекстом, должно основываться на философском объяснении успеха математических теорий, поскольку при наличии широких возможностей применения различных теоретических средств познания математики способны строить логически последовательные рассуждения, получая при этом достоверные результаты.

Поэтому в контексте обоснования математики можно согласиться с тем, что релятивизм может быть серьезной философской позицией. Например, “если под ним понимать тезис о необходимости развивать общезначимые понятия, такие как истина, объективность и знание, в терминах отношений между различными точками зрения, а не независимо от них” [379, с.75]. Философский анализ направлений обоснования математики позволяет выявить релятивистский подход, состоящий в том, что нет смысла постоянно говорить о специфических особенностях реальных направлений обоснования современной математики, а следует переинтерпретировать эти направления в рамках другого методологического подхода к обоснованию. “Это, несомненно, релятивистская позиция, – считает В.Я. Перминов, – поскольку она допускает историческую эволюцию логики и существования различных логик. <…> Принципы логики, согласно Попперу, также не имеют полной надежности и мы мыслим тем надежнее, чем более слабую логику мы используем” [333, с.145]. Если допустить, что логика обоснования математики связана с онтологией математики, то тогда они совместно претерпевают некоторую историческую эволюцию в процессе роста математического знания. При такой интерпретации процессуальная сторона построения концептуальной программы обоснования математики на основе существующих направлений обоснования хорошо соотносится с таким основополагающим аспектом обосновательной деятельности, как синтез. Для этого есть вполне убедительные основания, которые могут служить общей основой для вынесения суждений о проблеме обоснования, заключающиеся в реальном развитии и становлении современных математических теорий в теоретическом и прикладном аспекте. В качестве еще одной дополнительной аргументации о необходимости философско-методологического синтеза в проблеме обоснования математики заметим, что трудности обоснования математических теорий связаны с тем, что многообразие различных областей современной математики не способствует их редукции к одной теоретической схеме.

Для подтверждения этого тезиса напомним о различных редукционистских подходах в тех программах обоснования математики, которые в итоге привели к определенному скептицизму относительно решения проблемы обоснования. Программа логицизма основывалась на допущении редукции математических теорий к логике, программа интуиционизма ставила задачу редукции математики к ее исходным представлениям, как необходимым интуициям сознания, а программа формализма представляла собой редукцию математической очевидности к предметно-логической очевидности. Однако нельзя не признать плодотворность редукционистского подхода к обоснованию математики на раннем этапе развития философии математики. Как отмечает специалист в этой области Г.И. Рузавин: “Признавая принципиальную допустимость и плодотворность редукции, следует не забывать о тех ограничениях, с которыми она связана” [393, с.116]. Речь идет о том, что абстрактные математические построения и математические модели требуют не только качественного анализа, но и, следуя терминологии В.И. Арнольда, “экспериментального наблюдения математических фактов”. Это плохо формализуемое словосочетание возникло в связи с тем, что научное исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, так же, как останется недостижимой полная теория познания других явлений. В современной философии науки установлено, что редукционизм как глобальная, универсальная методологическая установка научного познания не является обоснованным. С точки зрения философии математики, редукционизм не учитывает неявные характеристики математической реальности, поэтому исключительно на его основе нельзя построить адекватную картину мира математики.

Редукционистское видение генезиса математики не позволяет в полной мере раскрыть познавательные особенности математического знания. Сторонники редукционизма не хотят признавать, что в процессе различных способов взаимодействия возникают совершенно разные свойства, которые нельзя свести к прежним свойствам. К этому можно добавить, что если бы математика была исключительно редукционистской наукой, то все нежелательные черты, которые присутствуют в структуре человеческого знания, присутствовали бы тогда и в современной математике. В действительности, если, например, говорить о двух взаимодополняющих сторонах единого процесса математического познания, то противопоставление интуитивного и формального способов познания можно трактовать как характеристику относительных, но не абсолютно обособленных этапов мыслительной деятельности человека, значимую в связи с процессом исследования конкретного математического объекта. Несмотря на указанные ранее недостатки программ интуиционизма и формализма, процесс эволюции современного математического знания способствует прояснению вопроса, в какой степени интуиционистские идеи в более широкой трактовке могут быть использованы в интерпретации обоснования непротиворечивости состоявшихся теорий современной математики. Следует также отметить, что, вообще говоря, в принципе не существует такой вещи, как “хорошая организация” системы обоснования математики в каком-то абсолютном смысле. В другом контексте, но по аналогичному поводу, У. Росс Эшби говорил: “Она всегда относительна; и организация, хорошая в одном смысле или при одном критерии, может быть плохой в другом смысле или при другом критерии” [490, с.324]. Напомним, что, например, обоснование математических доказательств с самого начала возникло на стыке гносеологически конфликтующих концепций – интуиционизма и формализма, – каждая из которых пользовалась своей логикой, в связи с их методологическим подходом к проблеме выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях.

Вот что отмечает по этому поводу логик Н.М. Нагорный: “В самом деле, высказывание, оказавшееся истинным в рамках одной логики, вполне могло оказаться ложным в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, истинное в рамках обеих логических систем, в действительности доказывается в них по-разному, так что доказательство, приемлемое в рамках одной из этих систем, будет отвергаться в рамках другой, и наоборот” [298, с.107]. Даже если математическая теория не формализована, она все же ограничивает средства, допустимые для решения своих проблем, хотя математические структуры имеют определенную произвольность. Возможно, ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему достоверных положений обоснования, не учитывая их дополнительный характер взаимодействия, то есть в них не выдерживался принцип “логического консенсуса”, одинаково приемлемый и для формалиста, и для интуициониста. В связи с существующими методологическими разногласиями по проблеме обоснования В.Я. Перминов заключает: “С достаточной определенностью можно предположить, что существенный сдвиг в решении проблемы обоснования математики зависит сегодня не от достижений в логике и в анализе аксиоматических систем, а прежде всего от углубления философии математики, от прояснения наших представлений о природе математического мышления и о допустимых подходах к обоснованию математических теорий” [336, с.164]. С учетом реального сосуществования в современной математике конкурирующих исследовательских программ, таких, как формализм и интуиционизм, не следует пытаться опровергать их. Наоборот, надо сосредоточиться на том, как отступить без значительных потерь дальше и как можно их трансформировать, рассматривая их как часть целостной системы обоснования математики на современном этапе ее развития.

При этом можно даже пожертвовать второстепенными философскими положениями с целью сохранения наиболее перспективных теоретических конструкций обоснования, рассматривая их уже как “вторичную концептуализацию” исходных философских идей обоснования математики. Ограниченность программ обоснования формализма и интуиционизма привела к пониманию ограниченности редукционистского подхода в философии математики. Противоположный ему подход, используемый в этом исследовании, получил название в философии науки “системного”, связанного с разрабатываемым синтезом направлений обоснования современной математики. Как поясняет философ науки А.И. Ракитов: “В отчетливой форме он сформулирован в новой методологической установке, что целое (система) не только не детерминируется однозначно совокупностью его элементов или их групп и не сводится к ним, но, напротив, последние детерминируются целым и лишь в его рамках получают свое функциональное объяснение и оправдание” [368, с.54]. По существу, системный подход в современных философско-математических исследованиях выполняет ту же методологическую роль, которую в рамках классической науки выполнял редукционистский подход. Проделанный ранее философско-методологический анализ действующих направлений обоснования математики выявил реальные предпосылки и условия применения системного подхода в философии современной математики. В связи с этим возникла необходимость в его конкретизации и некоторой инновации концептуального аппарата на основе эволюции математического знания и понимания его современного состояния, хотя без определенной доли метафизики здесь не обойтись. Один из высших уровней философской рефлексии традиционно называется метафизическим, но метафизика, в первую очередь, концентрирует наше внимание на системе отношений, присутствующей во всяком формализованном знании.

В частности, Георг Кантор по этому поводу сказал, что “если математика имеет полное право развиваться совершенно независимо от всяческих метафизических влияний, то, с другой стороны, я не могу этого права за прикладной математикой все-таки признать, например, за аналитической механикой и математической физикой. По моему мнению, эти науки, как в своих основах, так и в преследуемых ими целях, метафизичны” [169, с.328]. Для правильного понимания проблемы обоснования математики необходимо отметить, что профессиональные математики в своих работах, как правило, не придерживаются единственной методологической доктрины, даже в одной математической работе можно найти элементы разных подходов. Поэтому правильнее и плодотворнее говорить не о методологической несовместимости таких подходов в рамках единого описания, а об их дополнительности, когда один из логических подходов позволяет лучше понять один из фрагментов математического текста, а другой подход, дополнительный к первому, лучше разъясняет другой математический фрагмент. В современной математике происходит любопытное явление переноса чувственной интуиции на совершенно абстрактные объекты. Убедительным примером является распространение геометрического языка математики на бесконечномерные банаховы и гильбертовы функциональные пространства. Векторные пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, поэтому возможность целенаправленно применять к ним первоначально развитую конечномерную математическую интуицию, как оказалось, стала важнейшей методологической идеей функционального анализа, поскольку математические сюжеты этой особой дисциплины развиваются в области, где интуиция не работает. “Методы классической математики, – отмечал выдающийся польский математик Стефан Банах, – очень тесно и гармонично объединились в этой теории с современными методами” [30, с.9]. Плодотворность современной математики основана на взаимодействии двух противоположных тенденций: изучении конечного, обращаясь к бесконечному, и изучении бесконечного, аппроксимируя его конечным.

Выявление сущности понятия бесконечного можно отнести к проблематике важнейшей философской проблемы обоснования современной математики. В частности, академик А.Н. Колмогоров по этому поводу писал: “Благодаря теоретико-множественной переработке всех отделов математики, решение проблем, связанных с понятием бесконечности в математике, сведено к обоснованию и критическому выяснению содержания понятия бесконечного множества” [196, с.69]. Подводя итог давнему спору между интуиционистами и формалистами, как представителями наиболее значимых направлений обоснования математики, немецкий математик Рихард Курант, принадлежавший к школе Гильберта, сказал: “При всем уважении к достижениям, завоеванным в борьбе за полную ясность основ, вывод, что эти расхождения во взглядах или же парадоксы, вызванные спокойным и привычным использованием понятий неограниченной общности, таят в себе серьезную угрозу для самого существования математики, представляются совершенно необоснованными” [219, с.242]. Хорошо известный способ приручения бесконечности связан с использованием особого символьного языка, позволяющего вводить математические абстракции. Работать с бесконечностью позволяет аппаратно-понятийная математическая форма, ограничивающая содержание и превращающая бесконечность в конечное. Абстракции и являются той формой, в которой происходит “кодирование” бесконечности. Определенные трудности возникают в связи с тем, что у понятий, которые математики сами создали, нет иной жизни, кроме как в их воображении, а объекты, существующие в реальном мире, не тождественны представлениям о них, поскольку они всегда приблизительны и неполны.

Многие философы не без оснований считают главной проблемой методологических размышлений Нильса Бора проблему неточности и ограниченности разговорного языка как средства научной коммуникации. Согласно Бору, противоположности не противоположны – они дополняют друг друга. Обращаясь к триадической структуре, “методический принцип неопределенности – дополнительности – совместности” методолог науки Р.Г. Баранцев разъясняет следующим образом: “Количественно эту закономерность нетрудно проследить на примере асимптотической математики, которая определяется триадой "точность – локальность – простота"” [36, с.21]. Соединяющий фактор для элементов, находящихся в отношении дополнительности и действующий на том же уровне общности, может замкнуть бинарную оппозицию в системную триаду. Этот подход естественно приводит к идее философско-методологического синтеза программ обоснования математики. Такой синтез на основе философской компаративистики важен, прежде всего, для того, чтобы по возможности предотвратить методологически тщетные попытки соединения заведомо не соединимых подходов к обоснованию математики. Практика и теория синтезирующей обосновательной деятельности в области математики еще далеки от своего завершения, на что указывали в свое время философско-методологические результаты Гёделя, которые существенно повлияли на методологическое обоснование современной математики.

3.2 Общая концепция развития и направления обоснования в постгёделевской философии математики

Современные исследования неявно-интуитивных механизмов математического познания привели к изменению представления о рациональности, которое не только не отождествляется с логизацией, но для ее понимания используются также различные факторы доконцептуального порядка. Возможно, поэтому в математической деятельности рациональное неотделимо от иррационального, при этом возможен перекос в ту или другую сторону. В соответствии с классическими представлениями математическое знание должно было быть независимым от социокультурных условий их формирования и определяться только самой изучаемой реальностью, что нашло наиболее полную и адекватную реализацию в логическом построении “Начал” греческого математика Евклида, жившего в Александрии. Не умаляя его заслуг, необходимо сделать следующее критическое замечание. Хотя его геометрический метод изложения оказал значительное влияние на философско-математическую мысль, Евклиду было не по силам разобраться в понятии математической бесконечности. Для полноценного математического познания нужен хороший метод. Методологическая концепция, которая опиралась на идею создания универсального метода открытия и обоснования новых истин, включала также и элементы внерационалистического характера с акцентом на интуицию разума. Естественно предположить, что понятие рациональности элиминируется, то есть исключается или устраняется, в духе “бритвы Оккама” – важнейшего принципа в науке, суть которого в том, что лучшее объяснение какого-либо явления обычно самое простое. При такой трактовке этого принципа методологическое острие “бритвы Оккама” нависает над основной задачей обоснования математики – поиске тех областей математической реальности, которые позволяют себя познать и обосновать.

Несмотря на свою методологическую проблематичность, в неклассическом знании она присутствует в качестве необходимого творческого компонента познавательной деятельности. Для экспликации генезиса рациональности, с точки зрения системного подхода, интересен анализ этапов становления методологии научного подхода в естественнонаучном знании одного из основоположников теории информации У. Уивера [532]. Согласно его концепции в предыдущем столетии естественнонаучное знание прошло в своем развитии следующие три этапа: “на первом, представленном наиболее ярко классической механикой, ученые сводили исследовавшиеся ими объекты к чему-то простому, к какой-то однородной основе; на втором этапе, отмеченном появлением теории вероятности и статистической физики, мир раскрылся науке в его необыкновенной сложности, но сложность эта представлялась как дезорганизация, как отсутствие строгой внутренней упорядоченности; и только на третьем этапе, в середине XX в. наука сталкивается лицом к лицу с "проблемой организованной сложности"” [162, с.41]. Отметим, что попытка вывести критерии рациональности, исходя только из внешних факторов, таких, например, как общественные и культурные традиции, определяющие экстерналистский подход в философии науки, может привести к логическому кругу. Но, каким бы ни было множество внешних факторов, используемых при определении критериев рациональности, это понятие само тоже требует рационального анализа, как требуют философского анализа и связи между исходными факторами и определяемыми с их помощью принципами рациональности.

Так, академик В.С. Степин выявил специфическую особенность типов научной рациональности, соответствующей крупным этапам эволюции науки, состоящую в том, что идеализация познающего субъекта в теории познания изменяется при описании различных исторических типов рациональности. В работе “Научное познание и ценности техногенной цивилизации”, заслуживающей особого внимания, он впервые выделил применительно к научной деятельности три типа научной рациональности: классический (с XVII в. до начала XX в.), неклассический (первая половина XX в.) и постнеклассический (вторая половина XX в.) [421, с.18]. Научное познание, в контексте деятельности, характеризуется с помощью “связей и отношений” между исследуемым “объектом и субъектом деятельности” и используемыми при этом “средствами и операциями деятельности”. Это схематично можно представить как соотношение основных компонентов деятельности “объект – средства и операции – субъект”, которые образуют целостность, в том смысле, что изменение одного из них предполагает изменение других. Обратим также внимание на анализ деятельности, предложенный Лёйтзеном Брауэром: “Математика, наука и язык формируют основные функции деятельности, посредством которой человечество управляет природой и устанавливает порядок в окружающем мире. Эти функции имеют свой исток в трех формах действий индивидуума в его стремлении к жизни: (1) математическом созерцании, (2) математической абстракции и (3) передаче своих желаний другим…” [64, с.249]. Выделение трех типов устойчивых структур философских оснований науки связано еще с тем, что естественнонаучный рационализм оказался крайне неудовлетворительным. В частности, он недостаточен не только в естественно научном знании, но и с точки зрения внутреннего обоснования математики, а также с точки зрения его способности быть основанием для философии математики в целом.

Отличие трех типов рациональности, следуя анализу академика В.С. Степина, состоит в следующем: “Классический тип рациональности центрирует внимание только на объекте и выносит за скобки все, что относится к субъекту и средствам деятельности. Для неклассической рациональности характерна идея относительности объекта к средствам и операциям деятельности; экспликация этих средств и операций выступает условием получения истинного знания об объекте. Наконец, постнеклассическая рациональность учитывает соотнесенность знаний об объекте не только со средствами, но и с ценностно-целевыми структурами деятельности [субъекта]” [421, с.18]. Необходимо, в связи с этим, отметить возрастающую активность познающего субъекта в системном стиле мышления, который организует свои знания, выделяющие в определенных границах системную организацию объекта в соответствии с конкретной теоретической или практической задачей. Вот как интерпретирует эту эволюцию представления научной рациональности, то есть рациональности как целостной характеристики в научном познании, философ науки В.Г. Буданов. В классической парадигме “человек задает вопрос природе (объекту), природа отвечает”; в неклассической парадигме “человек задает вопрос при роде, природа отвечает, но ответ теперь зависит и от свойств изучаемого объекта, и от способа вопрошания, контекста вопроса”; в постнеклассической парадигме “человек задает вопрос природе, природа отвечает, но ответ теперь зависит и от свойств объекта, и от способа вопрошания, и от способности понимания вопрошающего субъекта” [68, с. 45–46]. С точки зрения философского анализа системной организации объектов, каждый тип рациональности обеспечивает преимущественный подход к научному познанию, соответственно, малых систем, больших систем и саморазвивающихся систем, в которых особое место занимают системы, включающие человека в качестве особого компонента.

Поэтому, например, неклассический идеал рациональности, в отличие от классического, уже не предполагает жесткой унификации структур познания. Это положение можно аргументировать на примере философской проблемы компьютерного и математического моделирования. Здесь возникает вопрос, в какой мере можно доверять полученным результатам и насколько полученная математическая модель соответствует реальному объекту? Решению этой задачи, по мнению математика-прикладника, академика А.Н. Тихонова, служит, в его терминологии, “квазиреальное” моделирование. “Его суть заключается в том, – поясняет он, – что исследователь, задавшись гипотетической математической моделью, вычисляет для нее с машинной точностью выходные данные, вносит погрешности, соответствующие экспериментальным погрешностям, подвергает соответствующие результаты автоматизированной обработке, и, наконец, получает конечный результат” [443, с.80]. Но для уточнения решения приходится несколько раз повторять этот цикл, чтобы в результате такой структуры деятельности субъекта познания набралась достаточно представительная статистика, которая убеждает в правильности построенной модели. Конкретизация этих процессов реализована в философских работах. Следуя принятой классификации рациональности можно характеризовать три крупных этапа эволюции науки следующим образом. “В эпоху классической рациональности в науке господствовала идея абсолютной суверенности разума, который мог постигать истинную сущность природных вещей и явлений, как бы созерцая их со стороны. <…> Для неклассической рациональности характерно осознание того, что достижима лишь относительно истинная картина мира, здесь происходит отказ от наивного реализма и прямолинейного онтологизма в познании. <…> Постнеклассическая рациональность (третий этап развития науки) исходит из того, что исторически изменчива не только онтология научного знания, но и сами идеалы и нормы научного познания, поскольку наука находится в контексте изменяющейся культуры, является ее частью” [38, с.202]. Математика может существовать независимо от любого человека, но не от культуры, которая создается коллективными усилиями и деятельностью людей.

Широкое использование математических теорий создает иллюзию, будто математика представляет собой свод математических истин, объективно существующих независимо вне человека, хотя понятие истины в течение XX века постепенно вытеснялось из философии науки. Подчеркнем, что математика связана не с физиологией мозга человека, а с его деятельностью.

Поэтому можно заключить, что только деятельность, в том числе математическая, выявляет необходимые черты реальности и в силу этого именно деятельностный критерий является исходным для философской идентификации всякой реальности. По существу творческая деятельность разума, как “целесообразного действования” по Гегелю, порождает новые формы мышления. Если какие-то философские положения уже хорошо усвоены философией науки, то они могут описываться вполне категорично. “Когда Гегель заявляет, что "суть дела исчерпывается не всей целью, а своим осуществлением и не результат есть действительное целое, а результат вместе со своим становлением", что "голый результат есть труп, оставивший позади себя тенденцию", то он высказывает столь же здравую, сколь и популярную в его время диалектическую идею” [292, с.122]. Действительно, например, математический результат – это лишь продукт деятельности, ничего не говорящий о способе осуществления самой деятельности. Более того, результат, как завершающая цель решения математической проблемы, не является источником деятельности, а наоборот, закрывает обсуждение проблемы, дав хотя бы одно ее правильное решение.

Философская специфика математической деятельности состоит в том, что она всегда имеет дело с определенным материалом, а именно – с утверждениями, подлежащими доказательству и его проверке. О последствиях примата результата над математической деятельностью французский математик Александр Гротендик сказал: “Современная математика редко выносит на обсуждение вопросы (проблемные статьи проходят в печать только под именем одного из 20–30 признанных авторитетов). Это приводит к тому, что сама деятельность, естественно состоящая из вопросов и ответов и осмысленная определенной целью, рушится как исследовательская деятельность и превращается в решение задач "с потолка", сформулированных научным руководителем” [122]. С точки зрения примата результата, такая тенденция приводит к представлению о современной математике как кумулятивной науке, хотя математическая деятельность несводима только к накоплению результатов. За счет чего математическое утверждение становится более понятным? Если задаться этим вопросом, то можно сказать, что за счет выявления новых смысловых связей математической структуры и за счет убедительного обоснования соответствующей математической теории. Поэтому, для философского анализа постнеклассического периода математического знания познающий субъект должен иметь не только профессиональные навыки, не только понимать проблему обоснования научного знания, но и уметь осуществлять рефлексию над ценностными основаниями научной деятельности. В таком контексте математическая деятельность несвободна в том смысле, что она подчиняется принятым в математическом сообществе правилам, которые носят строго формализованный характер. Это приводит к философскому переосмыслению таких важных в философии науки гносеологических понятий, как “объективность”, “истинность” и “рациональность”, находя в них допустимые компромиссные решения, хотя даже в самой математике до сих пор полноценной “теории компромисса” не существует.

С философской точки зрения, интересно следующее заключение математика-прикладника Е.С. Венцель: “Пока что практически единственной инстанцией, способной быстро и успешно вырабатывать компромиссное решение, является человеческий разум, так называемый здравый смысл. Человек до сей поры – непревзойденный мастер компромисса, и без его участия решение в многокритериальной задаче (не оптимальное, может быть, ни по одному критерию, но приемлемое по их совокупности) пока что выбрано быть не может” [83, с.49]. Поэтому то, что касается вопросов обоснования математического знания, дело самих математиков в подобных случаях – не выдавать окончательное решение, а направить философов математики на правильный выбор. Философские и методологические размышления, обращенные к основаниям познавательной активности субъекта, в том числе и в области современной математики, образуют основную линию философской рефлексии. Понимание этих вопросов может сделать преподавателей математики более ответственными в процессе обучения при анализе исторической и эпистемологической рефлексии. Необходимость такой рефлексии вызвана реальными потребностями в решении проблемы обоснования математических теорий. Это можно проиллюстрировать на примере качественной теории дифференциальных уравнений. Ее философско-математическая цель состоит в том, чтобы, не решая ни точно, ни приближенно сложные дифференциальные уравнения и даже по возможности вообще избегая вычислений, определить ряд качественных свойств их решений. Часто именно эти свойства и представляют особый интерес как для самой математики, так и для ее приложений.

В связи с этим возникает философский вопрос: можно ли исследовать познавательную математическую деятельность теми же методами, которые приняты в математике? При ответе на этот вопрос в общефилософском плане академик В.А. Лекторский предлагает исходить из следующих предпосылок: “Можно считать, что конструируемая нами картина реальности в чем-то соответствует самой реальности, что используемые в познании понятия, категории, схемы мышления соотносятся с исследуемым миром, что познающий субъект – это не система, замкнутая на себя (как считают представители радикального эпистемологического конструктивизма), а система, открытая миру, и что именно в этом специфическая особенность познающих систем” [236, с.18]. При таком подходе к философским основаниям познавательной деятельности можно рассчитывать на то, что исследование математического познания научными средствами будет результативным. По поводу ценностно-целевой роли деятельности субъекта в математике, заметим, что, например, в качественной теории дифференциальных уравнений разработаны приемы довольно точного графического построения картины векторного поля фазовой скорости. Их можно, по мнению академика Д.В. Аносова, описать следующим образом: “обычно для начала рисуют просто "по вдохновению" (тем паче, что если это делает человек, уже накопивший какой-то опыт в таком деле, то ведь этот опыт, на основе которого сложилась некоторая интуиция, тоже чего-нибудь да стоит)” [13, с.31]. Поэтому, с одной стороны, от исследователя многое зависит: во-первых, работа компьютерной программы зависит от ряда параметров, задаваемых человеком; во-вторых, ввиду отсутствия у компьютера интуиции, в отличие от человека; в-третьих, все может неожиданно закончиться, когда компьютер вдруг зависнет, что тоже в принципе возможно. Но, с другой стороны, базирующаяся на алгоритме традиционная технология расчетов оказывается неадекватной при попытке применения ее к задачам, связанным с моделью, а не с хорошо определенной и вычислимой функцией или процедурой.

В контексте рассмотренных типов рациональности, чтобы стало возможным одновременное восприятие исследуемого математического объекта в рамках различных процедур познания, познавательная деятельность субъекта должна удовлетворять нескольким дополняющим друг друга требованиям. “Во-первых, субъект должен обладать способностью выполнять несколько процедур одновременно. Во-вторых, в процессе познания он должен оперировать не только рациональными элементами, наделенными концептуальной формой… но и с неконцептуализированными фрагментами поля восприятия” [414, с.117]. Такого рода процедуры может производить, условно говоря, “логический субъект”, осуществляющий набор познавательных операций на базе безотказно действующего компьютера со строго определенными правилами. Неустранимость субъекта познания в неклассической и постнеклассической рациональности состоит в данном случае в следующем: если “логический субъект” не в состоянии разделить относительные элементы на составляющие, то для того, чтобы выделить неконцептуализированные фрагменты поля восприятия, он должен выйти за пределы рационального знания как такового. Здесь по существу проявляется определенная двойственность современной компьютерной практики, когда с необходимостью выявляется “недоопределенность модели”, или “недоопределенность математики”, не связанной с императивным алгоритмическим стилем мышления, с помощью которого математику по существу приходится работать. Поэтому, как считает академик Н.Н. Яненко: “Эффективность численного алгоритма, его быстродействие, измеряемое в физическом времени, устойчивость алгоритма, то есть его чувствительность к возмущениям из-за приближенности модели, конечной значности чисел в ЭВМ, ограниченной точности физических измерений, входящих в начальные данные расчета, стали главной заботой вычислительной математики” [499, с.61]. Можно предположить, что в проблеме обоснования наиболее значимым эвристическим образцом постнеклассической эпистемологии для современной математики стали компьютерные и вычислительные науки.

Электронные вычислительные машины уже внесли свой посильный вклад в теоретическую “нестрогость”, в частности, из-за различия понятий “строгого” нуля и “машинного” нуля. Анализируя генезис современного развития компьютерных наук, специалист по компьютерному моделированию академик Ю.И. Журавлев утверждает: “В XX веке математика начала формальное изучение человеческого мышления и языка. Прежде всего это изучение коснулось математического языка и математического мышления. Математики попытались выяснить законы своих собственных построений. Несколько позднее в математике возникли вопросы о математическом описании формализованной (скажем, вычислительной) деятельности” [155, с.195]. Большое значение имеет также выбор компьютерных технологий для выявления условий, в которых проходит реальный математический эксперимент. Несмотря на глубину и общность философских и методологических вопросов прикладной математики, имеющих непосредственное отношение к обоснованию математики, предварительные ответы на эти актуальные вопросы были получены еще в первой половине XX века. Во второй половине XX века исследования, начавшиеся с изучения математического языка, математического рассуждения и математической деятельности, продолжились уже в нематематических сферах и соответствующие попытки стали объединять под общим термином “искусственный интеллект”. Следует отметить, что в это время была не только осознана потребность, но и сформировалось общее представление о том, что можно сделать “алгоритмически”, как вычислительный процесс сделать “эффективным”, почему исследование можно “поручить компьютеру” и какова роль человека в этом процессе.

По этому поводу Роджер Пенроуз сказал: “Иногда очень значительный эффект дает применение интерактивных процедур, предполагающих совместную работу человека и компьютера, или, иначе говоря, участие человеческого понимания на различных промежуточных стадиях процесса" [327, с.318]. Если подойти к вопросу о роли субъекта в математическом познании с более общих позиций, то можно заключить, что попытки полностью вытеснить элемент человеческого понимания в компьютерной и вычислительной математике и заменить его исключительно вычислительными процедурами выглядят и вовсе неосуществимыми. Парадоксальность современного положения вещей в прикладных математических технологиях состоит еще и в том, что математическую модель можно встретить в основном в теоретических работах в качестве иллюстрации к объекту исследований. Тем не менее, в связи с ростом парка ЭВМ можно говорить о зарождении новой науки "математической технологии". Главной задачей математической технологии является анализ структуры и связей между различными звеньями вычислительной цепочки. Эффективная реализация математического моделирования в условиях многообразия вычислительных процессов составляет предмет математической технологии. А с точки зрения деятельностного аспекта постнеклассической рациональности в обосновании компьютерной математики, необходимо отметить, что в вычислительную математику введен "фактор реального времени", который был полностью элиминирован в обосновании классической математики. Можно добавить к этому еще одну методологическую трудность, состоящую в том, что выбор алгоритма не обеспечивает возможности его прямого применения. Поэтому проблема обоснования математики потребовала пересмотра в связи с новыми запросами современной компьютерной практики.

Например, одна из самых знаменитых нерешенных математических проблем – это проблема перебора: можно ли решить конкретные задачи, не перебирая все возможные варианты, а существенно быстрее, с точки зрения времени работы программы. Согласно философско-методологическому принципу дополнительности, для репрезентации закономерностей развития направлений обоснования современной, в том числе вычислительной, математики необходимо эксплицировать взаимоисключающие дополнительные понятия и подходы, сущностные характеристики которых развивают собственную логически непротиворечивую линию суждений. В частности, в контексте проблем компьютерной и вычислительной математики, "новая парадигма должна складываться из интеграции наиболее оригинальных и взаимодополняющих… направлений развития информационных технологий" [300, с.16]. Известно, что математика не сводится к совокупности вычислительных приемов, и вовсе не алгоритмический и вычислительный аппарат позволяет рассматривать ее как образец научности. В определенной степени, элементами идеала можно считать доказательность математических утверждений и способы построения ее теорий. Проблема бесконечного, или феномен бесконечного, заключается в том, что исследователь рано или поздно сталкивается с проблемами, мешающими его успешной работе. Понятие бесконечности до такой степени пронизывает всю математику, что такой известный математик и ученик Гильберта, как Герман Вейль, работы которого оказали большое влияние на развитие математики XX века, определяет ее сущность в нескольких словах, а именно, “математика – это наука о бесконечном” [78, с.9]. Согласно вейлевской трактовке математики как науки о бесконечном, она имеет дело лишь с потенциально бесконечным, которое только и доступно человеческому разуму. Для математиков бесконечное есть специфический элемент математического метода или в методологическом контексте метафора конечного, поскольку при изучении бесконечного оно заменяется множественным числом конечного.

С помощью метафор мифы используются как в художественных, так и в научных целях. Понятие бесконечного как метафора конечного может быть насыщено богатым философским содержанием в зависимости от уровня воображения и изощренности сознания. В связи с этим заметим, что любое математическое бесконечное есть результат рефлексии, то есть интеллектуальной математической деятельности. Не случайно, величие математики Герман Вейль усматривал именно в том, что почти во всех ее теоремах, в силу самой ее сущности, всякий вопрос о бесконечности решается на методологическом уровне конечного, а ее целью считал “символическое постижение бесконечности” человеческим мышлением, которое априорно конечное. “Великим достижением греков, – замечает он, – было преобразование полярной противоположности конечного и бесконечного в мощное и плодотворное орудие познания действительности” [78, с.9]. В философии бесконечное предстает как слишком разветвленное семейство образов, чтобы их все можно было связать с метафорами конечного. Заметим, что под конечным в математике понимаются конечные множества, точнее, структуры однородных элементов, число которых не просто конечно, а достаточно велико. Конечное и бесконечное в философии традиционно рассматривались и как две противоположности, исключающие что-либо третье, хотя вторая компонента этой диады естественно расщепляется на понятия актуальной и потенциальной бесконечности. Вопрос о соотношении между бесконечным и конечным относится к сущности современной математики как теоретической науки. “В связи с этим принятое в XX веке определение математики как науки о бесконечном следовало бы заменить другим, – считает академик Н.Н. Яненко, – более правильно отражающим ее сущность как науки о соотношениях конечного и бесконечного” [499, с.64]. Это можно аргументировать тем, что наряду с идеальными бесконечными объектами классической математики современная вычислительная и компьютерная математика использует такие реальные конечные математические объекты, как, например, машинное число, компьютерная программа и конечный автомат.

Ссылаясь на конечность символической записи любого математического рассуждения, можно считать, что, постигая бесконечное, мы каждый раз имеем дело лишь с конечным. Именно этот аргумент лежит в основе отказа от использования понятия актуальной бесконечности в программах интуиционистов и конструктивистов. Безусловно, такие подходы полезны, с точки зрения приложений дискретной математики и теории алгоритмов, но это только часть математики. Кроме того, такая трактовка современной математики противоречит принципу двойственности математики, проверенному ее многовековой историей. Например, известный математик А.В. Архангельский формулирует его так: “противоречие, заключенное в сопоставлении, противоположности и взаимодействии конечного и бесконечного, является одним из главных диалектических противоречий, вызывающих развитие математики” [27, с.28]. Поэтому было бы ошибочным считать, что “запрет бесконечного” и методы, развиваемые в отдельных областях математики, можно распространить на всю науку во благо конечного в математике. С философско-методологической точки зрения, математические мысли лучше представляются формальными бесконечными объектами, чем словами естественного языка, которые интуитивно используются для их сообщения. Но есть и другое мнение, согласно которому математика – это такая специфическая философия, покрытая благодаря понятию бесконечности “туманом мистицизма”. Давид Гильберт, творчество которого охватывало по существу всю математику, считал, что бесконечное нигде не реализуется, его нет в природе, поэтому проблема бесконечности – это проблема, собственно, теоретической науки и в первую очередь философии математики.

Именно Георг Кантор смело порвал с многовековой традицией, рассмотрев бесконечные множества как единые сущности, доступные человеческому разуму. Одним из самых главных математических достижений было построение им теории трансфинитных чисел для оценки количества элементов в актуально бесконечных множествах. “Все так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел, – писал Кантор, – являются... ошибочными по существу... в том, что в них заранее приписывают или скорее навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем, бесконечные числа... ввиду своей противоположности конечным числам, должны образовывать совершенно новый вид чисел, свойства которых зависят исключительно от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола и наших предрассудков” [168, с.263]. Трудность исследования перехода к математическим бесконечностям состоит в следующем. Изучаемые реальные объекты конечны, поэтому в результате математической формализации слишком “удаленные” элементы могут потерять некоторую свою “индивидуальность” и соответствующая бесконечность становится, по существу, незавершенной. Посягая на актуальную бесконечность, математики домысливают ее в терминах своего конечного мира, но чувство “математического рая” опьяняет ненадолго, так как Гёдель, пришедший вслед за Кантором, снова откладывает окончательное выявление философской и математической сущности бесконечного.

Это одна из причин, которая препятствует применению результатов чистой математики в прикладной математике. Хотя, в контексте их единства, генезис математического знания показывает, что во многих случаях “чистое” рассуждение, являющееся рациональным доводом в защиту правильности решения, удается перестроить так, что оно становится приемлемым и для прикладной математики. Например, можно бесконечную конструкцию заменить на конечную, а неэффективное доказательство существования заменить на конструктивное в прикладном отношении, то есть использовать такую аргументацию, из которой вытекает точная или приближенная конструкция исследуемого математического объекта. “Если же доказательство превратить в эффективное никак не удается, то все-таки оно может послужить дополнительным стимулом к эффективному построению решения (как-то приятней строить решение, если доказано его существование), либо усилить уверенность в правильности другой конструкции решения, подученной без "чистого" обоснования” [55, с.55]. Поэтому, с учетом указанных философско-математических трудностей, достижение методологических целей обоснования математики, которые ставили перед собой формалистски и интуиционистски (или в контексте современной компьютерной математики можно сказать, что конструктивистки) мыслящие философы начала прошлого века, оказалось не таким простым делом. В связи с методологическими трудностями обоснования математический формализм может быть дополнен некоторыми “семантическими” рассмотрениями платонистского характера. Но решение проблем такого рода всегда упирается в трудность изучения семантики рассматриваемых теорий, точнее, изучения способов понимания формул теории. Можно различать две математики: во-первых, науку, создаваемую самими математиками, и, во-вторых, математику, опосредованно выражающую свойства реального мира, которая для платоников существует в особом мире математических идей.

Сходную позицию на концепцию двух математик занимали и неоплатоники, для которых математические сущности обладали реальностью до всякого их рационального конструирования. Если мы выходим на метауровень за пределы наших математических конструкций, то тем самым уже вносим элемент иррациональности. Для соответствующей аргументации заметим, что вопрос о границах "обосновательного поля" математических конструкций состоит из двух взаимосвязанных путей их методологического оправдания. Во-первых, в качестве тезиса, необходимо учитывать существенную иррациональность подходов к обоснованию математики, проявляющуюся в невозможности определения в строгих теоретико-математических понятиях, что составляет отрицательную сторону дела. А, во-вторых, в качестве антитезиса, необходимо отметить, что для некоторых конкретных принципов математического познания можно все же провести содержательное и надежное рассуждение, отражающее позитивную сторону. Это говорит о необходимости синтеза в проблеме обоснования математики. Философско-методологический анализ реконструкции эволюции математических теорий и структур способствует обоснованию нового концептуального подхода к направлениям обоснования математики. Именно структура математической теории, а также ее формальная гармоничность, вселяют уверенность в надежности теории, благодаря чему творения человеческой мысли, возможно, согласно платонизму являются творением самой природы. "Когда слова только выражают веру, которая относится к тому, что они обозначают, вера, выявляемая словами, – по мнению Бертрана Рассела, – в такой же степени неопределенна, в какой неопределенно значение слов, ее выражающих" [372, с.162]. Для философии математики важно то, что математическая структура обладает собственными достоинствами и в качестве независимого от нас явления обнаруживает способность подсказывать новые идеи и новые вопросы. Поэтому при системном подходе к философскому анализу единого многообразия математических теорий они исследуются не как готовые структуры, а как внутренне развивающиеся системы.

В настоящее время философы математики постепенно осознали, наконец, то обстоятельство, что формальная теория все же вторична по отношению к содержательной, в том смысле, что она может принимать только те факты, которые уже обоснованы с содержательной точки зрения. Содержательные теории так же, как и формальные теории, могут строиться аксиоматически, только аксиомы в содержательной теории – это истинные предложения, в которых важен смысл самих предложений, а не строчки формальных символов. К этому можно добавить, что содержательные рассуждения приобретают методологическую значимость тогда, когда появляется интерпретация или зафиксирована такая модель формальной системы, которая используется для объяснения каких-то реальных явлений. Для логической науки “догёделевского периода” рефлексивные результаты математической логики в виде серии теорем Гёделя стали полной неожиданностью, но именно они дали новый импульс философско-методологическим исследованиям по проблеме обоснования современной математики. Следует отметить, что ни в период своего возникновения, ни даже в плодотворный период своего развития в XX веке учение о множествах не было единой и цельной теорией, даже при толковании слова “теория” в широком смысле. Поэтому сам термин “теория множеств” в применении к циклу работ, составляющих учение о множествах, не всегда оправдан. Правильнее было бы говорить о теориях множеств, хотя мы будем пользоваться общепринятым термином. Это вовсе не случайно, поскольку каждая фундаментальная теория в математике опирается как на гносеологический критерий нового в науке, так и на дополняющие его критерии, рассматриваемые с философских позиций – онтологический и аксиологический, – которые вытекают из итоговых парадоксов реальности познания и ценности. Ни в интуиционизме и конструктивизме, ни в метаматематике и формализме их не удалось полностью выявить и реализовать в виду предельного уровня новизны теории множеств. Как отмечает академик Н.Н. Лузин, “если указывают некоторое множество точек, то почти всегда указывают все точки, ему принадлежащие, без того, чтобы дать критерий, позволяющий узнать, принадлежит ли произвольно взятая точка этому множеству или нет” [241, с.38]. Он даже приводит примеры, где для того, чтобы узнать, принадлежит ли данная точка рассматриваемому множеству, надо совершить несчетное множество не зависящих друг от друга операций, для реализации которых нет никакого стандартного регулярного процесса.

В связи с появлением парадоксов теории множеств, возникающих при не слишком аккуратном обращении с бесконечными множествами, в конце XIX века появилось несколько гносеологически противоборствующих направлений, по-разному отвечающих на вопросы о сущности математических построений и соотношении математических объектов реальности. Наиболее плодотворным и развитым среди них оказался формализм Гильберта, который предложил свою теорию математических доказательств. Исходя из убеждения, что множество истинных формул совпадает с множеством выводимых утверждений, Давид Гильберт ожидал, что, применяя аксиоматический метод при формальной работе с математическими понятиями и знаками, никогда не получится противоречивое высказывание. Если добавить к этому философский смысл понятия “абстрактная форма”, то можно сказать, что аксиоматический метод как способ рассуждений, оказавший существенное воздействие на современную теоретическую математику, является “формализмом”. По существу программа формализма доставляет единство современной математике, понимаемое не как “каркас формальной логики” и не как “скелет, лишенный жизни”. По мнению математиков группы Бурбаки: “Это – питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики” [69, с.259]. Но теоремы Гёделя о неполноте по существу показали логическую неконсистентность, а также ограниченность программы Гильберта. Методологические результаты Гёделя стали первыми широко прозвучавшими, рефлексивными результатами математической логики. До теорем Гёделя было принято считать, что математическая теория должна быть полной и непротиворечивой, то есть она может быть уточнена таким образом, чтобы любое истинное математическое утверждение, хотя бы в принципе, могло быть математически доказано, и такое уточнение должно было быть непротиворечивым. Поэтому теоремы Гёделя, как препятствия на пути полной формализации математики, принимаются рассудком, но чисто эмоционально они многими математиками отвергаются. И этому есть вполне обоснованные объяснения.

Даже сам Гёдель никогда не сомневался в том, что возможна часть математики, которая изучает наши собственные конструкции или выборы. Он настаивал на том, что математика имеет дело со специфическими объектами, существующими во внечувственном мире, независимо от математических теорий. Допущение таких объектов столь же законно, как и допущение физических явлений, то есть имеются все основания верить в их существование. Исходные математические идеализации, отражающие некоторые абстрактные свойства реальности, отличаются в целом от физических абстракций, прежде всего тем, что они относятся не к миру опыта, отражающего многообразие предметов и их взаимодействий, а к миру отношений, значимых для деятельности человека. Это, отчасти, объясняет использование тернарной структуры для обоснования современной математики, поскольку “термин "тернарное описание", – как разъясняет философ А.И. Уемов, – связан с тем, что синтаксис этого формального языка основан на трех категориях, восходящих еще к Аристотелю, – вещь, свойство, отношение” [451, с.45]. Различие между этими категориями можно считать функциональными в том смысле, что одно и то же может быть и объектом, и свойством, и отношением, поэтому нет такой необходимости настаивать на жестком различении между ними. Размышления над соотношением методологических принципов математического познания и применение системного подхода к философско-методологической проблеме обоснования приводит к необходимости методологической рефлексии в этой сфере философии математики. Например, Лёйтзен Брауэр, пытаясь ответить на вопрос о лучшей философской схеме, по сравнению с известными способами обоснования, предлагал изучать глубины математического сознания. Однако, если информация о глубинных процессах нашего сознания может оказаться вполне достаточной для опознания некоторого “мысленного объекта”, она часто бесполезна для его теоретического изучения. Например, для изучения математических доказательств как объектов исследования необходимо понимание всех структур памяти, вовлеченных в процесс математического познания.

Концепцию Гёделя, изменившую подходы к обоснованию математики, можно анализировать с философской и методологической точек зрения. Не только с точки зрения теоремы, находящейся внутри математической логики или оснований математики, а как факт, который что-то говорит о мышлении математика, даже человека вообще, и о его творческом процессе. Открытия Гёделя привели к пересмотру парадигмы классической математики, поскольку надежды на косметическое обновление с помощью “гильбертовских заклинаний” в целом не оправдались. Это имело и гораздо более серьезные последствия, так как повлекло за собой глубокое изменение философского взгляда на математику. Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что любая формальная математическая система неполна, то есть в ней могут быть недоказуемые и неопровержимые утверждения. В связи с этим ее часто интерпретируют так, что она имеет, в некотором роде, отрицательный методологический смысл, поскольку указывает на принципиальные ограничения в применении формальных математических рассуждений. Некоторые философы и ученые признают, что теорема Гёделя ограничивает нашу способность открывать математические и естественнонаучные истины, но позитивно интерпретируют это как гарантию того, что наука будет развиваться вечно. Но при этом необходимо учитывать следующую особенность математики: независимо от философских мнений об универсальности применяемых подходов к обоснованию математических теорий, всегда найдутся утверждения, которые не попадают в сферу их действия. Поэтому следует учитывать это обстоятельство при построении “картины математического мира”, даже если ее рассматривают как порождение “картины физического мира”, а именно, возможность столкнуться с указанной гёделевской трудностью. Следует также отметить, что несмотря на философско-методологическую значимость гёделевских результатов для обоснования математики, гёделевский метод рассуждения предполагает строго рациональное отношение к системе “неопровержимых” математических убеждений формально-абстрактных математических теорий.

Основное достижение Гёделя в проблеме обоснования современной математики состоит в соединении реалистических и идеалистических традиций. Математические идеализации подразумевают некоторую заданную, может быть неявно, реальность. Но так как очень большие натуральные числа, недостижимые даже мысленно, представляются некоторой фиктивной сущностью, то математическую реальность, чтобы избежать ошибок презентизма, можно понимать в смысле прямого соответствия математических понятий с онтологически определенными аспектами реальности, не требующими апелляции к эмпирическим процедурам. Поскольку, как констатирует философ математики Г.И. Рузавин, “эмпирический взгляд на математическое познание всегда вызывал критику со стороны математиков и в настоящее время расценивается как признак научной отсталости” [391, с.41]. С точки зрения Гёделя, математика имеет дело со специфическими математическими объектами, независящими от различных философских направлений обоснования математических теорий. Вклад Гёделя, который можно рассматривать как первое воплощение в жизнь реалистических математических замыслов, естественно сравнить с выводом математических законов из физических концепций. Одной из основных причин успеха инкорпорации теорем Гёделя в математическое познание было то, что полученные результаты можно хорошо интерпретировать в терминах таких традиционно реалистических понятий, как “арифметическая истинность” и “логическая общезначимость”, которые игнорировались в конструктивистских схемах.

В математике философские традиции отражаются в различных формах конструктивистских подходов к основаниям, акцентирующих внимание на определениях и доказательствах в процессе математического познания. Другой, дополнительной причиной успеха результатов Гёделя было свободное обращение с понятиями, исходящими из конструктивистских программ, такими, как “интуиционистская логика” и “формальные системы”. В этом по существу проявляется дуализм методологического подхода Гёделя, который в широком толковании утверждает равноценность любых противоположных моментов, как в реальной действительности, так и в процессе познания. При этом следует иметь в виду, что любые классификации достаточно условны. Даже парадоксальные вначале математические объекты могут привести к обнаружению новых явлений природы. Один из основоположников нелинейной науки Анри Пуанкаре высказал глубокую мысль о том, что “в будущем удастся предсказать новые явления природы, исходя из самых общих представлений о математических моделях, описывающих изучаемые объекты” (цит. по [170, с.34]). Можно сказать, что это пророчество, которое можно рассматривать как философский императив, начинает сбываться. Поскольку большинство математических утверждений не имеет реального смысла, то задача математики – давать правдивые результаты хотя бы на некотором множестве сравнительно простых правдоподобных утверждений. В таком контексте для понимания теорем Гёделя о неполноте необходимо различать математический и философский смысл понятия полноты. Система аксиом является полной, если каждая правильная и замкнутая, то есть не зависящая от параметра, формула дедуктивно охватывается системой аксиом в том смысле, что либо она сама, либо ее отрицание выводимы в ней. В контексте философских рассуждений слово "полнота" появляется уже у Декарта как полнота бытия или полнота воли, в отличие от мысли, понимаемой как закон или нечто "законосообразное".

При попытках использования теоремы Гёделя в качестве философского аргумента в оценке состоятельности программы формализма привлекается также понятие непротиворечивости арифметики. Непротиворечивая формальная система, удовлетворяющая условиям теоремы Гёделя, тоже неполна, и добавляя к ней, как в принципе дихотомии, либо неразрешимое в данной системе предложение, либо его отрицание, получим новую неполную систему. Это и есть современная математическая жизнь альтернативных теорий. Современный этап развития философии математики можно также назвать "постгёделевским", который поставил под сомнение традиционный образ математики как строгой и хорошо обоснованной науки. В самом названии постгёделевской философии математики еще звучит ориентация на предыдущую эпоху развития математического знания, но по существу уже можно говорить о начале принципиально новых взглядов и подходов в проблеме обоснования математики. Суть этой философии сводится к тому, что современная математика не может быть с достоверностью обоснована исключительно внутренними, то есть логическими, средствами. Но хотя задача логического обоснования математики оказалась невыполнимой, стремление к такому обоснованию достаточно убедительно иллюстрируется преодолением кризисных моментов развития математики. Кроме того, следует отметить, что, как подчеркивает украинский философ математики В.С. Лукьянец, "постгёделевская парадигма обоснования математики отвергла кантовский догмат о существовании "непогрешимой" интуиции, а вместе с ним и кантовский критерий математической достоверности" [243, с.68]. Но философские следствия теорем Гёделя вовсе не переносят проблему обоснования математики в сферу практических задач.

Обоснование по-прежнему остается в основном внутренним, поскольку главным в обосновании математики является теоретический компонент, включенный в сам процесс развития математических теорий. По поводу выяснения сущности математической составляющей в этом процессе сошлемся на мнение В.Я. Перминова, который утверждает: "Выясняя смысл и границы действия методов, математик постоянно занимается именно внутренним обоснованием математики, т.е. наведением некоторого логического порядка в системе теорий вне зависимости от их приложений” [334, с.147]. Уточняя понятие постгёделевской философии математики, заметим, что математики смотрят на прошлое не как на предпосылку, а как на составную часть необходимую для формирования огромного здания современной математики. Постгёделевская философия математики сменила философско-мировоззренческие акценты в программах обоснования современной математики, поскольку в них наиболее востребованным становится системный подход в контексте критического рационализм, а последний в отличие от рационализма допускает существование неразрешимых математических проблем, на что реально указывает современная математическая практика. Важнейший результат Гёделя, а именно, доказательство принципиальной неполноты достаточно богатых формальных систем, в том числе аксиоматической теории множеств, был опубликован в статье “О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем” (1931). В оригинале это было написано по-немецки. Большинство математиков и философов математики сочтут, что перевод теоремы Гёделя с тем же объемом понятности можно было оставить на немецком языке. На философском языке это утверждение означает следующее: все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения. Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то она неполна, то есть содержит истинные утверждения, которые недоказуемы и неопровержимы в этой системе. Полнота формальной системы буквально означает, что каждое общее утверждение о математических объектах, к которым относятся аксиомы, может быть получено из этих аксиом с помощью вывода.

Формальная система в конструкции Гёделя состоит из конечного множества символов и конечного числа правил, по которым эти символы можно объединять в формулы или предложения и часть из них рассматривается как аксиомы. Каждый, кому доводилось изучать элементарную геометрию, знает, что она строится как дедуктивная наука, отличаясь этим от экспериментальных знаний. Еще в Древней Греции были поняты сила и возможности логического доказательства, и именно греческие математики открыли “аксиоматический метод” для изложения геометрии, который наиболее широко стал применяться в течение двух последних столетий. “Процесс развития аксиоматического метода от "Начал" Евклида до нашего времени можно расчленить на три периода: 1) период содержательной аксиоматизации; 2) период полуформальной аксиоматизации; 3) период формальной, или формализованной, аксиоматизации” [284, с.134]. Содержательная аксиоматизация используется преимущественно в естествознании. Полуформальная аксиоматизация традиционно применяется в обычной практике математического исследования на раннем этапе построения математической теории. Наконец, формальная аксиоматизация появляется при окончательном формировании “фундамента” теорий современной математики и при философско-методологическом анализе вопросов обоснования математики. “С системной точки зрения, – считает В.Я. Перминов, – аксиоматизация математической теории является одновременно и полным ее обоснованием в смысле непротиворечивости” [331, с.153]. Поэтому вполне естественным выглядело в среде математиков убеждение, что для любого раздела математики можно указать набор аксиом, достаточный для вывода всех истинных предложений этой науки. Работа Гёделя показала несостоятельность такого глубоко укоренившегося убеждения. Возможности аксиоматического метода оказались существенным образом ограничены. Кроме того, к недостаткам аксиоматического метода можно отнести отсутствие обоснования самих математических аксиом, вызывающих философские споры об адекватности и правдивости некоторых из них.

Как оказалось, мощности дедуктивных методов не хватает даже на то, чтобы из конечного числа аксиом вывести все истинные утверждения о целых числах, сформулированные на языке школьной алгебры, то есть формально нужно иметь бесконечно много новых идей. Резюмируя, можно сказать, что хотя открытия Гёделя и разрушили старые надежды, подкрепленные было исследованиями по основаниям математики, они, в то же время, обогатили эти исследования новыми методами рассуждений и способствовали переоценке перспектив философии математики. Когда математик прерывает бесконечную операцию вычисления, он считает, что в принципе эта операция бесконечно воспроизводима, и поэтому ее можно предположить завершенной. Поскольку человеку не дано постигнуть завершенное бесконечное ни путем откровения, ни путем мистического восприятия, то математики выражают завершенное бесконечное в символах и знаках. Физики в отличие от математиков не столь сдержаны в своих высказываниях о проблеме бесконечного в философии математики: “Говорят: "Мы не можем понять, что такое бесконечность, поскольку наш мозг конечен". Но если рассуждать подобным образом, то получится, что мы не можем понять, что такое баран, поскольку мы сами не бараны” [135, с.148]. С физической точки зрения, если бы программа Гильберта оказалась работоспособной в полном объеме, то это было бы “плохой новостью” для некоторых концепций реальности, поскольку при этом устранялась бы необходимость понимания при критическом анализе математических идей. С течением времени под влиянием компьютерной вычислительной идеологии в доказательстве теорем “нестрогие” математические доказательства стали встречаться на практике все чаще, поэтому их надежность, вообще говоря, не зависит от гипотетически возможного “чистого”, но строго аксиоматически не реализованного доказательства.

Доказательство в общем случае не гарантировано от неявных допущений в языке, то есть соответствующий анализ опирается на понятие неявного знания. Переносы техник рассуждения или навыков деятельности из других областей знания представляют собой неявное, или “дорефлексивное действие”, которое осознается и анализируется уже после его совершения. С учетом неявной компоненты в обосновании математики, принципиальный вопрос обоснования состоит в том, существуют ли в математике окончательные доказательства? Некоторые философы математики предполагают, что содержательные доказательства только гипотетичны. Более того, и формальные доказательства, хотя и могут быть сами по себе вполне надежными, тоже являются гипотетичными, так как могут противоречить неформальным теориям, выступающим в качестве интуитивной основы формализованной теории. В силу этого, значение теоремы Гёделя о неполноте оказывается довольно тонким вопросом проблемы обоснования математической строгости в контексте выявления и разграничения явных и неявных предпосылок познавательной деятельности. “В математике проблема неявного знания во многом связана с проблемами обоснования, – утверждает философ математики Б.Л. Яшин, – так как в процессе строгого формального дедуктивного доказательства математик нередко неосознанно опирается на положения явным образом не сформулированные, не выраженные в языке” [509, с.526]. Результат Гёделя, принципиально важный для понимания философской проблемы обоснования современной математики, состоит в том, что для арифметики Пеано строятся неразрешимые предложения, в силу чего его называют теоремой Гёделя о неполноте формальной арифметики Пеано натуральных чисел. В указанном контексте, самого Гёделя можно охарактеризовать как убежденного платониста, даже если бы он и сомневался в абсолютности существования всех мыслимых математических конструкций. Возникающее при этом затруднение связано с тем, что понятия непротиворечивости и полноты используются и для характеристики мышления человека.

В действительности Гёдель доказал, что математика – это не произвольные несистемные поиски, определяемые прихотью математиков, а нечто абсолютное, которое не изобретается, а открывается. Например, ряд натуральных чисел, существующий как актуально бесконечное множество в мире платоновских идей, одновременно присутствует где-то еще и в понимаемом нами мире, делая окружающую действительность более доступной для нас. Мировоззренчески теорема Гёделя свидетельствует именно о том, что постижение сущности натуральных чисел осуществляется не при помощи каких-то правил, а за счет их взаимодействия с платоновским миром. Удачным примером может служить процесс понимания того, чем являются натуральные числа. Такая платоническая точка зрения была существенна для Гёделя, но не менее существенной она является в нашем подходе к проблеме обоснования математики. Поскольку, как считает философ математики Б.Л. Яшин: “Иногда в качестве основания для доказательства тех или иных утверждений используется ссылка на внутреннюю убежденность в истинности некоторого положения, которое является результатом неосознанного умозаключения” [509, с.526]. В этой внутренней убежденности появляется умеренная платонистская вера в истинность математического знания. С точки зрения современной теории познания, историческая эволюция, представляющая собой аксиоматизацию математических теорий, включает в себя экспликацию оснований, на которые математик, насколько это возможно, опирается в своей работе, но он должен помнить о том, что принятое им основание не защищено от “гёделианского скептицизма”. Вопреки определенным усилиям философов представить результаты Гёделя как сенсацию, его теоремы все же не оказали “революционного влияния” ни на представление о своей науке большинства работающих математиков, ни тем более на их практическую деятельность. То есть, как принято сейчас говорить, смены научной парадигмы, в смысле Томаса Куна, не произошло.

Важнейшее условие, при котором была доказана теорема Гёделя о неполноте, содержится в непротиворечивости системы аксиом математической теории. Гёдель показал, что доказать непротиворечивость системы аксиом в рамках самой системы нельзя, то есть утверждение о непротиворечивости само по себе является неразрешимым. По существу речь идет о том, являются ли данные абстрактные понятия характеристиками реального мышления и в какой степени они являются стандартными нормами человеческого мышления. Поэтому, несмотря на то, что теоремы Гёделя о неполноте подрывают само понятие полной теории природы, у способности науки отвечать на вопросы, на которые она может ответить, потенциально границ нет. Вывод, к которому пришел известный алгебраист А.Н. Паршин, тщательно анализируя различные аспекты теоремы Гёделя, состоит в том, что “можно допустить существование некоего умопостигаемого пространства, в котором логические высказывания являются "вещами" или "предметами", но при этом они не исчерпывают его ни в коей мере, а находятся в нем примерно так, как рациональные числа помещаются среди иррациональных” [323, с.103]. Интуиция тогда была бы связана с движением по этому пространству. Не случайно, даже в чисто вербальном, то есть словесном, плане имеется соответствие между иррациональными числами и наличием иррациональной или интуитивной составляющей человеческого познания. Если с помощью традиционных аксиом нельзя решить какую-либо проблему, то это скорее говорит о внутреннем несовершенстве данных аксиом, а не об их неадекватности “миру идей”. Постоянный философский интерес к теоремам Гёделя обусловлен еще и тем, что развитие математического знания подтверждает: они говорят нечто методологически важное о пределах возможностей абстрактного мышления человека.

Из результатов Гёделя следует, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем. Абстрактные математические понятия отражают, согласно Гёделю, некоторые аспекты объективной реальности, но, вообще говоря, иные, чем те, что даются посредством ощущений. Однако в силу недостаточной определенности критериев рациональности, эти идеи Гёделя не получили должного признания в качестве методологически значимых для обоснования математики, поскольку они не позволяют даже решить, какие именно из очевидных аксиом теории множеств следует принять в качестве непосредственно истинных. В связи с этим обратим внимание на методологически важное замечание философа науки В.И. Аршинова: “Принцип плюрализма вынуждает предположить, что различные коммуникации порождают и различные рациональности, причем ни одна из них не имеет заведомого преимущества и обязана мириться с существованием иных, отличных от нее рациональностей” (цит. по [356, с.137]). Необходимо также предостеречь от излишне радикального истолкования результата Гёделя, поскольку такой подход исходит из ошибочного допущения, что теоремы Гёделя истинны для всех формальных выражений, которые могут быть истолкованы в качестве утверждений о непротиворечивости теории. Поэтому достаточно убедительная философско-методологическая программа обоснования современной математики не может быть построена в рамках упрощенной теории познания.

Известно, что Гёдель не изобрел математическую логику, но он глубоко изменил своими исследованиями содержание этой науки. Гёдель доказал, что если достаточно богатая формальная система непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми. Но так ли уж необходимо нам знать все истины? Истинность теоремы – это лишь часть знания, содержащегося в ее доказательстве. Загадочное несоответствие естественной и формальной логик отражено в несоответствии между понятием “истинность” и понятием “доказуемость”. Удивительно и то, что даже способы рассуждений Гёделя, используемые им в доказательстве, по-видимому, невозможно описать в рамках формальных систем. Основная причина этого состоит в том, что Гёдель исходил из допущения, что человеческий интеллект схватывает абстрактные качества математических объектов, не сводимые к их конкретным свойствам, и это создает в нашем сознании особые отношения между человеком и реальностью.

При такой интерпретации математических теорий, как подчеркивает философ математики Б.Л. Яшин: “Неосознанное знание чего-то иного, скрытого за явно выраженным знанием, подразумевание какого-либо условия, опора на невербализованные предпосылки в рассуждениях – все это достаточно широко представлено в математических теориях” [509, с.526]. Но это, скорее всего, романтический взгляд на довольно сложную ситуацию математического познания. Более реалистичный взгляд предполагает необходимость глубокого понимания того, каким образом смысл выражается в формальных системах. Методологическая значимость результатов Гёделя для программы формализма состоит в том, что он показал, как при принятии определенных мер предосторожности можно известные парадоксы превратить в неразрешимые предложения. В действительности, как считают некоторые философы математики, исследования Гёделя были лишь частью долгих поисков, предпринятых математиками в надежде выяснить, что же такое доказательство. В чем же тогда состоит философский эффект открытия Гёделя?

Он состоит в том, что модифицированное высказывание Эпименида создает парадокс, так как оно не является ни истинным, ни ложным, а высказывание Гёделя не доказуемо, хотя и является истинным. В частности, это означает, что система неполна, в силу того, что существуют истинные суждения теории чисел, не доказуемые с помощью методов рассуждений, принятых в самой системе. Формулировка Гёделя может создать некоторую путаницу в ее правильном понимании, из-за того, что доказательство для нематематиков является весьма приблизительным понятием. Для математиков доказательства являются таковыми лишь внутри определенных жестких систем. В работе Гёделя такой жесткой системой, к которой собственно относится слово “доказательство”, является фундаментальный труд английских логиков и философов Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда “Principia Mathematica”. Первая теорема Гёделя по существу утверждает, что какая бы непротиворечивая система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, то есть полнота недостижима. Но есть еще дополнительная трудность в современных формальных системах. Вторая теорема Гёделя утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, точнее непротиворечивость достаточно сильной теории никогда не может быть доказана внутри нее самой. Философами науки и интерпретаторами теорем Гёделя упускается иногда следующее важное дополнение. Требование непротиворечивости системы аксиом не должно вызывать принципиальных затруднений, так как это естественная “присказка”, без которой возможны любые выводы. В формальном варианте второй теоремы Гёделя о неполноте, которую было бы правильнее называть “теоремой о непротиворечивости”, утверждается, что если система, включающая арифметику, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке, допускающем представление в арифметическом формализме.

Но что в математике означает слово “непротиворечива”? Непротиворечивость системы аксиом означает, что не существует такого утверждения, которое в этой системе чисто логическим путем выводимо одновременно с отрицанием этого утверждения. “Противоречивые системы аксиом вредны и их не следует вводить, – поясняет математик, философ и логик В.А. Успенский, – но дело в том, что противоречивость может не сразу выявиться” [453, с.25]. Математики, безусловно, хотели бы знать заранее, что противоречащие друг другу утверждения не появятся. Исчерпывающее объяснение по этой проблеме, скорее всего, невозможно, но некоторые косвенные, психологически убедительные признаки все же существуют. Какой математикам прок в непротиворечивости самой по себе? Противоречивая система была бы бессмысленна, так как в ней была бы выводима любая формула. Противоречие ставит под сомнение, прежде всего, только те математические доказательства, которые непосредственно связаны с противоречивыми понятиями. Гёделевские определения непротиворечивости и доказательства признаны наиболее методологически естественными, но если определить их иначе, то непротиворечивость системы может быть доказана в ней самой. Поэтому, если взглянуть на гёделевский подход исторически, то есть с точки зрения нефундаменталистского направления, то можно понять его ограниченность контекстом определенного подхода и рассматриваемых в то время задач. Можно сказать, что Гёдель радикально изменил философскую проблему обоснования даже в том, что он по-своему уточнил ее, дав ей новую математическую формулировку.

Фундаменталистское направление философии математики не признает этого важного математического факта. Провозгласив, что непротиворечивость должна на самом деле доказываться средствами математических теорий, Гёдель проложил путь к новому теоретическому направлению в философии математики, по отношению к которому старое понимание непротиворечивости выглядело слишком наивным. Почему, несмотря на то, что непротиворечивость системы Цермело–Френкеля – одной из самых распространенных аксиоматик теории множеств – до сих пор не доказана, математики довольно сдержанно реагируют на столь неопределенное положение, сложившееся в теории, претендующей быть “фундаментом” всей математики? Здесь возможны разные ответы, отличающиеся подходом к проблеме и их аргументированностью. Как считает американский математик и философ Ван Хао, “что касается современного состояния математики, то рассуждения о противоречивости систем являются довольно бесплодными – ни одна из формальных систем, широко используемых сегодня, не находится под очень серьезным подозрением оказаться противоречивой” [77, с.334]. Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличена. Проблема в том, что углубленные занятия профессиональных математиков “продвинутой” областью знаний порождают иногда корыстную заинтересованность и нежелание рассматривать методологические альтернативы. Современные поиски доказательств непротиворечивости мотивируются по-разному и имеют более серьезные цели, чем просто избежание противоречий. Возможно, результаты Гёделя еще долго бы игнорировались математическим сообществом, как не имеющие отношения к ее реальным проблемам, если бы Пол Коэн не поколебал эту уверенность своим окончательным результатом о неразрешимости знаменитой континуум-гипотезы в традиционной системе аксиом теории множеств.

Из второй теоремы Гёделя о неполноте следует, что доказательство непротиворечивости не может быть формализовано. Это говорит о необходимости использования для этих целей новых нефинитных методов, то есть опять появляется тема бесконечности. Теоремы Гёделя указывают нам на то, что ни одна система аксиом не может охватить всех истин. Теорема Гёделя показывает не просто ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном свойстве мышления, в том смысле, что если мы хотим что-то понять в мышлении человека, то это можно сделать не вопреки теореме Гёделя, а благодаря ей. В частности, существование альтернативных подходов, то есть отличных от гёделевского, к такому понятию, как “доказательство”, указывает на реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Однако вторая теорема Гёделя о неполноте – это не просто теорема в привычном смысле этого слова. По своему гносеологическому статусу она располагается на границе между неформальной и формальной математикой. Поэтому все еще остается открытым вопрос об эпистемологических выводах, следующих из теорем Гёделя. Работы Гёделя о неразрешимости внесли элемент сомнения и в вопрос о том, разрешима ли проблема Ферма, но истинных фанатиков великой теоремы Ферма это ничуть не разочаровало. “При попытках ее доказать были разработаны мощные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел. С помощью сложнейшей теоретико-числовой техники теорема Ферма была проверена для всех $n \leq 4000000$, но до конца 1994 года в общем случае оставалась недоказанной” [418, с.136]. Принципиальная трудность теоремы Ферма, а также других математических проблем, состоит в том, что рассматриваемое множество объектов, в данном случае натуральных чисел, бесконечно, поэтому проверить его все целиком нет даже принципиальной возможности. Однако математическое доказательство позволяет нам единым образом обозреть все это бесконечное множество и получить, если повезет, точный ответ. Проблема Ферма: верно или неверно на множестве натуральных чисел следующее арифметическое утверждение:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall n \quad ((x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3}) \neq (z+1)^{n+3},$$

стояла более 350 лет. Эта проблема хорошо известна под названием “великой теоремы Ферма”. Математики довольно часто хронометрируют свое время не столько конкретной датой получения решения той или иной проблемы, сколько временем поиска идеи этого решения. Поиск доказательства великой теоремы Ферма последний из примеров такого рода. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом. Доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах. Несмотря на то, что это невероятно трудная задача, ее формулировка понятна любому школьнику. Примечательно также то, что при $n = 2$ существует бесконечно много таких решений – это так называемые пифагоровы тройки вида (3, 4, 5), (5, 12, 13) и так далее. В философии математики важнейшим мировоззренческим положением является четкое осознание того, что подавляющее большинство математических понятий и теорем не имеют никаких прообразов в реальном мире. Например, с определенными оговорками можно сказать, что реальным является утверждение $2 \times 2 = 4$, а теорема Ферма – это уже идеальное высказывание. Поскольку идеальные результаты можно рассматривать как промежуточные стадии рассуждений для получения реальных результатов, то являются ли они в таком контексте столь необходимыми? После основополагающих открытий Гёделя о неразрешимых предложениях математики задавали и такой вопрос: может быть гипотеза Ферма неразрешима в существующей системе математики? Пьер Ферма сумел сформулировать такой вопрос, который, несмотря на его естественность и простоту, не додумались задать даже древние греки, и в результате чего он стал автором труднейшей головоломки, решать которую пришлось другим поколениям математиков.

Ценность для философии математики этой просто формулируемой арифметической проблемы состоит в том, что, с позиций крайнего интуиционизма, утверждение гипотезы Ферма или ее отрицание более 350 лет нельзя было признать истинным. Такую “конъюнктурность” понятия математической истины вряд ли можно признать приемлемой, поскольку будет ли официально признана доказанность знаменитой математической гипотезы, а если будет, то когда именно, является весьма субъективной процедурой, зависящей также от “общественно-значимого критерия”. Статус великой головоломки Ферма со временем вышел за рамки замкнутого мира математики. Английский математик Эндрю Уайлс в 1993 году анонсировал доказательство гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических кривых, тем самым он заявил, что доказал последнюю теорему Ферма. Дальнейшие события развивались драматически, так как в его доказательстве были обнаружены пробелы, исправление которых заняло свыше года. И все же Эндрю Уайлсу удалось в 1995 году получить завершающее сверхмощное доказательство последней теоремы Ферма с помощью теории эллиптических кривых, представляющее несомненный триумф математического интеллекта [533]. Математики доказали, что Ферма оказался в итоге прав, назвав свою недоказанную великую гипотезу теоремой. Теоремы – это фундамент теоретической математики, то есть если истинность теорем установлена, то, опираясь на них, можно, находясь в относительной безопасности, возводить “архитектуру математики”. Заметим, что доказательство этой теоремы занимает несколько десятков журнальных страниц и использует очень тонкий математический аппарат, формировавшийся почти три столетия. Это отчасти мешало его окончательному признанию, поскольку найти математическую ошибку в сложном и длинном рассуждении во много раз труднее, чем написать его. Философско-методологическая значимость решения этой классической проблемы для математиков, работающих над другими нерешенными проблемами и новых подходов к обоснованию современной математики состоит в том, что доказательство Уайлса представляет собой идеальный синтез современной математики и может служить источником вдохновения на будущее. Теперь можно наверняка утверждать, что Ферма лишь показалось, что он нашел доказательство этой теоремы. В его рассуждениях явно была спрятана ошибка. Сейчас уже очевидно, что во времена Ферма просто не существовало еще математических методов, позволяющих доказать его теорему.

Знаменитая гипотеза великого французского математика Анри Пуанкаре, сформулированная в 1904 году, при своей внешней простоте, подобно знаменитой теореме Ферма, тоже содержит множество подводных камней. Гипотеза Пуанкаре – одна из тех фундаментальных задач, в которых даже ошибочные решения могут привести к появлению новых областей математики. В этом с ней может соперничать разве что великая теорема Ферма. На современном языке в гипотезе Пуанкаре утверждается, что “всякое односвязное компактное трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере”. Заметим, что Стивен Смейл включил гипотезу Пуанкаре в список проблем нового столетия: “Фундаментальность гипотезы Пуанкаре в истории математики заключается в том, что она помогла сосредоточиться на многообразиях как на предмете, по праву заслуживающим исследования. Таким образом, Пуанкаре оказал значительное влияние на математику 20-го века, вызвав интерес к геометрическим объектам, включая в конечном счете алгебраические многообразия, многообразия Римана и т.д.” [413, с.282].

Многообразие – это пространство, которое локально выглядит как обычное евклидовое пространство, а в некотором приближении гипотезу Пуанкаре можно философски интерпретировать как топологическую задачу, дающую достаточное условие того, что пространство является трехмерной сферой. Философско-математическая сущность понятия “гомеоморфизм” проявляется в абстрактно-математической неразличимости геометрических объектов. Гомеоморфизм – это непрерывное преобразование, или деформация, которой можно подвергнуть множество, сохранив при этом его топологические свойства. Проблема Пуанкаре относится к области топологии многообразий, которая занимается свойствами поверхностей, которые не меняются при определенных деформациях, то есть особым образом устроенных пространств, имеющих разную размерность. Так, на математическом примере поверхности трехмерных тел – сферы (поверхности шара) или тора (поверхности бублика) – можно наглядно представить двумерные многообразия, но поверхность шара односвязна, а поверхность бублика – нет.

Сразу заметим, что в формулировке проблемы Пуанкаре речь идет не о трехмерном шаре, а о трехмерной сфере, то есть поверхности четырехмерного шара, которую вообразить уже довольно сложно, поскольку, с философской точки зрения, надо мыслить категориями четырехмерного пространства. Поэтому, существующие результаты по классификации замкнутых трехмерных многообразий не позволяли доказать трехмерную гипотезу Пуанкаре. Потребовались совершено иные методы исследования и другая методология. Классификация многообразий относительно гомеоморфизмов является одной из основных задач топологии – важнейшего раздела современной математики. Следует также отметить, что в конце пятидесятых годов XX века выяснилась новая специфическая особенность теоретической математики. С многообразиями высоких размерностей работать гораздо легче, чем с трехмерными и четырехмерными многообразиями, то есть отсутствие наглядности – это не самая главная философско-методологическая трудность современной математики. При решении проблемы Пуанкаре топологи задались следующими тремя фундаментальными вопросами: “Каков самый простой (т.е. характеризующийся наименее сложной структурой) тип 3-многообразия? Есть ли у него столь же простые собратья или же он уникален? Какие вообще бывают 3-многообразия?” [191, с.53]. Ответ на первый вопрос математикам известен давно, поскольку речь идет о 3-сфере. А вот два других принципиально важных вопроса оставались открытыми почти сто лет. Только в 2002 году на них ответил российский математик Григорий Перельман, который расширил и завершил программу исследований, проведенных в девяностых годах прошлого века американским математиком Ричардом Гамильтоном. Однако Гамильтону удалось реализовать свою программу только в некоторых частных случаях, то есть для многообразий, удовлетворяющим сильным дополнительным ограничениям.

На самом деле доказательство Перельмана решает гораздо более широкий круг математических вопросов. Например, член, добавленный Г.Я. Перельманом к выражению, которое использовал Р. Гамильтон, возникает в теории струн, претендующей на звание квантовой теории гравитации. Не случайно, когда Г.Я. Перельман доказал теорему Пуанкаре, первые отклики физиков-теоретиков касались открывающихся перспектив описания эволюции умозрительных построений математической физики как самодостаточного образа гладко расширяющегося Мироздания без разрывов пространства и воронок, уходящих в иные измерения. Можно предположить, что “выводы теоремы Пуанкаре–Перельмана являются довольно многообещающими, поскольку позволяют с помощью струнных представлений если и не устранить полностью, то хотя бы обойти множество препятствий на пути к построению логически непротиворечивой теории квантовой гравитации” [24, с.143]. Особого внимания, в связи с этим, заслуживает философия и методы работы самого Пуанкаре. Он не воспринимал логицистские взгляды Рассела и Фреге и не принимал набирающие в то время формалистические взгляды Гильберта, так как считал, что основой работы математика является интуиция, а сама математика не допускает полного аналитического обоснования. Абстрактная геометрическая или, точнее топологическая проблема, повлияла и на философские умонастроения Пуанкаре, заставившие его связать в один тугой узел логических построений конвенционализм, релятивизм и топологию других измерений. Именно здесь сходятся три составляющие философской физико-математической головоломки, а именно, физический релятивизм, алгебраическая топология и философия конвенционализма. Поэтому решение знаменитой проблемы Пуанкаре открывает нечто принципиально новое в терминах актуальной проблемы начала Вселенной и современной математики XXI века.

Философско-методологический анализ теоремы Пуанкаре–Перельмана показывает, что если абстрактные топологические построения современной математики действительно соответствуют окружающей физической реальности, то вся наша Вселенная вполне может быть многомерна не только в пространстве, но и во времени. Безусловно, важнейшие мировоззренческие выводы возможны только благодаря постановкам и решению плодотворных математических проблем. Хорошая математическая проблема, согласно философским воззрениям Давида Гильберта, должна быть настолько трудной, чтобы привлекать к ее решению математиков, и в то же время не совсем недоступной, чтобы не делать безнадежными их усилия. Тем не менее, Гильберт не включил теорему Ферма в перечень двадцати трех важнейших проблем, стоящих перед математикой XX века, которые, по его мнению, могут значительно стимулировать дальнейшее развитие математики, хотя и считал, что она представляет “свободное движение чистого разума”. Правда, он включил в этот ряд проблем задачу о разрешимости диофантова уравнения: “Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах” [267, с.185]. Это и есть знаменитая десятая проблема Гильберта. Невозможность существования алгоритма, распознающего разрешимые диофантовы уравнения, то есть того, что требуемого в проблеме способа не существует, была окончательно установлена только в 1970 году. Это сделал молодой российский математик, сейчас уже академик, Ю.В. Матиясевич, который является представителем четвертого поколения школы конструктивного направления в логике и математике, возглавляемой в то время его основателем А.А. Марковым. Заметим, что для диофантовых уравнений не выше второй степени общий метод, следуя которому можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в числах или нет, был найден.

Однако диофантовы уравнения третьей степени никаким усилиям не поддавались, но в начале интеллектуально насыщенного XX века даже великий Давид Гильберт не подозревал, что соответствующего “алгоритма” вообще не существует! В отличие от нахождения искомого общего метода, для доказательства несуществования некоего общего метода для решения определенного класса задач требуется дать точное определение тому, что представляет собой этот общий метод и какими средствами он может быть реализован. Соответствующие определения были выработаны в новом направлении современной математики – теории алгоритмов. Именно десятая проблема Гильберта послужила одним из стимулов для создания этой теории. Элементарная теория чисел состоит из теорем, которые можно вывести из аксиом Пеано, поэтому развивается как часть математической логики. “С доказательством замечательной теоремы Матиясевича, – по мнению Ю.И. Манина и А.А. Панчишина, – в ней выделился законченный теоретико-числовой фрагмент – теория диофантовых множеств, – который достоин завершать любой курс элементарной теории чисел” [260, с.8]. Хотя в связи с неудачами в этом направлении изначально возникло подозрение, что общего метода, о котором говорится в проблеме Гильберта не существует. Преодолев трудности доказательства этой рабочей гипотезы, математикам на этот раз так же, как и четверть века спустя в случае проблемы Ферма, удалось все же уйти с “проблемного поля” теоремы Гёделя о неполноте. Напомним, что наличие неразрешимых проблем в общефилософском смысле вытекает из теоремы

Гёделя о неполноте. Чаще всего, негативные выводы из гёделевских результатов традиционно делаются при методологическом предположении, что достоверным доказательством непротиворечивости формализованной теории является лишь финитное доказательство.

Но этот методологический тезис не является ни философским, ни математическим обоснованием. Например, академик П.С. Новиков считал, что нет достаточных оснований предполагать необходимость границ, накладываемых гильбертовским финитизмом на математическое мышление. “Возможен дальнейший анализ предмета математики и выделение в нем надежных непротиворечивых средств, – пишет он, – выходящих за рамки финитизма и все же достаточных для того, чтобы решать интересующие нас вопросы” [313, с.34]. Непротиворечивость математической системы может быть доказана только методами, более сильными, чем сама эта система, поскольку ее методы доказательства оказываются иногда слишком слабыми. Это достаточно традиционное понимание второй теоремы Гёделя о неполноте не совсем точное, так как в этом случае упускается из вида дуализм интуитивного и формального в гёделевских результатах. Современные аксиоматические теории описывают не все те средства, которые используются в рассуждениях, поэтому вторая теорема Гёделя не дает, вообще говоря, оснований предполагать, что для доказательства непротиворечивости некоторой аксиоматизированной математической теории нужны более сильные средства, вроде каких-то дополнительных постулатов, чем те, что уже фактически используются при построении этой теории. Напомним, что формальные свойства математических объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом.

Такая теория применима только к множеству объектов с определенными отношениями, удовлетворяющими положенной в ее основу системе аксиом. С точки зрения внутренних факторов развития математической теории, она может считаться логически строго выверенной и построенной, если при ее развитии не используются не упомянутые в аксиомах свойства изучаемых объектов и отношений между ними. Есть еще одна специфическая особенность генезиса формирования математической теории, которую выявил академик В.И. Арнольд, анализируя математические достижения Анри Пуанкаре. Он считал, что Пуанкаре следовал “идеям Фрэнсиса Бэкона (который говорил, что начинать научное исследование с аксиом и общих принципов опасно, поскольку это с необходимостью ведет к ошибкам)” [22, с.4]. Единственно надежным источником познания, согласно Бэкону, является опыт или эксперимент, а единственным правильным методом познания – индукция, которая ведет к познанию законов природы. В поддержку этого тезиса процитируем высказывание Германа Вейля: “По самому существу дела интуиция сущности, из которой проистекают все общие суждения, опирается всегда на так называемую полную индукцию. Она не нуждается в дальнейшем обосновании, да и не способна к нему, ибо она есть не что иное, как математическая первоинтуиция "еще одного раза"" [78, с.109]. Дело также в том, что аксиоматические теории, кроме интуитивной идеи натурального числа, дополнительно используют неожиданные философские интерпретации правил следований, отождествлений и различений.

Но эти дополнительные средства по существу содержатся в любой аксиоматической теории, хотя и не описываются ими, поэтому нет оснований считать какие-то из них более сильными в указанном смысле, то есть ситуация с результатами Гёделя намного тоньше и сложнее, чем она представляется математикам и философам науки. Интересно отметить, что сам Гильберт спокойно отнесся к результатам Гёделя поскольку считал, что его представления о математике не были поколеблены теоремами Гёделя, так как его программа обоснования математики не сводилась только к “конвенциально-формальным компонентам”. Не случайно математики призывают не верить никаким философским комментариям к теореме Гёделя, поскольку практически все популярные философские комментарии к этой теореме неверны. К этому можно добавить, что теорема Гёделя о неполноте не может опровергнуть ни одной из уже добытых математических истин. Основная проблема состоит в том, что в программе Гёделя используется фундаментальная двойственность теории чисел в логике: с одной стороны, когда она аксиоматизирована, она становится “объектом” изучения, а, с другой стороны, используемая неформально, она является “орудием”, при помощи которого могут изучаться формальные системы. Поэтому в окрестностях теоремы Гёделя нет простых и однозначных истолкований. В настоящее время нет категорических оснований говорить о принципиальной невозможности достаточно достоверного логического обоснования современной математики, поскольку соответствующий философский скептицизм основывается на результатах Гёделя, полученных при специфических методологических предпосылках, которые эксплицируют определенные формалистские воззрения на надежность математических рассуждений.

Новая обосновательная методология строится через критику строго номиналистического построения математики, через критику финитизма и через оправдание некоторой части трансфинитной математики, связанной с непосредственной опорой на онтологическую истинность. Такого рода идеи были высказаны Гёделем, критиковавшим те программы обоснования математики, которые на основе номиналистски интерпретируемых понятий пытаются вывести всю систему принципов. С точки зрения Гёделя, существует аналогия между физическим и математическим познанием, между чувственным восприятием физических явлений и интуицией математических объектов. Тем не менее, всеобщему употреблению аксиоматического изложения математических теорий и математического моделирования способствовало то, что при их изложении пользуются понятиями предыдущих теорий, поскольку сами аксиомы предлагаются, исходя из некоторого интуитивного понимания или реального знания. Философская компаративистика в такой нестандартной ситуации играет роль “третьего”, точнее той методологической основы, опираясь на которую участники философско-математического диалога выстраивают свои позиции, пытаясь быть понятными друг другу, способствуя тем самым пониманию общих тенденций развития философии современной математики.

В современной математике можно выделить два круга результатов и проблем: одни из них касаются того, что она представляет сама по себе, а другие касаются результатов о возможностях нашей деятельности. В классической математике вопросы “второго плана” – о вычислениях и построениях – играли в ней подчиненную роль, но теперь их значение существенно изменилось. Даже самые проницательные философы математики первой половины XX века не могли предвидеть появления такого мощного нового направления современной математики, как вычислительная математика. Что же способствовало принципиальному изменению математики? Тривиальный ответ – возрастание практической необходимости вычислений и применение электронно-вычислительных машин. Но глубинная суть столь радикального изменения познавательных механизмов не в этом. Благодаря новым теориям математики, например, теории алгоритмов и теории игр, а также информационным технологиям, в сферу математики включаются и исследования человеческой деятельности, способствующие моделированию понимания.

3.3 Современные средства математического познания и новые возможности компьютерного моделирования

В современных математических теориях проявляется новый тип научной рациональности, сущность которого состоит в единстве средств познания, выявляющих свои универсальные и одновременно сквозные черты, к которым можно отнести системность. Эта характеристика указывает на возможность хранения и кумуляции результатов математического познания посредством классификации математических теорий, выстроенных в иерархическом порядке. Из способности математических теорий к полной стабилизации вытекает такая особенность их развития, как кумулятивность математического знания. Сущность ее состоит в том, что новые этапы в развитии математики не устраняют результатов прежних теорий как ложных, а в подавляющем числе случаев целиком подтверждают их, меняясь только в плане своего языкового оформления, то есть ассимилируются в новых понятиях. Следует отметить, что математика в большей степени кумулятивная дисциплина, чем, скажем, физика или философия. Поскольку в современной математике фиксируются такие конститутивно важные для всякой научной рациональности характеристики, как “целостность”, “системность”, “структурность”, которые выступают условием упорядоченности составляющих математического знания, то это создает возможность трансляции уже аккумулированного знания.

Как отмечает методолог науки Э.Г. Юдин: “Внимание исследователей теперь все более сосредотачивается на специальных вопросах, таких, как выявление детализированной структуры системной методологии, анализ конкретно-научной методологии с системной точки зрения и т. п.” [496, с.142]. Однако, несмотря на возрастающую роль компьютерных систем в математическом познании, информационная модель современного математического знания, частично реализованная с помощью компьютера или вербализованная в математическом тексте, является, в значительной мере, лишь “эксплицированным намеком” на теоретическое знание, в отличие от хорошо формализованных математических теорий, позволяющих реконструировать архитектуру моделируемого знания. С точки зрения социокультурной философии математики, изложение математики в соответствии со строгим аксиоматическим подходом исторически связано с возникновением теоретической геометрии и механизмом становления дедуктивного метода. Но когда происходит новое расширение и углубление рефлексии над научным познанием, то, по мнению академика В.С. Степина: “В поле этой рефлексии включается проблематика социокультурной детерминации научной деятельности. Она рассматривается как погруженная в социальный контекст, определяемая доминирующими в культуре ценностями” [430, с.73]. Новый социальный аспект математической деятельности возникает в связи с процессом компьютеризации, носящим чисто технократический характер, что вызывает многообразные позитивные и негативные социальные последствия этого неизбежного процесса.

В связи с компьютеризацией и информатизацией, академик Н.Н. Моисеев считал, что все большее значение приобретает субъективное представление индивида о его оценки интересов и целей. Поэтому, по его мнению, даже на начальном этапе “важно лишь фиксировать абсолютную необходимость возникновения осознанного представления об ограничениях, которые накладывают взаимоотношения цивилизации и окружающей природы на деятельность людей, необходимость нового мышления и новых норм поведения” [282, с.111]. Развитие математической культуры происходит не в процессе естественной эволюции, как например, в природе, а в результате сознательных усилий математиков. Нельзя отрицать и то, что само представление о доказательстве тоже неразрывно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человека, поскольку они тоже изменяются с ходом истории. Во-первых, меняется языковое оформление доказательств, а во-вторых, меняется представление об их убедительности. Поэтому, говоря о математическом доказательстве, как убедительном рассуждении, с помощью которого можно убеждать других, можно заключить, что это представление зависит не только от эпохи, но и от социальной среды математического сообщества. К этому добавим, что современная математика в значительной мере – сложное социокультурное явление, в котором развитое теоретическое мышление включает умение находить связи между, явлениями недоступными обычному взгляду. Идея социокультурного подхода в современной философии науки, его неоднозначное понимание и противоречивость в отношении математического знания стали предметом акцентированных размышлений в работах некоторых философов.

Действительно, с одной стороны, можно говорить о социокультурной обусловленности возникновения и особенностей развития математических теорий или о социокультурном контексте причин приоритетности отдельных направлений математических исследований, то есть о том, что входит в проблематику социокультурной философии науки, объясняющей логику развития науки из социокультурных феноменов. Но, с другой стороны, вряд ли имеет смысл по-философски серьезно рассуждать о социокультурной обусловленности решения математических проблем, поскольку социокультурно не обусловленными являются не сами научные проблемы, а их решения, то есть математические теории в своей развитой и завершенной форме. Философия науки говорит об объективности внешнего мира, отдаленного от человека, даже максима познания истины – “начала необходимо принять, а прочее доказать”, завещанная нам Аристотелем, тоже опирается на веру в незыблемость рациональной мысли. Появление новых типов рациональности, в том числе в математической деятельности, не отменяет, а лишь ограничивает, точнее, более четко очерчивает сферу действия предшествующих типов, изменяя роль познающего субъекта. Соответствующие связи в философии науки характеризуются следующим образом: “Классическая наука и ее методология абстрагируется от деятельностной природы субъекта, в неклассической эта природа уже выступает в явном виде, в постнеклассической она дополняется идеями социокультурной обусловленности науки и субъекта научной деятельности” [426, с.15]. Поэтому можно заключить, что трансцендентальный субъект классической науки сменяется культурно-историческим субъектом неклассической науки и социокультурным субъектом постнеклассической науки.

Если постнеклассическая наука предполагает экспликацию внутринаучных ценностей и их соотнесение с социальными целями и ценностями в структуре деятельности, то, соответственно, идеал объективности математического знания тоже трансформируется с учетом социального контекста. Когда математика рассматривается не только как совокупность техник, но и как искусство, то тогда выявляется не только социальный характер математического знания, но и выясняется, что он играет важную роль, поскольку математическое сообщество представляет ту среду, в которой соответствующие техники и искусства осваиваются, воспроизводятся и трансформируются. “Математика имеет социальную реальность в том смысле, – подтверждает английский философ науки Рэндалл Коллинз, – что она неизбежно является дискурсом в некотором социальном сообществе. Это может показаться каким-то минимальным уровнем реальности. Тем не менее не следует думать, что социальный дискурс не имеет никакого объективного, твердого качества, того типа сильного принуждения, который соответствует понятию истины” [192, с.7]. Это положение особенно важно для философского понимания проблемы обоснования современной математики на постнеклассическом этапе развития науки. Отметим также, что в связи с проблемой обоснования математики, в контексте выделенных типов рациональности, возникает следующий философский вопрос: чем отличается постнеклассическая эпистемология от классической и неклассической рациональности? Для конкретизации этого вопроса заметим, что в философии науки уже зафиксировано положение, согласно которому концентрация эпистемологии вокруг понятия деятельности наполняет этот философский идеал социальными или коллективными характеристиками. Поэтому постнеклассическая наука побуждает эпистемологию обратить внимание также и на историко-культурную обусловленность этих идеалов в проблеме обоснования.

В таком контексте проблема обоснования математики имеет сложнейшую структуру и ее, образно выражаясь, “верхний этаж” образуется под косвенным воздействием социокультурных особенностей конкретной эпохи. Так как объектом познания этого исследования является современная математика, а предметом познания – какие-то аспекты, свойства и стороны обоснования современной математики, то тогда “предмет познания частично воплощает в себе какие-то черты познающего объекта, а частично обусловлен особенностями познающего субъекта” [310, с.58]. При этом идеализированным познающим субъектом может быть не только индивидуальный, но и коллективный субъект познания, а при определении математическим сообществом перспективных направлений развития математики не последнюю роль играют также философские категории современного математического мышления. Это проявляется в том, что каждая эпоха вырабатывает свои истины, а истины одной культуры могут оказаться лишенными смысла в другой культуре. В этом выявляется влияние субъекта на предмет математического познания, что свойственно и другим способам познания. Поэтому, если кто-то считает математику по какой-то причине догматичной, то тогда придется назвать догматичным любое рассуждение. Никогда нельзя быть вполне уверенным в том, что нас поняли без ошибок. Тем не менее, в претензиях на то, что умственные построения, опирающиеся на математическую интуицию, представляют объективную ценность, усматривали иногда не только догматические, но даже и теологические элементы, особенно в те периоды становления математического знания, например, становления теории бесконечных множеств, когда истина теряла свою абсолютность, объективность и философскую общезначимость.

Каждая из классических программ философии математики обосновывала определенное направление в развитии математики. “Нельзя создать такую систему правил, – предполагает Р. Пенроуз, – которая оказалась бы достаточной для доказательства даже тех арифметических положений, истинность которых, в принципе, доступна для человека с его интуицией и способностью к пониманию, а это означает, что человеческие интуицию и понимание невозможно свести к какому бы то ни было набору правил” [327, с.110]. Поэтому, например, полноту можно рассматривать как свойство формальной системы, которая должна схватывать интуитивное содержание математической теории. При такой интерпретации математики могут избавиться от философских упреков в том, что они в качестве основы своих математических убеждений используют какую-либо необоснованную формальную систему. Заметим, что философские основания математики определяются отчасти как общим контекстом меняющейся социокультурной среды, в которую погружена наука, так и спецификой исторически сложившихся предпочтений к нерешенным математическим проблемам. Например, совершенно неожиданно новый аспект социокультурной проблематики в современной математике оказался связан с решением проблемы Пуанкаре российским математиком Г.Я. Перельманом. В начале 2000 года математической общественности стало известно о премиях фонда Клея за решение специально отобранных знаменитых математических проблем. По существу, можно говорить о появлении на пороге нового тысячелетия новой социокультурной тенденции в жизни научного сообщества, которую можно назвать “монетаризацией решения научных проблем”. Речь идет о назначении огромных (миллионных) премий, которые должны были, по замыслу организаторов, привлечь внимание к проблемам любой ценой и прибавить энтузиазма математикам в их исследовании, а вовсе не о научном интересе самом по себе.

После решения проблемы Пуанкаре, как сказал коллега Г.Я. Перельмана математик А.М. Вершик: “Возьмет ли Перельман миллион или откажется от него? Этот вопрос заслонил содержательную сторону событий, и вряд ли он представляет то, к чему стремились устроители призов Института Клея. Публику интересует вовсе не проблема, решения которой так долго ждали математики, не то, что произойдет теперь в науке, – это слишком трудно понять, почти недоступно – и даже не сама личность Г.Я. Перельмана, а именно судьба денежного приза” (цит. по [24, с.103]). Этот ажиотаж свидетельствует о том, что подобный способ пропаганды математики не популяризирует науку, а, наоборот, ущербен и вызывает нездоровый интерес, связанный с миллионом долларов. Заметим, что решение Эндрю Уайлсом Великой проблемы Ферма в 1995 году не вызвало такого бума, но не потому, что эта проблема менее значительна, чем проблема Пуанкаре. А что стало с миллионом долларов, о которых сообщали СМИ? Да собственно, ничего. Проблема заключается в том, что пока неизвестно, как именно надо поступить научному комитету Института Клея, “если программу исследований разработал Гамильтон, Перельман ее фактически реализовал, преодолев неимоверные трудности, а совершенно другие люди опубликовали результаты в реферируемом журнале” [406, с.31]. Нездоровый ажиотаж в определенных внематематических социальных кругах вокруг решения проблемы Пуанкаре создает в обществе неверное представление, будто математическая работа заключается только в решении конкретных проблем. Открытие новых областей математики и взаимодействий между ними в связи с постановкой новых проблем, а также разработка и совершенствование инструментального аппарата математического исследования – все это не менее интеллектуально важные вещи в философии современной математики.

Не вдаваясь в проблему более четкого ограничения предметной области современной философии математики и в суть дискуссии между представителями конкурирующих направлений, а именно, фундаменталистской и нефундаменталистской (или социокультурной) философии математики, укажем только на существование двух различных философских подходов к этой проблеме. “Первый подход, "экстернализм", исходит из обусловленности научного познания своего рода "социальным заказом"… в то время как второй "интернализм", признает, прежде всего, внутренние каналы взаимодействия науки и культуры в форме идеалов и норм научного знания” [38, с.203]. В столь сложном системном процессе, как становление новой математической теории, работают различные виды оснований. Среди них можно выделить внутренние, точнее внутриматематические основания, позволяющие определить, как функционирует формальная теория в целостной системе математики, и внешние, то есть внематематические основания, отвечающие за работу новой теории в системе науки в целом, например, в качестве математического аппарата физической теории. Познание интересующих нас философско-методологических проблем через эвристический потенциал математического знания может привести к глубокому проникновению в сущность этих проблем. Развитие современной математики объективно обусловлено следующими движущими силами: “"внешней", связанной с необходимостью решения математическими средствами задач естествознания, техники и экономики, и "внутренней", вытекающей из необходимости систематизировать найденные математические факты и выяснить их взаимосвязи. Эти два взаимодействия часто бывает трудно разграничить, однако в историческом процессе то одно, то другое выдвигалось на передний план” [54, с.197]. Эти два направления в некотором приближении условно традиционно обозначают как прикладное и теоретическое.

Кроме того, при формировании нового образа философии математики проявляется такая тенденция, как социокультурная обусловленность математического познания, которая понимается разными исследователями весьма неоднозначно. Возникнув как новая самостоятельная дисциплина, философия математики наряду с внутренними проблемами математики приобрела функцию ее внешнего оправдания, а также необходимость отвечать на философские вопросы, инициированные со стороны других областей научного знания. Например, внутренний аспект проявляется в индивидуальном акте осмысления и поэтому с трудом эксплицируется, так как зависит от индивидуального осознания интуитивного смысла математического текста. Тогда как внешний аспект математического текста – это рабочий смысл для профессионального математика. Поэтому, заключает известный математик Ю.И. Манин: “Он дополнителен к внутреннему аспекту в том же смысле, в каком описание правил употребления слова "множество" дополнительно к его определению по Кантору” [259, с.158]. Поэтому методологический подход к проблеме обоснования математики, рассматриваемый в этом исследовании, предполагает уход от жесткой дихотомии “внутреннее – внешнее”. Это также по-своему способствует выявлению нового философского пространства для решения проблемы обоснования. Но, следует отметить, что далеко не все научные идеи имеют глубокий мировоззренческий смысл и могут получить философское осмысление.

Так, по мнению некоторых философов науки, становление постнеклассической науки – это весьма нетривиальная штука. “Воплотить в строго научном, теоретическом построении социокультурную составляющую научного метода, обосновав тем самым его ограниченную применимость, или неуниверсальность, – задача действительно непростая” [475, с.69]. Достаточно вспомнить о роли неявного знания в математическом познании, которое по существу является некоторой “дорефлексивной” формой сознания и самосознания субъекта. При ретроспективном анализе математических доказательств формальная составляющая, точнее когнитивная сила дедуктивных выводов, создает иллюзию автоматического вывода математических доказательств, в которых каждый последующий шаг неизбежно следует из предыдущего, обеспечивая концептуализацию нового знания в уже сложившейся системе понятий. Например, термин “операция”, в силу своей общности означает любое целенаправленной действие. Однако, как подчеркивает академик Н.Н. Моисеев: “Говоря об операции, мы всегда ассоциируем с ней некоторого субъекта (оперирующую сторону), который формулирует цель операции и в интересах которого последняя проводится” [281, с.11]. Таким образом, наряду с субъектом, то есть с оперирующей стороной, в постнеклассической математике мы еще имеем дело и с исследователем операции, задача которого состоит в изыскании ресурсов и возможностей оперирующей стороны для обеспечения поставленной цели, в интересах развития математики. Философскую критику идеи кумулятивного развития современной математики, а также стремительную смену новейших компьютерных технологий и непосредственно связанный с этим кризис общего математического образования можно рассматривать как предпосылочные признаки перехода математики в новое философское качество, а также модернизацию норм и идеалов обоснования самого математического знания.

С одной стороны, внедрение современных компьютерных технологий, особенно информационных технологий, прежде всего, способствует качественному изменению организации информационных ресурсов, включая их хранение и обеспечение доступа к ним. С другой стороны, одна из основных причин ограниченных возможностей эвристического потенциала компьютерного эксперимента состоит в том, что задачи, при решении которых можно и целесообразно использовать компьютер, должны иметь определенную структуру. Когда мы говорим о применении компьютера, то важно отметить, что компьютер считает только так, как ему алгоритмически указано, а не так, как гипотетически хотел бы автор программы. Безусловно, прогресс современной математики связан также и с интуитивной составляющей, точнее он зависит от гибкости математического мышления и воображения. Но прогресс математики выглядит все же иначе, чем прогресс естественных и социально-гуманитарных наук. Формализованность математического доказательства – это отчасти необходимая упрощающая процедура, делающая математическое доказательство более универсальным и доступным для задания компьютеру. С помощью современного компьютера можно найти варианты решения математических задач в том случае, если он используется не только как вычислительное устройство для концептуального обогащения мышления, но и как инструментальное средство, позволяющее изменить стереотипы как в усвоении математических знаний, так и в самой умственной деятельности. В связи с этим, Гильберт задался вопросом, можно ли в принципе заменить математический стиль мышления каким-нибудь автоматическим процессом, имитирующим механическое мышление. В более точной формулировке речь шла о том, существует ли такой универсальный метод, с помощью которого можно было бы доказать истинность или ложность любого математического утверждения.

В постгёделевской философии математики этот вопрос был переформулирован и в новой интерпретации он заключался уже не в доказательстве истины, а, в связи с развитием компьютерных технологий, в доказательстве разрешимости. Этим вопросом успешно занимался английский инженер и математик Алан Тьюринг, смелость идеи которого заключалась в изобретении механического устройства, фактически являющегося аналогом пишущей машинки, а именно, бумажной перфоленты с символической логикой. Для решения абстрактных логических проблем он предложил гипотетическую машину, позволяющую определять, какие проблемы разрешимы, а какие нет, которая привела к перевороту в выполнении сложных математических вычислений на реальных машинах. Следует отметить, что до конца XIX века сложные вычисления считались чисто мыслительным процессом. Проблема, исследованная Тьюрингом, не зависит от конкретной программы обоснования математики в терминах выбранной системы аксиом. Его интересовала проблема, которую в современной методологической интерпретации можно сформулировать следующим образом: существует ли некая универсальная механическая процедура, позволяющая, в принципе, решать все математические задачи определенного класса? Когда математик в сложных ситуациях хочет убедиться в том, что математический результат верен, он не формализует его доказательство, то есть не сравнивает его шаги с формальными правилами, а пытается сделать его доступным для понимания. Веря в практическую надежность обычной математики, он полагается не на логические, а на математические основания. Тьюринг уловил определенную связь между проблемой разрешимости и идеей вычислимости функции. Нужна была только простая и точная модель процесса вычисления.

Машина, построенная Тьюрингом, как раз и отвечала этим требованиям. Он показал, что теоретически возможно создать “универсальный компьютер”, который даже способен имитировать работу любого другого вычислительного устройства. Так, по недоказанному тезису Чёрча–Тьюринга, в интерпретации специалиста по квантовым вычислениям Эндрю Стина: “Любая функция, к которой подходит определение "вычислимая", может быть обработана на универсальной машине Тьюринга” [431, с.40]. Кроме того, Тьюринг удачно увязал идею вычислимой функции с результатами Кантора по теории бесконечных множеств. Используя методологическую идею Кантора, можно показать, что множество всех вычислимых функций имеет ту же мощность, что и множество всех натуральных чисел, то есть это счетное множество. Отсюда следует философско-математический вывод о том, что не все функции вычислимы. Классическая математическая теория вычислений, которая более полувека оставалась методологическим основанием для вычислительных процедур, сейчас превратилась в формализованную схему аппроксимации. Такие вычисления могут способствовать платонистскому восприятию математических теорий, хотя, конечно, это восприятие одними вычислениями не ограничено. Как настаивает Роджер Пенроуз, “согласно такому платоническому подходу, именно способность "осознавать" математические концепции дает разуму мощь, далеко превосходящую все, чего можно добиться от устройства, работа которого основывается исключительно на вычислении” [327, с.90]. Поэтому, связанные с понятием алгоритма математические объекты, рассматриваемые в конструктивистской программе интуиционистского направления обоснования математики, представляют лишь ограниченную часть математики.

Процесс понимания человеческим разумом математических суждений существенно отличается от того, чего мы можем добиться от какого угодно компьютера. Это согласуется с системной направленностью понимания рациональности. Как справедливо заметил о таком понимании, используя математическую терминологию, В.Н. Садовский: “Рациональность больше не трактуется одномерно, только в познавательном (гносеологическом) плане, а оказывается комплексным явлением, познание которого предполагает учет деятельности соответствующих научных сообществ, присущих им норм научности, характера социальных взаимоотношений членов этих сообществ и т.д.” [398, с.331]. Тем не менее, только в математических рамках можно рассчитывать на возможность сколько-нибудь строгой демонстрации невычислимости, хотя бы некоторой части нашей сознательной деятельности, поскольку вопрос вычислимости по самой своей природе является, безусловно, математическим. Заметим, что в рамках разрабатываемого в этом исследовании философско-методологического синтеза, как принципиально нового философского подхода к обоснованию математики, понятие конструктивности, в частности, в контексте трудностей математического моделирования и конструирования численного алгоритма, может изучаться как в рамках постгёделевской философии математики, так и в терминах теории Тьюринга о вычислимости. В современной компьютерной математике, синтезирующей в себе как формалистские, так и конструктивистские проблемы обоснования математики, весьма важно иметь хотя бы теоретическую возможность установить именно тот момент, когда машина Тьюринга остановится. Сам же Тьюринг показал, что алгоритмической процедуры для решения механическим путем общей проблемы остановки на самом деле нет.

К этому можно добавить, что в противоположность классическому компьютеру вообще нельзя определить останов квантового компьютера. По существу квантовый компьютер является новым познавательным теоретическим инструментом, но еще есть философские вопросы, решение которых требует более глубокого проникновения в его сущность. Инженерной и физической идеи его реализации пока не видно, есть только абстрактная квантовая логика. Так что же такое “квантовый компьютер”? Приведем в качестве тезиса мнение академика С.П. Новикова: “Возможность развить теорию квантового аналога процесса вычисления сама по себе интересна как раздел абстрактной математической логики квантовых систем. Когда же мы говорим о создании компьютера, возникает первый вопрос: можно ли указать какую-либо возможную физическую реализацию, чтобы грубо оценить числовые параметры для границ, преодоление которых было бы необходимо для реализации, для оценки возможностей, скорости? Без этого подобный объект существует только в платоновской физике” [315, с.19]. Пока никто не знает, считает он, можно ли реально построить достаточно большую “полностью когерентную квантовую систему”, способную реализовать “классически управляемые квантовые процессы” по заданному довольно сложному алгоритму. На необходимость развития квантовых вычислений в связи с большой информационной емкостью квантовых систем указывал еще в 80-х годах прошлого столетия известный математик Ю.И. Манин, используя для этого унитарные преобразования в гильбертовом пространстве. Эта задача была успешно решена американским специалистом по квантовой теории и одним из авторов первого квантового алгоритма Дэвидом Дойчем, который сформулировал теорию квантового компьютера в терминах гильбертова пространства, что позволило описать механизм быстрого счета, недоступный классическим вычислительным устройствам.

В качестве антитезиса сошлемся на мнение самого Дэвида Дойча: “Признаться, для физиков-теоретиков, подобных мне, допустимо и оправдано прикладывать огромные усилия, чтобы достичь понимания формальной структуры квантовой теории, но не за счет того, чтобы потерять из вида нашу главную цель – понять реальность” [137, с.55]. Хотя квантовых компьютеров еще нет и, в отличие от универсальной машины Тьюринга, которая создавалась одновременно с реальными компьютерами, до сих пор неясно, когда появятся их практически полезные конструкции, Дойч формализовал вопрос квантовых вычислений в рамках современной теории вычислений, рассмотрев первую приближенную схему работы квантового компьютера. Тем не менее, в 1989 году был построен специализированный квантовый компьютер, состоящий из двух квантовых криптографических устройств, спроектированных Чарльзом Беннеттом и Жилем Брассаром. Этот компьютер стал первой машиной, выполнившей нетривиальные вычисления, которые не смогла бы теоретически выполнить ни одна машина Тьюринга. Поэтому синтез тезиса и антитезиса о возможности существования квантового компьютера все же возможен. А если при этом учесть существующую тенденцию создания быстродействующих компьютеров с более компактным математическим обеспечением, то современные информационные технологии должны стать в этом смысле универсально квантовыми, так как квантово-механические процессы доминируют сейчас во всех достаточно малых физических системах. Принципиальная методологическая трудность этой проблемы состояла в том, что недостаточно было только охарактеризовать эволюцию квантово-механической системы, но необходимо было предъявить более серьезное доказательство ее реализации.

В 1985 году Дэвид Дойч теоретически доказал, что в квантовой физике существует так называемый “универсальный квантовый компьютер”, способный выполнить любое вычисление, которое может осуществить любой другой квантовый компьютер. “Все, что мне пришлось сделать, – разъяснял он, – это скопировать устройства Тьюринга, но для определения лежащей в их основе физики воспользоваться не классической механикой, которую неявно принимал Тьюринг, а квантовой теорией” [137, с.213]. По существу, все современные компьютеры, использующие как традиционно механические, так и квантово-механические процессы, в философско-методологическом контексте являются различными технологическими реализациями одной и той же классической идеи универсальной машины Тьюринга. Это означает, что даже математическая обработка информации является сложной задачей, состоящей из разнообразных методологических подходов и философских идей, которые невозможно объединить в одной программе математики. Тем не менее, американский исследователь Питер Шор нашел первый пример квантового алгоритма разложения на множители n-разрядного числа, используя число шагов, возрастающее за полиномиальное время, то есть способного значительно увеличить скорость решения, тогда как лучший из известных алгоритмов для классических компьютеров использует число шагов, растущее с увеличением n экспоненциально [531]. Заметим, что этот результат уже напрямую связан с методологическими теоремами Гёделя о неполноте. Не преувеличивая философскую роль теоремы Гёделя о неполноте, можно сказать, что гёделевский результат говорит, прежде всего, о том, что все множество арифметических истин, демонстрируемых как формальные математические утверждения, не может быть перечислено машиной Тьюринга. Заметим, что теорема Гёделя о неполноте – одно из существенных препятствий для любой попытки полностью понять теоретическую сущность и конструктивную природу бесконечных множеств.

Но сосредотачиваться лишь на гёделевских ограничениях, не учитывая при этом опыт исследовательских традиций в математике, богатое и разнообразное содержание которой не сводится исключительно к абстрактной теоретико-множественной математике, – значит сознательно гордиться своим философско-методологическим бессилием или несостоятельностью современной философии математики как науки. Фундаментальная и актуальная тема соотношения дополнительных понятий интуитивного и формального, рационального и иррационального в понятии бесконечного берет свое начало в философии древних греков. Именно греки впервые использовали противоположность конечного и бесконечного как мощное орудие познания действительности. Количество элементов, предполагающих возможность перехода к математической бесконечности, в различных математических задачах, даже при изучении одного и того же объекта, может быть весьма различным. Оно зависит от скорости "затухания" влияния далеких элементов, а также от принятой оценки существенности этого влияния. Эта бесконечность является, по существу, незавершенной и при такой ее схематизации дискретность заменяется на непрерывность, а суммы – на интегралы. С точки зрения компьютерной математики, при конструировании вычислительного алгоритма, а именно, построения разностной схемы для математической модели, наблюдается обратный процесс. "Построение разностной схемы, – считает академик А.А. Самарский, – можно рассматривать как замену непрерывной среды некоторым ее дискретным аналогом" [401, с.41]. Отметим также, что, с точки зрения методологии современной математики, традиционное противопоставление "дискретное – непрерывное", рассматриваемое в философии со времен древних греков, не совсем удачно, поскольку по существу непрерывным в этом бинарном отношении в философии называют то, что на деле является математически гладким или дифференцируемым.

Так уж сложилось, что иллюстративные примеры непрерывности, как правило, являются примерами гладкости, хотя непрерывное отображение может оказаться негладким. Тем не менее, большинство функций, в некотором смысле, являются недифференцируемыми. Исторически первый пример непрерывной, но нигде недифференцируемой функции в виде суммы ряда, точнее недифференцируемой ни в одной точке, построил немецкий математик Карл Вейерштрасс, хотя вначале сумму сходящегося функционального ряда отказывались признавать функцией. О непрерывной функции, не имеющей конечной производной ни в одной точке:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где a – действительное число, $0 < a < 1$, b – нечетное целое и $ab > 1 + (3/2)\pi$, Вейерштрасс доложил в 1872 году Берлинской академии наук, а опубликован этот пример был в 1875 году. Этот и похожие примеры впервые показали, что понятие непрерывности намного шире, чем дифференцируемости и, таким образом, непрерывность предстала как вполне самостоятельный объект исследований. Историк математики Жан-Пьер Фрейдельмейер, подводя итоги обосновательной деятельности в области математического анализа, сказал: "Вейерштрасс переформулировал все определения анализа, используя такие выражения, как $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha$ … и т.п. Сделав это, он открыл дверь целому миру математических монстров, совершенно неподвластных интуитивному восприятию: функции, непрерывные на всем интервале, но нигде не дифференцируемые, или непрерывные функции, не являющиеся монотонными ни на каком интервале. Эти объекты заставляют нас удивляться, поскольку они представляются нам парадоксальными" [460]. Но в аргументации математического существования функции Вейерштрасса, несмотря на трудности ее интуитивного схватывания, важно то, что она обладает формальным математическим смыслом. Более того, непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции, применяются в теории случайных процессов типа броуновского движения. Теперь это вполне "добропорядочные" математические объекты, хотя вначале у Анри Пуанкаре эти функции вызывали отвращение, он даже называл их "язвой". Функция Вейерштрасса сильно изменила философско-математическое мировоззрение, с точки зрения понимания математической строгости как исправления геометрической интуиции, а также философские взгляды на методологическую обоснованность уже развитых разделов высшей математики. Сегодня многое прояснилось с математической точки зрения, и философам математики уже не так интересно разбирать, почему функция Вейерштрасса недифференцируема.

О сложности философской сущности непрерывного и дискретного говорили еще мыслители древности. Сошлемся, например, на философский анализ, проведенный Германом Вейлем: "Сущность непрерывного отчетливо охарактеризована в одном из дошедших до нас отрывке из Анаксагора: "В малом не существует наименьшего, но всегда имеется еще меньшее. Ибо то, что существует, не может перестать существовать от деления, как бы далеко ни было продолжено последнее". Непрерывное не может состоять из дискретных элементов, которые "отделены друг от друга и как бы отрублены друг от друга ударом топора"” [78, с.67–68]. Кроме того, дискретное – это свойство множества, а непрерывное – это свойство отображения, поэтому дискретному, возможно, правильнее противопоставлять связное. Неожиданное продолжение эти наблюдения получили в новой области математического знания – теории фракталов, которая смещает философско-познавательные установки от строгой рациональности до интуитивно-образного мышления, в стремлении найти выход из “лабиринта непрерывного”. С философско-методологической точки зрения, интересно то, что для введения нового понятия “фрактал” не потребовалось изобретать каких-то абсолютно новых формализаций или математических понятий. Интерпретация фрактальных структур в конкретных познавательных установках заставила философов науки по-новому оценить такие хорошо известные математические понятия и сущности, как различные типы размерности, парадоксы измерений и такой простейший фрактал, как канторово множество. “Концепция фрактала дистанцируется от традиционных понятий задания и описания формы: места, границы, ширины, длины, дихотомий "непрерывное – дискретное", "простое – сложное", определений типа "сложное есть сумма простых частей". Этих понятий просто нет. Они не имеют смысла (перестают работать внутри концепции фрактала) хотя бы потому, что совершенно не понятно, как их применять” [440, с.424]. Фракталами принято называть объекты дробной размерности, которые обладают свойством масштабной инвариантности, или “самоподобия”, когда изменение масштаба не меняет их структуры.

Геометрический аспект теории масштабной инвариантности был разработан американским математиком польского происхождения Бенуа Мандельбротом до математической теории форм, имеющих дробную размерность, которая была названа им “фрактальной геометрией”. По этому поводу он писал: “Моя увлеченность масштабной инвариантностью, постоянно подпитывалась новым энтузиазмом и обогащаясь, благодаря сменам области исследований, новыми инструментами и идеями, постепенно подводила меня к созданию полноценной общей теории” [258, с.587]. Это новое научное направление, которое не вкладывается целиком ни в программу формализма, ни в программу интуиционизма, что требует нового философско-методологического подхода к проблеме обоснования математики. С точки зрения философии сложных объектов, фрактальная геометрия – это современный и информационно компактный способ описания сложного. Фракталы открывают новые методологические аспекты простоты сложных объектов. Кроме того, фрактальная геометрия, изначально опираясь на математические парадоксы, совершенно неожиданно подарила неповторимые интеллектуальные и эстетические впечатления от красоты многих фракталов. Они связаны со свойством фрактальных множеств “выглядеть” в любом масштабе примерно одинаково, которое сейчас называется “масштабной инвариантностью”. Другими словами, масштабная инвариантность означает, что малый фрагмент структуры фрактального объекта подобен другому, более крупному фрагменту этого объекта или даже структуре в целом, как например, в “снежинке Коха”. Граница снежинки, придуманной шведским математиком Гельгомом фон Кохом в 1904 году, описывается кривой, составленной из трех одинаковых фракталов. Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника, которая в итоге дает стандартный пример фрактала – “кривую Коха”.

Математическое построение этой кривой начинается с единичного отрезка, который заменяется ломаной из четырех отрезков, каждый из которых имеет длину равную 1/3, а именно, убирается средняя треть отрезка, и, рассматривая ее как основание равностороннего треугольника, добавляются два новых отрезка, строящихся как боковые стороны треугольника. Затем многократно повторяем данную процедуру, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Длина полученной ломаной линии после n-го шага будет равна $(4/3)^n$, поэтому результирующая длина кривой Коха бесконечна: $lim\ (4/3)^n = \infty$ при $n \to \infty$. Если построение начинается с треугольника, то получается снежинка Коха, которую еще называют “островом Коха”. Мы можем фотографировать этот остров в океане из космоса с любым увеличением, хотя мелкие детали в крупном масштабе, естественно, будут теряться, но поскольку фракталы обладают масштабной инвариантностью, то при увеличении мы вновь и вновь будем видеть масштабно некорректируемую конструкцию. Математики и физики этот феномен объясняют так: “Важна не сама длина, а то, как она зависит от размеров линейки, т.е. важно некое число, называемое фрактальной размерностью” [170, с.33]. Заметим, что хаусдорфова размерность кривой Коха равна: $d = ln\ 4 / ln\ 3 \approx 1.262$, то есть для береговой линии острова Коха она лежит между 1 и 2. В частности, для этой линии, как и для кривой, описываемой функцией Вейерштрасса, нельзя провести касательную ни в одной точке. Экзотический пример острова Коха показывает, что конечная площадь фигуры может не влиять на бесконечную длину ее периметра.

Такие экспликации парадоксальных математических объектов становятся все более традиционными для постнеклассической науки. Можно сказать, что дополнительность формального, интуиционистского и платонистского подходов в обосновании существования фрактальных множеств инкорпорирует в систему математического знания представления о самоорганизации и развитии. Эффективность новых теоретических инструментов заслуживает особого внимания, с точки зрения переноса “фрактальной геометрии природы” на абстрактную математическую основу. Но тогда возникает вопрос: так что такое фрактал? Общепринятого определения этого понятия не существует, так как даже определение фрактала по Мандельброту – “множество, хаусдорфова размерность которого превышает его топологическую размерность”, вряд ли можно считать удовлетворительным. Действительно, со временем неожиданно выяснилось “обстоятельство почти криминального характера: размерность Хаусдорфа–Безиковича некоторых фракталов оказалась целой” [129, с.189]. Хотя точного определения фрактала до сих пор не предложено, такое определение, при наличии разрушающих его контрпримеров, особо не нужно в силу сложившейся “интерсубъективной практики” научного применения этой категории математики. В связи с этим обратим внимание на следующее методологическое замечание философа науки В.П. Старжинского, состоящее в том, что “ общенаучные категории находятся как бы между философией и частными науками, органически их соединяют, воплощают в себе некоторые философские принципы и частнонаучную их реализацию” [420, с.33]. С точки зрения философского анализа нового математического понятия, фракталы – это тот случай, когда нужно продолжать знакомство с новым понятием не с уточнения его определения, а с рассмотрения конкретизирующих его контрпримеров.

Во фрактальной геометрии понятие самоподобия, говорящее о том, что часть в каком-то смысле подобна целому, в новом методологическом контексте меняет познавательный статус философского понятия “часть”, отличающегося от этого понятия, установившегося в евклидовой геометрии. Отметим, что рассмотренное ранее канторово множество, задается с помощью двузначного отображения вида $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$, где $f_1(x) = (1/3)x$ и $f_2(x) = (1/3)x + 2/3$, а это и есть преобразование подобия отрезка [0, 1], которое влечет свойство самоподобия канторова множества. Поразительно, что геометрическое свойство, которое присуще фрактальным математическим объектам, – это свойство самоподобия, состоящее в том, что структура, которую объект имеет на “микроуровне”, повторяется в нем и на “макроуровне”, поэтому оно обладает определенным эвристическим потенциалом, поскольку такое свойство присуще некоторым из природных форм. Заметим, что понятие самоподобия неприменимо для описания некоторых фрактальных множеств, например, для множества Мандельброта, фрагменты которых, строго говоря, не отображаются во все множество с помощью преобразования подобия. Множество Мандельброта, граница которого представляет собой фрактальное множество, репрезентирует конкретные процессы и явления реальности, связанные со свойствами устойчивости и хаоса в динамических системах.

Бесконечный итерационный процесс, то есть повторное применение операций, порождающий это множество, задается с помощью квадратичного отображения $z \to z^2 + c$, где z и c – комплексные числа. Итерационный процесс начинается с какого-нибудь фиксированного числа z, например, в канонической форме это $z = 0$. Затем, в нем каждый раз в алгебраическое выражение $z^2 + c$ подставляется значение z, полученное на предыдущем шаге, а если выбирать различные значения c, то полученные последовательности комплексных чисел стремятся к бесконечности или ограничены в своем движении определенной областью, принимающей форму множества Мандельброта. Математик Дж. Хаббард, который с помощью компьютера впервые получил графическое изображение множества Мандельброта, считает, что это множество представляет собой “самый сложный объект в математике” (цит. по [141, с.85]). Если следовать противоположному правилу, когда значение c фиксировано, а z принимает различные значения, то получающееся в результате итерационного процесса множество уже отличается по виду от множества Мандельброта. Оно, а точнее его граница, является фрактальным множеством и называется множеством Жюлиа, по имени французского математика Гастона Жюлиа. Несмотря на определенную аналогию в несущей конструкции, эти множества различаются тем, что структура множества Жюлиа подобна самой себе, естественно, в различном масштабе, в то время как для множества Мандельброта даже для его границы, это не так. Для преодоления этого затруднения, отстаивая релевантность принятого методологического подхода, можно расширить описания фракталов не только через преобразования подобия, но и через другие виды геометрических преобразований, например, аффинных.

Аффинное преобразование, как теоретический конструкт, представляет собой линейное преобразование вместе с последующим преобразованием сдвига, то есть это не что иное, как формула для изменения масштаба, поворотов и перемещений геометрических фигур. Если последовательность таких преобразований применять к фигуре бесконечно, то результат будет подобен самому себе, а именно, ее увеличенная часть выглядит аналогично целому, что характерно для фракталов. Математическая проблематика, которая проявляется в том, что надо знать, какие преобразования следует выбирать, тесно связана с философскими императивами. В качестве иллюстративного примера покажем как, используя небольшой набор аффинных преобразований, можно создавать абстракции, подобные простому самоподобному фракталу под названием “салфетка Серпинского”, придуманному польским математиком Вацлавом Серпинским. Пусть исходное множество – равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобъем его на четыре меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника, и удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Затем повторим процесс такого построения для каждой из трех оставшихся треугольных областей. Бесконечно продолжая подобным образом, получим последовательность вложенных множеств, чье пересечение и образует нужное множество.

Конструктивное построение этого фрактала показывает, что полученное множество представляет собой объединение трех непересекающихся и уменьшенных в два раза копий, следовательно, это пример самоподобного фрактала с размерностью $d = ln\,3 / ln\,2 \approx 1.585$. Заметим, что “площадь” салфетки Серпинского равна нулю, но она слишком “дырява”, чтобы иметь площадь в смысле стандартного определения. Действительно, на первом шаге выбросили 1/4 часть площади, на втором шаге выбросили 3 треугольника, причем площадь каждого из них равна $1/4^2$ площади исходного треугольника. Рассуждая таким образом, получим, что полная доля выкинутой площади составила: $1/4 + 3(1/4^2) + 3^2(1/4^3) + \ldots + 3^{n-1}(1/4^n) + \ldots = 1$. Поэтому можно утверждать, что оставшееся множество имеет площадь меры нуль. В математике хорошо известна еще одна конструкция под названием “ковер Серпинского”, который определяется совершенно аналогично, а разница состоит только в том, что салфетка строится на основе треугольника, а ковер – на основе квадрата. В частности, можно описать совершенно случайный процесс, в результате которого появляется симметричный узор фрактала Серпинского, то есть можно говорить о репрезентации философской импликации – “случайность порождает порядок”. Экспликация этих абстрактных математических объектов, в контексте исследования проблемы обоснования современной математики, связана с тем, что самоподобие может возникнуть там, где его логически совершенно не ждут. Определяя место фрактальной геометрии среди математических наук, необходимо вспомнить, что, как подтверждает математик Ян Стюарт: “Алгебра, топология и анализ являются тремя краеугольными камнями современной математики. (Математическая логика – это скорее строительный раствор, которые их скрепляет)” [433, с.280]. Фрактальную геометрию, как концепцию, заставившую исследователей по-новому взглянуть на окружающий мир, можно отнести к постнеклассической математике, возникшей в конце XX века.

Философия фрактальной геометрии рационализирует и конкретизирует восточный принцип “одно во всем и все в одном”, указывая на область его применимости и одновременно методологически открывая простоту сложного. Поэтому благодаря этому новому разделу математики, зная ход процессов на малых масштабах, может открываться возможность их определения на больших масштабах, и соответственно наоборот. В процессе выработки новой концепции обоснования современной математики важен философский вывод, к которому пришли ведущие специалисты в области синергетики, математик С.П. Курдюмов и философ Е.Н. Князева: “Если допустить определенную долю метафоричности, то всякий творческий акт в науке можно истолковать как фрактальный по своему характеру, т.е. как несущий в себе природу всей науки в ее истории. Наука, да и культура в целом, тоже пишет фрактальные узоры, каждая ее часть, каждое ее событие репрезентирует целое” [188, с.93]. Теория фракталов хорошо резонирует с классическими математическими образами и придает им новые смыслы. Прежде всего, речь идет о платоновском мире идей и феномене “непостижимой эффективности математики”. Например, во фрактальной геометрии, в духе платонистской интерпретации, есть неизменные идеальные объекты – алгоритм, фрактал, мыслимый как завершенное целое, – но основная особенность их в том, что невозможно выделить части, совпадающие с целым. Поэтому можно предположить, что фрактальная геометрия – это новый философский взгляд на сущность природы математики, с точки зрения неоплатонистской математики. Кроме того, на примере фрактала видно как с помощью “первичной интуиции математики” вводится бесконечное, как мысленно реализуемое в своем саморазвертывании.

Фрактальная геометрия как объект чистой и прикладной математики – это даже не столько новая концепция, сколько новый взгляд на уже известные математические сущности, например, на хорошо известное канторово множество, которое можно рассматривать как классическое фрактальное множество. В результате стремительного развития математического моделирования и компьютерного эксперимента с помощью философско-методологического осмысления фрактальных объектов открываются новые возможности синтеза основных направлений обоснования математики, то есть новое видение и перестройка восприятия проблемы обоснования. “В самом общем виде фрактальная геометрия содержит в себе некоторого рода синтез двух процессов – динамичности и статичности. <…> Иными словами, в данной реальности, которой внутренне присуща динамичность и статичность, просматривается синтез позитивных элементов детерминистской и вероятностной картин мира, отражая собой в этом специфическом единстве противоположностей саморазвитие органического мира” [57, с.512]. Новые технологии отражают новые соотношения актуального и потенциального, поэтому виртуальность можно определить и как актуальность самой потенциальности. Напомним, что главные споры между исследователями философии математики ведутся вокруг особого статуса математических объектов. Удивительно, как, не имея прямого доступа к объектам математической мысли, мы, тем не менее, можем силой логического разума приходить к определенным заключениям относительно них? Например, существование фрактального множества Мандельброта есть свойство абсолютной природы, не зависящей от математика или компьютера, которые его исследуют. Поэтому такая независимость от математика множества Мандельброта обеспечивает ему чисто платонистское существование.

С помощью фрактальных объектов природа на языке математики демонстрирует не просто значительно более высокую степень сложности, соответствующей современному уровню развития науки, а совсем другой уровень постнеклассической сложности. “Представление о структуре материи, – философски подмечает Р.Г. Баранцев, – порождает альтернативу дискретность – непрерывность, отраженную в одной из антиномий Канта. После ряда колебаний она тоже пытается найти относительное успокоение в принципе дополнительности” [36, с.52]. Эта альтернатива имеет непосредственное отношение к фрактальным объектам, так как характерная особенность фрактальных объектов состоит в их дискретности и непрерывности. Как утверждает математик и физик Джон Барроу, пропагандирующий новаторские идеи о самоорганизации и новые формы сложных систем: “Мир, допускающий дискретные преобразования наряду с непрерывными, бесконечно более многообразен с точки зрения открывающихся в нем возможностей преобразований местоположения и времени. На практике нельзя отличить непрерывное пространство-время от прерывистого, или дискретного, потому что у нас нет возможности разбить его на произвольно малые расстояния и интервалы времени” [37, с.348]. С точки зрения структуры любого потенциально бесконечного математического объекта, непрерывность и дискретность надо рассматривать как дополнительные подходы к их обоснованию, так как они сильно различаются по своей сложности. В контексте триадного подхода к обоснованию математических теорий спекуляции о неожиданностях в сфере фракталов постепенно утихают, хотя обнаруженные эффекты не только нетривиальны, но и в определенной степени фундаментальны в современной теории познания. Когда появляется дополнительная мотивация с позиции новых философских подходов к обоснованию фрактальной геометрии, созданной для нужд естествознания и играющей ведущую роль в возрождении теории итераций, иногда удается отойти от шаблона, которому обычно следуют при изучении математики, и вернуться к новым математическим объектам с меньшей предубежденностью.

В связи с философским анализом объектов фрактальной геометрии, с точки зрения современного системного подхода, обратим внимание на реконструкцию идей Гегеля, проведенную философом Л.К. Науменко: “Вся совокупность категорий гегелевской логики есть не что иное, как категориальный строй системного подхода. Каждая категория фиксирует определенный тип содержательной системной связи. Таких типов три: "переход в иное", "рефлексия в ином", "конкретная всеобщность"” [302, с.98]. В контексте исследования конкретных математических объектов даже самые изощренные способы их философского анализа ограничены. Поэтому особая роль в нем отводится системному подходу, поскольку системный подход является конкретным проявлением диалектического метода в тех методологических ситуациях, когда предметом познания оказываются системные объекты. Системность – это одна из важнейших черт диалектического метода, так как такие математические объекты, как, например, фрактал, даны нам не "сами по себе", а лишь через теоретические и эмпирические определения, которые они получают в процессе познания. Гегель "рассматривает определения и эмпирического и теоретического познания "сами по себе", содержательно, производя то, что впоследствии было названо "мысленным экспериментом", и наблюдает за полученными результатами" [302, с.98]. Согласно этой теоретической схеме, с учетом современного философского контекста, формировалось математическое понятие фрактала. Проблема состояла в том, что реальность обладает не просто большей сложностью, а, вообще говоря, сложностью другого уровня.

Фрактальная геометрия, занимающаяся изучением инвариантов группы "самоаффинных" преобразований, описывает весьма широкий класс природных явлений. Хотя физические модели трудно доводить до совершенства без математического инструментария, согласование дискретного с непрерывным можно инкорпорировать в систему научного знания через современные представления о самоорганизации и саморазвитии. Отражаемое фрактальной геометрией саморазвитие имеет ещё один весьма важный момент, а именно реального проявления тех или иных принципов самоорганизации. Фрактальные объекты синтезируют в себе противоположности этих главных линий математического познания, а именно, арифметико-алгебраической и геометрико-топологической, а также включают в математическую триаду функционально-аналитическое направление современного математического познания. "Фрактальность, – резюмирует Р.Г. Баранцев, – оказывается фундаментальным свойством материи, и оппозицию "дискретность – непрерывность" мы можем теперь переосмыслить в составе триады" [35, с.79]. Поэтому он предлагает следующую триаду, характеризующую концептуальный уровень фрактальной геометрии:

фрактальность
/ \
дискретность — непрерывность.

С точки зрения принципа дополнительности, вопросы нельзя ставить в плане логических исключений, поскольку "линейная" или "фрактальная" установки наблюдателя оказывают влияние на результаты измерения. Длину и фрактальную размерность измерить одновременно, при одном и том же масштабном преобразовании, вообще говоря, нельзя, поскольку соответствующие утверждения об измерениях дополнительны друг к другу. Кроме того, разные способы задания размерностей могут конституировать разные математические понятия. Но если предположить "линеарность" объекта измерения, выражаемую целой размерностью, то тем самым конституируется определение длины, лишающей смысла понятие фрактала, так как в такой теоретической конструкции фрактал не наблюдаем. Следует отметить, что непрерывные и дискретные теории очень сильно различаются по своей сложности. "Дело в том, – объясняет Джон Барроу, – что число непрерывных преобразований, существующих между двумя множествами вещественных чисел, на целый порядок бесконечности меньше, чем общее число возможных преобразований, не ограниченных требованием непрерывности. Последнее позволяет на удивление резко сократить диапазон рассматриваемых преобразований" [37, с.85]. Поэтому, в связи с целостностью бытия непрерывной и дискретной величины, используемой во фрактальной триаде, обратимся к анализу Гегеля общих логических процедур, например, "единого континуума". Сначала, полагает он, необходимо выделить дискретную единицу, которая, несмотря на свою идеальность, является качественным элементом, а затем подлежат определению количественные смысловые элементы, не совпадающие с качественными элементами. Их отличительные признаки, следуя глубокому философскому анализу Н.В. Мотрошиловой, состоят в следующем: "Во-первых, они должны представлять собой "единицы", т.е. быть в себе непрерывными. Во-вторых, вместе с тем они должны быть дискретными, т.е. в них должно находиться "множество одних" – независимо от того, является ли данное множество в-себе-сущим или "положенным". В-третьих, это "одно" (как своего рода количественный атом) представляет собой и отрицание "многих одних" в качестве простой границы, которая как бы отбрасывает от себя другие определенные количества" [292, с.288]. Философский смысл этих категориальных определений в применении к фрактальным объектам связан с общей процедурой развертывания человеческого познания сложных математических сущностей.

Логическая экспликация дополнительности в рассматриваемой триаде предполагает переход от дополнительности, как отношению между линейными составляющими триады, к дополнительности, как отношению между высказываниями о сущности этих понятий. Можно предположить, что именно принцип дополнительности Бора развивает гипотезу Демокрита о связи непрерывного и дискретного и дополняет тезис Гегеля о единстве и борьбе противоположностей. По поводу роли взаимодействия абстракции дискретного и непрерывного в развитии фундаментальных теорий математики академик А.Д. Александров сказал: “Это была "борьба противоположностей", составляющая внутренний импульс развития математики. Она начиналась с применения дискретного к непрерывному в измерении. Далее непрерывное было сведено к дискретному в атомизме, но именно через неограниченное мысленное продолжение измерения выявились несоизмеримые величины” [7, с.259]. И дискретное, и непрерывное в составе триады – это математические модели, не исключающие, а дополняющие друг друга, так как обе они являются идеализациями, относящимися к гносеологии, постоянно пересекаясь и переплетаясь. Кроме того, единство континуума и дискретности – это не простое философское единство. В отвлеченном контексте это принцип, который объединяет дискретные моменты и существует под знаком континуальности или в подчинении ей. Важнейший аспект в раскрытии методологической сущности рассмотренной математической триады, описывающей фрактальные объекты, связан также с тем, что, так как законы классической логики абстрагированы от операций над конечными множествами, то в области бесконечного вера в универсальную применимость законов логики, подтверждающихся на практике лишь в области конечного, приобрела характер “философского предрассудка”. Возможно, поэтому развитие проблемы бесконечности в постгёделевской философии математики естественно приводит к синтезирующим триадическим структурам, в которых дополнительность сторон оппозиции способствует формированию условий для обнаружения третьей компоненты, обеспечивающей их целостность.

С позиций философской компаративистики, современная философия математики включается в новый философско-математический диалог, делающий ее доступной для концептуализации, когда она начинает приобретать новые черты универсализма. С помощью математического аппарата теории случайных процессов, используя фракталы, можно классифицировать явления, не имеющие устойчивой частоты. В частности, “случайность простых систем (например – одномерный фрактал)”; “случайность сложных (таковы многомерные фракталы)”; наконец, “истинный хаос, не допускающий детерминации”, а в качестве соответствующего примера – “бесконечномерный фрактал со случайными точками ветвления, излома или разрыва” [473, с.78]. Так, процесс рождения и гибели можно интерпретировать как случайный “одномерный фрактал”, случайное ветвление кровеносных сосудов как “трехмерный фрактал”, а понятие “истинной случайности” как нечто вроде “бесконечномерного фрактала”, то есть, как невозможность описать наблюдаемую случайность конечным набором вероятностей и фракталов. Особый интерес, с точки зрения философии синергетики, представляет еще один из основных принципов методологии науки – принцип нелинейности согласно которому, сложный объект или любая сложная развивающаяся система не могут быть эксплицированы аддитивным способом, поскольку их целостность нельзя описать через суммативность составляющих частей. По существу это отображение реального мира в воображаемый мир, который отражается в нашем восприятии. В современной математике, как утверждает академик В.П. Маслов, существует другая “нелинейная арифметика, одна единственная и, возможно, с точки зрения морали, несправедливая” [266, с.12]. Но законы этой арифметики на некоторых этапах экономического развития движут рынком более интенсивно, чем законы линейной арифметики.

В философии математики этому способствовало то, что в конце XX века синергетические идеи естествознания стали рассматриваться как общефилософские. Актуальность синергетики, имеющей генетическую связь с математикой, связана с необходимостью нахождения адекватных ответов на кризисные явления. Философы стали сегодня применять в исследованиях по философии науки синергетическую терминологию. Слово “синергетика” в переводе с греческого означает содействие или сотрудничество, а понятие “синергизм” – это совместное функционирование систем. В настоящее время синергетика стала популярным направлением современной философии науки и, преодолевая междисциплинарный статус, она постепенно превращается в носителя новой парадигмы. Математический блок синергетики составляют теория вероятностей, теория катастроф, теория категорий, теория алгоритмов и фрактальная геометрия. К ним можно добавить интуиционистскую математику, реализующую убеждение в том, что деятельность – это ведущая интеллектуальная особенность человека. “Синергетику видят новой онтологической "парадигмой", преодолевающей слабости старой, сохранившей связи с древней метафизикой онтологии, но вместе с тем, противостоящей тенденциям "деонтологизации" философии…” [355, с.99]. Синергетическая парадигма развивает методологические новации и философские импликации, выявленные в работах Бора, Гейзенберга и других ученых-мыслителей XX века. Следует отметить, что иногда достаточно и предыдущих этапов развития науки, поскольку методы синергетики избыточны в тех ситуациях, где нет развития системы. Хорошо известно, что принципиальные споры в науке, затрагивающие основы мировоззрения, становятся философскими. Но решать онтологические проблемы, становясь на сторону только одной теории или направления обоснования, можно тем самым элиминировать ценность самой философии как науки.

Системно-синергетический подход как новое методологическое основание философии математики представляет ее не как сумму разрозненных направлений обоснования, а как целостный феномен, выявленный с помощью этих методологических программ, который не разъединяет, а наоборот способствует пониманию исторической устойчивости и целостности интеллектуального феномена под названием “математика”. С точки зрения анализа проблемы обоснования математики, важно следующее заключение академика В.С. Степина, что “при интерпретации синергетики как теоретического описания саморазвивающихся систем устраняются односторонности, которые возникают при недостаточно четком осмыслении связей между синергетической парадигмой и системным подходом. Именно в этих связях синергетические представления могут быть включены в современную картину мира” [426, с.11]. В постнеклассической математике, например, во фрактальных объектах переплелись современные проблемы математического познания в целом – логика и вычисление, независимость от человека и зависимость от него, сложность и простота. Визуализация такого сложного объекта, как множество Мандельброта, стала возможной лишь благодаря современному компьютеру, но это не означает, что его можно полностью изобразить. Поскольку теоретические структуры современной математики для “тонких” моделей слишком сложны, то переход к компьютерному моделированию стимулирует принятие сравнительно “грубых” моделей, которые начали подменять собой реальность. Акцент в этом предположении надо поставить на слове “подменять”, так как непосредственно вычислить фрактальные множества Мандельброта и Жюлиа непросто.

По мнению специалиста по фрактальным множествам А.К. Дьюдни, “точность выполнения арифметических операций компьютером может не позволить точно указать точки, которые с самого начала должны находиться на границе, а когда начинается итерационный процесс, точность еще более снижается и итерируемые переменные уходят из поля зрения” [142, с.92]. Тем не менее, считает он, даже с помощью сравнительно несложной программы, компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границы фрактальных множеств. При этом нельзя недооценивать предварительный анализ математических объектов до их компьютерной визуализации. “В последнее время широко распространилось мнение, – резюмирует математик М.М. Постников, – что внедрение в практику компьютеров резко изменило принципы взаимоотношений математики и других наук. На самом деле это мнение основано на недоразумении. Компьютеризация никак на эти принципы не повлияла. Она лишь сделала безнадежно устаревшими многие любовно лелеемые математиками схемы моделей и позволила разработать другие, более эффективные. В истории математики так происходило уже много раз, и появление компьютеров лишь направило этот процесс по новому пути” [358, с.86]. Современные информационные технологии существенно изменили взаимоотношения между теоретической и практической математикой, в частности, они позволили эксплицировать несоответствие между огромным количеством информации, которое содержится в компьютерном изображении, и тем небольшим объемом, который отводится под нее в головном мозге. Философский вывод из этого несоответствия фиксирует, что генетическая конструкция обработки и хранения информации в мозге устроена не так, как несущая конструкция в современном быстродействующем компьютере.

Главное отличие состоит в том, что вычислительная машина пока не может выделять "необходимое" и забывать "ненужное". Поэтому представляется логически уместным объединить на определенных методологических основаниях различные подходы к обоснованию математического знания на примере дискретных итерационных процессов как новой развивающейся области математики, которая находит применение в вычислительной технике и информатике. Такая экспликация проблемы обоснования предполагает ответ на вопрос: Что такое математика – изобретение или открытие? В отношении таких структур как комплексные числа или множества Мандельброта математики склонны придерживаться той точки зрения, согласно которой математики действительно открывают истины уже где-то существующие, чья реальность в значительной степени независима от их деятельности. В определенном смысле множество Мандельброта и другие подобные ему фрактальные множества являются представителями объектов третьего мира Поппера. "То обстоятельство, – поясняет В.Я. Перминов, – что множества Мандельброта открываются нами, не говорит о том, что они реальны. Вместе с Поппером мы можем думать, что эти множества уже определены нами в своих свойствах вместе с принятием комплексных чисел как некоторых конвенций или конструкций" [339, с.37]. Математики в действительности часто говорят не о реальности математических объектов, а об их объективности, или точнее об их необходимости во внутренней структуре математического знания. Строго говоря, фракталы нельзя считать созданием компьютера, так как вычислительный процесс должен продолжаться бесконечно долго и поэтому эти множества невозможно точно вычислить.

Существование, приписанное множеству Мандельброта, можно трактовать как свойство его абсолютной природы. Такое платонистское существование объекта тождественно понятию абсолютной математической истины. Когда Мандельброт увидел самые первые компьютерные изображения, он счел эти размытые структуры результатом сбоя и только потом убедился в том, что они действительно являются частью строящегося множества. "Более того, – утверждает Роджер Пенроуз, – сложную структуру множества Мандельброта во всех ее деталях не под силу охватить никому из нас, и ее невозможно полностью отобразить на компьютере" [326, с.87]. Результатом исследования любого математика, работающего на компьютере, будет приближение к единой фундаментальной математической структуре, которая, возможно, уже существует где-то вне нас. В этом случае математическая интуиция представляет собой всего лишь некоторое ограниченное знание поведения математических объектов. Новые аспекты понимания проблемы обоснования проявляются в наше время в том, что со сложными формализациями, даже людей далеких от математики, теперь заставляют работать программные средства современных компьютеров. Отвлекаясь от социальных вопросов, обратимся к одному из главных веяний современной математики – к “экспериментальной математике”. Математик-прикладник, академик Н.Н. Красовский дает следующую интерпретацию такой математики: “Что я имею в виду? Прежде всего веру в компьютерный эксперимент. Подчеркиваю – веру. Причем под компьютерным экспериментом понимается не только осуществление какого-то вычислительного алгоритма” [209, с.8]. В качестве тезиса в поддержку компьютерного эксперимента в математике заметим, что, по существу, это может быть реализация алгоритма для каких-либо геометрических построений или алгоритма автоматического поиска логической цепочки рассуждений от исходных предпосылок к искомому выводу или даже алгоритма, имитирующего интуитивный подсознательный поиск эффективного решения проблемы.

Но есть и другая точка зрения, так в качестве антитезиса приведем высказывание не менее авторитетного математика, академика В.И. Арнольда по поводу рисования двумерной (алгебраической) поверхности в обычном трехмерном пространстве. В курсе лекций “Экспериментальное наблюдение математических фактов” он говорил: “При попытках компьютерного исследования таких задач я обнаружил, что делаю вручную примерно втрое меньше ошибок, чем компьютер (например, даже при простом перемножении сороказначных чисел). Притом, в то время как непредсказуемые компьютерные ошибки происходят от каких-то космических частиц, мои ошибки оказались всегда одинаковыми и легко контролируемыми” [23, с.39]. В духе диалектического синтеза они оба правы, так как рассматривают различные аспекты компьютерного моделирования. Для нашего дальнейшего анализа проблемы обоснования математики важно отметить, что под “верой” в компьютерный эксперимент Н.Н. Красовский понимает “веру как категорию”, определяющую действие: “Опираясь на раскованную интуицию и притом аккуратную логику, абстрактные знания, особенно в области математики, и привлекая "поисковый" вычислительный эксперимент, стараемся осмыслить задачу и построить для нее математическую модель, работа с которой будет возможна на базе математики как таковой и одновременно на базе доступных информационных технологий. А затем обязательно – проверка адекватности абстрактного и симулированного на компьютере решения по отношению к исходной реальной проблеме. И вера в успех!” [209, с.8]. Такая вера – это проявление состояния человеческого сознания в неопозитивистском смысле с опорой на компьютерный эксперимент.

Поэтому понятие “компьютерный эксперимент” в отличие от простого вычислительного эксперимента понимается в очень широком философском смысле, с точки зрения деятельностной концепции знания. Веками считалось, что поведение математических объектов было единственно возможным и не зависело от их исследователей. Но в современную эпоху, после изучения и сопоставления различных свойств формальных структур, было, наконец, осознано, что эти свойства зависят и от допущений нематематического характера. Например, немецкий философ Клаус Майнцер считает, что “необходимо принимать во внимание новый тип сложности, связанный с человеческой интуицией и с человеческими эмоциями. Старые идеалы рациональности, абстрагированные от этих существенных составляющих человеческой жизни, полностью игнорируют мир человека” [250, с.55–56]. Его высказывание согласуется с типами рациональности неклассической и постнеклассической науки, в которой философские акценты стали переноситься на изучение деятельностных структур, включающих объекты, онтологические основания которых исторически сменяли друг друга в процессе развития. Экспериментальная математика, которую можно, например, интерпретировать, как открытие новых математических закономерностей путем компьютерной обработки большого числа примеров, возникла на стыке математики и физики. Такой подход для математиков-теоретиков может показаться недостаточно аргументированным и не столь убедительным, как любое короткое доказательство, но может оказаться убедительнее длинного и довольно сложного доказательства, то есть в некоторых случаях вполне приемлемым. К экспериментальной математике примыкает, например, новая область современной математики – вычислительная топология.

Многообразие методологических подходов в современной математике проявляется, в частности, в том, что вычислительные и распознавательные задачи, оказывается, есть даже в такой абстрактной науке, как топология. С одной из таких задач связана предпринятая в семидесятые годы прошлого века группой математиков во главе с А.Т. Фоменко попытка решения алгоритмической версии проблемы Пуанкаре [101]. Эти математики сделали по тем временам сильный и нестандартный ход – они провели масштабный компьютерный эксперимент, потребовавший весьма длительного счета. Был проверен миллион случайных представлений сферы, что убедительно, с точки зрения здравого смысла, поскольку во всех случаях подтверждалась корректность предложенного алгоритма. Но авторы воздерживались от поспешных заявлений, так как спустя несколько лет был обнаружен контрпример. Говоря об экспериментальной математике, американский математик Грегори Чейтин спрашивает: “Хотя масштабные компьютерные вычисления могут быть очень убедительными, избавляют ли они от необходимости доказательства?” В контексте дополнительности формалистской и интуитивистской (конструктивистской) составляющей в обосновании математики, поскольку формальные доказательства и алгоритмические вычисления дают свидетельства разного рода, он отвечает: “И да, и нет. <…> В особо важных случаях я считаю необходимыми и те, и другие, поскольку доказательства могут содержать ошибки, а компьютерные вычисления могут, по несчастью, быть остановлены как раз перед обнаружением контрпримера, который опроверг бы предполагаемый вывод” [474, с.45]. Спустя двадцать лет алгоритм распознавания трехмерной сферы за экспоненциальное время был построен. Но, общая проблема алгоритмического распознавания поверхностей размерности три пока еще открыта, поскольку почему-то в “родном трехмерье” все устроено невероятно сложно.

Практическое применение математической теории, как правило, шире, чем решение той теоретической задачи, с которой эта теория первоначально была связана. Что касается “мира абстрактной математики”, то он, как и прежде, редко открыт для непосредственного восприятия, поэтому его нельзя отождествить с “миром концептуальных идей” реальности. Воплощение идеи в строгие математические утверждения с допустимыми дедуктивными выводами, способными доступно передавать информацию, требует немалых сил и теоретических возможностей. “В междисциплинарных исследованиях наука, – отмечает В.С. Степин, – как правило, сталкивается с такими сложными системными объектами, которые в отдельных дисциплинах зачастую изучаются лишь фрагментарно, а поэтому эффекты их системности могут вообще не обнаруживаться при узкодисциплинарном подходе, а выявляться только при синтезе фундаментальных и прикладных задач в проблемно ориентированном поиске” [421, с.16]. Укажем, например, на феномен поразительной эффективности приложений современной алгебры в решении прикладных задач криптографии, связанной с проблемой защиты информации. По мнению известного алгебраиста В.И. Янчевского, “одной из самых актуальных задач современного развития криптографии с открытым ключом является задача повышения стойкости и уменьшения размеров блоков данных путем усовершенствования уже существующих криптосистем. Пожалуй, самый естественный путь решения этой задачи – представление блоков информации не только в виде чисел или элементов конечных полей, но и в виде более сложных алгебраических объектов” [504, с.36]. Такими объектами оказались эллиптические кривые, то есть объекты алгебраической геометрии – одного из самых сложных разделов современной математики. Следует также отметить, что при чисто логико-формальном подходе число цепочек, составленных из звеньев типа “посылка – вывод”, растет с их длиной, по меньшей мере, экспоненциально, тогда как те из них, которые приводят к решению, образуют исчерпывающе малую долю от этого числа.

В теории творческого мышления обосновано, что в процессе решения трудных творческих задач “проход через ошибки” неизбежен. Двойственный характер ошибки проявляется, в частности, при решении математических проблем с использованием в процессе доказательства средств компьютерного моделирования. Новое философское понимание этой проблемы возникло, когда американские математики Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен предложили свой метод для решения проблемы четырех красок с использованием компьютера. Он состоял в доказательстве того, что для раскраски любой мыслимой карты, при условии, чтобы никакие две смежные области, то есть имеющие общий участок границы, не оказались окрашенными в один и тот же цвет, достаточно четырех красок. “По простоте формулировки эта проблема, состоящая в доказательстве гипотезы четырех красок, мало уступает проблеме Ферма (состоящей в доказательстве гипотезы Ферма), а по естественности постановки (и прикладному значению) ее превосходит” [454, с.453]. Наша интуиция ничего не говорит о том, верно ли это утверждение или нет, возможно, есть случай, когда потребуется пять красок. Эта проблема оставалась нерешенной почти 125 лет. Хотя для некоторого конечного числа областей она была доказана, продвижение к бесконечно многим областям было безуспешным, пока в 1976 году Аппель и Хакен не анонсировали, а в 1977 году изложили решение этой проблемы с помощью компьютера, перевернув тем самым сложившиеся представления о математическом доказательстве [512–514]. Но такое нестандартное доказательство, отличное от доказательств традиционного типа, вызвало резкие возражения некоторых ведущих математиков, считавших компьютерную проверку неадекватной, поскольку она не гарантирует безотказной работы в “недрах” компьютера и соответствующих сбоев в ее логике. Кроме того, в работе каждого современного компьютера из-за его двойственной структуры, а именно, возможных слабых мест в программном обеспечении или электронном оборудовании, могут быть незамеченные ошибки.

Во времена Гильберта вопрос о передачи части механической математической работы автоматическому устройству в принципе не мог стоять. Представитель конструктивного направления в математике Н.М. Нагорный описывает идеологию машинной (компьютерной) математики, отличающуюся от творческого процесса логического вывода математика, с помощью следующего образного утверждения: “компьютер не должен понимать ничего;

идеально общепонятным может быть лишь то, что не требует никакого понимания!” [297, с.565]. Поэтому можно предположить, что компьютерные доказательства, не допускающие традиционной проверки, могут быть эвристически полезными, но, вообще говоря, они не могут претендовать на окончательное решение проблемы. В частности, из работы Аппеля и Хакена вытекает по крайней мере то, что поиски контрпримеров к теореме четырех красок можно считать малоперспективными. Но решения проблемы, с точки зрения стандартов строгости современной математики, пока нет, хотя повторный расчет вполне может повысить уверенность, однако он не может перевести доказательство из “класса вероятных” в “класс абсолютно надежных”. Эту философско-методологическую проблему можно сформулировать следующим образом: “Следует ли из факта применения ЭВМ на определенном этапе процедуры обоснования математической теоремы вывод об эмпирическом характере полученного в результате знания и тем самым заключение о том, что теорема, полученная таким образом, не может считаться доказанной?” [10, с.33–34]. Имеющееся пока доказательство проблемы четырех красок не проясняет эту ситуацию, поскольку критический этап математического доказательства требует применения компьютера, и его “ответ” подменяет собой выявление математически формализованной истинности.

Суть этого философского возражения состоит в следующем. В трудно обозримом математическом рассуждении с использованием компьютера приходится переводить относительное в абсолютное с помощью конечного и строго неопределенного числа проверок. Возможно, поэтому обоснование правильности компьютерных вычислений попадает под такие же методологические ограничения, что и результаты о неразрешимости некоторых математических проблем, причем обосновывать их тем сложнее, чем эффективней соответствующая компьютерная программа. “Действительно, – заключает Ян Стюарт, – история доказательства теоремы о четырех красках богата ошибками. При использовании компьютера имеет значение логика программы и собственное убеждение в том, что машина исправно функционирует. Если нет ни того, ни другого, тогда, конечно, лучше проводить вычисления вручную. И в любом случае за человеком остается обязанность придать проблеме такую форму, чтобы решение свелось к рутинным вычислениям” [434, с.43]. Тем не менее, использование “кремниевой логики” в перспективе меняет практику математического доказательства. Всем исследователям, использующим численные методы, очевиден нарастающий компьютерный поток, который постепенно наполнял естественные науки и даже чистую математику, давая им принципиально новые методологические возможности, особенно в приложениях. Здесь уже ничего нельзя изменить, так как это стало свершившимся фактом новых математических технологий.

Поэтому, можно заключить, что компьютерные доказательства обозначили принципиально новый этап философского осмысления методологической роли компьютерного и математического моделирования процессов, протекающих в реальном мире. Хотя для некоторых математиков доказательства теорем, осуществленные с использованием сложных компьютерных вычислений, не могут считаться надежными и рассматриваются в качестве направляющих теоретический поиск гипотез, они все же могут рассматриваться как теоретический конструкт предпосылки для выработки новой концепции обоснования математики, учитывающей ее практические запросы.

Следует отметить, что существуют определенные методологические трудности реального внедрения компьютерных технологий в процесс математического познания. “Широкое использование ЭВМ показало, – резюмируют специалисты в области вычислительной и нелинейной математики С.П. Курдюмов и Г.Г. Малинецкий, – что ни "быстрота" вычислительных машин, ни рост объема расчетов не являются панацеей от всех бед, сами по себе они не дают понимания изучаемых нелинейных задач. Нужны понятия, подходы, обобщения, которые отражают важнейшие черты исследуемых нелинейных явлений и помогают построить их адекватные математические модели” [220, с.6]. Но для этого надо предварительно выяснить философскую специфику обозримого математического доказательства с использованием современных компьютерных технологий. Чтобы придать философский смысл туманному понятию “обозримое доказательство” рассмотрим два возможных его истолкования. С одной стороны, вполне естественно предполагать, что доказательство является обозримым, если на каждом шаге доказательства можно держать в уме все предыдущие шаги рассуждений. Такую обозримость доказательства можно назвать “локальной обозримостью”, поскольку при таком понимании обозримости есть возможность мысленного представления каждого пошагового перехода в доказательстве. С другой стороны, понятие обозримости можно трактовать как философское видение в целом ключевых моментов доказательства и понимание необходимости переходов от одного ключевого утверждения к другому. Во втором смысле обозримость доказательства называют “глобальной обозримостью”, так как если доказательство очень длинное, то выделяются только ключевые моменты в последовательности его шагов, которые обозримы в первом смысле. Специфика математического доказательства состоит в том, что оно должно быть доступно многократной проверке и принципе неважно, кто именно будет проверять, например, компьютерное доказательство – математик или другая компьютерная программа на другом компьютере.

С одной стороны, человеку это может оказаться не под силу, а с другой стороны, если такая проверка будет доверена другой компьютерной программе, то это приведет к проверке правильности проверяющей программы, что опять сводится к тем же трудностям. В таком философском контексте есть определенные методологические основания считать “требование локальной обозримости неприменимым к компьютерному доказательству” [42, с.43]. Но можно обсуждать его глобальную обозримость, хотя бы на уровне блок-схемы компьютерной программы. А понятие простоты применимо как к обычному, так и к компьютерному доказательству. Кроме того, существование ошибочных доказательств, успешно прошедших сквозь “фильтры понимания”, порождает сомнения в справедливости тезиса о безусловном превосходстве “живого понимания” над машинными процедурами. Но, когда в математическом доказательстве присутствует убедительность и обозримость, то это может стать решающим аргументом в пользу признания такого доказательства. “Представление об убедительности того или иного рассуждения зависит от многих факторов. Выявление этих факторов, – по мнению В.А. Успенского, – важная задача логики и психологии. В число таких факторов входит, например, разделение понятий (а точнее, терминов) на осмысленные и бессмысленные” [454, с.442]. Поэтому формалисты полагают, что обозримые доказательства нужно формализовать, хотя интуиционисты считают, что конструктивные математические доказательства нельзя заменить формальными системами. По существу, это старый спор о реальности математических абстракций, связанный с различным пониманием интуитивной основы математического мышления, а именно, являются ли эти абстракции изобретением человеческого ума или их существование предопределено структурой мира, в котором мы живем.

Роль абстракций в познании состоит в том, что они идеально ограничивают реальные объекты и тем самым позволяют определять их с наиболее возможной степенью точности. Слово “абстракция” в научном контексте не несет на себе никаких негативных признаков. Это не математический термин, а философское понятие, хотя оно широко используется в математике, физике и других науках. Абстрактные элементы математики, по мнению Курта Гёделя, не являются чисто субъективными, “скорее они тоже представляют какой-то элемент объективной реальности, но, в отличие от ощущений, присутствие их в нашем сознании объясняется каким-то особым видом отношения между ними и реальностью” [521, с.272]. Математические абстракции – это форма познания субъекта, основанная на мысленном выделении наиболее существенных свойств и связей изучаемого объекта. Математическая модель, как “общепризнанный канон репрезентации” внешнего мира, и ее конвенциальный характер фиксируют определенное отношение к моделируемому объекту самого познающего субъекта. Но компьютерному моделированию поддаются лишь некоторые частные процессы, а не вся теория целиком, поскольку при исследовании математической модели используются также рассуждения, не носящие дедуктивного характера. Поэтому не только философской, но и практической проблемой становится обоснование стратегии роста математики, исходя из реальной трансформации ее современного развития с использованием компьютерных технологий. В современных условиях кумулятивно-информационного “наводнения” математические инструменты, использовавшиеся ранее, перестают работать не потому, что чересчур уж разрослись традиционные математические дисциплины, а потому, что новых направлений современной математики стало очень много.

Поэтому, “кризисы переусложненности” носят эпистемологический характер и вроде бы не связаны с онтологией математики. Не вдаваясь в эти тонкости, философ науки И.П. Меркулов отмечает, что, “как показывают исследования по вычислительной эпистемологии, только в случае обозримости используемых программ, а также при наличии формального вывода в некоторой формальной дедуктивной системе степень строгости и эпистемологический статус математических утверждений, доказательство которых проведено с использованием современной вычислительной техники, нисколько не уступает результатам, полученным традиционным способом” [273, с.140]. В частности, в связи с активным использованием современных компьютеров возникает новая философско-методологическая проблема их эффективности. Математики называют компьютерные алгоритмы эффективными, если задачи, решаемые с их помощью, используют в алгоритме число шагов, растущее в постоянной степени от размера входных данных. Их относят к классу сложности *P*, где *P* обозначает “полиномиальное время”. В другой класс задач сложности *NP*, где *NP* означает “недетерминированное полиномиальное время”, входят задачи, для которых решение, если оно будет теоретически обосновано, может быть проверено за полиномиальное время, даже если найти такое решение – это само по себе достаточно трудная задача. Например, если известна карта с тысячами островов и мостов, для нахождения способа объехать их все таким образом, чтобы ни один из них не посетить больше одного раза, могут потребоваться годы. Задачи, подобные этой, относят к классу *NP*, который охватывает большое число задач, имеющих практический интерес. Очевидно, что все задачи класса *P* входят также в класс *NP*, поскольку для проверки правильности решения каждой уходит времени не больше, чем на ее решение. Нерешенная до сих пор проблема состоит в следующем: верно ли, что классы *P* и *NP* совпадают?

Говоря об этой проблеме и сравнивая ее с фундаментальной гипотезой Пуанкаре, американский математик Стивен Смейл в докладе “Математические проблемы следующего столетия” (1997) сказал: “Я убежден, что сегодня существует сравнимое явление – "полиномиальный временной алгоритм". Алгоритмы по праву становятся предметом, заслуживающим изучения, а не только как средство решения других задач. Я полагаю, что поскольку изучение множества решений уравнения (например, многообразия) сыграло такую важную роль в истории математики 20-го века, то изучение процесса нахождения решений (например, алгоритма) может сыграть не меньшую роль в следующем столетии” [413, с.282]. Проблему “справедливости равенства $P = NP$” он иногда называет “подарком математике со стороны компьютерных наук”. Несмотря на то, что спустя почти полвека, прошедшие после возникновения этой проблемы, не удалось найти эффективный алгоритм решения переборных задач, специалисты по компьютерным наукам уверены, что классы P и NP не могут совпадать. Но понять, почему это так и тем более реализовать эту веру в качестве математической теоремы, пока никто не смог. О других аспектах процессов, происходящих в современной математике, можно сказать, что математика явила нам совершенно новую свою инструментальную сторону, представ как одно из проявлений активности человеческой деятельности. При этом необходимо учитывать то, что математическая деятельность происходит не в изолированной среде, а внутри реальной действительности, поэтому на математиков воздействуют “обратные связи”, определяющие их научные интересы. Деятельностный подход с точки зрения философско-методологического анализа проблемы обоснования математики открывает больше возможностей, так как предполагает не просто “созерцание изучаемых процессов”, происходящих в современной математике, а их особую системную организацию.

На примере понятия деятельности академик Л.С. Понтрягин объяснял недопустимость отождествления математической теории с ее формальным аппаратом: “Абстрактность математики – производное, следствие ее специфической природы, а не наоборот; абстракция есть логический акт, производный от содержательной деятельности; "форма как таковая" есть определенная содержательная предметная деятельность, состоящая в воспроизведении стороны предметов, явлений, процессов объективного мира” [352, с.102]. Философская сущность деятельностного подхода была глубоко проанализирована академиком В.С. Степиным: “Можно допустить, что объекты, которые включаются в деятельность, существовали до и независимо от нее и что деятельность не формирует, а только выявляет то, что присуще объектам. Но можно предположить и другое решение. Мир не состоит из стационарных объектов как вещей, обладающих актуально данными свойствами. Он, скорее, набор потенциальных возможностей, лишь часть которых может актуализироваться. Деятельность реализует те возможности, которые не актуализируются в природе самой по себе” [423, с.135]. Для такого утверждения в компьютерной математике есть весьма веские основания, поскольку природа, например, не создала современный компьютер, она создает лишь аналоги такого рода устройств. Тем не менее, анализ процессов познания, происходящих в современной математике, показывает, что, именно, благодаря такому мощному инструментальному средству, как современный компьютер, в настоящее время математика приобретает новые формы познания с помощью глубокого и обширного вычислительного эксперимента.

Отметим также, что среди важнейших проблем математики наступившего столетия Стивен Смейл назвал следующую проблему интеллекта и рационального знания: “Каковы пределы интеллекта как искусственного, так и человека?” [413, с.297]. Суть этой проблемы состоит в том, что искусственный интеллект берет на себя этапы рутинной обработки данных и знаний, но остается нерешенной следующая проблема. Во-первых, где предел логического мышления, ограничивающего возможность искусственного интеллекта? Во-вторых, есть ли какое-то творчество в работе искусственного интеллекта? В-третьих, есть ли в нем элементы неформализуемых процедур? С одной стороны, благодаря ограничительным теоремам математика вошла в прямое взаимодействие с философией, а с другой стороны, философия получила возможность опираться на высказывания, построенные, по существу, на математическом уровне строгости, что должно способствовать выявлению конструктивной силы философских теорий. Поэтому гносеология сегодня должна ответить на философский вопрос, возможен ли вообще искусственный интеллект. С точки зрения философии математики, интеллект – это способность к “сознательной самоорганизации”, возникающей из способностей к анализу, обобщению, реальному выбору и предвидению, которые выражаются в целесообразности и планомерности предпринимаемых действий. Среди элементов искусственного интеллекта, напоминающих неформальную работу, можно выделить моделирование, выбор и обоснование методов, логический вывод. Безусловно, что элементы творчества в искусственном интеллекте есть в самонастраивающихся и самообучающихся системах моделирования, а также в языках имитационного программирования. Уместно отметить, что в этой сфере деятельности используется и структуралистский подход, в частности теория алгебраических моделей. Даже само понимание бесконечности воспринимается сейчас через возможности компьютера. Поэтому исследование проблемы искусственного интеллекта позволяет также по-новому взглянуть на фундаментальную философскую проблему соотношения веры и сомнения, с точки зрения рационального мышления. В частности, основной философский смысл результатов Гёделя состоит в том, что мышление человека богаче любых его дедуктивных форм и что нельзя, основываясь на формальной логике, смоделировать искусственный интеллект.

В связи с проблемой искусственного интеллекта человеческое мышление сопоставляется с возможностями компьютерного анализа, но поскольку сами компьютеры являются продуктом человеческой деятельности, то фундаментальное различие между возможностями “творца” и его “творения” отчасти характеризуется теоремой Гёделя о неполноте. Компьютерное моделирование с помощью компьютерных аналогий пытается выявить связи между формализуемым и неформализуемым знанием. С точки зрения компьютерного и математического моделирования, дело не в наличии или отсутствии современных быстродействующих суперкомпьютеров, выполняющих миллионы и миллиарды операций в секунду. Как отмечает академик О.М. Белоцерковский, “выяснилось, что постановка многих задач научно-технического прогресса не укладывается в постановки задач теоретической математики, которые связаны с "принципом абсолютной точности", лежащей в основе формальной логики Аристотеля” [40, с.1222]. Однако реализация на суперкомпьютере решений неустойчивых задач в рамках “концепции точности” задач теоретической математики не гарантирует получения устойчивых результатов при рассмотрении таких задач. Современная компьютерная математика, сочетающая в своем методологическом обосновании формализм теоретической математики и конструктивизм прикладной математики, с учетом все более совершенствующихся компьютеров, вообще говоря, не ограничена в своем движении к надежности и согласованности с имеющимися доказательствами математического существования. Тенденцию усиления влияния компьютеров на философскую сущность проблемы обоснования математики можно интерпретировать с помощью гегелевской диалектической триады. В качестве тезиса рассмотрим следующее мнение Яна Стюарта: “Многие авторы предсказывают изменение самого понятия доказательства, что является центральной концепцией математики. Некоторые считают, что компьютер позволит пересмотреть концепцию доказательства, другие думают, что сама эта концепция полностью отомрет” [434, с.38]. Но эти взгляды, несмотря на вполне уместную обеспокоенность по поводу естественных изменений в философии современной математики, основываются на фундаментальном непонимании или сознательном игнорировании современных тенденций в развитии математики, в которой математическое доказательство традиционно заменяло наблюдение и эксперименты, давно принятые в качестве допустимых аргументов в других областях науки.

Поэтому в качестве антитезиса сошлемся на другое высказывание Яна Стюарта: “С помощью доказательства математики убеждаются, что их изыскания действительно верны, что желаемое не выдается за действительное. Использование компьютера никак не влияет на необходимость в доказательствах, так же как изобретение микроскопа никак не повлияло на необходимость постановки экспериментов в биологии" [434, с.38]. Поэтому, можно предположить, что в тенденции к диалектическому объединению этих мнений с помощью компьютерной математики проявляется сущность синтеза направлений обоснования современной математики. Реализация методологического направления "от математической задачи – к компьютерной технике", в свою очередь, требует фундаментальных исследований в области информатики для определения наиболее "перспективных плацдармов компьютеризации" и соответствующих классов задач. По мнению академика А.А. Самарского, есть еще один "дополнительный аргумент в пользу нашего специфического пути компьютеризации. Его цель – скомпенсировать отставание в технических средствах за счет интеллектуальных резервов" [402, с.87]. Одно из основных различий между компьютером и человеком состоит в том, что компьютерные программы пока делают только то, что им сказали. У нас пока очень неопределенные философские представления о том, как реализовать на современном компьютере способность изобретать, как рассуждать согласно здравому смыслу и аналогиям, как формулировать гипотезы.

Можно заключить, что у компьютерной математики есть две стороны: количественная и качественная. Проблема первого аспекта, достаточно очевидна, поскольку в математике известны математические теоремы, которые недоказуемы в принципе или для доказательства которых самым мощным компьютерам пришлось бы трудиться день и ночь, возможно, целую вечность. С точки зрения методологии математики, эта ситуация не столь неожиданная, так как, по существу, количественные ограничения диктуются емкостью памяти и производительностью современных компьютеров. Тем не менее, как считает специалист в области вычислительных проблем, академик В.В. Воеводин: "Компьютеры оказались настолько эффективным инструментом, что новые и очень крупные задачи стали возникать не только в традиционных для вычислений областях, но даже в таких, где раньше большие вычислительные работы не проводились" [95, с.8]. Например, в таких науках, как биология, процессы управления, экономическая математика, международные отношения, в моделировании сценариев ядерной войны и так далее. Это способствовало постановке новых практических задач, построению их математических моделей и разработке соответствующих алгоритмов решения, не боясь при этом больших вычислений. Есть еще один аспект компьютерной математики, который для нас не менее существенен, поскольку мы до сих пор не знаем, существуют ли фундаментальные ограничения на производительность мозга и компьютеров, если их рассматривать как системы сбора и использования информации, накладываемые физическими законами. Весьма вероятно, что такие ограничения есть, с чем вполне можно согласиться, хотя философско-методологические проблемы остаются даже там, где компьютеризация в принципе возможна.

Сложность компьютерного моделирования состоит в том, что алгоритмы эффективные и вполне приемлемые с точки зрения теоретической математики, зачастую становятся неэффективными с точки зрения машинной арифметики. Кроме того, определенную опасность представляет так называемая "псевдо-математизация", которая дает кажущуюся или мнимую точность, ослабляя тем самым контраргументы против математизации. В философском анализе математизации существенным аспектом, с точки зрения гносеологии, является анализ соответствующих процессов научного познания, соответствующих традиций математического познания и их дополняющих друг друга взаимодействий. Как считает Ханс Позер, границы математизации зависят не столько от эпистемологических проблем, сколько от вопросов, связанных с практическим рассуждением и социальной ответственностью. Ведь благодаря компьютеризации не на эмоциональном, интуитивном или качественном уровне, а с помощью точных количественных оценок появились возможности увидеть фрагменты грядущего, пусть даже самого ближайшего, и их зависимость от сегодняшних действий. "Поэтому, – заключает он, – если мы передаем решение формальных задач компьютеру, мы обязаны использовать полученное за счет этого время и свободу для нового творчества и расширение сферы нашего этико-практического разума, чтобы в качестве вычисляющих существ не просчитаться в собственной жизни" [351, с.52]. Кроме того, любой перечень методов математического доказательства и принципов построения математических объектов всегда остается, и будет оставаться неполным, поскольку эти методы и принципы подлежат пересмотру и уточнению. Но так как новые математические доказательства способствуют выведению новой информации, возможно потенциально содержащейся в концептуальных объектах эмпирических наук, то поэтому возникает философская когнитивная установка, отождествляющая математические формализмы со структурами внешней реальности.

Солидаризируясь с этой позицией, тем не менее, хочется подчеркнуть, что трактовка математики и ее обоснования как системного объекта с позиций динамики и развития математического знания является не просто возможным вариантом исследования. По существу, это определенные ступени системного подхода, каждая из которых адекватна определенному типу отношения между внутренним строением математики и ее внешним целенаправленным проявлением. Например, задача выбора математической модели сейчас зависит, наряду с дициплинарной компетентностью и предпочтениями математика, как от вычислительных алгоритмов, так и от мощности современных компьютеров. В этом состоит особенность синергетической эры математического моделирования, которая, по мнению В.Г. Буданова, “заключается в том, что пространство новых классов моделей постоянно расширяется, что связано в первую очередь со взрывной эволюцией возможностей компьютеров” [67, с.84]. Сегодня это стало реальным инструментализмом высоких технологий компьютерных экспериментов, который был недоступен в эпоху становления точного естествознания. Если раньше попытки установить взаимопонимание между математиками и философами не приводили к серьезным результатам в силу того, что слишком далеко отстояли друг от друга формально-дедуктивный и диалектический способы мышления, то новый математический аппарат охватывает, по мнению известного физика Д.С. Чернавского, не только формальную логику, но и диалектику. Он считает, что, например, “диалектика в лице синергетики обрела, наконец, математическую опору” [477, с.231]. Вообще говоря, не существует иерархии надежности переходов от математического обоснования к естественнонаучным и философским аргументам. Даже чисто математические доказательства компьютерной математики становятся надежными благодаря физическим и философским теориям, поддерживающим их.

С появлением компьютеров у современной математики появились новые возможности обоснования. Предварительные философские размышления над ролью компьютеров в обосновании современной математики показывают, насколько недостаточным было наше понимание формальных языков до тех пор, пока математики не попробовали создать компьютер, способный понимать естественный язык. О другом аспекте компьютерной математики, с точки зрения своих профессиональных исследований, говорит академик Д.В. Аносов: “Я пока не слышал об их использовании для создания трехмерных фазовых портретов (хотя стереоскопические изображения некоторых кривых в трехмерном пространстве уже видел), но представляется вполне реальной перспектива как создания с их помощью плоских рисунков трехмерной ситуации, так и стереоскопического воспроизведения таковой” [13, с.32]. Поэтому не стоит гадать о будущем математики, а конструктивнее и плодотворнее с учетом современных достижений философии науки, по возможности полно обсудить современные направления развития математики, особенно те ее аспекты, которые пока скрываются в тени или только начинают анализироваться в философии математики. “Крайне актуальным, – по мнению академика Н.Н. Яненко, – следовательно, становится отыскание способов объединения, унификации, цементирования тех блоков, тех этапов исследования, из которых складывается здание изучения проблемы в целом.

Этим цементом и является прикладная математика, вооруженная современными ЭВМ” [500, с.90]. Поэтому, в контексте системного подхода к проблеме обоснования, следует стремиться к объединению направлений обоснования математики, их синтезу и замыканию в системную целостность.

* * *

Философия математики в традиционном понимании – это деятельность в поиске фундаментальных обобщений применительно к математике, но главное в ней не только прояснять возможности синтеза программ обоснования для обеспечения единства математики, но и удерживать различия, полезные для развития самой математики. Для этого необходим поддерживающий новую концепцию обоснования философский анализ, отличный от обычного использования философии в современных основаниях математики, где ее почти полностью заслоняет сложная методологическая структура самой математики. Общеметодологическая значимость идеи дополнительности для обоснования математики состоит в том, что философско-методологический синтез направлений обоснования методологически возможен только в форме дополнительности, включающей снятие противоположных подходов в более высоких по уровню программах.

Использование философской компаративистики в таком диалоге – это выявление того, что всегда было присуще математике. Она приобретает принципиальное значение в проблеме обоснования математики, обусловленной деятельностной ориентацией математического сознания, именно на современном этапе историко-философского осмысления математического знания. Гносеологические предпосылки программ формализма и интуиционизма, определяющие исходный понятийный базис и допустимые критерии достоверности, являются наименее рационализированным компонентом, что характерно для подходов к обоснованию современной математики. Отличия в традиционных программах обоснования математики имели не только математический, но и философский характер. Они особенно ярко проявились, прежде всего, в различии подходов при рассмотрении проблем, связанных с идеей бесконечности. Для сохранения предельно надежных и содержательных результатов, полученных ранее классической математикой, необходимо было обоснование используемой в ней абстракции актуальной бесконечности. Но достижение этой цели возможно лишь после выявления философско-математической сущности бесконечности.

Суть методологического подхода Гильберта состояла в том, чтобы формализовать математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, и сделать ее объектом метаматематического исследования. Негативный аспект противостоящего этому интуиционистского подхода

Брауэра состоял в отрицании основных понятий классической теоретико-множественной математики, а позитивный – в выделении конструктивных направлений в математике. Эти два основных подхода к обоснованию математики, которыми являются интуиционизм и формализм, заострили философскую дилемму интуитивного и дискурсивного, с точки зрения содержательного и формального в математике. Хотя формализм и способен отделить интуицию от ее геометрической опоры, он все же может послужить источником для обогащения интуиции на новом методологическом уровне, способствуя более глубокому постижению смысла. Различия между основными программами обоснования математики – формализма и интуиционизма – были в определенной степени взаимодополнительными типами обоснования, соответствующими различным типам знания.

Методологические проблемы, поставленные Гильбертом, оказались столь актуальными, что практически вся философия математики XX века развивалась под влиянием поставленных им задач. Чтобы показать несправедливость широко распространенных крайних утверждений, в науке XX века были получены новые теоретические конструкции. К ним можно отнести принцип дополнительности Бора и теоремы Гёделя о неполноте. Процесс переноса границы между наблюдателем, изучающим окружающий мир, и этим миром аналогичен акту расширения формальной системы в программе Гёделя. Существование некоторых формально неразрешимых проблем в математике само по себе еще ничего не говорит об их значимости в смысле частоты их появления в различных областях науки. Поэтому теоремы Гёделя не сужают обычную сферу использования аксиоматического метода и не ограничивают ее реальные эвристические и методологические функции.

Проблематика обоснования современной математики толкуется в неклассической и постнеклассической науке не как проблематика абсолютного обоснования, а как экспликация систематизации и упорядочения всех направлений развития математики. Одним из современных средств математического познания является компьютерная математика. Поскольку в противоположность классическому компьютеру квантовый компьютер является пока еще не реализованным новым познавательным теоретическим инструментом, поэтому есть философские вопросы, анализ которых требует более глубокого проникновения в их сущность. Главное достоинство квантовых компьютеров, совмещающих технические особенности классических компьютеров и квантово-механические принципы обработки данных, состоит в том, что их аппаратная часть способна одновременно обрабатывать все возможные ответы на поставленные математические задачи с помощью эффективных алгоритмов.

Философская экспликация фрактальной геометрии, в качестве нового направления постнеклассической математики, показывает, что оппозицию “дискретность – непрерывность”, которая характеризуется с помощью противоположностей главных линий математического познания, а именно, арифметико-алгебраической и геометрико-топологической, в контексте системного подхода можно переосмыслить в составе математической триады “дискретность – фрактальность – непрерывность”. Фрактальная геометрия является конкретным математическим примером системной триады, как формы философско-методологического синтеза. Дискретное и непрерывное в составе триады не исключают, а дополняют друг друга, так как оба являются идеализациями, относящимися к гносеологии познания, постоянно методологически пересекаясь и переплетаясь в математике. Неотделимость понятий дискретности и непрерывности как важнейших теоретических конструкций современной математики говорит о том, что, по существу, они являются вневременным онтологическим инвариантом философии математики.

Философско-методологический синтез основных направлений обоснования математики представляет особый синтетический метод научного познания действительности, являющийся вместе с анализом наиболее общим средством постижения математической истины. Используя методологию философской компаративистики, принципа дополнительности и когнитивного релятивизма, можно попытаться сделать доступными ценности разных методологических подходов к обоснованию математики. Релятивистский аспект проблемы обоснования математики возникает в связи со сколемовским релятивизмом мощностей, согласно которому любая система аксиом, имеющая модель, не устанавливает пределов для других моделей или интерпретаций. С математической стороны переформулировка цели обоснования не представляет большого интереса, но с философской стороны она необходима хотя бы потому, что формально-доказательный анализ включает также редукцию к некоторым конструктивистским методам математического доказательства.

Сущность дополнительных математических категорий раскрывается как в рамках классической, так и неклассической или критической рациональности, когда альтернативные признаки сосуществуют одновременно. Это вполне в духе концепции дополнительности, основной философско-методологический принцип которой ни к чему не сводим, так как он изначально первичен, поскольку дедуктивная составляющая, включающая доказательные рассуждения, и алгоритмическая составляющая, включающая методы решения, как дополнительные понятия всегда присутствовали в математической теории. Весь исторический путь эволюции современных математических теорий показывает, что тернарная структура обоснования современной математики не разложима на совокупность бинарных оппозиций, поскольку системный подход все же больше сопоставляет и соединяет, чем противопоставляет и разъединяет.

ГЛАВА 4
МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ЦЕЛОСТНОСТЬ КОНЦЕПЦИИ ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Выдающиеся представители математического знания проявляли большой интерес к установлению связей со смежными науками, в особенности с физикой и теорией познания. Феномен математических теорий состоит в их неисчерпаемости, что не исключает возможности фиксировать упорядочивающие их “гносеологические срезы”. Такое упорядочение, по мнению Гильберта, достигается “с помощью своего рода "каркаса понятий", возведенного с таким расчетом, чтобы отдельному объекту данной области знания соответствовало понятие из этого каркаса, а каждому факту из этой области знания соответствовала некоторая логическая связь между понятиями. Такой каркас понятий есть не что иное, как теория данной области знания” [113, с.409]. Такая процедура может быть практически использована для конкретных целей философско-методологического обоснования математических теорий. В частности, в докладе “Аксиоматическое мышление”, в котором был охарактеризован аксиоматический метод как общий метод исследования, играющий все более важную роль в математике последнего времени, Давид Гильберт утверждал: “Рассматривая ту или иную теорию более подробно, мы всякий раз обнаруживаем, что в основании каркаса лежит небольшое число утверждений из данной области науки, которых достаточно, чтобы из них с помощью логических законов построить весь каркас” [113, с.409]. Такие утверждения с математической точки зрения можно рассматривать как “аксиомы отдельной области знания”, благодаря которым дальнейшее развитие этой области знания сводится к логическим построениям на основе имеющегося каркаса понятий.

Логической основой аргументации является логика как наука о правильных рассуждениях. Вопрос заключается в том, чем правильное рассуждение отличается от неправильного рассуждения? Здесь мы опять подходим к философско-методологической проблеме обоснования. С точки зрения математики, обоснование какого-либо утверждения есть либо его доказательство, либо его подтверждение с помощью общепризнанных истинных высказываний. Анализируя различие обоснования и согласованности высказываний, А.Л. Никифоров утверждает: “Обоснование исчезает вместе с доказательством; остается только взаимная согласованность различных высказываний, да и она оказывается излишней: согласованность нескольких высказываний выражается в том, что они все одновременно могут быть истинными, но если нет истинностной оценки, то и о согласованности говорить нельзя” [310, с.54]. Благодаря науке можно говорить об объективности и обоснованности, избегая страстей и эмоций. Согласно одной из философских характеристик науки XXI века, в которой Б.Г. Юдин выявляет различие между наукой и исследованием, “наука – это определенность, исследование – неопределенность” [494, с.592]. С учетом сказанного в этом философском исследовании можно сделать вывод, что возможности обоснования современной математики, несмотря на определенный скептицизм относительно абсолютно надежного обоснования, еще далеко не исчерпаны.

Например, в некоторых теориях, как утверждал Давид Гильберт, “проблема обоснования отдельной области знания обрела свое решение; но это решение носило лишь предварительный характер. Действительно, в отдельных областях знания возникала потребность в обосновании самих упомянутых выше теорем, принятых в качестве аксиом и положенных в основу” [113, с.410]. Речь идет о том, что некоторые “доказательства” не являются доказательствами, а лишь осуществляют сведение к другим более глубоко лежащим теоремам, которые в свою очередь могут быть приняты в качестве новых аксиом. Следует также отметить, что среди важнейших методологических функций, которые выполняет новая фундаментальная математическая теория, необходимо выделить системную функцию. Ее экспликация невозможна без релевантного взаимодействия математики и философии в контексте формирования методологически целостной концепции программы обоснования современной математики, которую можно также рассматривать как гипотетическую потребность в синтезе представлений о категориях части и целого, развивающиеся почти изолировано в философии и математике. Заметим, что первые представления о целостности, которые основывались на признании абсолютной целостности, заложенной в фундаменте мироздания, встречаются уже в античности. “Стремление выявить первооснову, сохраняющую постоянство при любых преломлениях материального мира, находит свое воплощение у Платона” [268, с.70]. Он направляет философию на постижение отвлеченных сущностей, что придает особую значимость признанию онтологических закономерностей. Отметим также, что среди наиболее значимых попыток отыскать целостность и найти “скрепляющее” единство мира следует назвать и монадологию Г. Лейбница.

Гипотеза, из которой мы будем исходить дальше в этом исследовании и которую будем обосновывать, состоит в следующем. Направления обоснования математики, обязанные своим происхождением конкретной исторической эпохе развития современной математики, рождаются не в “чистом виде”, не в форме общих нормативных идеалов обоснования и не обусловлены исключительно историческими условиями их происхождения, но, тем не менее, они являются важнейшими структурными компонентами новой концепции обоснования математики. Представление о философско-математической гипотезе возникает при диалектическом рассмотрении проблемы. Как убедительно показал на математических примерах Лёйтзен Брауэр: “К точным научным теориям в особенности относится феномен эвристики научных гипотез; он заключается в дальнейшем открытии того, что последовательностям, введенным первоначально как гипотезы, соответствуют реальные причинные последовательности в воспринимаемом мире” [64, с.251]. Познавательная функция философско-математической гипотезы заключается в том, чтобы направлять методологический поиск, поскольку сформулированное в гипотезе предположение может оказаться решением проблемы. Независимо от того, насколько четко были сформулированы принципы различных направлений обоснования математических теорий, в новой концепции обоснования математики используются те направления, которые реально “работают” в современной математике, что подтверждается методологическими высказываниями выдающихся современных математиков. В подтверждение такой позиции сошлемся на мнение американских философов науки Морриса Коэна и Эрнеста Нагеля: “Важность гипотезы в направлении исследования может быть проявлена с еще большей ясностью, если мы еще раз проанализируем распространенный совет: "Пусть факты говорят сами за себя"” [203, с.282]. Но для того чтобы философская гипотеза могла направлять исследование, необходимо наиболее существенные факты рассматривать в ней как значимые, а остальные – нет.

Основная трудность всех направлений обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне современная математика отличается от любого естественнонаучного знания более надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны и в некотором смысле доказательства “внеисторичны”. Выход из этого затруднения состоит в переводе проблемы обоснования математики с формально-логического уровня на философско-методологический уровень. Сложность обоснования современной математики обусловливает применение специфических методов для философско-методологических подходов к решению столь нестандартной задачи. Будем исходить из того, что объектом данного исследования является современная математика как целостная наука. Поскольку предметом исследования является обоснование современной математики, то целесообразно применить метод систематизации известных подходов к обоснованию. “Он состоит в том, – поясняет методолог науки Ю.А. Петров, – что в данной теории из всех ее терминов выбирается круг исходных терминов (по возможности наименьший), через которые можно было бы определить все другие (производные) термины этой теории” [340, с.66]. В качестве предпосылочного источника новой теории обоснования математики можно выделить классическую философскую проблему бесконечности, формулируемую в виде известной триады “конечное – потенциальное – актуальное ”, а также необходимо указать на постнеклассическую математическую триаду “дискретное – непрерывное – фрактальное ”, которая непосредственно повлияла на релевантный выбор направлений обоснования современной математики и их философско-методологический синтез.

Выработка в философии обоснования математики синтезирующего знания является конкретной реализацией ею своих важнейших мировоззренческих установок и методологических функций. С точки зрения методологической проблемы единства научного знания, “из научных дисциплин наиболее успешно с задачей синтеза данных справляется в настоящее время математика. Это ведет к усилению глубоких связей между вначале совершенно различными вопросами, к укреплению единства самой математики” [172, с.135]. Поэтому вполне естественным выглядит предположение о синтетическом характере современного математического знания. Целостный подход Э.Г. Юдин предлагает реализовывать в виде “синтеза существующих специализированных, односторонних подходов, а модель таких ситуаций начинает выступать как общая для системного подхода и более того – как выражающая его сущность” [495, с.45]. Естественный синтез доказавших свою плодотворность направлений или программ обоснования математики является результатом тех реальных процессов, которые сами по себе происходят в контексте сознательного конструирования абстрактных систем философии и математики. Прежняя научная парадигма требовала полной определенности, но, согласно принципу неопределенности, в процесс исследования вмешивается субъективный фактор, оставляющий нечто существенное, возможно даже необязательно формализуемое, за рамками исследуемой математической модели. Если математику нельзя обосновать в самой математике, то это не означает, что ее нельзя обосновать вообще, поскольку при построении абстрактных теорий математики используют не только математические, но и нематематические аргументы.

Рассматриваемое направление в проблеме обоснования математики видит свою главную задачу в открытии новых способов коммуникации знаний, а не редукции одного типа знания к другому, и выявления целостности прочно установившихся традиционных подходов к обоснованию. По мнению философов и методологов науки И.В. Блауберга и Б.Г. Юдина, “рассматривая представления о целостности как одну из исходных предпосылок научного мышления, мы приходим к следующему выводу: эти представления – весьма сложные конструкции, включающие как минимум то, что еще не подвергалось рефлексии, наряду с тем, что, пройдя такой критический анализ, стало общепризнанным, а иногда даже утвердилось с "прочностью предрассудка"” [50, с.24]. В проблему обоснования современной математики существенно входит некий нематематический элемент, каким-то образом связанный либо с приложениями математики, либо с философией математики, либо с ее практикой и философией. Поэтому, обращаясь к целостной проблеме обоснования современной математики, можно говорить о синтезе направлений обоснования, в частности о теоретическом синтезе, как целостном единстве философско-методологических обосновательных подходов, а также об интеграции программ обоснования, характеризующей тенденцию к их “соединению” в рамках общей системы многообразия современного математического знания.

Философ науки С.А. Лебедев одним из основных способов формирования общенаучной картины мира считает синтез элементов философской онтологии с содержанием фундаментальных теорий определенного периода развития науки. Но, несмотря на его плодотворность у синтеза философского и конкретно-научного исследования науки есть, по его мнению, свои минусы: “Первый минус – невозможность обобщения предметного содержания науки при таком большом его объеме, который уже не в состоянии будет усвоить ученый. <…> Второй минус – существенная разнокачественность онтологического содержания и фундаментальных принципов различных наук, не позволяющая эффективно осуществить их обобщение, которое возможно только для однокачественных объектов” [230, с.10]. Поэтому соответствующую аргументацию новой концепции обоснования мы будем основывать на наиболее характерных примерах из различных разделов современной математики. Отметим также, что понятие синтеза философско-методологических направлений обоснования современной математики, которое в дальнейшем мы будем называть “системным” или точнее “философско-методологическим синтезом”, в философии и методологии науки не имеет жестко фиксированного семантического смысла.

Представление о структуре программы обоснования современной математики, заключенное в самой математической реальности, порождает бинарную альтернативу “формализм – интуиционизм”, в которой были выявлены противоречия в попытке найти относительную устойчивость, например, при применении философской концепции дополнительности. “Болгарский философ Сава Петров заметил в своей книге "Логические парадоксы в философской интерпретации", что философы "открывали нарушения аристотелевского закона противоречия (непротиворечия) везде, кроме тех мест, где их видели логики и математики". Нечто аналогичное, – утверждает Г.Д. Левин, – происходит в литературе по анализу и синтезу. За редким исключением исследователи видят эти методы не там, где их видят представители конкретных наук” [232, с.92]. С помощью какого философско-методологического подхода можно выявить меру примирения противоположностей? Например, базовой структурой такой методологической целостности может стать системная триада, достигаемая в синтезе трех ее основных компонентов и которая позволяет репрезентировать современную математику как самоорганизующуюся систему.

Целесообразность такого подхода к обоснованию математики состоит в том, что парадигма самоорганизации служит естественнонаучной основой, или экспликацией, философской категории развития на современном уровне научного познания. На конкретном философско-математическом материале можно показать, что решающим условием процесса развития является его самоорганизация, приводящая к возникновению новых математических понятий и структур. Добавим к этому еще специфическую деятельностную характеристику философа науки Э.М. Сороко: "Самоорганизация – это процесс приведения составляющих системы к единой мере под воздействием внутренних сил – источников самоупорядочения, самопроизвольного накопления информации и пр." [419, с.131]. Системное рассмотрение отказывается от исключительно формального толкования математической теории. Системные триады содержат в себе новые возможности, которые в контексте методологии математики зависят от понимания статуса реальной логики и природы различных математических принципов, таких как, например, аксиома выбора. Используя понятие системной триады в обосновании математики, мы опираемся не только на естественный процесс внутреннего вызревания математических теорий, но и на новое понимание содержательного математического рассуждения, которому логическая парадигма отказывала в доказательности.

Однако становление новой тринитарной парадигмы, принимающей вид "неформализуемой целостности", сопряжено с довольно серьезными философскими трудностями. Они связаны, прежде всего, с преодолением традиционного философского "бинаризма" и методологической редукции, которая стремится свести все многообразие явлений к какой-либо одной теоретической системе. Но, в результате такого синтеза приращение математического знания может выйти и на общефилософский уровень, способствующий консолидации междисциплинарного научного познания. Его суть состоит также в том, что целостные свойства обосновательных процедур современной математики реально проявляют себя не только во внешних взаимодействиях различных философских программ обоснования, имеющих интегральный характер, но и дополняются анализом внутренней дифференциации этих программ. В проведенном философско-методологическом анализе проблемы обоснования мы существенно опираемся на авторитетное мнение выдающегося английского математика и физика Роджера Пенроуза, который выделяет "три основных направления в современной математической философии: формализм, платонизм и интуиционизм" [326, с.104]. Заметим, что немногие современные работающие математики строго исповедуют "чистый формализм" или "чистый интуиционизм", но философско-методологический синтез направлений обоснования сводит различные математические теории, с точки зрения системной интеграции, в целостности, сохраняя при этом математические основания исходных понятий и обеспечивая единство многообразия математического знания.

Даже простой сравнительный анализ показывает, что анализ конкретного направления обоснования современной математики как элемента некоторой целостной и интегральной концепции обоснования представляет собой также более глубокое познание ее внутренних свойств. В основных областях математического знания накопленного аналитического материала возможно недостаточно для того, чтобы возникла потребность в его системной интеграции, но такая потребность, обусловленная целым комплексом причин, все определеннее возникает в наше время. Например, в философии науки сейчас различаются такие релевантные компоненты, как гносеология, аксиология и онтология. Поэтому, для придания структурной устойчивости реальным тенденциям становления, развития и обоснования современного этапа развития математики, можно воспользоваться современной методологией с применением притягательного архетипа тринитарности. Такой подход существенно расширяет перспективы философско-методологического исследования проблемы обоснования математики, особенно в теоретико-познавательном контексте, и создает тем самым в обосновательном аспекте вполне реально прогнозируемые позитивные перспективы, которые отвечают собственным принципам и установкам философии и современной математики, наполняя их новым содержанием.

Системная триада является воплощением тринитарной структуры обоснования математики, которая претендует на роль базовой структуры программы обоснования всей постгёделевской математики. Вопрос о числе измерений, требуемых для достижения целостности, зависит от природы исследуемого объекта. "Тернарная структура, необходимая для синтеза, окажется достаточной, – утверждает Р.Г. Баранцев, – если удастся скомплексировать существенные факторы по тринитарному образцу" [34, с.96]. Тернарный опыт человеческой мысли нашел свое воплощение и в философии, хотя философия науки в отличие от методологии науки не говорит о том, как именно нужно "правильно" познавать математическую реальность. Необходимость философско-методологического синтеза программ обоснования современной математики обусловлена еще и тем, что философия математики формулирует когнитивные задачи познания, а методология математики выявляет специфические особенности ее конкретных разделов. Эффективность современной математики в ее различных приложениях позволяет сделать вывод о необходимости особого философско-методологического синтеза программ обоснования математики, важнейшей характеристической особенностью которого является репрезентация синтеза философско-мировоззренческого и математического уровней знаний о реальности.

4.1 Системный стиль математического мышления и практическая эффективность современной математики

Одним из центральных вопросов философии науки является вопрос о границах научного познания. С одной стороны, в широком мировоззренческом аспекте практическое приложение математического формализма оказалось чрезвычайно эффективным, что в свою очередь способствовало укреплению рационализма как базового принципа теории познания. Но, с другой стороны, как отмечают академики В.С. Владимиров и Л.Д. Фаддеев: “В процессе… взаимодействия математики, конкретных наук и вычислительных средств создаются и исследуются качественно новые классы моделей современной науки. Зачастую эти модели описываются весьма сложным абстрактным языком. Высокий уровень абстракции затрудняет восприятие математики недостаточно подготовленными специалистами, отпугивает неопытных, возводит своеобразный барьер между математиками и нематематиками” [93, с.97]. Заметим, что когда речь идет о математических понятиях, то философских и прикладных глубин сразу не видно и объяснение их релевантности переносится на математические результаты, где уже “что-то происходит”. Стремление онтологизировать первичные математические понятия обусловлено самой спецификой становления математического метода. Оно совпадало с интересами математиков, которые старались использовать, по возможности, наименьшее число исходных принципов при формулировке прикладных математических задач. Но, если о степени обоснованности математики судить по ее приложениям, то сразу же возникает вопрос: насколько эффективна математика в этом отношении? Поэтому первостепенно важными становятся не только объекты математических приложений, но и философская идея развития современной математики, которая эвристически полезна даже вне зависимости от прикладных устремлений.

Интересные и наиболее содержательные приложения современной математики начинают обсуждаться на такой стадии сложности развитой теории, до которой мало кто из философов математики добирается. Например, в “математической картине мира” топологические свойства располагаются на поверхности, а алгебраические – в глубине. Поэтому о методологической сути теории и ее философско-инструментальной ценности надо говорить как можно раньше, даже если это трудно реализовать в отсутствие нужных математических инструментов. Различные геометрические и физические преобразования, комбинаторные задачи, теория кодирования – все это является неожиданно идентичным, перекликаясь друг с другом в общей алгебре с акцентом на теорию групп. Но, например, в начале прошлого века физик Джеймс Джинс, обсуждавший реформу учебного плана по математике в Принстонском университете, сказал: “Можно обойтись без теории групп – этот раздел математики никогда не принесет какой-либо пользы физике” (цит. по [128, с.111]). По иронии судьбы, спустя некоторое время именно теория групп впоследствии стала для физиков одним из основных предметов при исследовании природы элементарных частиц. Специфическая особенность продуктивной схемы практического применения теории групп заключается в методологическом подходе к решению математических проблем. Так, гениальное открытие французского математика Эвариста Галуа, заложившего основы современной алгебры, состояло в том, что он поставил структуру прежде объекта и новаторски определил объект, исходя из математической структуры. “Он вызвал к жизни новый математический дух, – считает физик-теоретик Жорж Лошак, – доказав, что при исследовании корней алгебраического уравнения надо прежде всего приступать не к вычислению этих корней, а к исследованию существующих между ними отношений, для того, чтобы узнать, имеем ли мы средства для их вычисления” [240, с.181]. Укажем также на еще один показательный пример перспективного применения групповой идеологии, эвристически плодоносящей в совершенно неожиданном синтезе математических областей, а именно, – алгебраической топологии.

Математики рассматривают свое поле деятельности как некоторый особый вполне реальный мир, живущий по своим законам. Он не подчинен миру физической реальности, что делает возможным его самостоятельное изучение, хотя и непосредственно связан с ним. “История математики показывает, однако, что некоторая связь абстрактной математики с реальностью в действительности существует. Мы имеем здесь дело с явлением математического предвосхищения, которое состоит в том, что абстрактные математические теории, появившиеся из логических соображений, находят впоследствии физическую реализацию” [339, с.28]. В связи с этим заметим, что в практическом аспекте основная идея, например, математического моделирования состоит в том, чтобы выводы дедуктивной математической структуры совпадали с реальностью. Упорядочение математических теорий на основе понятия структуры, которое было предпринято во второй половине XX века группой Бурбаки, не решило философской проблемы взаимоотношения мира физической реальности и математического знания. “В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, – писали они, – и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм” [69, с.258–259]. Заметим, что в концепции Бурбаки факт соответствия математических структур явлениям окружающего мира попросту констатируется. Реальное развитие математического знания показало, что современную математику нельзя свести только к структурам, поэтому основная идея Бурбаки “объяснения” практической эффективности математики не подлежит дальнейшей философской конкретизации.

Есть и другое, несколько туманное, считает Морис Клайн даже, возможно, чрезмерно упрощенное объяснение эффективности математики: “Согласно этому объяснению, существует объективный физический мир и человек стремится согласовать с ним свою математику. Мы вносим необходимые коррективы, когда приложения обнаруживают неточности математического описания или прямые ошибки в нашей математике” [186, с.591]. Отдельные математические факты могут подтвердить или опровергнуть гипотезу, точнее дедуктивно выводимые из нее следствия, а критикуя математическую теорию в целом, мы тем самым пытаемся показать неудовлетворенность самой теорией или ее важнейшими следствиями, принимаемыми за истину, в контексте ее будущих практических применений. Математики, как бы парадоксально это ни звучало, ради “чистоты” математического результата сознательно ограничивали себя, образно говоря, миром математических структур и понятий, точнее, специальным миром определенных математических моделей. Исследование таких моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, становилось для них самоцелью. О плодотворности таких математических исследований говорит французский математик Жан Дьедонне: “В совсем недавнее время мы были свидетелями неоднократно повторявшейся ситуации, непостижимой для физиков и философов, когда с удивлением замечают, что математический аппарат, необходимый для развития появившихся революционных концепций современной физики, таких, как теория относительности или квантовая механика, уже задолго до их рождения был создан и развит в связи с внутренними проблемами математики вне каких-либо подозрений, что этот аппарат может когда-нибудь получить другие приложения” [140, с.20]. В этом одна из основных причин платонистского отношения математиков к объектам своих исследований.

Заметим, что один из аспектов математического платонизма, точнее умеренного платонизма, исповедуемого профессиональными математиками, можно по-философски назвать метафизическим, состоящим в представлении реальности математических объектов как части реального мира. “Нужно признать, что такого рода метафизика имеет свои сильные стороны: она позволяет объяснить необычайную эффективность математики в исследовании физического мира. Если реальность математических предметов такова, как реальность физических тел, то мы можем мыслить некий единый мир, состоящий из физических и математических сущностей, находящихся в стройном взаимодействии” [127, с.51]. Возможно, что именно в этом источник творческой силы математики, названный американским физиком-теоретиком Евгением Вигнером невероятной или непостижимой эффектностью математики: “С одной стороны, невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий” [86, с.536]. Высказывания в таком духе, отличающие математику от всех остальных наук по глубине и таинственности, свидетельствуют о живучести платонистского взгляда на математику. То, что такой путь приводит к полезным результатам в физике, называют “принципом Вигнера”. Его можно также назвать практической эффективностью математики, которая делает перспективы ее применения в самых разных науках, по существу, неограниченными. Речь идет о невероятно успешном математическом описании происходящих в реальном мире процессов и способности человеческого разума открывать математические истины. Можно к этому еще добавить, что давать оценки эффективности – это, безусловно, привилегия выдающихся математиков и философов науки, но, как показывает история математики, эксперты тоже могут ошибаться.

Философы науки солидарны в том, что непостижимая эффективность математических абстракций в физике не может быть объяснена без прояснения на генетическом уровне глубинной корреляции математических и физических структур, которая не поддается убедительной аргументации, с точки зрения ее логической необходимости. Если, как говорят математики, не умаляя общности, можно считать, что в теоретической физике и чистой математике познание направлено на построение дедуктивных систем, то необходимо уточнять: в физике они в каком-то смысле близки к реальности и каким-то образом проверяются, а в математике – это формально правильные построения без оценки их соответствия реальности. Сами физики поражаются той точности, с которой математика описывает фундаментальные физические реалии. Можно привести множество фактов, когда абстрактная математическая теория “предсказывает” физическую реальность. Например, вот один из них: “Непостижимая эффективность математики была подтверждена и поистине титанической работой Тойхиро Киношиты, специалиста по физике элементарных частиц из Корнельского университета, который в течение 30 лет (!) неутомимо вел расчеты для некоторых тонких свойств электронов. Расчеты Киношиты заполняют тысячи страниц и потребовали для завершения самых мощных на сегодня компьютеров. В результате ему удалось математически рассчитать характеристики электронов, которые были подтверждены в соответствующих экспериментах с точностью, превышающей одну миллиардную” [294, с.87]. Вообще говоря, хотя современная математика весьма эффективна, ее теоретические выводы все же нуждаются в перепроверке, поскольку для разных прикладных научных целей требуются разные математические приближения.

Психология знает множество сходных явлений, при изучении которых нельзя говорить о результате наблюдения, не описав способы наблюдения. Безотказная эффективность математики выявляет следующие темы для ее философско-методологического анализа. “Во-первых, такая эффективность может рассматриваться как критерий правильности. <…> Вторая тема, – акцентирует феномен математики М. Клайн, – ставит нас перед загадкой: почему математика вообще эффективна, если вопрос о том, что такое настоящая математика, вызывает столько споров?” [186, с.14]. Безусловно, эти темы имеют непосредственное отношение к проблеме обоснования математики. По существу, одна из величайших загадок природы заключается в потрясающем соответствии абстрактных математических структур реальному миру, другая загадка состоит в способности нашего мышления вывести математическую упорядоченность из хаотичной реальности, а третья – в непостижимой математичности физического мира. Нельзя избежать вмешательства реального мира в современные математические теории, не вызывая “отвращения” к науке в целом, а к доказательствам и убедительной аргументации в частности. Когда историк математики, рассуждает Ф.А. Медведев, “пытается применить гильбертовскую идеализацию к реальным доказательствам, он постоянно сталкивается с тем фактом, что рассуждения при их проведении оказываются, как правило, неудовлетворительными, нестрогими, неполными и т.п.” [270, с.195]. Обычно рассуждения, в которых фигурируют новые объекты, проводятся по старым канонам и только на более поздней стадии, в связи с возникающими сопутствующими проблемами, ставится вопрос о законности такого оперирования с ними. Возможно, поэтому к гильбертовскому идеалу более или менее приближаются рассуждения методически отработанных изложений, среди которых наиболее доступным образцом является школьная математика.

Тем не менее, проблема “правильных” рассуждений в контексте их эффективности остается актуальной в современной математике высокого уровня, традиционно относящейся к высшей математике. Кроме того, эффективность математического знания состоит еще в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Как утверждает Лёйтзен Брауэр: “Эффективность математической абстракции основана на том факте, что многими причинными последовательностями намного легче управлять, если они "вложены" в подсистемы чистой математики, т.е. если их пустые абстракции сопряжены с расширенными чистыми математическими системами” [64, с.251]. Следует отметить, что группа Бурбаки не решилась выступить по проблеме взаимоотношений мира математического и экспериментального, ссылаясь на отсутствие компетентности. Однако они не отрицали подобной взаимосвязи: “То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, – это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда не узнаем” [69, с.258]. Изначально математические построения имели определенное интуитивное содержание. Но при формировании новых теорий, сознательно лишая их этого содержания, они, по мнению Бурбаки, приобретают ту действительность, которая составляет их силу, и открывает возможности для новых интерпретаций. Заметим, что в дедуктивных науках интерпретация выступает как семантическая форма отображения формальной системы или теории на какую-нибудь более известную теорию, придавая такой процедуре познавательное значение. В частности, каждая совокупность объектов, для которой истинна данная система аксиом, называется в математике интерпретацией этой системы.

Так что же можно сказать о причине непостижимой эффективности математики в естественных науках? Можно ответить, например, так: “Математика – это и есть то, что оказалось эффективным и приобрело в силу этого универсальную значимость. Иными словами, спрашивать об эффективности математики – это примерно то же самое, что спрашивать, почему большинство культурных растений годится в пищу человеку” [382, с.22]. Если обосновывать это утверждение, то необходимо развить в его поддержку основные доводы. В частности, в качестве одного из таких доводов можно рассмотреть математизацию науки как наиболее эффективный метод познания. А как можно по-философски интерпретировать эффективность математики по отношению к программе обоснования математики? Сошлемся при ответе на этот вопрос на мнение философа математики В.Я. Перминова: “Программа обоснования математики является эффективной, если она демонстрирует свою эффективность для достаточно широкого круга математических теорий” [333, с.164]. Именно этот план с опорой на наиболее существенные аспекты математики на современном этапе ее развития методологически реализуется на протяжении всего философского исследования проблемы обоснования современной математики. Анализируя такую специфическую область научного знания, как современная математика, следует иметь в виду, что философские интерпретации могут быть интересны и даже полезны. Однако важно отделять математические результаты от их осмысления, в том смысле, что интерпретации не должны подменять сути математического исследования как процесса.

Например, в работах Гегеля проявляется конструктивистский подход к познанию в том смысле, что он “описывает знание как возникающее в результате процесса, в котором теория, основанная на предшествующем опыте, подвергается испытанию” [386, с.137]. Для его реализации в математике необходим синтез философских и математических способов и форм познавательной деятельности. Поэтому мы подкрепляем философский анализ проблемы обоснования математики примерами специфических особенностей новых математических объектов и современных математических теорий, в том числе и в области компьютерной математики. Сейчас вычислительный мир, по крайней мере мир больших вычислений, существенно изменился. Например, на вычислительных системах параллельной архитектуры время решения математической задачи принципиально зависит от того, какова внутренняя структура алгоритма и в каком порядке выполняются его операции на компьютерной технике. Но чтобы использовать возможность ускоренной реализации алгоритма, необходимо получить новые сведения относительно структуры алгоритма на уровне связей между отдельными операциями. В связи с этим, в контексте обоснования прикладных аспектов современной математики, появилась новая задача философии математического образования, как говорит академик В.В. Воеводин: “До сих пор специалистов в области вычислительной математики учили, как решать задачи математически правильно. Теперь надо, к тому же, учить, как решать задачи эффективно на современной вычислительной технике” [95, с.106]. Здесь речь идет о том, что повышение эффективности компьютерной математики связано с выбором подходящих форм алгоритма и программы, поскольку разные программы практически показывают разную эффективность.

История математики наглядно показывает, что в результате развития математических теорий самоорганизуется практический и эффективный механизм очистки математических доказательств от некорректных утверждений, обусловленный системным подходом к ее обосновательным процедурам и практической направленностью на решение естественнонаучных задач. По своему смыслу самоорганизация – это процесс, в котором нечто происходит само собой, без видимых причин и внешнего вмешательства. В сложных самоорганизующихся системах, к которым относится современная математика, появляется новое понимание обоснования как процесса взаимодействия различных направлений философии математики. Термин “самоорганизующаяся система” впервые был предложен в 1947 году У. Росс Эшби [515]. Но до сих пор нет философски удовлетворительного определения этого понятия. Помня об этом, предупреждает он, надо быть осторожными, чтобы не запутаться в терминологии, так как прилагательное “самоорганизующаяся”, применяемое слишком свободно, является неопределенным, а если его применяют слишком точно, то оно может стать противоречивым. Концепция теоретического исследования самоорганизации представлена в работе Эшби “Принципы самоорганизации”, центральное место в которой занимает понятие организации. Он выделяет два смысловых значения самоорганизации. Первое из них относится к системе, все части которой вначале отделены друг от друга, то есть поведение каждой из частей не зависит от состояния других частей, а затем между ними устанавливаются некоторые связи. “Такая система является "самоорганизующейся" в том смысле, – согласно Эшби, – что она изменяется от системы с "разделенными частями" до системы со "связанными частями"” [490, с.328]. Но, хотя в прямом смысле получается самоорганизующаяся система, нет никаких допущений о том, насколько “хороша” ее организация, поэтому Эшби предлагает рассмотреть второе значение самоорганизации: “"Организация" (как процесс) может означать, как и в первом случае, "переход от неорганизованной системы к организованной". Но это слово также может означать "переход от плохой организации к хорошей"” [490, с.328]. В этом случае можно говорить о познавательной системе как устойчивой по времени “конфигурации взаимодействий” между ее связанными частями. А в контексте философского предположения, что современное математическое знание есть по существу системная характеристика, это такое свойство системы, от которой требуется постоянно обеспечивать систематическое производство нового научного знания.

Суть этой характеристики, влияющей на эпистемологический потенциал системы, с точки зрения обоснования математики, уместно обозначить как способность системы к самоорганизации математических теорий, хотя такой синергетический подход требует философского уточнения самого понятия самоорганизации. Но, чтобы применить такую методологию, вначале необходимо признать систему самоорганизующейся. В связи с этим, по мнению В.Н. Поруса, возникают следующие вопросы: “Вопрос первый: можно ли признать систему самоорганизующейся до того, как к ее исследованию применена синергетическая модель? <…> Вопрос второй: применима ли такая модель к анализу самого процесса научного исследования?” [355, с.98–99]. Если система изначально признается самоорганизующейся, то тогда теоретические объяснения по поводу поведения такой системы неопровержимы, так как такая модель становится “метафизическим компонентом” структуры научного знания. Во-первых, “синергизм” даже этимологически буквально переводится как совместное действие. Во-вторых, в поддержку этого аргумента заметим, что, как сказал академик В.С. Степин, “при интерпретации синергетики как теоретического описания саморазвивающихся систем устраняются односторонности, которые возникают при недостаточно четком осмыслении связей между синергетической парадигмой и системным подходом" [426, с.11]. При ответе на второй вопрос систему в целом можно рассмотреть в проблемном поле "философии когнитивных наук". В рамках этого направления философия осуществляет рефлексию научного знания, то есть превращает в явно сформулированные принципы исследования и выясняет соответствие между этими принципами, точнее, их логическую взаимосвязь, а также систематизирует методологический аппарат когнитивных наук. Здесь речь идет уже не об абстрактной, а о реальной возможности реализуемости обоснования математики с учетом специфических особенностей современного математического знания, поскольку способность учитывать прошлый опыт позволяет оптимизировать свою деятельность по исследованию процессов самоорганизации математических теорий.

В частности, конкретизирует Б.Г. Юдин, в философско-методологическом контексте "самоорганизующиеся системы можно определить как системы, способные при активном взаимодействии со средой изменять свою структуру, сохраняя в то же время целостность и действуя в рамках закономерностей, присущих окружению, выбирать одну из возможных линий поведения" [492, с.360–361]. Здесь под структурой понимается совокупность существенных связей между элементами системы, то есть таких связей, которые обеспечивают ее целостность, а самоорганизация представляет собой становление организованности за счет согласованного взаимодействия компонентов внутри системы. При анализе противоположных элементов системы обоснования математики, может возникнуть ситуация, когда выделенные противоположности обладают не более чем мнимой или иллюзорной связью. Акцентируя внимание на этой проблеме, Э.М. Сороко предполагает, что в такой ситуации противоположности "ни реального содержательного разнообразия, ни единства системного качества, которым обычно отличается целостность, представлять собой не могут, ибо нет и быть не может единой меры для различных сущностей" [419, с.117]. Для конструктивного выхода из этого затруднения следует заметить, что в структурном аспекте обоснования математических теорий претерпевает изменение внутреннее строение системы математического знания. На примере обоснования математики можно увидеть, каким именно образом реализуется в исследовании проблемы обоснования принцип целостности, имманентный системному подходу, который является методологической предпосылкой построения самого предмета исследования. Понятие целостности сложно по своему содержанию, поскольку, с одной стороны, в нем синтезируются представления об особенностях целостных объектов, а с другой стороны, оно входит в систему философских категорий как принцип познавательной деятельности. Методологический принцип целостности позволяет преодолеть неполноту и частичность прежних подходов к обоснованию математики и так структурировать предмет исследования, что он априори становится более полным и непротиворечивым.

Согласно внутриматематической концепции возникновения дедуктивной математики, накопление математических знаний с унификацией теоретических способов решения математических задач в конечном итоге привело к тому, что сложилась качественно новая "чистая математика" с дедуктивным методом как основным средством математических доказательств. Поэтому, утверждает В.Я. Перминов: "Мы должны рассмотреть математическую теорию как специфическую самоорганизующуюся систему, проходящую различные этапы своей зрелости, и должны попытаться обосновать то положение, что, восходя по ступеням зрелости, она неизбежно восходит к стадии высшей зрелости и полностью освобождается от внутренних противоречий, которые содержались в ней на начальных этапах ее развития" [337, с.132]. С философской точки зрения, возникновение дедуктивного метода выглядит как проявление закона перехода количественных изменений в качественные. Поэтому его можно рассматривать как необходимое следствие процесса самоорганизации математики, а наблюдаемая стабильность аксиоматической теории множеств говорит также и о непротиворечивости самой аксиоматики. Глубоко размышляя на темы философии математики, известный логик В.А. Успенский рассматривает такие характеристики математического доказательства, как убеждение в истинности и доверие к доказательству. Но, вопрошает он: "Откуда же у математика берется убеждение, что доказанные теоремы, доказательства которых он так никогда и не узнает, действительно являются доказанными, то есть располагают доказательствами?" [452, с.147]. Математика ведь не претендует на безошибочность. Принципы научного исследования открываются в процессе критического размышления, поэтому могут быть подвержены изменению в процессе изучения для получения обоснованных заключений. В силу этого математика является самокорректирующимся процессом. Отвечая на поставленный вопрос с точки зрения обоснования математики можно сказать, что именно самокорректирующая природа математического знания позволяет оспорить любое суждение, но при этом она также дает математикам уверенность в том, что принимаемые математическим сообществом теории являются более правдоподобными, чем все другие альтернативные теории. В хорошо развитой математической теории, в отличие от физической теории, эта диалектика завершается формулировкой зрелой аксиоматики, исключающей ее дальнейшее совершенствование с точки зрения раскрываемого с ее помощью содержания.

Следует выделить еще одну методологическую тенденцию, имеющую отношение к обоснованию, когда современные исследователи, изучающие универсальные сценарии перехода от порядка к хаосу, пытаются увидеть за этим феноменом новый, более глубокий уровень единства природы. Сошлемся поэтому поводу на метафорическое высказывание специалистов в области синергетики: “Помнится, Воланд объяснял Левию Матвею, что свет невозможен без тьмы. Точно так же во множестве конкретных случаев становится ясно – порядок неотделим от хаоса. А хаос порой выступает как сверхсложная упорядоченность” [170, с.27]. С точки зрения упорядоченности сложных системных объектов, современная математика характеризуется таким развитием, в ходе которого происходит самоорганизация математических теорий, в результате чего они обретают достоверность и новую целостность. Но, чтобы постичь эту целостность, не следует предполагать ее независимого существования в качестве абсолютного начала, поскольку, например, постижение целостности программы обоснования математики требует коллективных усилий. Несмотря на аналогию с процедурой освобождения опытных теорий от ложных гипотез, ее принципиальное отличие от формирования абстрактных дедуктивных математических теорий состоит в том, что очистка эмпирических подходов от некорректных допущений в принципе не может быть окончательно закончена. Эмпирический анализ самоорганизации, согласно схеме Б.Г. Юдина, можно описать следующим образом: “исходные объекты → объекты исследования → изучение объектов исследования → синтез знаний об объектах исследования” [492, с.365]. Такой синтез, считает он, будет представлять не что иное, как теорию самоорганизующихся систем. Однако конструирование, например, системной триады обоснования математики будет проблематичным, если заранее не показано, каковы существенные свойства и признаки действующих направлений обоснования математики, ориентируясь на которые можно будет конструировать объект проблемы обоснования.

Для этого целесообразно свести воедино те качества, которыми должны обладать самоорганизующиеся системы, отличающие их от других типов организации. Их можно, например, просуммировать следующим образом: “Первое, и самое главное качество: самоорганизующиеся системы открытые… Второе свойство самоорганизующихся систем – это независимость образующихся структур от того, из какого начального состояния начинает развиваться такая система… Третьим свойством самоорганизующихся систем является такое их поведение, когда под действием внутренних связей среди возможных состояний системы селектируются лишь избранные” [76, с.323]. Следует обратить особое внимание на одну специфическую особенность феномена самоорганизации, выявляющую причину, направляющую системы на путь созидательного развития. Речь идет о том, что открытость системы является необходимым условием для ее самоорганизации. Но является ли это условие достаточным? Вообще говоря, нет, так как система может быть открытой, но не самоорганизующейся. Однако, если рассматривается самоорганизующаяся система, то, как подтверждает Г.И. Рузавин, “пожалуй, бесспорным условием самоорганизации, признаваемым всеми исследователями, которые по-разному интерпретируют ее конкретные механизмы, является требование открытости системы” [392, с.12]. В связи с этим возникает еще один вопрос: можно ли совокупность математических структур и математических теорий современной теоретической и прикладной математики отнести к открытой системе?

В контексте этого исследования напрашивается естественный ответ: да. Вот, например, одна из аргументаций. “Если бы Гильберт оказался прав, то математика была бы замкнутой системой, в которой нет места новым идеям. Существовала бы статичная замкнутая теория, объясняющая в математике все” [474, с.44]. Чтобы математика развивалась, нужны новые идеи и простор для творчества, поскольку недостаточно лишь усердно работать, выводя новые возможные следствия из фиксированного числа базовых принципов. Поэтому современную математику следует считать открытой системой, открытость которой обеспечивает приток новых способов мышления, необходимых для ее перехода в качественно новое состояние. Открытость математики и, соответственно, способов ее обоснования означает их способность в определенных условиях осуществлять созидательные процессы. В частности, отсюда следует более узкое понимание самоорганизации, предполагающее описание процесса перехода системы из менее организованного в более организованное состояние. “У тех, кто занимается математикой профессионально (неважно, принимают ли они сами активное участие в математических исследованиях или просто используют результаты, полученные другими), – резюмирует Роджер Пенроуз, – рано или поздно возникает, как правило, ощущение, что они – всего лишь путешественники в огромном мире, живущем собственной жизнью, в мире, который наделен объективной реальностью, независимой от каких бы то ни было частных мнений, будь это их собственные мнения или предположения других математиков, пусть даже и всеми признанных экспертов” [328, с.35]. То есть математика сама по себе обладает такой “здравостью” и способностью к самоорганизации, на которую не может повлиять отдельно взятый профессиональный математик. Философско-методологический анализ процессов обоснования математики позволяет заключить, что современные математические теории не просто расширили свой объектный мир, включив в него самоорганизующиеся системы, но и сделали человека “системообразующим началом” математического знания, невозможным без различных способов познания.

В пределах каждого из этапов познавательного процесса интуитивное знание можно рассматривать не только как исходное, но и в какой-то мере как ограничивающее и направляющее к последующему дискурсивному и понятийному движению. Отсюда можно заключить, “что исследование целостности, причем не целостности вообще, а целостности того или иного конкретного объекта, начинается на базе интуитивных представлений, или, иначе говоря, мысленного образа данного объекта” [50, с.25]. Для построения целостной картины развития современной математики необходим предварительный философско-методологический анализ различных когнитивных факторов, поскольку любая программа обоснования содержит в себе как рациональные, так и иррациональные допущения. Методологическую сторону процесса исследования целостного объекта можно интерпретировать как объяснение целостности некоторого объекта, помогающего вскрывать внутренние закономерности объекта исследования, благодаря которым обусловлено его качественное своеобразие. “Рассматривая многообразие форм мышления, Гегель раскрывает их единство, обнаруживая несамостоятельность, "идеализированность" каждой формы в составе целостности” [302, с.102]. Но сама эта целостность не может быть рассмотрена только внутренне, а лишь в контексте более широкого единства, в которое объект исследования включен со специфической для него системной организацией. Поэтому большинство используемых в научном познании схем объяснения основаны на стремлении свести их к чему-то внешнему для выполнения обобщающей и интегрирующей функции по отношению к уже достигнутому уровню обоснования на основе редукционистской установки. При таком философском подходе целостность понимается как то, что не удается объяснить, вывести, познать во всей специфике, если исходить лишь из чего-то внешнего по отношению к данному объекту.

Следует отметить такую специфическую особенность математического познания: основания для суждений, являющихся элементами системы математического знания, накапливаются быстрее, чем основания для отдельных изолированных суждений. Это объясняется тем, что в идеальной системе, какой является математика, математические суждения, истинность которых утверждается, связаны без введения каких-либо дополнительных ограничительных суждений со слабыми основаниями. Математические суждения подкрепляются, прежде всего, логически допустимыми основаниями. В частности, логика как исследование “законов мышления” опирается на три основных принципа: принцип тождества, принцип противоречия и принцип исключенного третьего, которые можно рассматривать в качестве условий обоснованного (правильного) мышления. Эти принципы можно сформулировать разными способами, но с точки зрения обоснования предпочтительнее следующие формулировки, которые имеют непосредственное отношение к логике. В принципе тождества напоминается: если суждение истинно, то оно истинно. В принципе противоречия говорится: ни одно суждение не может быть одновременно истинным и ложным. В принципе исключенного третьего утверждается: любое суждение должно быть либо истинным, либо ложным. При обсуждении принципов логики следует обратить внимание на то, что, с одной стороны, ни в одном из основных принципов ничего не говорится ни о каком мышлении, поскольку "человеческое мышление не является предметной областью логики". Но, с другой стороны, можно сказать, что "законы мышления относятся не к человеческому мышлению как временному процессу, а к условиям обоснованного мышления" [203, с.261]. В такой интерпретации становится понятным, что в трех "законах мышления" выявлены наиболее существенные логические свойства суждений, поэтому можно заключить, что они не представляют окончательной формулировки логических принципов современного математического мышления.

Реальная логика, являющаяся основой всякой рациональности, имеет в принципе иррациональные и неформальные аспекты, так как все ее содержание не может быть определено в символических системах. Недостаток имеющихся программ обоснования математики состоял не в их претензии на абсолютность, а в отсутствии методологической теории оправдания абсолютности, присущей по своей природе математическому мышлению. Например, канторовская теория бесконечных множеств содержит в себе такие понятия, которые не имеют реального наполнения, несмотря на их методологическую приемлемость в логическом и математическом отношениях. Одно из наиболее уязвимых мест канторовской концепции бесконечных множеств – это понимание экзистенциальных математических высказываний, то есть высказываний о существовании математических объектов. Поэтому теоретико-множественный подход в духе теории Кантора уводил математическое мышление в сторону математического платонизма. В таком контексте, даже если построение аксиоматической теории по своей форме индуктивно, интерпретации этой теории могут быть вполне платоническими. "В настоящее время существование актуально бесконечных множеств превратилось в догму, в которую верит большинство математиков; более того, математики пытаются внушить веру в эту догму и другим людям. В то же время мы не можем указать какое-либо актуально бесконечное множество в реальном мире – здесь мы имеем дело с конструкцией, расширяющей реальный мир и качественно превосходящей пределы пространства возможностей наших наблюдений" [102, с.11]. Например, вера Гёделя в то, что континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна, вне зависимости от того, способны ли математики доказать ее или опровергнуть, позволяет причислить его к приверженцам платоновской идеи в математике.

Хотя, например, такой авторитет в математической логике, как Пол Коэн, обосновавший недоказуемость знаменитой гипотезы континуума [205], не разделял взглядов Курта Гёделя, полагая, что теория множеств – это не более чем аксиоматическая структура, а не частная модель внешнего мира. Долгое время все бесконечности считались как бы равными друг другу. Экспликации современной теории бесконечных множеств математики обязаны, прежде всего, Георгу Кантору, который задался целью выяснить, какие бесконечности эквивалентны натуральному ряду чисел и какие превосходят его по мощности. Когда он стал искать промежуточное по мощности множество между натуральным рядом чисел и континуумом, что и составляло содержание гипотезы континуума Кантора, одна из его безуспешных попыток построения такого множества вошла в историю математики под названием канторова множества. Но, несмотря на то, что мера Лебега этого множества равна нулю, оно оказалось равномощным континууму. Неудачные попытки найти промежуточное по мощности множество склонили Кантора к предположению, что вслед за счетным множеством в иерархии мощностей идет множество мощности континуума. Хотя на решение континуум-гипотезы ушло почти сто лет, усилиями Гёделя и Коэна совершенно неожиданно выяснилось, что эту гипотезу можно с равным успехом принять, как это делают современные математики, или отвергнуть.

Спрашивается, откуда тогда у профессиональных математиков берется уверенность в надежности их математических конструкций? Возможно от того, что фактически психологией работающих математиков, отвлекающихся от “отражающего аспекта модели” и умеющих погружаться в математический мир абстракций разрабатываемых теорий, является умеренный платонизм. Психология математика такова, что придуманные структуры он считает атрибутами самого мира, а это является источником многих затруднений при обосновании математики. В генезисе математических структур важно понять активную роль субъекта. Рассматривая математические структуры как продукты мысли, математику можно исследовать и в контексте активности по созданию таких структур, опирающихся на глубинные структуры психики. Даже чувственный образ множества возник в математике благодаря нашей способности мыслить совокупность как единое целое. Математические структуры обладают той уникальной и отличительной способностью, что, будучи однажды сформулированными, они могут логически развиваться без дальнейшего обращения к действительному миру. Но для того, чтобы эта работа была плодотворной, по мнению такого профессионала, как французский математик Анри Лебег, “нужна редкая способность не только проникать в чужую мысль, но также придумывать и распознавать различные способы обращения с проблемой; короче нужны качества философа” [229, с.10]. Отметим, что сам Лебег считал, что математика – это “внутренняя наука”, рождающаяся и развивающаяся от “столкновения ума с умом”, а вне человечества ее вообще не существует.

В качестве иллюстративного примера можно рассмотреть формирование понятия интеграла Лебега, которое не было связано с целью изучения материальной действительности, а происходило по внутренним, чисто математическим причинам. Для реальных инженерных и физических проблем того времени было достаточным то определение интеграла, которое дано французским математиком Огюстеном Коши и немецким математиком Бернардом Риманом. Французский математик Анри Лебег ввел новое понятие интеграла, решая математическую задачу о наиболее общем классе функций, в котором сохраняется связь между производной и первообразной, определяемая формулой Ньютона-Лейбница. Затем венгерский математик Фридьеш Рисс указал на существенную роль интеграла Лебега при доказательстве полноты класса интегрируемых функций как метрического пространства, подтвердив тем самым математическую корректность новой конструкции. Эвристический потенциал интеграла Лебега проявился в том, что он понадобился и физикам, например, при обосновании квантовой механики, а многие другие математические понятия так и не вышли за пределы математики. Считается общепринятым, что математике присущи следующие три характерные черты, отличающие ее от других наук. Во-первых, все используемые понятия строго определяются, во-вторых, все утверждения строго доказываются из аксиом, в-третьих, математика сложна и непонятна в такой вызывающей уважительный трепет степени, какая недоступна ни одной другой науке. Достаточно упомянуть математическую концепцию теории категорий, в которой просматривается связь с системным мышлением, с понятием системы и структуры как основной характеристики системы.

Признание существенной роли системно-методологического подхода в обосновании математики состоялось лишь во второй половине прошлого века во многом благодаря возникновению новой фундаментальной математической теории – теории категорий, по-своему развивающей системный принцип в математике. Нередко высказываются мнения о том, что теория категорий, наряду с теорией множеств, служит универсальным языком современной математики. Изначально теория категорий была предложена в 40-х годах прошлого века американскими математиками Саундерсом Маклейном и Самуэлем Эйленбергом в качестве полезного современного языка для алгебраической топологии. Работая в области топологии, они пришли к выводу о необходимости общего понимания естественного соответствия между объектами различных математических теорий, таких, например, как множества, группы, многообразия и другие, что в свою очередь способствовало подтверждению идеи единой природы самых разных математических объектов в алгебре, топологии и алгебраической геометрии. Создатели теории категорий искали “новые конструкты, которые были бы аналогичны наиболее эффективным понятиям описанных областей, с одной стороны, задающим как бы "статику теории" (группа, множество, топологическое пространство), а с другой – задающим динамику, преобразование объектов (функция, оператор, отображение)” [97, с.95]. Не стремясь к математической строгости, категорию в математике можно интерпретировать как диаграмму в форме триады, отображающей факт существования композиции двух последовательных переходов. Существенное методологическое отличие теории категорий от теории множеств состоит в том, что в последней главное отношение – это принадлежность элемента множеству, а в первой – это преобразование (или отображение) одной системы в другую. Поэтому можно сказать, что теория категорий является тем современным концептуальным каркасом, который необходим для философского анализа математических структур.

Необходимо отметить трудности усвоения категориального языка, состоящие в его высокой абстракции. Поэтому с философской точки зрения пока не сформулированы наиболее фундаментальные проблемы этой теории и не выявлены ее связи с опытными науками. Значение теории категорий в том, что это не просто новая фундаментальная теория, а универсальный язык современной математики, дающий динамическую картину математического мира, отличающую его от теоретико-множественной интерпретации. По мнению философа математики А.В. Родина, “категорную философию” можно репрезентировать следующим образом: “Любой данный тип объектов нужно рассматривать вместе с преобразованиями объектов данного типа друг в друга и в самих себя. Замечая, что всякий объект можно формально заменить тождественным преобразованием данного объекта в себя, можно предложить и более сильную "гераклитовскую" версию "категорной философии", согласно которой только понятие преобразования (или процесса) является для науки фундаментальным, тогда как понятие объекта играет в ней лишь вспомогательную роль” [380, с.71]. В связи с этим интересно отметить, что сам термин “теория категорий” возник у ее авторов из их общего интереса к философии, в частности к философии Канта. Отличие от классических философских категорий состоит в том, что математические категории возникают в результате абстрагирования от конкретных математических объектов, обобщая эти частные объекты математического познания и проясняя их свойства с более общих методологических позиций.

Наиболее эффективно теория категорий проявляется в тех разделах, которые развиваются под влиянием внутриматематических источников, например, при унификации аксиоматической теории гомологий. Но, будучи развитием системного подхода в обосновании математики, данная теория дает возможность построения и реализации теоретико-категорной модели становящейся математической теории. Теория категорий изменила и философские воззрения на основания математики, расширив возможности свободы математического мышления, но как всегда за это пришлось платить большой абстрактностью даже для математики, поэтому у нее есть связанные с этим проблемы понимания. Вот как их образно описывает профессиональный математик С.С. Кутателадзе: “Теория множеств царствует в современной математике. Шутовская роль "абстрактной чепухи" в математике отведена теории категорий. Из истории и литературы общеизвестно, сколь сложны и непредсказуемы отношения и взгляды правителя и шута. Нечто подобное наблюдается во взаимосвязях и взаимозависимостях теории множеств и теории категорий” [221, с.А8]. Если первая оперирует множествами и отношениями принадлежности между ними, то вторая оперирует объектами и морфизмами (стрелками на диаграмме). Поэтому можно резюмировать, что стационарному миру Цермело–Френкеля, перенасыщенному образцами равномощных множеств, противостоит свободный мир категорий – “ансамблей произвольной природы”, определяемых динамикой своих преобразований. Можно также предположить, что в рамках теории категорий осуществляется социализация теоретико-множественной математики, поскольку, например, пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, а как член сообщества подобных себе математических объектов, обеспечивающих новые степени свободы в понимании целостности концепции обоснования современной математики.

В науке и искусстве можно обрести лишь иллюзию целостности или самозавершенности и до тех пор, пока эта иллюзия не принимается за реальность, она не вызывает недоразумения. Тем не менее, как отмечал еще Аристотель, “гипотеза, устанавливающая идеи, опрометчиво удваивает число вещей, которые надо объяснять” [16, с.31]. Математика и логика не идеально строги и не идеально дедуктивны, они лишь более строги и более дедуктивны, чем эмпирические науки. Поэтому математики не считают нужным сковывать себя “цепями” жесткого гильбертовского формализма в своей повседневной работе и, несмотря на недостаточность гильбертовской концепции доказательства, современная математика продолжает жить в приложениях, хотя теория математических доказательств нуждается иногда в новых формулировках. Именно выявление системных связей позволяет абстрагировать определенные аспекты предметной области и изучать их отдельно от других аспектов, что обусловливает возможность достижения поставленной цели исследования. Анализируя современное развитие математики, французский математик Жан Дьедонне почти 50 лет тому назад по этому поводу писал: “Конечно, как всегда, приходится платить за это большей "абстрактностью". Однако, как теперь уже твердо установлено, то, что крайне абстрактно для одного поколения математиков, тривиально для следующего, и гневные крики, еще слышные по временам, обычно исходят от пожилых людей, явно опасающихся не поспеть за молодежью. Однако ныне более нетерпимы к этому проявлению человеческой слабости, чем скажем, тридцать лет назад, и традиционные шутки начет "жесткой" и "мягкой" математики уже начали приедаться” [139, с.11]. Формализация была введена для устранения идеальных элементов и для избавления от недостаточно надежных методов обоснования математической теории.

Следуя главному тезису этого философского исследования, целостность программы обоснования современной математики эксплицируется с помощью философско-методологической триады действующих направлений обоснования математики. В качестве третьего дополнительного аргумента, поддерживающего главный тезис этого философского исследования, который методологически важен в контексте синтеза направлений обоснования современной математики, рассмотрим следующий тезис. Основная трудность обоснования математики заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия “обоснование”, что предполагает когнитивный релятивизм в обосновании, а также в разногласиях, касающихся путей развития современной математики. Следует отметить, что при формировании нового концептуального подхода к обоснованию математики главная структурная особенность целостной концепции обоснования – это ее разделение на направления, существующие только в контексте целого, которые не могут полноценно функционировать вне их соотношения друг с другом для адекватного проявления. Кроме того, по поводу самого понятия “обоснование” встречаются разные философские трактовки. Например, “перефразируя Германа Вейля, можно сказать, что математика не отдельное техническое достижение, а неотъемлемая часть человеческого существования во всей его общности – и в этом она находит свое обоснование” [186, с.560]. С точки зрения обоснования математики исследование системной целостности концепции обоснования предполагает решение двух взаимосвязанных задач. Она из них связана со структуризацией направлений обоснования математики в соответствии с принципом целостности, а другая – с адекватным отображением на предметно-содержательном уровне целостных характеристик развития математического знания на современном этапе ее развития.

Поэтому, говоря об обосновании математики на современном этапе, необходимо понять перспективу ее дальнейшего развития. Анализируя дальнейшие пути развития математики, Жан Дьедонне считает, что математика развивается, по существу, двумя различными путями. Можно опять, с точки зрения философской рефлексии, представить его рассуждения в виде нового тезиса и антитезиса. Начнем с тезиса: “Математики, которых я мог бы назвать тактиками, штурмуют задачу, используя только старое испытанное оружие и попросту полагаясь на свою способность по-новому скомбинировать традиционные рассуждения и таким образом добиться решения, ускользавшего при прежних попытках” [139, с.3]. Теперь сформулируем антитезис: “Напротив, стратеги никогда не удовлетворяются, пока понятия, охватываемые проблемой, не будут столь тщательно проанализированы, а их связи так ясно освещены, что окончательное решение представится почти тривиальным” [139, с.3]. Несмотря на то, что второй подход может потребовать длительного развития на первый взгляд “посторонних” теорий, Дьедонне был уверен, что оба подхода существенны для развития математики, то есть необходим синтез этих методологических подходов. В истории науки подвергались и продолжают подвергаться изменению ряд существенных сторон научного мышления, поэтому в последнее время в философии науки такие сдвиги принято называть изменением стиля мышления.

Когда мы говорим о роли науки в современной цивилизации, то, как правило, ссылаемся на научно-технический прогресс. Но, почти не обсуждается другой аспект – влияние науки на развитие человеческого мышления, формирование рациональности под непосредственным воздействием научного стиля мышления. Это влияние идет по различным направлениям с помощью обогащения понятийной базы и рефлексивного применения категорий мышления, а также на основе трансформации когнитивных схем. Речь идет о концептуальном потенциале понятия стиля научного мышления в философии науки, которое коррелируется с проблемами социокультурной детерминации постнеклассического научного знания. Для понимания реального стиля современного математического мышления необходимо глубже осознать природу стиля мышления на базе философских представлений. “Стиль мышления выражает основные, исходные особенности познания на том или ином этапе его развития, – поясняет Ю.В. Сачков, – а потому его знание позволяет "схватить" особенности постановки и анализа рассматриваемых исследовательских задач. Соответственно, изменения в стиле мышления ведут к изменениям в исходных представлениях о том, что значит понять и объяснить в науке” [403, с.29]. Поэтому стиль математического мышления можно рассматривать как системное образование, выступающее в качестве системы специфических методологических черт познания на данном историческом этапе развития математики, которые внешне проявляются в конкретных особенностях дисциплинарного процесса математического познания, отрефлексированных в методологии математики.

При философском анализе стиля научного мышления, например, в современной математике, неизбежно обращение к истории формирования научных теорий в контексте научно-познавательной деятельности с учетом единства смыслового пространства научного сообщества в тот или иной исторический период. Размышляя о природе математического умозаключения Анри Пуанкаре писал: “Самая возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергнуть сомнению? Если, напротив, все предложения, которые она выдвигает, могут быть выведены одни из других, по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии?” [361, с.11]. Это противоречие актуализируется, например, при прочтении какой-нибудь математической книги, на каждой странице которой автор выражает намерение обобщить уже известные и доказанные теоремы. Можно ли предположить тогда, что математический стиль мышления ведет от частного к общему, то есть является индуктивистским? Если да, то тогда почему, говоря о математическом методе, принято называть его дедуктивным? Философско-методологический анализ математического стиля мышления показывает, что математическое умозаключение содержит в себе особый род творческой силы.

Для понимания проблемы стиля мышления в математике, следуя Имре Лакатосу, проанализируем дедуктивистский и индуктивистский стили мышления. Заметим, что, с одной стороны, “согласно дедуктивистскому стилю все высказывания (в теории) истинны, а все выводы обоснованы. Математика, таким образом, предстает как постоянно увеличивающееся множество вечных, непогрешимых истин” [227, с.210–211]. Но существенный недостаток дедуктивистского стиля мышления, прежде всего с точки зрения философии математического образования, состоит в том, что он скрывает борьбу мнений и генезис истории получения математического результата. В науке существует давняя традиция, относящаяся к индуктивистскому стилю мышления, при котором проблемная ситуация, предположение или гипотеза, выступающие мотивом постановки задачи, скрываются. Поэтому, с другой стороны, “индуктивистский стиль предполагает, что ученый начинает исследование в состоянии "чистого" сознания, когда в реальности его сознание переполнено идеями” [227, с.211]. Для образной характеристики можно опять привести в пример статью, написанную в этом стиле, которая дает некоторое обобщение известных результатов, что обычно и является итогом статьи. Противопоставление конечных математических результатов процессу их получения в философском плане возможно при предположении об особом “идеальном” статусе существования математических объектов, дающих им “спокойное” платонистское существование.

Заметим также, что допустимость дедуктивистского и индуктивистского стилей мышления в математике можно рассматривать как утверждение перспективного философского плюрализма или различных интерпретаций стилей мышления в философии математики. Например, в качестве разумной альтернативы можно сослаться на подход американского философа Тома Рокмора, использующего философские мотивы, возникающие в релятивизме. “Мой тезис, – поясняет он, – заключается в том, что примерно со времен Канта произошел сдвиг от эпистемологии к герменевтике, при котором дедуктивный подход к знанию, характерный для фундаментализма и напоминающий, в той или иной частной реализации, эвклидову геометрию, был заменен интерпретацией из разных перспектив, – сдвиг, во многом параллельный возникновению неэвклидовых геометрий, что с начала XX в. вызвало создание множества несовместимых математических школ" [384, с.83]. В философском пристрастии к математике, как модели строгого знания, можно по существу констатировать переход от фундаментализма как стратегии, согласно которой знание заключается в непосредственном постижении когнитивного объекта, к нефундаменталистской стратегии, или к герменевтической альтернативе, как к новому философскому учению о понимании. В философии науки благодаря философским исследованиям Карла Поппера, который выдвинул так называемый принцип фальсификации, согласно которому критерий научности теории задается возможностью ее опытного опровержения, уже зафиксировано, что индукция не может отождествляться с логикой научного открытия. Критически рассматривавший процесс развития науки и методологии исследовательских программ Имре Лакатос, для которого доказательства и их теоретические опровержения составляли суть научного исследования, показал, что дедукция тоже не является универсальной логикой математического открытия. Поэтому заключаем, что рассмотренные стили мышления порождают узкий диалект, который "атомизирует" науку, но их можно совместить в рамках системного стиля мышления.

Благодаря проведенному философскому анализу, можно утверждать, что понятие стиля научного мышления содержит в себе две ключевые идеи. "Во-первых, идею внутренней смысловой целостности истории познания, реализующейся в стиле как специфической характеристике языка различных периодов развития науки и, во-вторых, идею поливариантности, предполагающую стилистическое многообразие выражения в научном языке знания об одном и том же фрагменте мира" [360, с.65]. Идеи целостности и поливариантности открывают новые возможности перед философско-методологической рефлексией над проблемой обоснования математики. Но эти философские идеи, акцентирующие и концептуализирующие методологический смысл понятия стиля научного мышления, например, в сложноорганизованном математическом знании, обнаруживают его не непосредственно, для чего требуется специальная математическая подготовка, а в контексте анализа социально-психологических аспектов математического мышления. С точки зрения проблемы обоснования математики и в плане конкретизации стиля математического мышления особую эпистемологическую значимость представляет смысловая целостность познавательной деятельности, которая фиксируется стилем научного мышления. Математический стиль мышления, согласно философскому определению В.Э. Войцеховича, "это целостное единство содержания и формы математического творчества и его результата – научного произведения; это единство идеи и ее доказательства (обоснования и изложения). Стиль является неотъемлемой характеристикой личности автора и его математического творчества (под личностью здесь понимается отдельный ученый, сообщество, научная школа)” [99, с.495]. Существенные отличия математического стиля мышления от “повседневного” мышления обусловлены абстрактностью математических объектов и конструкций, а также требованиями, предъявляемыми к языку математики.

Например, постепенное расширение натурального ряда последовательно приводит к появлению отрицательных, рациональных, а с помощью идеи непрерывности, вещественных чисел. Действительные числа необходимы вовсе не для математических вычислений. Их главная методологическая роль состоит в том, что они делают работоспособными многие теоретически важные инструменты математического познания, глубинная философская суть которых – это придание строгости, точности и “законности” предельным переходам, что практически обеспечивает возможность дифференцирования, интегрирования и использования многих функций, поскольку несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что весь математический анализ базируется на понятии предела. Процесс методологического расширения понятия числа происходит под контролем философской идеологии выполнимости алгебраических операций и заканчивается на комплексных числах. А что будет, если начинать не с натурального ряда, а с чего-то другого? Правда, при этом становится не ясно, что понимать под сложением и умножением, но именно при таком прорыве в другую нишу понимания рождается абстрактная алгебра, в частности, векторное исчисление. Могут быть и потери, так для векторного произведения не выполняются свойства ассоциативности и коммутативности, но зато справедлив дистрибутивный закон. В чем же тогда реальные перспективы такого стиля мышления? “Многие теоремы, доказательство которых в "довекторные" времена занимало десятки страниц, стали доказываться в одно касание. Появилась обозримость, виденье. Открылись широкие возможности решения новых задач. Возникло громадное поле исследований, и хлынул поток результатов” [61, с.16]. Именно такие факторы и определяют поворотные пункты развития математики, которые рождаются на основе создания новых категорий математического мышления. Они не обязательно зависят от решения математически сложных задач типа великой теоремы Ферма. Следует отметить, что сложная задача может стать вехой в развитии математики лишь в том случае, когда ее решение приводит к появлению новых методологий, открытие которых, как правило, имеет источником не одну, а целую совокупность причин, как, например, при открытии исчисления бесконечно малых в истории математики.

Математики уже сталкивались с такой философской проблемой, когда длительное неприятие неевклидовых геометрий было обусловлено не наличием математических ошибок, а определенными философскими представлениями. Следует отметить, что значение математики для философии, вообще, и философии науки, в частности, связывают в основном с фундаментальным открытием неевклидовых геометрий. Критиков смущало не отсутствие доказательства непротиворечивости неевклидовой геометрии, а прежде всего то, что они привыкли к геометрии, имеющей дело с реальным пространством, которое описывалось евклидовой геометрией. С одной стороны, как отмечал Гильберт, “хотя евклидова геометрия является непротиворечивой в самой себе системой понятий, отсюда еще не следует, что она имеет законную силу в действительности. Так это или не так – может решить лишь наблюдение и опыт” [114, с.434]. Но, с другой стороны, например, неевклидова геометрия Лобачевского реально показала, что математические теории не определены исключительно одним физическим опытом и нуждаются в особом обосновании. Очевидно, что неевклидовы геометрии являлись теоретическими конструкциями математиков, а их непротиворечивость была доказана математиками в предположении, что непротиворечива классическая евклидовая геометрия. Позднее вопрос об истинности определенной геометрической теории оказался перенесенным в плоскость физического рассмотрения. В действительности физика, а не математика, решает сейчас, какая из геометрий истинна в смысле соответствия реальности. С точки зрения философского обоснования математики более корректное утверждение состоит в том, что разнообразные геометрии только доказывают возможность существования логически непротиворечивых систем, которые могут найти применение в физических теориях. Становление неевклидовых геометрий стимулировало концептуальное оформление философской идеи релятивизации сознания, которая по существу репрезентирует тенденции переосмысления классического стиля мышления в математике.

Знание современных стилей мышления обладает определенной философской и эвристической ценностью. Для реального стиля математического мышления характерно то, что оно не выражает истину о внешнем мире, а связано с нашими способностями к умственным построениям. Чувственные интуиции, в том числе и математического знания, идентифицируются, прежде всего, как источник познания случайных истин, а концепции, вообще говоря, в своем большинстве ассоциируются по необходимости с неизменными истинами. Не случайно, в связи с открытыми в начале XX века парадоксами теории множеств, Давид Гильберт в докладе “О бесконечном” (1925) говорил: “Подумайте в математике, – этом образце надежности и истинности, – понятия и умозаключения, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если само математическое мышление дает осечку?” [114, с.438]. Но существует вполне удовлетворительный путь, следуя по которому можно избежать парадоксов. Он основывается на философском анализе плодотворных способов образования математических понятий, годящихся к дальнейшему использованию, и на установлении такого уровня надежности умозаключений, имеющихся в тех разделах математики, в которых никто не сомневается. Достижение этой цели в современной математике возможно лишь на пути философского выявления сущности бесконечности.

Следует заметить, что к математической истине, как готовому результату, понятие истины не применимо, поскольку истина лежит в конце, а не в начале математического исследования. Хотя это не исключает того, что математические истины нуждаются в коррективах, так как истинное знание должно сочетать в себе фундаментальную глубину с комплексной широтой охвата подчас весьма отдаленных фактов, влияющих на объекты теоретических математических исследований. Но, всякая научная интеллектуальная деятельность, в том числе математическое рассуждение, наряду с логической аргументированностью характеризуется еще и особым стилем. Поэтому нет смысла противопоставлять эти два аспекта или искать между ними компромисс.

С точки зрения философии науки важно понять, что можно прояснить с помощью характеристики понятия стиля. Несмотря на различие стилей между отдельными математиками и математическими школами, они стремятся к строгости и обоснованности, поэтому именно математика остается наиболее последовательной и успешной интеллектуальной попыткой создать эффективное мышление, а огромные достижения современной математики показывают, на что способен человеческий разум. В любых ситуациях, по-прежнему, востребованы рационально обоснованные нормы и принципы методологии математического познания. В качестве типичного примера можно рассмотреть удивительный знакочередующийся ряд Лейбница $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$, заменяющий беспорядочное чередование цифр в десятичном разложении числа π на регулярную последовательность членов бесконечного числового ряда. Такие ряды смогли сделать рациональной ту математическую реальность, которая казалась исключительно иррациональной. Нельзя не согласиться также с тем, что результатом математической работы вне зависимости от стиля, которого придерживаются профессиональные математики, являются доказательные рассуждения. Если рассматривать доказательство как процесс, то независимо от стиля мышления он не обходится без релятивизации нерациональных аспектов познания. В связи с этим философ математики Л.Б. Султанова выделяет аналитический и интуитивный стили мышления. Можно сказать, считает она, что “математик обладает интуитивным стилем мышления, когда, работая долго над проблемой, он неожиданно получает решение, которое еще формально не обосновал” [435, с.67]. При интуитивном ответе на вопрос плохо осознается сам процесс его получения, основанный на восприятии проблемы в целом, так как интуитивное мышление осуществляется в виде скачков, с пропусками последовательных звеньев решения. Это отличает его от аналитического стиля мышления, поскольку аналитическое мышление позволяет выразить отдельные этапы в процессе решения задачи, то есть оно принимает выверенную форму дедуктивного рассуждения, которое в отличие от интуитивного мышления требует проверки выводов аналитическими средствами, хотя они, по существу, дополняют друг друга. Аналитический язык математики добился больших успехов в теории познания, но поскольку не существует общепринятого подхода к теории познания, то аналитический стиль мышления не является единственным методом научного познания в философии науки.

Все же представляется вполне уместным зафиксировать следующее: говоря о современном стиле математического мышления в контексте обоснования решений научных проблем, мы имеем в виду нечто гораздо более сложное, которое определяется общими чертами современного состояния философии науки в целом. В роли нестандартного примера экспликации методологических трудностей поиска конструктивного решения, с точки зрения аналитического стиля мышления, можно рассмотреть одно из основных достижений математики XX века. Оно связано с новыми математически строгими доказательствами теории усреднения, восходящей к теории усреднения в динамических системах Лагранжа и Лапласа об устойчивости солнечной системы и о возмущениях кеплеровских эллипсов. Сложность результатов этой теории напоминает сложность результатов аналитической теории чисел, отдельные утверждения которой она использует. Один частный, но важный результат указанной теории описывает очень странную методологическую опасность, порожденную аналитичностью динамической системы, линеаризованной в состоянии равновесия, которая может потерять устойчивость при переходе через мнимую ось пары собственных чисел системы. Этот феномен в математической литературе называется “опасностью аналитичности”. Его философская интерпретация, в контексте нового методологического подхода к системе направлений обоснования математики, состоит в том, что опасно системе быть слишком совершенной, то есть с точки зрения математики аналитической. Безопаснее быть менее совершенной, так как, по мнению академика В.И. Арнольда, “это совершенство может сделать незаметными признаки уже имеющейся потери устойчивости и затянуть момент потери устойчивости настолько, что вызванные переходом на новый режим потрясения делаются опасными для системы” [20, с.33]. Именно так, считает он, обстояло дело в ряде реальных катастроф, когда, например, операторы не замечали уже появившейся опасности, излишне полагаясь на совершенство используемых ими устройств, что приводило к затягиванию времени на анализ потери устойчивости.

В общем случае аналитически сложная система, состояние которой после момента “жесткой потери устойчивости” может длительное время оставаться вблизи положения равновесия и которая в отличие от “мягкой потери устойчивости”, эволюционирует по другому сценарию. Потеря устойчивости называется “мягкой”, если после потери устойчивости системы наблюдаемые величины становятся уже не постоянными, но все же близкими к постоянным периодическим функциям, изображающим колебания малой амплитуды вблизи старого постоянного значения. При “жесткой” потере устойчивости система характеризуется тем, что фазовая точка быстро уходит от потерявшего устойчивость положения равновесия к какому-нибудь совершенно другому режиму движения, что может в реальных системах привести к катастрофе. В частности, в докладе “"Жесткие" и "мягкие" математические модели”, посвященном применению теории дифференциальных уравнений в экологии, экономике и социологии, В.И. Арнольд делает следующий важный методологический вывод: “Жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям математической модели (делающим ее мягкой)” [21, с.17]. Напомним, что с точки зрения эпистемологии, следует разделять оправдание математики через ее использование и обоснование. В этом одно из существенных отличий математики от других наук, в том смысле, что вопрос о ее обосновании не может быть решен только на аргументах опыта. Заметим, что требование обоснованности математических результатов остается характерной чертой математики. Поэтому можно заключить, что, рассматривая обоснование и развитие современной математики, философски целесообразно говорить о системном стиле мышления.

Для понимания взаимосвязи направлений обоснования современной математики необходим новый образ мышления, отличный от анализа, а именно – системное мышление. Прежде всего, обратим внимание на отличие аналитического и системного подходов к проблеме обоснования. Аналитическое мышление в проблеме обоснования представляет собой трехступенчатый мыслительный процесс, в котором сначала объект исследования разбивается на части, затем пытаются анализировать поведение каждого элемента в отдельности, а после этого, наконец, происходит синтез полученных суждений для объяснения целого. Системное мышление в обосновании математики изучает ее с философской точки зрения многомерности, открытости, целостности и рассматривает роль системы обоснования в функционировании единого математического знания. В основе концепции системной методологии, наряду с активным участием субъекта исследования, реагирующего на последствия культурных установок, лежит моделирование, которое состоит из двух отдельных стадий – идеализации и реализации. Системная методология трудно поддается полной и четкой спецификации, поскольку в системном моделировании, образно говоря, столько же философии, сколько и науки. Поэтому философски целесообразнее иногда говорить о не столь строго определенном предмете как системная методология, а, например, о “системном мышлении” как совокупности методов и способов исследования, а также описания и способов конструирования систем. Интуитивные представления о системном мышлении могут быть конкретизированы при обращении к его истории. “Как хорошо известно, – напоминает В.Н. Садовский, – историческая последовательность научных событий – открытий, формулирования гипотез, построения теорий и т.д. – часто не совпадает с последовательностью влияния этих событий на научное сообщество. Именно такая ситуация имела место с системным мышлением” [400, с.26]. В частности, на становление и развитие системного мышления, с точки зрения обосновательной деятельности в философии математики, целесообразно посмотреть в аспекте организационных принципов системного мышления.

Во-первых, необходимо отделить процесс формулировки гипотезы при разработке адекватной предпринятому исследованию модели от конкретизации и выработки решения. Наибольшие трудности создает способ формулировки гипотезы, исходя из имеющихся в нашем распоряжении, пусть не адекватных, но уже готовых решений. Учитывая многообразие различных подходов к обоснованию математики, существующие подходы – это весьма удобная защита от реальности, точнее от реальных проблем современного математического знания. Во-вторых, чтобы обеспечить формулировку гипотезы исследования безвредного влияния готовых решений, следует независимо от других заниматься контекстом, проблемой и решением. Американский специалист по системному проектированию Джамшид Гараедаги выделяет исходные посылки системного мышления, которые тезисно кратко можно сформулировать с помощью следующих положений. Во-первых, “с системной точки зрения, ни проблему, ни ее решение рассматривать вне контекста бессмысленно”. Во-вторых, “с точки зрения системного мышления, именно решение должно подгоняться под проблему, а не наоборот”. Поэтому, в-третьих, “следует разрабатывать новые схемы, а не полагаться на ряд одних и тех же давно известных решений” [104, с.288]. Отсюда следует, что философской спецификой системного стиля мышления является разделение трех стадий исследования – понимание контекста, формулировка проблемы и выработка решения.

С точки зрения проблемы обоснования, системная постановка проблемы предполагает ряд методологических требований. Рассматривая системный подход как методологическое направление научного исследования, Э.Г. Юдин считает: “Во-первых, это должна быть новая постановка проблемы, позволяющая по-новому увидеть объект и очертить реальность, подлежащую исследованию. Во-вторых, должен быть выполнен минимум условий, делающих последующее исследование системным” [496, с.147]. К этим условиям можно отнести целостность объекта исследования, вычленение системообразующих связей, выявление структурных характеристик и т.д. Если говорить о системном подходе в обосновании математики, то следует отметить, что процесс внедрения новых методологических идей в научное познание подчиняется в конкретно-научном знании своим особым, пока еще полностью не исследованным закономерностям. Так, при заметных успехах известных систем научного поиска, – анализ, синтез и бихевиоризм, – ориентирующихся на поведение и процесс, они по-разному пытаются увидеть целое. Напомним, что анализ был основой классической науки, полагающей, что целое есть сумма частей, поэтому для понимания необходимо и достаточно понять его структуру. Синтез признавал основной философской характеристикой системы ее конечный результат, то есть был главным методологическим инструментарием функционального подхода. Бихевиоризм, акцентирующий внимание на вопросе “как?”, ориентировался на процесс, чтобы найти подход к определению целого.

Конкретизация этих подходов, с точки зрения системного стиля мышления, состоит в том, что увидеть, например, целостность новой концепции обоснования математики можно только при одновременном философском восприятии структуры, функции и процесса, которые как три стороны одного и того же явления определяют целое или дают возможность его понять. По мнению Джамшида Гараедаги, “структура выявляет компоненты и их связи; функция обуславливает полученные результаты; процесс в явной форме описывает последовательность тех действий и технологий, которые необходимы для производства результата” [104, с.166]. К этому можно добавить, что классическая рациональность занимается вопросами структуры, вокруг которой строится объяснение, и которая задается в математическом мышлении как целостность, то есть занимается анализом. Неклассическая рациональность основное внимание уделяет функциям, которые в контексте философско-математического исследования не обязательно должны быть детально расчлененными, то есть занимается синтезом. Постнеклассическая рациональность выделяет сам процесс, с одной стороны, дающий возможность установить обоснованность целостного восприятия системы, включающего все эти три составляющие или направления исследования, а с другой стороны, представление о целостности, например, программы обоснования математики, в значительной степени контролирует сам процесс познания.

Структурная и функциональная стороны системного типа мышления обладают относительной самостоятельностью. Их характерные отличия, в интерпретации Э.М. Сороко, проявляются в следующем: “Структурная организация есть тип, порядок и т.п. распределения составляющих системы как частей в целом, способ их связи, соподчиненности, характер иерархии. <…> Функциональная же организация по существу представляет собой известный порядок и последовательность в выполнении системой необходимых ей действий, направленных на достижение ближайших и долговременных целей" [419, с.132]. Несмотря на относительную самостоятельность структуры и функции как двух противоположных сторон системы, можно говорить об их единстве в стратегии системного стиля мышления. Поскольку структурная организация системы формируется таким образом, чтобы наилучшим способом отвечать выполняемым системой функциям. Поэтому функциональную организацию системы можно интерпретировать как ее структурную организацию в процессе ее развития, с точки зрения целесообразной деятельности и способов ее самоорганизации. В таком контексте структура репрезентирует "моментальную фиксацию" состояния системы в процессе ее развития. Добавим к этому, что среди основных свойств систем, связанных со структурой, можно выделить целостность, то есть первичность целого по отношению к частям. Кроме того, к свойствам систем, связанных с функциями, относится синергичность, то есть взаимодействие компонентов, усиливающих эффективность функционирования системы. Наконец, к свойствам систем, связанных с особенностями процесса ее развития, относится адаптивность, то есть стремление к состоянию устойчивого равновесия. Следовательно, можно заключить, что, с точки зрения системного стиля мышления, процесс становления математических теорий призван объяснить, каким образом математические структуры выполняют функцию целостного восприятия при их взаимодействии, основанного на надежности всей совокупности современного математического знания.

Многообразие употребления понятия "стиль мышления", фиксирующего внимание на устойчивых тенденциях познавательного процесса на конкретном историческом этапе, приводит к следующему вопросу: в чем проявляется своеобразие системного стиля мышления? При ответе на сформулированный вопрос сошлемся на мнение специалиста в данной области И.Б. Новика: "Думается, что эта специфичность прежде всего связана с обобщающе-синтетической природой системных исследований: в них аккумулируются элементы всех прежних стилей, интегрированных в целостное методологическое общенаучное и междисциплинарное образование" [311, с.7]. С точки зрения методологии системного стиля мышления основной методикой его изучения служит вычленение из реального познавательного процесса, например, обоснования математики, обобщающих тенденций, которые, во-первых, констатируют реальное состояние математики, а во-вторых, намечают методологически возможные пути ее прогресса. В контексте проблемы обоснования единство современной математики в виде "расчлененной целостности" пока что в философии математики не реализовано. Но можно предположить, что мера единства математического знания, которая доступна современному этапу развития математики, философски фиксируется в системном стиле мышления. Известно, что любой серьезный шаг в прогрессе познания зависит от философско-методологической разработки новых стилей мышления. К наиболее фундаментальной особенности системного стиля мышления в проблеме обоснования математики можно отнести его ориентацию на интеграцию системного и синергетического движения мысли, реализуемого в компьютерной математике. Следует также отметить, что хотя системный стиль мышления обладает высокой степенью общности, это не превращает его в особую философскую методологию, поскольку системный стиль мышления, например, в подходе к решению проблемы обоснования математики дает лишь инструментарий решения сложных философских проблем. Отсюда следует важный вывод о том, что стратегия исследования проблемы обоснования современной математики должна включать анализ как актуального, так и потенциального состояния этой сложной системы знания.

Даже сегодня любой математик, защищающий классическую строгость, несмотря на переусложненность современных математических доказательств, найдет немало союзников своей правоты. Но что тогда можно сказать об исторической перспективе развития математики? Трудно представить, кто мог бы ответить сегодня на этот философский и математический вопрос так, как это сделал на рубеже XX столетия Давид Гильберт. Заметим, что им была предпринята одна из наиболее известных и продуктивных попыток предсказать пути развития математики с помощью постановки важнейших нерешенных математических проблем в 1900 году на Международном математическом конгрессе в Париже. Сегодня уже ясно, что выбор Гильберта в основном оказался верным. Поэтому, скорее всего, преждевременно пока говорить о некоторой ограниченности аксиоматизации, поскольку границы ее применимости, с точки зрения профессиональных математиков, возможно, совпадают с границами применимости самой современной математики. Давид Гильберт начинал свой доклад “Математические проблемы” (1900) словами, актуально звучащими и в наше время: “Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи нашего знания и тайны его развития в ближайшие столетия? Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения? Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли?” [114, с.401]. Выдающуюся роль Гильберта в формировании путей развития современной математики подчеркивает такой авторитет, как академик А.А. Болибрух: “Ни до, ни после него никто не ставил перед собой такую титаническую задачу. Даже в то время математика уже была достаточно специализированной: было много различных направлений, и одному человеку было очень трудно охватить все ее разделы. Но Гильберт отличался широким кругозором: он работал практически во всех существовавших тогда областях математики и во многих из них добился выдающихся результатов. Это и позволило ему сформулировать ставшие знаменитыми 23 математические проблемы” [58, с.3]. Выбирая проблемы, Гильберт придавал большое значение их доступности и понятности, при этом он придерживался следующих методологических принципов. Задача должна быть: а) понятной, в частности, должно быть ясно, откуда она возникла; б) достаточно трудной, чтобы вызывать профессиональный интерес; в) но, не настолько трудной, чтобы ее невозможно было решить.

Альтернативную точку зрения на список математических проблем Гильберта высказывал академик В.И. Арнольд: “Сравнивая сегодня влияние проблем Пуанкаре и Гильберта, приходится признать, что математика XX века следовала скорее предложению Пуанкаре, будь то развитие топологии, созданной Пуанкаре (это развитие явилось главным достижением математики XX века) или математической физики (где прежде всего следует упомянуть Германа Вейля…), будь то развитие эргодической теории хаоса в динамических системах (начатой работами Пуанкаре по небесной механике и по обыкновенным дифференциальным уравнениям)” [22, с.4]. Поэтому он считал, что проблемы Гильберта оказали удивительно мало влияния на развитие математики XX века: “На развитие математики в XX в. куда большее влияние оказали работы ученика Гильберта, Германа Вейля (развивавшего, скорее, идею Пуанкаре, что основной задачей математики XX в. будет создание математического аппарата теории относительности и квантовой физики)” [19, с.32]. Например, явно недооценена роль Г. Вейля в становлении квантовой механики, подсказавшего Шредингеру, которому не удавалось получить из его уравнения, наблюдаемые в эксперименте спектры атомов, что для получения дискретного спектра нужно наложить граничные условия на бесконечности. Заметим, что по примеру Гильберта и Пуанкаре в конце прошлого века некоторые математики пытались сформулировать аналогичные стратегические задачи развития математики в XXI веке. Одна из таких попыток приобрела широкую известность благодаря американскому миллиардеру Лэндону Клэю, основавшему в 1998 году на свои средства в Кембридже (США) Математический институт Клэя, который впервые в истории математики установил большие денежные премии за решение важнейших проблем современной математики.

Эксперты института в начале 2000 года выбрали семь математических проблем, согласно числу миллионов долларов, выделенных на премии. Этот список тысячелетия получил название “Millennium Prize Problems”. Среди этих проблем: 1. Проблема Кука (сформулирована в 1971 году). По существу, это философско-методологическая проблема, которую Стивен Кук сформулировал так: может ли проверка правильности решения задачи быть более длительной, чем само получения решения, независимо от алгоритма проверки. 2. Гипотеза Римана (сформулирована в 1859 году). Это одна из самых знаменитых проблем математики о свойствах последовательности простых чисел, сформулированная в мемуаре Георга Римана “О количестве простых чисел, не превышающих данной величины”. Следует отметить, что она по-прежнему входит и в совокупность задач по теории простых чисел из восьмой проблемы Гильберта. Известно, что распределение простых чисел среди ряда всех натуральных чисел не подчиняется никакой закономерности, но если гипотеза Римана будет доказана, то ее актуализация приведет к изменению знаний в математической области шифрования и к прорыву в области безопасности Интернета. “Рискну предположить, – прогнозирует математик Ян Стюарт, – что к 2050 году гипотеза Римана будет доказана. Предполагаемое решение окажется верным, и в доказательстве сыграют большую роль связи с физикой. Но не определяющую. Я думаю, что окончательное решение будет основываться на связях, которые обнаружатся в будущем” [434, с.41]. 3. Гипотеза Берча и Свиннертон-Дайера (сформулирована в 1960 году). Она связана с описанием множества решений некоторых алгебраических уравнений от нескольких переменных с целыми коэффициентами. Известно, что Эвклид дал полное описание решений подобного типа уравнения вида $x^2 + y^2 = z^2$, но для более сложных уравнений поиск решения остается чрезвычайно трудным. 4. Гипотеза Ходжа (сформулирована в 1941 году). Ее основная идея заключается в том, чтобы для исследования формы сложных объектов вместо самого объекта использовать простые “кирпичики”, которые склеиваются между собой и образуют его подобие. Гипотеза Ходжа связана с некоторыми предположениями относительно свойств таких “кирпичиков” и соответствующих объектов. 5. Уравнения Навье-Стокса (сформулированы в 1822 году). Предполагается, что турбулентные потоки и другие явления описываются дифференциальными уравнениями, названными в честь французского инженера Клода Навье и английского математика Джорджа Стокса. Несмотря на их солидный возраст, решения этих уравнений неизвестны и даже непонятно, как их решать. Поэтому суть проблемы состоит в том, чтобы показать, что решение, во-первых, существует и, во-вторых, является достаточно гладкой функцией, что позволит существенно изменить, например, способы аэродинамических и гидродинамических расчетов.

Можно сказать, что особняком стоит следующая знаменитая проблема, которая в начале нового тысячелетия вызвала необыкновенный резонанс в околонаучном мире. 6. Проблема Пуанкаре (сформулирована в 1904 году). Это единственная проблема, которая в настоящее время решена санктпетербургским математиком Г.Я. Перельманом, когда в ноябре 2002 года в Интернете появилась первая из его трех статей. Задавшись целью пояснить некоторые детали программы американского математика Ричарда Гамильтона, который доказал особый случай гипотезы Пуанкаре, он использовал его методологию для контроля над поведением сингулярностей, хотя и ввел соответствующие неравенства в отличие от Гамильтона несколько иным способом, добавив помимо этого много собственных нововведений. “Сами по себе статьи были не менее поразительны – всего шестьдесят восемь страниц текста, – что привело к тому, что другим ученым пришлось потратить немало времени на то, чтобы понять их содержание и извлечь из них ключевые аргументы, кратко набросанные Перельманом” [507, с.105]. При анализе решения давней гипотезы Пуанкаре опять возникла философская проблема переусложненности этого математического доказательства. Вот как комментирует В.И. Арнольд вклад самого Анри Пуанкаре в решение этой проблемы: “"Гипотеза Пуанкаре" о трехмерной сфере была опубликована им как теорема. Однако позже он сам нашел ошибку в доказательстве: одна из лемм была неверной из-за того, что Пуанкаре спутал гомотопии кривых с гомологиями” [22, с.22]. Итоги этой ошибки гения оказались весьма плодотворными для развития математики, поскольку Пуанкаре создал и теорию гомологий, и теорию гомотопий, тщательно их различая. 7. Уравнения Янга-Миллса (сформулированы в 1954 году). Эти уравнения являются частью теории, разработанной физиками Чень-Нин Янгом и Робертом Миллсом, которые установили связь между геометрией и физикой элементарных частиц для объединения теорий электромагнитного слабого и сильного взаимодействий. Проблема состоит в том, что из уравнений Янга-Миллса следует существование частиц, которые наблюдались в лабораториях, но в рамках этой теории до сих пор не удается предсказывать массы элементарных частиц. Указанные работы пересекаются с математическими идеями Германа Вейля по симметрии.

По авторитетному заключению ведущего математика Жана Дьедонне, “даже если бы математика насильно была отрезана от всех прочих каналов человеческой деятельности, в ней достало бы на столетия пищи для размышления над большими проблемами, которые мы должны еще решить в нашей собственной науке” [139, с.11]. Не вызывает сомнения то, что математика XXI века будет не только еще сложнее и абстрактнее, но и новые методологические подходы будут, возможно, выходить за границы сегодняшних представлений. Во-первых, методы теоретической математики вдохнули новую жизнь в прикладную математику, а проблемы, возникающие в прикладных областях математики, в свою очередь стимулируют развитие теоретической науки. Во-вторых, несмотря на то, что компьютерная математика позволила модифицировать технологию математических доказательств, необходимость философской концепции доказательства остается по-прежнему востребованной и сохранится в дальнейшем развитии математики. Согласно прогнозу Яна Стюарта: “К 2050 году у нас будет точная математическая теория, описывающая взаимодействия и динамику высшего уровня сложных систем. Это приведет не только к выдвижению абсолютно новых концепций, но и к новому пониманию ограничений, которые имеет математическое моделирование в науке” [434, с.45]. Из философско-методологического анализа развития математики XX века можно увидеть тенденцию к сближению математики, теоретической физики и философии. Поэтому есть все основания полагать, что в науке XXI века, то есть в науке будущего, эта тенденция будет развиваться. Но чтобы понять перспективы развития математики, как показывает практика, надо переосмыслить с современных позиций борьбу методологий и философских мировоззрений прошлого.

Для этого воспользуемся социологическим подходом к пониманию науки, который характеризует систему деятельности и рассматривается как несовместимый с логическим и аналитическим подходами, но не находится в конфликте с когнитивными претензиями науки. “Мы, напротив, нуждаемся в том, – утверждает швейцарский философ Эвандро Агацци, – чтобы вернуть ощущение сложности науки, которая, рассматриваемая как знание, представляет собой одно из величайших достижений человеческой цивилизации и может быть предметом различных философских исследований” [1, с.52]. В таком контексте самое непостижимое в окружающем мире – это то, что он постижим на языке математических формул. Если гипотетически рассматривать математические конструкции как произвольные творения человеческого ума, то тогда вопрос о причинах непостижимой эффективности математики нельзя строго и разумно сформулировать. Одна из причин такой эффективности математики состоит в том, что абстрактные структуры математики обладают способностью к различным воплощениям, а это не может быть объяснено особенностями генезиса математического знания. Возможно поэтому, в современной математике наиболее распространен “позитивистский” подход, состоящий в рассмотрении математических теорий как некоторых формальных конструкций, и, следовательно, вопросы о мировоззренческом статусе используемых математиками понятий и методов можно считать ненаучными. К подобным подходам можно отнести, прежде всего, аксиоматический метод, развитый Гильбертом. Позитивизму противостоит интуиционизм, который близок к “номинализму” – подходу в вопросе об основаниях математики, состоящему в предположении, что математические понятия являются результатом абстрагирования и обобщения свойств реального физического мира. При таком подходе математические факты – это конструктивные объекты или, по существу, такие же экспериментальные результаты, как и факты естествознания. Номиналистские рассмотрения близки по духу не только тем, кто придерживается конструктивистской точки зрения на основания математики, но и тем, кто стоит на формалистской позиции.

Главная проблема всех программ логического обоснования современной математики состоит в определении методологического обосновательного подхода, так как он не обязательно должен быть исключительно финитным или конструктивным. С праксеологической точки зрения такая стратегия развития математики в рамках ее обосновательных границ, определяемых исключительно философскими программами формализма или интуиционизма, может в будущем тормозить развитие науки благодаря следующим факторам. Во-первых, увеличивается знаниевый путь до переднего края современной математики, что потребует от будущих математиков-исследователей потратить значительную часть своей активно-познавательной жизни на освоение уже накопленных математических результатов. Во-вторых, сверхспециализация в узконаправленных областях математического исследования, несмотря на рождение новых междисциплинарных наук, приведет к утрате общего языка математического общения даже у ученых, работающих в близких областях. В-третьих, практический и экономический эффект большинства достижений в области фундаментальной математики может оказаться более чем скромным. Поэтому можно заключить, что “вследствие равнодозволенности конструкций в самой математике и невозможности указать соответствие хотя бы некоторых из них реальным объектам все конструкции должны быть отнесены только к предполагаемым, а не к описывающим реально существующие в мире объекты” [123, с.146]. Исследование математических моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, стало для многих математиков самоцелью. В этом одна из основных причин платонистского отношения математиков к объектам исследования. Но, возможно, что это тот источник творческой силы математики, который был метафорически назван “непостижимой эффективностью математики”.

При этом необходимо учитывать существенную роль “неявных эвристик”. В них изначально практически невозможно предвидеть новые эффективные методы математического познания, позволяющие при их дальнейшей методологической проработке решать сложнейшие задачи, и без которых не было бы формальных алгоритмов и практических процедур. Поэтому понятно стремление философов математики попытаться онтологизировать первичные математические понятия, чтобы получить содержательные представления о них, которое обусловлено самой спецификой становления математического метода исследования. Оно совпадало с интересами математиков, которые старались использовать, по возможности, наименьшее число исходных принципов при формулировке математической задачи. Но по-прежнему остается невыясненным вопрос: как все сказанное должно отразиться на обосновании эффективности современной математики? В ответе на этот вопрос сошлемся на авторитетное мнение специалиста по философским проблемам математики В.Я. Перминова: “Представляется, что адекватное обоснование эффективности математики может быть только системным. Оно должно исходить из понимания математики как некоторого рода самоорганизующейся системы, исторически приспособляющейся к содержательному знанию, как к системе более фундаментальной” [336, с.109]. Такое объяснение можно принять в качестве еще одной рабочей гипотезы обоснования аксиоматически построенных современных математических теорий независимо от условий их формирования.

Философско-теоретические построения не являются единственным подходом к обоснованию. Другой путь – это математическая интерпретация или понимание проблемы обоснования изнутри, то есть непосредственное знание, совершенно отличное от философского знания. Практическая эффективность современной математики, развивающейся в своей основной части в рамках программы формализма, требует также философского переосмысления методологических установок гильбертовой метаматематики и выявления нового смысла процессуальности системы современного математического знания с упором на практический способ его самоорганизации. Внешне этот переход выглядит как отказ от представления о математике в качестве интегративной совокупности аксиоматических структур, но расширение философских смыслов процедур обоснования связано непосредственно с новым пониманием сути внутреннего математического обоснования теорий.

4.2 Проблема непротиворечивости в философии математики и генезис понятия математической истины

Рациональное познание, наиболее совершенным образцом которого является математическое знание, дает возможность понять не только окружающий нас мир, но и реальные возможности самого человека. Сомнения о гипотетичекой противоречивости доказательной и заведомо содержательной математической теории традиционно исходят от философов математики, хотя обоснование такой теории не является для профессиональных математиков проблемой первостепенной важности. Тем не менее, нельзя не отметить, что согласно утверждению академика С.И. Адяна: “Вопросы непротиворечивости различных теорий по существу рассматривались и до Гильберта. Так, построенная Клейном (1871) проективная модель неевклидовой геометрии

Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии аналогично можно свести к непротиворечивости анализа, т.е. теории действительных чисел. Однако не видно было, какими средствами можно строить модели анализа и арифметики для доказательства их непротиворечивости” [4, с.13]. Заслуга Давида Гильберта состояла в том, что он указал философско-методологический путь для исследования этой проблемы. В сравнении с математикой, физика говорит не о непротиворечивости, а об эффективности описания природы на определенных уровнях. Поэтому, чтобы понять столь поразительную устойчивость формальных математических теорий, рассмотрим наиболее востребованную программу обоснования современной математики – теорию доказательств Гильберта. Попытаемся обосновать следующий тезис в контексте гильбертовской программы обоснования математики. С системной точки зрения можно не настаивать на исключительно логическом обосновании непротиворечивости математики не потому, что оно в принципе невозможно, поскольку даже гёделевские теоремы не столь категоричны в этом плане, а потому, что математические теории, в силу системно-методологических рассуждений, непротиворечивы по самой логике их развития.

Известно, что вопрос о непротиворечивости математических теорий до XIX века практически не возникал, так как считалось, что математические понятия отражают свойства реального мира, которые не могут быть противоречивыми. Но позже, благодаря формализации математических теорий, выяснилось что, например, непротиворечивость арифметики имеет большое значение для доказательства непротиворечивости других классических теорий. Поэтому проблема обоснования математики начала XX века в узком смысле состояла в избавлении от парадоксов теории множеств, а более широком смысле – в нахождении общих принципов обоснования математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость. Выход из создавшегося положения Гильберт и его сторонники видели в применении аксиоматического метода. “Из многочисленных вопросов, которые могут быть поставлены относительно системы аксиом, мне хотелось бы прежде всего указать на важнейшую проблему, – говорил Гильберт в своем знаменитом докладе "Математические проблемы", – именно на доказательство того, что система аксиом непротиворечива, т.е. что на основании этих аксиом никогда нельзя с помощью конечного числа логических умозаключений получить результаты, противоречащие друг другу” [114, с.409]. Кроме того, программа обоснования Гильберта предназначалась для “реабилитации” математики в связи с критикой программы интуиционистов обоснования математики. Соглашаясь со своими оппонентами в том, что не все доказанные утверждения математики имеют непосредственный смысл, и даже предлагая более жесткие, чем у интуиционистов, критерии осмысленности математических высказываний, Гильберт, тем не менее, не считал, что надо кардинально изменить некоторые устоявшиеся приемы доказательств. Например, аксиомы, положенные

Эрнестом Цермело в основание своей системы, содержат некоторые содержательные предложения, принимая которые, мы переходим в область проблематичного, опирающуюся на мнения различных людей.

Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Гильберт выбрал новый путь для решения проблем обоснования. Программа перестройки оснований математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач. Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории на основе “очищенной” от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода. Другая задача представляла собой радикально новую в то время философскую проблему – доказать непротиворечивость полученной теории. Важность этой проблемы состоит в том, что наличие противоречия в любой математической теории может “опрокинуть” все ее формальные построения. “Иначе говоря, – поясняет философ математики В.А. Карпунин, – установление непротиворечивости некоторой концепции само по себе говорит лишь об абстрактной, а не реальной возможности существования некоторого положения дел. Тем более на основе установления непротиворечивости нельзя говорить о действительном существовании описываемого этой концепцией положения дел, если только не принимать в качестве реально существующего мир платоновских объектов” [176, с.72–73]. Даже установление внутренней непротиворечивости уже признанных и даже доказавших свою плодотворность теорий тоже сопряжено с немалыми трудностями, поскольку внутренняя непротиворечивость теории часто считается самоочевидной, в то время как в действительности для ее доказательства требуются глубокие математические рассуждения. Отметим, что, как и в принципе дополнительности, только обе эти задачи совместно дают полную информацию об основаниях математики. Кроме того, каждая из задач, взятая в отдельности, недостаточна для решения проблемы обоснования математики, предложенной Гильбертом.

Он первым понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Например, пересекаясь, хотя бы частично, с областью интуитивной математики, нельзя уже говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости математики, поскольку утверждение о непротиворечивости относится к множеству всех теорем, доказуемых в теории, то есть к совокупности, четкого определения которой мы как раз не имеем. “При этом Гильберт подвергает сомнению правомерность использования при доказательстве непротиворечивости некоторых классических методов доказательства, он предлагает вести доказательство в рамках специального учения, созданного им и получившего в математике наименование "финитизма Гильберта"” [132, с.16]. Гильберт предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, то есть сознательно ограничивал круг средств, которые он считал допустимыми и надежными. Идеальные объекты математических теорий необходимы для эффективности нашего мышления, поэтому возникает потребность хотя бы в принципе обосновать их неустранимость из выводов реальных утверждений, невзирая на увеличивающуюся сложность получающихся преобразований. “Идеальные объекты математики являются по своей сути инфинитными, требующими бесконечного числа операций. Данный недостаток уравновешивается тем, – утверждал академик Н.Н. Яненко, – что они образуют замкнутую операционную систему. Гильберт предполагал, что эти инфинитные идеальные объекты могут образовывать логически замкнутую систему, в рамках которой математик имеет возможность творить, не общаясь с внешним миром и достигая новых результатов (теорем) за конечное число логических операций (умозаключений)” [499, с.61]. Введением идеальных элементов, а именно – бесконечно удаленных точек и одной бесконечно удаленной прямой, можно добиться того, чтобы теорема о том, что две прямые, в том числе и параллельные, всегда пересекаются в одной и только в одной точке, была справедлива во всех случаях. Другим примером идеальных элементов служат мнимые величины, используемые для придания простого вида теореме о существовании и числе корней уравнения. Реально устранять идеальные объекты никто и не собирался, но доказательство возможности такого устранения должно было удовлетворить и “классиков”, и “интуиционистов”, а также и представителей направлений других толков.

Такие средства Гильберт назвал “финитной установкой”. Это тот круг средств, которые он считает допустимыми и надежными, хотя никогда не описывает и не фиксирует это ограничение в достаточно четкой форме. Как правило, нет исчерпывающих комментариев о финитной установке и в философско-математической литературе. Тем не менее, Давид Гильберт довольно подробно разъяснил ее на примере обычной арифметики: “Теперь напомним, как устроена обычная финитная арифметика и какова методика ее изложения. Конечно, ее можно строить отдельно, конструируя числа с помощью содержательных наглядных соображений. Однако данная математическая наука никоим образом не исчерпывается числовыми равенствами и не сводится к ним одним. И тем не менее, пожалуй, можно утверждать, что она является аппаратом, который в применении к целым числам должен всегда давать верные числовые равенства. Но тогда возникает обязанность исследовать строение этого аппарата настолько, чтобы в этом можно было убедиться. При этом в качестве подсобного средства в нашем распоряжении должен находиться только тот же самый конкретно-содержательный подход и тот же самый финитный способ мышления, которые в самом построении арифметики применялись для получения числовых равенств” [114, с.440]. Это требование, считает он, в действительности выполнимо, то есть его можно реализовать чисто наглядным и финитным способом, так же как получаются сами арифметические истины, и такого рода рассмотрения будут гарантировать надежность математического аппарата.

Поскольку Гильберт все же не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, то, по-видимому, он надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся математическое рассуждение или нет. Программа математического формализма исходит из того, что непротиворечивость арифметики можно доказать финитными средствами, то есть такими, которые не содержат апелляций к актуальной бесконечности, как, например, преобразования, используемые при переходе от содержательной арифметики к формальной алгебре. К финитным высказываниям, считал он, мы должны будем присоединить идеальные высказывания для того, чтобы сохранить простую форму законов обычной аристотелевской логики. В связи с этим, возникает определенная философская двусмысленность в ответе на вопрос: может ли математика что-либо объяснять в природе? “Математика, – утверждает канадский специалист в области эпистемологии и философии науки Дж.Р. Браун, – не может объяснять в том смысле, в каком объясняет научная теория. Но, с другой стороны, математика может объяснять, в смысле делать нечто понятным, интеллигибельным. А в некоторых случаях математика дает единственное объяснение, которое у нас есть или могло бы быть” [63, с.17]. Последнее утверждение в значительной мере относится к программе Гильберта. Согласно его программе обоснования, математическое утверждение является осмысленным, то есть реальным, высказыванием, если оно само или его отрицание могут быть установлены каким-нибудь финитным рассуждением. Даже Брауэр заявлял, что он не возражал бы против такого обоснования классической математики, лишь бы сами математики классического направления перестали говорить о реальном смысле, стоящем за идеальными объектами и утверждениями. Хотя классическая математика обосновывается коллективным опытом научного сообщества, ее окончательное обоснование, как считал Гильберт, даст теория доказательств, существенной частью которой является формализм и аксиоматический метод. Замена всей классической математики на интуиционистскую математику бессмысленна, так как последняя, по его мнению, неполна. Тем не менее, для того чтобы теория доказательств оставалась прогностически жизнеспособной в дальнейшем, она должна допустить в качестве гносеологического инструмента также и интуитивные доказательства, которые затем дорабатываются и уточняются в рамках аксиоматического метода.

Строго говоря, процедура обоснования математики, согласованная с гильбертовскими идеализациями, предполагает формализацию математической теории с помощью содержательной "метатеории", которая, наряду с описанием структуры формализма, рассматривает принципы допустимой логики и соответствующие ей правила доказательства и преобразования математических утверждений, допустимые в рамках данной теории. Поскольку Гильберт не дал исчерпывающего определения метатеории, снимающего всякие сомнения относительно ее расширенного толкования, то философ математики В.Я. Перминов настаивает на том, что "метатеория как сфера абсолютной надежности предполагает также обращение и к гносеологическим критериям, таким как априорность, самоочевидность и онтологическая истинность" [336, с.149]. Методологический замысел Гильберта состоял в таком ограничении метатеоретических рассуждений математиков, чтобы, наконец, гарантировать их максимально возможную достоверность. Хотя сам Гильберт считал, что метатеория должна иметь не чисто философское, а собственно внутриматематическое содержание, современное состояние проблемы обоснования математики показывает, что онтологическое понимание метатеории все же требует отказа от принципа отделения оснований математики от философии. Точнее речь идет об отказе от таких принципов метатеории, которые определяются исключительно на основе математических критериев, например, требование финитности и ограничения на используемую в современной математике логику.

Целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в основаниях с помощью чисто математических средств. В действительности ее цель была скромнее, чем принято было считать, из-за неявного предположения о том, что "реальны" лишь те задачи в основаниях, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. Заметим, что финитизм – это весьма радикальное направление в обосновании математики, считающее обоснованными и надежными только рассуждения о конечных совокупностях. Поэтому, чтобы соответствовать общей философской установке, нельзя сужать класс финитных рассуждений, требуя от последних не только самоочевидности, но и других дополнительных свойств. В контексте системного подхода к обоснованию можно говорить о ненужности или избыточности самих попыток найти для современной математики какое-то особое основание. С точки зрения философии математики Гильберта, важно лишь понимание финитного рассуждения как любого несомненного рассуждения. Однако работы немецкого математика Герхарда Генцена показали, что, расширяя финитизм методами, основанными на трансфинитной индукции, можно показать непротиворечивость арифметики и анализа, обоснование которых на базе финитизма оказалось не выполнимым [107]. Вопрос о непротиворечивости самой трансфинитной индукции остается пока открытым. Но Гильберт уловил самую суть проблемы, положив в основу своих попыток построения "абсолютных" доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием. Он поставил общую методологическую задачу развития специального метода, позволяющего проводить доказательства непротиворечивости с той же степенью убедительности, что и доказательства, использующие конечное число структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Суть подхода Гильберта состояла в том, что всю классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. С этой точки зрения его философская позиция – это наиболее известная разновидность формализма, хотя, в отличие от мнения большинства, это не единственный его вид.

В утверждении, что метатеория, достаточная для доказательства непротиворечивости теории, более богата, чем сама теория, скрыта некоторая двусмысленность. С одной стороны, в доказательстве непротиворечивости может быть использована только некоторая часть аксиом теории, а с другой стороны, в соответствии с теоремой Гёделя это доказательство должно содержать дополнительные утверждения, выходящие за пределы теории, но это не означает, что они всегда более сомнительны. "Нет никаких оснований a priori предполагать, – замечает философ математики Майкл Детлефсен, анализировавший этот вопрос, – что если множество утверждений лежит "вне" теории и достаточно для доказательства ее непротиворечивости, то оно будет более сомнительным, чем всякое конечное множество суждений, принадлежащих теории" [520, с.310]. Такое предположение выглядит довольно абсурдно для математических теорий в целом. Если, в соответствии с теоремой Гёделя о неполноте, мышление человека богаче его дедуктивных форм, то язык должен обладать какими-то средствами, позволяющими передавать это богатство. Многозначность, метафоричность языка, его полиморфизм есть то средство, которое позволяет преодолеть гёделевскую трудность в логической структуре нашего речевого поведения. Один из радикальных взглядов на математику состоит в том, что она не наука, а увлекательное искусство. Многие математики-практики согласятся с тем, что математика – это, в определенной мере, искусство, но в еще большей степени и наука, выделяющаяся своей обоснованностью, эффективностью и строгостью. В контексте философской концепции двойственности это одно и то же, по-разному воспринимаемое на "поверхности мышления".

Согласно важнейшему методологическому следствию из теоремы Гёделя о неполноте, или первой теоремы Гёделя, в любой достаточно богатой непротиворечивой формальной системе, каковой и является арифметика, теоретически возможны высказывания, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть. А что можно сказать в случае, если система противоречива? Тогда понятие “доказательство” в ней вообще лишается смысла, так как в противоречивой системе доказуемо любое ее утверждение. Напомним, что в программе формализма действует логический принцип, не отвергавшийся даже интуиционистими: “Из противоречия следует все, что угодно”. В такой ситуации гёделевская формула “Я недоказуема”, может оказаться доказуемой, но плохо то, что доказуемым будет и ее отрицание. Фактически, философски резюмирует Герман Вейль, это означает, что “всегда найдутся конструктивно очевидные арифметические суждения, не выводимые из аксиом, как бы вы их ни формулировали, и в то же время аксиомы, безраздельно правящие всеми тонкостями конструктивной бесконечности, выходят далеко за пределы того, что может быть подтверждено опытом” [81, с.23]. Это методологически важное высказывание, в контексте нового подхода к обоснованию, можно интерпретировать как предположение о том, что в формалистском направлении обоснования математики всегда найдутся интуитивно очевидные, с точки зрения интуиционистского направления обоснования математики, но не выводимые из аксиом предпосылки.

Такого рода предпосылочное знание, возможно, в принципе не может быть обосновано в рамках математических теорий, поскольку оно обладает двойственностью, или даже дополнительностью, в том смысле, что кроме теоретико-математического обоснования, выражаемого в математических терминах, содержит еще неотделимую в интуитивном мышлении метафизическую, или платонистскую, основу. Это связано отчасти с тем, что профессиональные математики мыслят все же посредством интуитивных образов, а не посредством исключительно теоретических понятий. Но такой подход к математическому познанию стал проблематичным, так как, по мнению математика и физика-теоретика Джона Барроу: “Монументальная теорема Гёделя, показавшего, что сложные математические системы сами себя ограничивают в том, что они способны доказать, привела к постепенному изменению мировоззрения философов, ученых и наших методов познания мира” [37, с.86]. Можно подчеркнуть, что, как показывает философско-математический анализ, результаты Гёделя относятся не только к формальной арифметике – они распространяются на любую формальную математическую систему, содержащую арифметику натуральных чисел, то есть на любое исчисление, начинающееся с арифметики. При этом, по мнению Гёделя, математическая интуиция необязательно должна мыслиться как способность непосредственного знания, например, о множествах, поскольку и в физическом знании есть что-то, выходящее за пределы чувственного восприятия и являющееся, в определенном смысле, “непосредственно данным”. Результаты Гёделя позволяют по-новому взглянуть на стародавнюю проблему чистоты метода, уходящую корнями во времена древних греков. Из его работ следует, что арифметическая чистота недостижима, даже с учетом любых неточностей в понятии чистоты математического метода, хотя, с другой стороны, логическая чистота может быть в принципе достигнута.

Следует отметить, что выбор математических аргументов для доказательства непротиворечивости не вполне однозначен. По поводу развернувшейся дискуссии в начале XX века о проблеме доказательства непротиворечивости можно сказать, что в современной математике ограничение только “чистыми” методами нуждается в оправдании в той же степени, как и возможность использования “нечистых” методов. Обсуждая вопрос о возможных критериях чистоты метода, можно прийти к противоречивому выводу о том, что сам идеал чистоты метода сомнителен, даже тогда, когда он может быть достигнут. Еще на грани XIX и XX веков в качественной теории дифференциальных уравнений и динамических систем трудами А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова было математически формализовано понятие устойчивости. Суть его состоит в том, что система может в принципе хорошо себя вести, но при небольших погрешностях в начальных или граничных условиях начинает существенно удаляться от желаемого поведения. Это приводит к тому, что привлекательно выглядящая теорема, с точки зрения ее приложений, может стать бесполезной при малейшей модификации исходных условий, поскольку точно удовлетворить им довольно часто нет возможности по вполне объективным причинам, связанным с физической точностью измерений. Поразительно, что пример исключительно устойчивого результата представляет собой теорема Гёделя о неполноте, так как любая попытка методологически обойти эту теорему, не ослабляя существенно достоинства формализованного языка математики, приводит к тому, что такая попытка дает новый материал для построения примера, где она опять не достигает своей цели. Хотя, как и всюду, возможны исключения. Например, по мнению логика Б.В. Бирюкова и философа В.Н. Тростникова: “Исчисление высказываний беднее арифметики, поэтому на него теорема Гёделя не распространяется – и, как мы знаем, нетрудно доказать его непротиворечивость; вместе с тем оно полно, в том смысле, что каждая его тождественно истинная формула доказуема” [47, с.125]. Стоит все же отметить, что, согласно по-философски рефлексивным результатам шведского логика Леопольда Лёвенгейма, ни одна математическая теорема не может, в частности, однозначно определить множество натуральных либо действительных чисел.

Напомним также, что обращение к актуальной бесконечности оказалось непреодолимым препятствием при реализации программы логицизма, а также для обоснования непротиворечивости канторовой теории множеств в ее гильбертовом варианте, обозначая тем самым методологическую границу математического обоснования. Но указанные трудности программ обоснования математики не являются причиной отказа от практического вывода о надежности современной математики. Согласно гильбертовской интерпретации философии непротиворечивости и принципу полноты математической системы, условие непротиворечивости математической теории поддается не только сугубо философской, но и арифметической трактовке. Что касается полноты, то следует заметить, что она фактически достигается только на некоторых математических моделях. Если иметь в виду целостность программ обоснования, то придется признать, что стремление к полноте – это, прежде всего, стратегия философско-методологического поиска в рамках прежней обосновательной парадигмы. Как подчеркивает Э.Г. Юдин, "методологическая функция принципа целостности, если ее рассматривать в общем виде, состоит не в том, что он на каждом шагу предписывает стремиться к абсолютному охвату объекта изучения, а прежде всего в том, что он постоянно ориентирует на подход к предмету исследования как к принципиально незамкнутому, допускающему расширение и восполнение за счет привлечения к анализу новых типов связей" [495, с.47]. Заметим, что при достижении полноты описания формальной системы, она останавливается в своем развитии. Такой обосновательный идеал научного знания приводит к, встречающемуся в постмодернистском контексте парадоксу "конца формализма", который противоречит интуиции развития современной математики и представлению о целостности как об эвристическом этапе на бесконечном пути к полному знанию. Кроме того, в этом содержится некоторая "порочная" кругообразность: как можно пытаться доказать какие-либо методы рассуждения, пользуясь этими же методами? Осознавая эту философскую дилемму, Гильберт все же надеялся, что доказательство полноты и непротиворечивости математических теорий удастся найти с помощью специальных финитных методов рассуждения, признаваемых большинством математиков.

По замыслу Гильберта всякую математическую теорию, в том числе большую часть классической математики, надо строить как формальную аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма попытаться доказать ее непротиворечивость. Почему же вопрос о непротиворечивости арифметики имеет столь большое значение в обосновании математики? С одной стороны, некоторые исследователи полагают, что если концепция натуральных чисел противоречива, то тогда наше мышление вообще не приспособлено к строго рациональному мышлению. С другой стороны, высказываются и такие мнения, что формальная система не вырождается в бессмысленную игру как раз по причине того обстоятельства, что она содержит противоречие. Другими словами, математическая теория может быть "локально непротиворечивой", даже если она в принципе не является глобально непротиворечивой. Поэтому в дальнейшем имеет смысл говорить, например, о локальной непротиворечивости, так как глобальная непротиворечивость может оказаться избыточной. По сравнению с первой теоремой Гёделя о неполноте, вторая теорема Гёделя, говорящая о недостижимости непротиворечивости, по мнению некоторых логиков, демонстрирует меньшую устойчивость логического результата, который может исчезнуть при изменении кодировки математических формул. Правда, отмечает математик и логик Н.Н. Непейвода, "кодировки, при которых можно доказать непротиворечивость, неестественны и даже неформально включают в себя предположение о непротиворечивости, но тем не менее в принципе обойти данную теорему можно" [305, с.122]. Поэтому математики довольно уверенно смотрят в будущее своей науки, так как представления об актуальной бесконечности не привели к бессмыслице, пока все обходилось хорошо.

Когда математики еще не стремились использовать эффективные теоретико-множественные методы, убеждение Гильберта согласовывалось с имеющимся эмпирическим опытом, но это никак нельзя было признать за полноценное обоснование для формальных систем, пытающихся доказать свою собственную непротиворечивость. Математикам хорошо известен такой парадокс: если даже элиминировать, то есть каким-то образом устранить или удалить абстрактные понятия из доказательств, то обнаруживается "философский дефект" такой процедуры, а именно, теряются дополнительные неявные знания, которые содержатся в исходных предложениях. Необходимое исторически углубленное обоснование математической теории, по мнению философа математики Л.Б. Султановой, "вследствие экспликации ее содержательных неявных предпосылок, дает прирост содержания собственно математического знания" [436, с.109]. Например, с точки зрения математической практики, если система непротиворечива, но не полна, то существует несоответствие между символами системы и их интерпретациями, а возможно, система недостаточно мощна, чтобы оправдать данную интерпретацию. Говоря о программе Гильберта, следует иметь в виду, что она осмысленна только в ситуациях, когда эта программа может быть проведена. Поэтому, используя терминологию Гильберта, математики и философы должны верить в его программу. Для профессиональных математиков Давид Гильберт логичен, последователен и ясен, а аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил мышления. Математики верят в надежность математических доказательств не только из-за отсутствия в них контрпримеров, а исходя из "генетического обоснования", то есть исходя из их убеждения в истинности математических посылок и в корректности проведенных логических умозаключений, что всегда присуще математической практике. В силу анализа механизмов становления методологически хорошо разработанных математических теорий, даже, несмотря на наличие или отсутствие достаточных логических аргументов, математики имеют все основания верить в их фактическую непротиворечивость.

Профессиональные математики, склонные к философскому анализу методов исследования, вряд ли будут прилагать много усилий для разрешения философско-методологической проблемы существования в математике. Прагматичное объяснение, в конечном счете, сводится к тому, что существование самой математики не зависит от решения этой и подобной ей проблем. Кроме того, интуиционисты впадают в определенную крайность, когда отказываются признавать существование актуально бесконечных множеств. Истинной причиной парадоксов, обнаруженных в начале XX века в теории множеств, по мнению сторонника интуиционизма немецкого математика Германа Вейля, является превращение представлений об актуальной бесконечности в представление о потенциальной бесконечности, произошедшее в интуитивном мышлении математиков, что привело к “некорректному” применению понятия актуальной бесконечности в рамках формально-математического контекста. “Зачатки этого подхода, – замечает Роджер Пенроуз, – прослеживаются еще во времена Аристотеля, который, будучи учеником Платона, тем не менее отвергал его взгляды на абсолютное существование математических сущностей и возможность рассмотрения бесконечных множеств” [326, с.103]. История развития математики подтверждает, что довольно легко впасть в заблуждение, когда к бесконечным совокупностям применяли метод, допустимый в финитной области. Примеры подобных ошибок хорошо известны из математического анализа. Например, правильность вывода при переносе теорем, справедливых для конечных сумм и произведений, на бесконечные суммы и произведения подтверждается специальными исследованиями сходимости. Свою задачу Давид Гильберт видел в том, чтобы выяснить, почему же использование трансфинитных выводов все же приводит к правильным результатам подобно тому, как это происходит в анализе и теории множеств. Гильберт настаивал также на том, что нереальные, идеальные предположения необходимы для полноты математических теорий, хотя и соглашался с Брауэром в том, что немалое количество математических предложений не основано на очевидности.

С методологической точки зрения прикладной математики, слабость теоретико-множественной математики по отношению к приложениям состоит в том, что этой теорией можно пользоваться лишь тогда, когда прикладная задача переведена на соответствующий математический язык. Но даже после этого возникают проблемы чисто экзистенциального характера, поскольку во многих теоремах существования ничего не говорится о том, как такое решение может быть точно или приближенно найдено. Поэтому математики различают два дополнительных взгляда на существование математических объектов. В частности, в прикладной математике он идентифицируем и конструируем, то есть существует как математическая модель реального объекта. Отображение в понятиях элементов действительности никогда не бывает полным, так как, абстрагируясь, мы описываем все же только определенный аспект пусть даже довольно существенный и общезначимый. “Поэтому абсолютизированная абстракция, – заключает академик А.Д. Александров, – неизбежно содержит в себе элементы, каких нет в действительности, и вместе с ними момент заблуждения, тем более, что она абсолютизируется” [7, с.260]. По существу, раздвоение единого математического утверждения на теоретико-множественное и эмпирическое было внутренним противоречием в самой идее аксиоматического метода. И формалисты, и интуиционисты теряют интерес к проблеме, как только она оказывается теоретически разрешимой, но, с точки зрения прикладных математиков, задача не решена, пока еще нужны дополнительные соображения для получения требуемого знака. Проблема расширения границ практических возможностей обусловлена существующим барьером между тем, что можно сделать в принципе и тем, что можно реализовать на практике. Практическая реализуемость – это тоже понятие, достойное философских рассуждений. Но, с точки зрения феноменологического подхода, в духе единства идеального предмета и смысла математикам, чтобы избежать путаницы пока еще не унифицированных понятий, подобно тому, как это делают физики, методологически целесообразно использовать оба различных смысла.

Корректность использования идеальных объектов математики можно было бы гарантировать в случае успеха “метаматематической редукции”. С ней связано, прежде всего, внутреннее обоснование математики как общее логическое обоснование с помощью некоторой метатеории или “генетическое обоснование”, философская суть которого состоит в редукции основных положений к некоторому несомненному теоретическому ядру математики. Эти философские импликации можно эвристически продуцировать и на теоретический конструкт проблемы обоснования современной математики, создаваемый методом проб и ошибок. Как заметил философ В.А. Бажанов по поводу сходных внутренних процессов, происходящих в философии математики: “Заслуга Лакатоса в области философии математики заключается в том, что он показал внутреннюю, сокровенную жизнь этой науки, которая вовсе не сводится к абсолютному доминированию дедуктивного метода и формальных процедур вывода. В его истолковании математика развивается также путем "проб и ошибок" и находится значительно ближе к эмпирическому знанию, нежели ранее было принято считать. Доказательства не абсолютны; надо признать их предположительный характер, равно как и эволюцию представлений о строгости” [28, с.153]. Позитивная аргументация предыдущих исследований логицистов показывает, что абстрактная математическая теория, а тем более формальная, то есть основанная исключительно на формализованной логике, сама по себе не может быть верной или неверной, с точки зрения ее содержания. Возросшая абстрактность современной математики породила и более серьезную проблему о внутренне непротиворечивой системе аксиом, в которой нельзя вывести противоречащие друг другу утверждения. Если речь идет об аксиомах, описывающих хорошо известную область математических объектов, то эта проблема не представляется столь уж актуальной. Возможно, с этим связаны различные попытки объяснить математическое существование через непротиворечивость, то есть считать, что в математике реально все, что не является невозможным.

Имея в качестве предмета идеальные объекты, исключающие “аргументы опыта”, противоречие содержится в самой сущности математики, определяемой абсолютизацией ее абстракций. С одной стороны, можно указать на “формообразующую” роль противоречий, которые не только влияют на поворотные моменты развития математических теорий, но и помогают понять их неявную суть. С другой стороны, анализ логики генезиса математического знания показывает, что противоречия в нем будут систематически возникать до тех пор, пока не будут устранены порождающие их “неадекватные” определения. Поэтому, по мнению философа Г.Б. Гутнера, возникает естественный вопрос: “Что может убедить нас, что идеальная конструкция не есть лишь творение нашего ума, не имеющее, возможно, отношения к реальности? Только завершенность и внутренняя согласованность теории” [127, с.55]. Поскольку, поясняет он, имея дело с целостной системой идеальных предметов, приходится подчиниться ее внутренней логике, что можно философски интерпретировать как “иметь дело с реальностью”. В связи с этим заметим, что конструктивное обоснование не признает ряд важных идеальных математических конструкций и ставит методологическую задачу объяснения существования математической конструкции. Существование конструктивного объекта, например, в рамках концепции, предложенной советской школой конструктивной математики, предлагалось понимать как потенциальную осуществимость. Если отвлечься от философских метафор, типа платоновского мира идей, то, рассуждая о попытках отождествления существования с непротиворечивостью, можно воспользоваться и такой физической аналогией: “хотя фактическое не является невозможным, тем не менее, возможное существует не всегда”. Иногда вместо верной импликации в качестве верного утверждения преподносится ее заключение, что приводит к курьезным утверждениям о ее рациональном решении в положительном смысле. Например, утверждают, что аксиома выбора не может быть ни доказана, ни опровергнута в аксиоматической теории Цермело–Френкеля, забывая добавить, что этот факт верен лишь при предположении непротиворечивости данной теории, поскольку в случае противоречивости теории в ней было бы доказуемо любое утверждение, в том числе и аксиома выбора.

Противоречивость формальной теории, как правило, не очевидна, поэтому для математиков это всегда методологически очень тонкое место. Например, зададим простой с виду вопрос, над которым редко кто из нематематиков задумывался: почему нельзя делить на нуль? Ответ состоит в следующем: если в аксиоматической теории поля предположить, чтобы каждый, а не только ненулевой, элемент имел бы обратный по умножению, то соответствующая система станет противоречивой. Действительно, если бы 0 имел обратный элемент 0^{-1}, то тогда, с учетом имеющихся аксиом поля, были бы справедливы следующие два равенства: $(0 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 1$ и $0 \cdot (0 \cdot 0^{-1}) = 0 \cdot 1 = 0$, которые противоречат аксиоме ассоциативности, поскольку из аксиоматики поля следуют свойства единственности нулевого элемента и единицы поля. Таким образом, произведя небольшое изменение аксиоматики поля, можно превратить непротиворечивую аксиоматическую систему в противоречивую систему. Противоречивость измененной системы вовсе неочевидна, если заранее неизвестно, где должны возникнуть математические неприятности, что собственно и вызывает затруднения с ответом на поставленный выше вопрос. Критерий непротиворечивости, несмотря на его существенную роль в аксиоматических системах как формального, так и содержательного характера, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и доказуемость. Если противоречия в математической теории проистекают из несовместимости ее основных методологических принципов, то их можно классифицировать как внутренние, а если они возникают из-за некорректности производных определений, то – как внешние противоречия, которые устраняются уточнением соответствующего математического формализма. Чем более востребована математическая теория, тем больше имеется оснований предполагать ее защищенность от противоречий.

Например, физическая востребованность математической теории как совокупности взаимосвязанных утверждений дает основания считать, что фактическая непротиворечивость математики следует из первичности математической системы перед ее логическим анализом. Описание мира, предлагаемое физикой, является приближенным или феноменологическим. Если для каких-то целей физики используют какую-то новую математическую структуру, то веру в ее непротиворечивость они обретают изначально из ее употребления. Но, с точки зрения математики, проблема непротиворечивости этим не решается, а только ставится. История современной математики знает немало случаев, когда противоречивые понятия и теории, в частности история становления теории обобщенных функций, были весьма полезными для развития науки. Например, дельта-функция и лейбницев анализ бесконечно малых, которые впоследствии на новом теоретическом фундаменте были строго обоснованы в рамках современных теорий обобщенных функций и нестандартного анализа. Говоря о важности для развития математики эмпирических идей, Имре Лакатос утверждает: “Проблема в том, что "впрыскивание в математику более или менее собственно эмпирических идей" может быть мощным стимулом развития – дельта-функция Дирака является замечательным примером этого – но ошибочно отвергать автономность развития математики, следование ее своим курсом при условии, конечно, здорового взаимодействия с наукой и искусством” [228, с.98]. Методологический парадокс состоит в том, что реальный путь формирования понятия обобщенного решения, а затем и понятий обобщенных функций противоречит методологической установке Гильберта, согласно которой предметом математики является только непротиворечивая система.

Можно сказать, что теория обобщенных функций, расширяющая классическое представление о функциях, стала одним их фундаментальных достижений математики XX века. “Обобщенная функция дает возможность выражать в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки (дельта-функция Дирака), плотность простого слоя (поверхностная дельта-функция), плотность диполя (производная дельта-функции) и т.д. Вместе с тем в понятии обобщенной функции находит отражение и тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях этой точки” [93, с.100]. С философской точки зрения важно отметить, что понятие обобщенной функции реализовывает двойственную природу физических измерений и как адекватный методологический аппарат для описания распределений различных физических величин является хорошим примером взаимодействия математики и физики. Эвристический потенциал приложений новой теории обобщенных функций оказался сильнее формальных методологических конструкций. Источником возникновения теории обобщенных функций послужила дельта-функция английского физика-теоретика Поля Дирака, которая эффективно использовалась в физических исследованиях задолго до ее обоснования с помощью специальной математической теории. С точки зрения физики, дельта-функция Дирака, определяемая как

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1,$$

представляет собой точечную единичную массу бесконечной плотности. Для математика такое представление – это абстрагированный вариант из категорий “внутренней” семантики физической теории. Однако, осознав внешний аспект дельта-функции как функционала на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций, французский математик Лоран Шварц включил ее в формализм функционального анализа, а как частный теоретико-множественный объект – в общематематические теории. Уместно заметить, что как утверждает Петр Вопенка: “Математика есть способ преодоления непосредственного горизонта человеческого опыта. Мы используем математику, чтобы выразить мысли, предваряющие наше знание, которые часто в дальнейшем нельзя проверить” [102, с.15]. Заметим, что дельта-функция, или так называемая “функция”, не укладывалась ни в концепцию формализма, ни в концепцию интуиционизма. Удивительно то, что математическая мысль, “пущенная в обход”, приводит иногда к хорошим формально-теоретическим результатам, как это случилось в обосновании указанного физического идеального объекта.

В функциональном анализе обобщенные функции, рассматриваемые как абстрактное расширение понятия функции, позволили в адекватной математической форме выразить такие идеализированные физические понятия, как интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной в точке, и так далее. Существенную роль при обосновании математических понятий и теорий играют идеи онтологического порядка. Их востребованность проявляется при рассмотрении теорий и моделей, радикально отличающихся от общепринятых. Например, когда возникают экстремальные познавательные ситуации, которые ведут к границам философско-математического понимания. Характерной особенностью метаматематики является то, что философская рефлексия рассматривается в ней исключительно в математической перспективе. С этой точки зрения, можно сказать, что метаматематика – это реконструкция математического мышления в рамках только математического мышления. Во второй половине XX века академик А.Н. Колмогоров, рассуждая о современных взглядах на природу математики, говорил о законности употребления термина “содержательная математика метаматематики”, хотя он и не является устоявшимся: “Эта математика метаматематики, – писал он, – оказывается более широкой, чем "финитная математика" в строгом смысле. В некотором приближении можно сказать, что она по своему содержанию близка к упоминавшейся ранее "конструктивной математике", но она значительно уже традиционной "канторовской" теоретико-множественной математики” [193, с.16]. Гильберт активно противостоял попыткам ограничения математики устоявшимися методами, выступая в защиту свободы творчества в математике.

Он критиковал интуиционистов за то, что, пытаясь “спасти математику” и выбрасывая за борт все, что причиняло им беспокойство, они могли потерять большую часть наших самых ценных сокровищ: “Запрещение теорем существования и закона исключенного третьего почти равносильно полному отказу от математической науки” [111, с.383]. Согласно первой теореме Гёделя, никакое исчисление, определяемое конечным числом аксиом, недостаточно для того, чтобы включить в себя все истинные утверждения содержательной арифметики и теории бесконечных множеств. Следует отметить, что методологические следствия теорем Гёделя зависят от различных толкований понятий “финитный”, “конструктивный”, “содержательный”, которые приняты в обосновательной программе формализма. С точки зрения интуитивизма, даже при аксиоматическом изложении теории, реальное проникновение в суть непротиворечивости достигается с помощью интуитивных рассуждений, основанных на очевидности. Сам Гильберт был “строгим формалистом” в математике и в то же время “строгим интуиционистом” в метаматематике. Кроме того, по этому поводу Имре Ружа тонко подметил, что “Гильберт намеревался расправиться с интуиционизмом средствами интуиционизма. Он пытался доказать интуицио-нистскими средствами, что сомнения интуиционистов излишни” [388, с.323]. Вовсе неслучайно вопросы, касающиеся арифметической сущности математики и проблем обоснования математики с помощью аксиоматизации, были в центре внимания философов математики XX века. После того, как Гильберт в “Основаниях геометрии” (1899) доказал совместимость выделенных им аксиом, для которых противоречия в дедуктивных выводах сказывались бы и на системе действительных чисел, вопрос непротиворечивости аксиоматики последней, с помощью понятий теории множеств, он свел к такому же вопросу для целых чисел. Поэтому возникла даже определенная эйфория от того, что удалось, наконец, поставить математику на надежный фундамент.

Большинство исследователей понимают под словом аксиоматизация вовсе не пересмотр основ всей математики, которые, вообще говоря, не имеют непосредственного отношения к их естественнонаучным интересам и поэтому не проблематизируют их в своих исследованиях. Добавим к этому, что как считает философ науки А.В. Кезин, “практическое применение основного для математики критерия научности – критерия непротиворечивости – в естественнонаучной области имеет серьезные ограничения” [184, с.304]. Тем не менее, вопросы, нерешенной до сих пор проблемы непротиворечивости теории множеств входят в обширную область трудных проблем теории познания, связанных с современной математикой. Характеризуя эту область, Гильберт упомянул о следующих пяти важнейших проблемах философии математики: принципиальной разрешимости каждого математического вопроса, дополнительной проверке результатов математического исследования, критериях простоты современных математических доказательств, соотношении содержательного и формального в математике и логике, разрешимости математических задач с помощью конечного числа операций. Именно последнее требование, ограничивающее математические рассуждения финитными средствами, оказалось чрезмерно сильным и наиболее часто обсуждаемым философами, поскольку оно затрагивает сущность математического мышления.

В начале XX века метаматематика Гильберта, то есть рассуждение о математике, оформилась в достаточно самостоятельный раздел современной философии математики. Метаматематика – это философско-математическая наука, рассматривающая формализованные системы математики, которые применяются к самим математическим теориям. Предмет математики составляют сами формальные системы, которые придумывают математики, а предмет метаматематики – описание таких формальных систем, выяснение и обсуждение их свойств. С точки зрения объяснения релевантности выбранной формализации, оно методологически важно для исследуемой задачи, так как, прикрываясь математической терминологией, иногда забывают о реальной цели, для которой все это делалось. Метаматематику, например, можно охарактеризовать как содержательную математическую теорию, чьими объектами являются символы, выражения и конструкции формальной системы, с помощью которых путем содержательного рассуждения доказывается непротиворечивость соответствующей формальной теории. Философско-методологические установки гильбертовской математики Гёдель представил в виде следующих двух составных частей: “Во-первых, конструктивный элемент, который состоит в том, что речь о математических объектах может идти лишь постольку, поскольку они могут быть предъявлены или фактически построены. Во-вторых, специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были "наглядными", что означает в конце концов пространственно-временное сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественными” [109, с.301]. Теоремы Гёделя тоже относятся к метаматематике, хотя по построению это логико-математическая работа. Так ее собственно и воспринимает большинство математиков и логиков.

По существу, гёделевские результаты дедуцируют необходимость отказа в гильбертовской математике от “финитистской” компоненты в доказательствах непротиворечивости, в соответствии с которой для знаковых комбинаций существенными оказываются только определенные свойства сходства и различия. В контексте философско-методологической обоснованности математических теорий это предполагает обращение к смыслу закодированных специальными символами математических конструкций, так как возможность достоверного рассуждения нельзя отождествлять только с возможностью некоторого формализованного вывода. Несомненно, что повышению философского интереса к теории математического вывода способствовала сама программа Гильберта, сводящаяся к требованию математизации метаматематики. Реализации этой программы содействовало то, что Брауэр, подвергший критике всю теорию множеств в целом, предложил возводить математику на новой методологической базе умственных математических построений. Поэтому теории доказательств Гильберта отводилась еще и роль противовеса этой программе обоснования. С одной стороны, логический анализ интуиционизма позволил философски вскрыть глубинные корни недостатков формализма и выявить методологическую неадекватность “патентованных средств” обоснования математики. С другой стороны, можно вспомнить об философско-математических исследованиях академика А.Н. Колмогорова, в которых показано, что математические теории, использующие закон исключенного третьего, могут быть переведены в систему рассуждений, не опирающуюся на этот принцип.

Что же касается проблемы установления непротиворечивости анализа, решение которой прояснило бы судьбу теории доказательств, то она не решена до сих пор, как и проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Тем не менее, несмотря на отрицательные результаты Гёделя, принципы оснований математики Гильберта по-прежнему важны и интересны для современной математики. Главный шаг при размышлении о некоторой проблеме – это выбор идеи, которая сработает. Давид Гильберт, используя формализацию языка, предложил эффективный метод развития математики. В контексте философско-методологического анализа математики понятие метаисследования в применении к математическому познанию расщепляется на понятие предметного метаисследования, то есть собственно математического, и гносеологического метаисследования, которое относится к обоснованию математики. Именно для обоснования теоретико-множественной математики Гильберт предложил программу исследования математических доказательств методами новой математической дисциплины – метаматематики, или теории доказательств. Для него слово "доказательство" в его теории означало все же формальный дедуктивный вывод, реализуемый через конечную цепочку аксиоматически допустимых преобразований, соединяющую предположения с выводом. Методологически вся обосновательная цепочка математической теории выглядит следующим образом: сначала выявляется какая-нибудь содержательная математическая теория, например теория вещественных чисел, затем разрабатывается формальная система, соответствующая этой теории и эксплицирующая ее, например теория дедекиндовых сечений, и, наконец, эта цепочка заканчивается метатеорией, исследующей свойства формальной системы и доказывающей математические теоремы, касающиеся этих свойств.

В метаматематике Гильберта, впрочем, как и в интуиционизме, разрешалось применять только финитные методы, а математические теории, содержащие трансфинитные понятия, предполагалось преобразовывать в формальные системы, непротиворечивость которых была бы доказуема финитными средствами. В проблеме обоснования математических теорий следует различать два уровня рассуждений – гносеологический и логический. Например, "финитный" способ доказательства непротиворечивости – это, по существу, логический факт, состоящий в выводимости определенным способом некоторых формул. Но на каком основании мы доверяем финитному рассуждению? В отношении мира математических сущностей специалист по теории доказательств Гаиси Такеути считает, что "поскольку наш разум конечен, для нас, в конце концов, это воображаемый мир, каким бы ясным и прозрачным он ни казался" [439, с.110]. В стремлении преодолеть это экзистенциальное возражение философы математики пытаются найти разнообразные убедительные аргументы в существовании такого мира. Убежденность в фактической непротиворечивости предполагает также некоторое гносеологическое рассуждение. Поэтому обоснование математической теории не сводится только к одним логическим процедурам, а предполагает разработку некоторой гносеологической концепции достоверности, оправдывающей нашу веру в определенные средства доказательства. Обоснование формализованных теорий математики осуществляется в метаматематике с помощью интуитивно-очевидных умозаключений относительно оснований, которые должны быть обозримы и "интерсубъективны".

Оценку систем обоснования математики целесообразнее проводить по критерию полезности, а не по произвольному истолкованию на основе метафизических предпочтений. Именно формализация математики привела к более ясному осознанию природы самой математики, способствуя тем самым ее применению к нечисловым и непространственным объектам, например, к естественным и искусственным языкам и программам для вычислительных машин. Заметим однако, что любая хорошая формализация неизбежно обедняет исследуемый объект и ради успешной работы игнорирует его многочисленные несущественные черты. Но с точки зрения аксиоматического типа мышления, повышение теоретического уровня строгости в формализованной математике было необходимым. Поэтому, помня о стоящей задаче, целесообразно использовать различные дополнительные виды формализации, которые, отличаясь друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно. В таком контексте программа формализма не исключает другие содержательные математические программы. Относительная неудача основной идеи Гильберта о доказательстве непротиворечивости теории средствами формального метаязыка, выявленная в теореме Гёделя о неполноте арифметики натуральных чисел, вообще говоря, вовсе не умаляет значимости для развития математики программы Гильберта. Более того, метаматематические методы применяются теперь при изучении систематизаций математики, опираясь на формалистские и интуиционистские направления обоснования математики. Хотя роль эмпирического компонента познания в математике минимальна, современная математика, как обладающее сложной структурой научное знание, – это метатеория по отношению к естественным наукам. В метаматематике метатеория выступает как активное начало, подобное рефлексирующему субъекту, благодаря чему сама математика становится рефлексирующей наукой.

Такое понимание отметает тупиковые пути решения подобного рода проблем и продуцирует возможные пути дальнейшего направления исследований в философии математики. Теория множеств лежит в основе всех математических наук и практически все математики верят в то, что она непротиворечива. Эта вера основана на том, что многовековой опыт работы математиков пока не давал повода для сомнений в непротиворечивости математики, частью которой является канторовская теория множеств. Как утверждает Р. Пенроуз, "я не могу отделаться от ощущения, что в случае математики вера в некоторое высшее вечное существование – по крайней мере, для наиболее глубоких математических конструкций, – имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях человеческой деятельности" [326, с.89]. Кроме того, результаты Гёделя, с точки зрения философии, тоже демонстрируют нечто большее. Сенсационный результат Гёделя указывал на относительную слабость избранных логических средств, чтобы с их помощью можно было решать кардинальные вопросы обоснования теорий. Но в содержательных расширениях теорема Гёделя не имеет силы, так как они не поддаются представлению в арифметизированной метатеории. Здесь есть еще один важный философско-методологический аспект, на который обращает внимание В.Я. Перминов: "Принципиальным моментом гёделевской позиции является тезис о существовании единственной истинной арифметики и единственной истинной теории множеств" [333, с.216]. Но, учитывая многообразие математических теорий, многие философы математики убеждены в том, что невозможность осуществления формалистской программы обоснования в полном объеме по отношению к математическим теориям доказана столь же строго, как, например, невозможность вывода аксиомы о параллельных прямых из остальных аксиом евклидовой геометрии.

Однако против такого мнения есть философские и методологические возражения, связанные с "диагональным аргументом Кантора". Общая идея состоит в невозможности раздельного существования, точнее в дополнительном характере их сосуществования, таких дисциплин, как логика и учение о бесконечном. Современная теория множеств умеет теоретически различать бесконечные множества по их мощности. Основанием для такого различения бесконечностей по существу единственным, является теорема Кантора о несчетности множества всех действительных чисел. Различные типы бесконечности, присутствующие в теории Кантора, имеют значение и для доказательства теоремы Гёделя о неполноте. Заметим, что для доказательства своих теорем Курт Гёдель пользовался расширением диагональной процедуры Кантора, вызывающей философские дискуссии. В ряде философско-математических работ показано, что общепринятое доказательство несчетности континуума при помощи диагонального метода не выглядит логически безупречным, в силу изначальной внелогичности решаемой в нем проблемы и общего замысла доказательства. Критика диагональной процедуры Кантора связана с допущением сначала актуально бесконечного множества, а затем оперирование с ним как с потенциально бесконечным. Но математиками рассуждения Кантора не отвергаются, прежде всего, потому, что они выглядят непротиворечивей экстраполяции некоторых свойств конечных множеств на область бесконечного. Тем не менее, математик и философ С.Н. Бычков считает, что "Кантор своим диагональным методом не просто открыл новый тип математических утверждений, входящих сегодня в состав многих отличных от теории множеств дисциплин, но и существенно изменил саму логику математических рассуждений" [71, с.322]. Изобретение новых видов, методов и способов доказательства всегда будет необходимо математикам, которым для их обоснования понадобятся в свою очередь новые способы объяснения.

Несмотря на философские возражения по поводу “диагональной процедуры”, конкретной ошибки в доказательстве Гёделя указать нельзя, так как в рамках господствующих формализаций все выглядит достаточно гладко. Более того, если бы диагональный метод действительно был бы ненадежен и порождал методологические заблуждения, то можно было бы усомниться и в производных результатах, которые прямо или косвенно основываются на теоремах Гёделя. Однако известные результаты Джефа Париса, приведшего примеры верных, но недоказуемых в арифметике Пеано, математических утверждений, воспроизводящих ситуацию на строго математическом, а не на метаматематическом уровне, только убеждают в справедливости теорем Гёделя. По существу, упомянутые дискуссии под “подозрение” ставят не чисто математическую значимость этих результатов, а их значимость и надежность для науки за пределами математики, в том числе для философии, так как они фактически пользуются аристотелевской логикой. Таким образом, вопреки догмам метаматематики даже развитая формальная математическая теория не может быть изначально абсолютно непротиворечивой в силу неустранимости возможной “латентной неопределенности” и недостаточности логической точности ее основных объектов. Поскольку оценка полезности математической теории зависит от ее назначения, то для достижения различных целей можно воспользоваться по-разному построенными теориями, то есть интуиционистская и классическая математики могут продуктивно сосуществовать, поскольку они существенно дополняют друг друга в процессе математического познания. Особенности математического познания находят свое отражение и в понимании истины в математике. До конца XIX века мало кто сомневался в истинности математических теорий, однако с возникновением неевклидовых геометрий, наряду с заботой о непротиворечивости выбираемых систем аксиом, снова пришлось возвращаться к проблеме истинности, но уже на более высоком уровне метаматематического обоснования. Поскольку в конце XIX века математика утратила свои претензии на истинность, отражающую законы, присущие структурам реального мира.

Этот процесс стимулировался еще и тем, замечает историк математики В.Ф. Панов, что “развитие математики на протяжении XIX в. характеризовалось стремлением к систематизации, к установлению единства в многообразии математических фактов и методов, на первый взгляд весьма далеких друг от друга. Ценным было также критическое уяснение и строгое обоснование фундаментальных понятий” [319, с.486]. Например, с помощью своей аксиоматики Пеано хотел выразить сущность натуральных чисел. Хотя математики считают, что это ему вполне удалось, это не умаляет важности философского вопроса: как можно отличить истинное высказывание о натуральных числах от ложного высказывания? При ответе на поставленный вопрос необходимо учитывать то обстоятельство, что арифметика натуральных чисел строится не только на базе пяти аксиом Пеано, поскольку при этом используется логика, а также кое-какие сведения о множествах, которые фигурируют в определении натурального ряда. Заметим, что логику и необходимые сведения о множествах можно изложить аксиоматически, но это будет уже сложнее сделать, чем сформулировать аксиоматику Пеано. Каждая научная теория имеет некоторый набор фундаментальных постулатов, с помощью которых пытается объяснить феномены и явления, оставшиеся необъясняемыми. Еще сам Давид Гильберт выражал по этому поводу особую озабоченность, спрашивая: “Что было бы с истинностью наших знаний вообще и как обстояло бы дело с существованием и прогрессом науки, если бы в математике не было достоверной истины?” (цит. по [186, с.561]). Способ выявления истинных математических теорий открывает дополнительные перспективы обоснования математики в целом. Поэтому, чтобы иметь достаточные основания для веры в истинность математической теории без модификации ее основополагающего формализма, эта теория должна включать в себя некоторые методологические преимущества, содержащие признаки истинности и выделяющие ее среди других теорий.

Анализируя основные этапы развития научных представлений по проблеме обоснования математики, нельзя не связать ее с актуальной темой истины в математике, поскольку особенности математического познания находят свое отражение и в понимании возможности убедительного доказательства истинности математических теорий и теорем. Соответствующие высказывания расположились в диапазоне от невозможности определенного ответа на этот вопрос до безусловной истинности математических теорем. Причина такого разногласия, по мнению математика Ю.И. Янова, состоит в том, что “понятие истинности теорем является метаматематическим и потому до тех пор, пока соответствующий раздел метаматематики не был формализован и тем самым превращен в часть математики, обсуждение этого вопроса могло носить только философский характер” [501, с.1]. Проблема истинности математических суждений имеет свою специфику, поскольку, сравнивая математическую теорию, реализованную в техническом приспособлении, мы не задаем вопроса истинно оно или нет, так как нам важно лишь работает оно или нет. Несмотря на различные подходы к обоснованию современной математики, все они имеют смысл лишь в предположении истинности обыкновенной содержательной арифметики, которая в определенном смысле является фундаментом всей математики. Внутренняя убежденность и вера в истинность знания и правильность действий необходимы любому человеку, поскольку они не только побуждают его к практическому действию, но и психологически на него настраивают. Согласно этой стихийной вере, математика есть подлинное знание. “Она открывает истины. Ее теоремы – это истинные утверждения. Но если это истины, то к чему они относятся; если это познание, то познание чего?” [416, с.73]. Ответ на философский вопрос о познании очевиден – это познание математических объектов, их отношений и соотношений. Но в ответе на вопрос об истине уже присутствует философское допущение в платонистском духе, состоящее в том, что математические объекты существуют независимо от познающих субъектов, задачей которых является их истинное описание.

Поэтому в философии математики постоянно предпринимаются попытки найти соответствующее направление внешнего обоснования математических теорий, которое, в сущности, опять сводится к ответу на философский вопрос: как можно охарактеризовать математическую истину? При ответе на даный вопрос следует соблюдать осторожность, так как это понятие с необходимостью предполагает наличие некоторой оценки, происхождение которой пока еще не рассмотрено. Внешнее обоснование любой теории сводится к ответам на философские вопросы: Что есть истина? Каковы ее критерии? Можно ли их формализовать? Напомним хрестоматийное определение истины в его классическом смысле: истинна та мысль, которая соответствует своему предмету. Такое истолкование понятия истины характерно для здравого смысла и впервые в явном виде оно было сформулировано Платоном: “…тот, кто говорит о вещах в соответствии с тем, каковы они есть, говорит истину; тот же, кто говорит о них иначе, – лжет” (цит. по [310, с.50]). Платоновская трактовка истины была принята наукой Нового времени, благодаря чему истина и ложь стали гносеологическими характеристиками знания в отношении к познаваемой действительности. Кроме того, одно из первых определений истины, ставшее не менее традиционным, восходит к Аристотелю, который исходил из того, что познание истинно, когда оно соответствует вещам и связям, объективно существующим вне сознания. Аристотелевское определение истины как утверждение соответствия действительности превратилось в общепризнанное философское положение. Но нельзя не указать на известные в философии науки трудности, связанные с использованием классического понятия истины. Во-первых, это неясность понятия “соответствие”, с помощью которого определяется истина, во-вторых, отсутствие четких критериев, позволяющих отделить истину от заблуждения, в-третьих, проблема гносеологической оценки генезиса истины. Так что все же означает “соответствует”? Не идет же речь о том, что истина должна быть хорошей копией или верным представлением об исследуемом объекте. Если не акцентировать внимание на метафорическом характере такого сравнения, то мы вынуждены признать, что необходима какая-то более убедительная философская интерпретация этого “соответствия действительности”.

С точки зрения обоснования математики, более точное объяснение классической концепции истины, которое смогло бы заменить аристотелевскую формулировку, сохраняя ее основные идеи, дал философ и логик Альфред Тарский. Он обобщил понятие истины следующим образом. Если в естественнонаучном языке истина означает соответствие реальной действительности, то в логико-математических языках истину следует понимать как выполнимость в соответствующей модели. Заметим, что сегодня релятивизм часто выражается в подстановке “модели” на место “истины”. Хотя в рамках данного исследования эта философская задача будет рассматриваться в существенно ограниченном объеме, надо все же отметить, что проблема соответствия знания своему предмету содержит следующий недостаток: оно спутывает истину и истинность. “Истина – знание, находящееся в отношении соответствия своему предмету, истинность – само отношение” [233, с.1091]. Философская экспликация этих понятий состоит в том, что их можно интерпретировать следующим образом: “Истина – это содержательное понятие категориального типа, а истинность – формальный признак тех содержаний, которые входят в класс, обозначаемый термином "истина"” [210, с.6]. Без концепции истины трудно представить себе современную математику, хотя в результате многих методологических открытий концепция истины в математике оказалась вовлеченной в целый ряд проблемных ситуаций. Некоторые из них породили философские сомнения в приемлемости концепции истины в математике в целом. Остановимся на главных из них. Во-первых, Курт Гёдель показал, что в арифметике и других непротиворечивых формальных системах, содержащих арифметику, есть утверждения, истинность которых совершенно неожиданно для философов науки оказалось невозможно ни подтвердить, ни опровергнуть. Это проявление специфики абстрактного характера объектов математики и аксиоматического метода построения ее теорий, что, в свою очередь, наложило отпечаток как на понимание проблемы истины в математике, так и на своеобразие проявления критериев истинности в контексте различных направлений обоснования математики. Во-вторых, есть математические теории, непротиворечивость которых, а, следовательно, и их противоречивость, невозможно доказать, поэтому неясно, в каком смысле к ним можно применять концепцию истины.

Следует также напомнить о когнитивном релятивизме, включающем проблему истины в математике в широкий философский контекст. Заметим, что, например, Герман Вейль с большой иронией относился к вечным истинам: “Никакой Гильберт не сможет убедить нас в непротиворечивости на вечные времена. Мы должны быть довольны, если какая-нибудь простая аксиоматическая система математики пока выдерживает проверку наших сложных математических экспериментов” (цит. по [186, с.559]). Но если на поздней стадии становления математической теории появятся расхождения, то математики могут изменить ее основания, поскольку математика – это научная дисциплина, изучающая следствия из любого множества допущений. При таком понимании математики можно заключить, что она не имеет дела с истинностью или ложностью тех оснований, следствия которых она изучает. В-третьих, неясны критерии, с помощью которых можно выбирать конкурирующие теории, так как, например, система аксиом Цермело–Френкеля (ZF) может быть дополнена аксиомой выбора или гипотезой континуума, не влияя на ее непротиворечивость, что в свою очередь проблематизирует философские интерпретации концепции истины в современной математике. Напомним, что американский математик Пол Коэн во второй половине XX века получил окончательное довольно неожиданное решение проблемы континуума, доказав, что аксиомам теории множеств не противоречит ни континуум-гипотеза, ни ее отрицание. “Таким образом, хотя вопрос был задан в форме "либо-либо", ответ получился в виде "ни-ни". Этот результат не только серьезно подорвал позиции теоретико-множественной математики, но и имел принципиальные последствия в естествознании и философии” [35, с.84–85]. В философии математики, в контексте гёделевских результатов, этот результат рассматривался как реальное подтверждение первого кризиса математики прошлого века, проявившийся в частности в том, что помимо истинности и ложности, есть еще и третья альтернатива – неопределенность. Но вопрос о том, что конституирует в математике осмысленное выражение, настолько обширен, что пока можно лишь только указать на некоторые проблемы, связанные с этой темой, например, о применении принципа исключенного третьего в разных направлениях обоснования. Поэтому для адекватного понимания проблемы обоснования современной математики как целостной системы обоснования необходимо компетентное участие не только профессиональных математиков, но и философов математики.

Все три перечисленных выше аргумента о концепции истины в современной математике могут оцениваться как оптимистически, так и пессимистически. Естественно, что в контексте обоснования математики нас интересуют, прежде всего, оптимистические оценки. Во-первых, непротиворечивость формальной арифметики доказана, хотя и с помощью более общего метода трансфинитной индукции. Поэтому, теорема Гёделя не опровергла “концепт истины”, а наоборот способствовала выяснению его подлинного содержания. Во-вторых, хотя есть математические теории, в частности теория множеств, непротиворечивость которых пока невозможно доказать, математики научились эффективно обращаться с ними. Например, система ZF состоятельна на протяжении почти уже целого века. В-третьих, невозможность выбора между конкурирующими теориями тоже не свидетельствует против концепции истины в математике, поскольку она всегда соотносится с отдельной конкретной теорией. Следовательно, концепция истины и не должна оценивать конкурирующие теории. По поводу пессимистических оценок заметим, что большинство из них зависит от степени необходимости математических истин в системе математического знания, что специфически репрезентируется в различных направлениях обоснования математики, в которых соответствующая концепция истины является важнейшим философско-методологическим регулятором. В современной математике истина не единственна, что ничуть не противоречит репутации математики как наиболее безупречного метода достижения достоверного знания о мире. Остается еще вопрос о месте нахождения теорем в иерархии математических истин, доказанных с помощью компьютеров и упорядоченных по степени обоснованности. Можно предположить, что все же существует возможность приблизить “ранг” обоснованности математических теорем, доказанных с использованием современных компьютеров, к максимально достижимому теоретическому уровню математической строгости.

В концепции истины можно выявить и платонистский мотив, обусловленный некоторой неизбежной неопределенностью понятия истинности. По мнению Бертрана Рассела: “Истинность есть свойство веры и, как производное, свойство предложений, выражающих веру. Истина заключается в определенном отношении между верой и одним или более фактами, иными, чем сама вера” [372, с.164]. Это можно интерпретировать так, что в случае истинной веры существует факт, к которому она имеет определенное отношение, а в случае ложной – такого факта, вообще говоря, нет. В частности, вопрос об истинности математических утверждений сводится к факту существования соответствующей теоретико-множественной модели. Хотя этот вопрос ничуть не проще, так как по существу он в свою очередь сводится к вопросу о непротиворечивости соответствующей математической теории. Но здесь следует обратить внимание на следующий методологический аспект. С одной стороны, истинность математической теории и ее непротиворечивость в математическом смысле – это равноправные характеристики, так как оба этих требования являются внешними к теории, и в общем случае имеют происхождение из практической направленности любого знания. С другой стороны, как утверждает философ математики В.Я. Перминов: “Но гносеологически требование истинности имеет совершенно другой статус, чем требование непротиворечивости. Если полная истинность теории заведомо недостижима, она может быть только идеалом, то полная логическая совместимость утверждений вполне реализуема, как в сфере опытного знания, так и в сфере математики” [331, с.149]. Непротиворечивость конкретной математической теории отнюдь не идеальная цель, а фактически реализуемое состояние. Например, если говорить об убедительности законов арифметики, то они вытекают не из реальной практики счета, а из универсальных требований категориальной онтологии, поскольку, вообще говоря, нельзя смешивать применение математической истины с самой этой истиной.

Можно предположить, что центральное ядро любой признанной математической теории, безусловно, непротиворечиво. “Можно сказать, что к настоящему времени непротиворечивость таких теорий, как элементарная геометрия, арифметика, анализ, хорошо изучена и достаточно надежно обоснована” [194, с.8]. Поэтому, после доказательства непротиворечивости арифметики, хотя и более сильными, чем финитными средствами, снизился методологический интерес к доказательству непротиворечивости других формальных теорий. Однако по-прежнему остается проблематичной непротиворечивость такой мощной аксиоматической теории, как система Цермело–Френкеля. История и генезис развития современной математики показывают, что в них столь же трудно ожидать противоречий, как и в арифметике, понятия которой существенно использовались при построении интерпретаций для доказательства непротиворечивости других математических теорий. Конечно, нельзя настаивать на безупречности проведенного рассуждения о непротиворечивости аксиоматизированных математических теорий в контексте проблемы обоснования. Ведь при аксиоматическом построении математической теории вопрос о ее истинности сводится к вопросу об истинности аксиом, а также к анализу логических способов умозаключений, используемых в доказательствах. Несводимость проблемы обоснования математики исключительно к аксиоматическим основам математики подтверждает известный тезис о том, что математическая деятельность требует “невычислительной активности”. Разделяя объекты математики на формальные и идеальные, Гильберт соотносил идеальные объекты с априорным синтетическим созерцанием. Поэтому метаматематический опыт у Гильберта не так уж непосредственен, а носит, возможно, трансцендентальный характер в духе философии Канта, последователем которого он себя считал. Благодаря подходу Гильберта к непротиворечивости, общепринятый взгляд на математику существенно сместил акценты в обосновании математики. “Действительно, – говорил он, – аксиомы, положенные Цермело в основание, содержат настоящие содержательные предположения, а в доказательстве их как раз и состоит, мне кажется, главная задача исследований по обоснованию математики – ведь уже тогда доказательство непротиворечивости арифметических аксиом стало жгучим вопросом” [113, с.450]. В результате такого переосмысления истинность отдельного математического положения не столь существенна, поскольку основное внимание придается только непротиворечивости системы.

Сам Гильберт предполагал, что окончательное решение проблем обоснования с помощью аксиоматического метода никогда не будет завершено. Но даже ограничения формализма, установленные теоремами Гёделя, не поколебали общего убеждения современных математиков в его целесообразности, а возникающие при их разрешении трудности давали дальнейшие импульсы к развитию математики. В пользу программы формализма можно добавить следующее обстоятельство. Математики новые понятия, представляющиеся им полезными, пытаются сконструировать из старых понятий, доказавших уже свою инструментальную ценность. Преимущество такого конструирования новых математических понятий состоит в том, что их формальный смысл будет точно определен, даже если в "пограничных случаях" оно будет противоречить интуиции и здравому смыслу. Но если оценивать концепцию истины в максимально широкой философской перспективе, то можно заключить, что ее не следует связывать исключительно с формалистским направлением в обосновании математики. Это можно философски аргументировать отсутствием до сих пор общепринятого представления о том, что такое знание и чем оно отличается от веры. "Поэтому важно и нужно исследовать разнообразные факторы, релятивизирующие результаты познавательной деятельности, уточнять понятия субъекта, объекта и предмета познания, но, – как представляется А.Л. Никифорову, – все такого рода исследования сохраняют смысл лишь до тех пор, пока мы – явно или неявно – сохраняем классическую идею истины" [310, с.52]. В частности, в контексте этого исследования важно подчеркнуть, что хотя истины интуиционистского и формалистского направлений в обосновании математики не полностью совместимы, так как они соотносятся с разными подходами к идеальным объектам, эти истины находятся в отношении дополнительности. В философском контексте проблемы обоснования математики, в связи с новыми кризисами современной математики конца XX века, опять уже на новом методологическом уровне возникает проблема математической истины.

Сравнительно недавно в философии математики наиболее актуальным спором о природе математических истин был вопрос о том, являются ли математические истины синтетическими априори или их можно считать аналитическими, разделение которых было обусловлено противостоянием идеи нормативности и идеи соответствия реальности. Во-первых, следует заметить, так как философия математики – это часть философии, то в ней естественно отражаются все тенденции, свойственные философии, в которой, в частности, концентрируются проблемы, связанные с теорией познания и проблемой истины. Во-вторых, то, что было сделано в философии математики последних десятилетий, можно суммировать в следующих двух представлениях. Одно из них как наиболее активное стремится увязать новые исследования с работающими в математике традиционными направлениями – формализмом, интуиционизмом и конструктивизмом, а другое непосредственно связано с эпистемологической тенденцией в философии математики, обусловленной современной теорией познания, а именно, дилеммой Пола Бенацеррафа, сформулированной в его работе "Математическая истина" [518]. Его дилемма философски интерпретируется следующим образом: если математика представляет собой исследование объективных идеальных сущностей, но в то же время когнитивные способности человека позволяют ему познать только чувственные объекты, то, как он может в такой ситуации познать собственно математические объекты? Заметим, что эта дилемма теряет смысл, если рассматривать исключительно причинную теорию познания, но, как известно это не единственная теория в философии науки. Фактически она сводится к главному онтологическому вопросу о существовании математических объектов, и в таком контексте работа Бенацеррафа "Математическая истина" была направлена на эпистемологическое опровержение платонизма, но в ней были спутаны различные философские проблемы, в частности касающиеся понятия математической истины.

Философ математики В.Я. Перминов выделяет по крайней мере пять значений понятия истины в математике, которые используются в общих характеристиках математического мышления. Во-первых, это формальная истина, "которая тождественна выводимости суждения из принципов". Во-вторых, семантическая истина, "определяемая через выполнимость принципов данной теории на объектах другой формальной теории". В-третьих, это эмпирическая истина, "означающая наличие эмпирической интерпретации принципов математической теории". В-четвертых, онтологическая истинность, "выражающая особое отношение исходных принципов математики к категориальной картине мира". Наконец, это фактуальная истина, "характеризующая отношение общих принципов математической теории к системе фактов (теорем), образующих ее генетическую основу" [333, с.150–151]. Для философской интерпретации формальной истины можно заметить, что выработку понятия формального языка и формальной системы исчисления можно отнести к числу основных достижений XX века в области оснований математики. В формальной истине есть еще и дополнительный методологический аспект, заключающийся в том, что формальное доказательство, являющееся процедурой, стремящейся к получению новых истинных предложений, будет адекватной процедурой только в том случае, если все предложения, полученные с помощью доказательства, будут истинными, а все истинные высказывания могут быть доказаны. На концепцию истины, которая выявлена в аристотелевской формулировке, обычно ссылаются как на классическую или семантическую концепцию истины. "Под семантикой, – разъясняет Альфред Тарский, – мы подразумеваем ту часть логики, которая, грубо говоря, рассматривает отношения между лингвистическими объектами (например, предложениями) и тем, что выражается этими объектами" [441, с.137]. С точки зрения обоснования математики проблемы семантической истины заключаются в том, что, даже при точном определении языка математики, математические предложения, которые являются истинными либо ложными, или, во всяком случае, осмысленными в одном языке, могут быть бессмысленными выражениями в другом, например естественном, языке.

Кроме того, утверждает Б.Л. Яшин, "аксиоматическая теория будет непротиворечива семантически, если мы сможем построить хотя бы одну модель этой теории, т.е. если мы сможем указать хотя бы одно множество объектов, отношения и связи между которыми соответствуют данной системе аксиом” [508, с.96]. Но, здесь есть одна методологическая трудность, состоящая в том, что даже наличие у формальной теории реальной модели, в отличие от истинности, не может служить доказательством ее непротиворечивости, так как идеальные математические объекты и их отношения могут быть адекватно соотнесены только с идеальными понятиями. Кроме того, здесь проявляется релятивность знания в том смысле, что доказательства непротиворечивости методом модели являются относительными, так как теория, для которой строится модель, является непротиворечивой при условии непротиворечивости той теории, из которой берется соответствующая модель. Говоря об эмпирической истине, необходимо, прежде всего, отметить, что основная особенность математики, отличающая ее от эмпирических наук, состоит в предельно ясной констатации установления своих истин в конкретных случаях, а также достижения “абсолюта” в смысле их окончательного установления. В связи с этим заметим, из практического применения математики часто делается вывод о том, что математическая теория в своей истинности проверяется или обосновывается практикой. Такой вывод получается при смешении таких понятий как истинность и содержательность. Безусловно, можно утверждать, что развитие содержательной математической теории стимулируется практикой, что она в этом случае отражает реальность, что она тогда содержательна, в смысле соответствия некоторой системе реальных связей, но отсюда, вообще говоря, не следует, что она истинна, и подобно эмпирическим теориям обосновывается посредством ее использования. Но, с точки зрения философского анализа проблемы обоснования математики наиболее существенными являются онтологическое и фактуальное понимание истинности математических утверждений.

Анализируя математическое знание в целом, его можно условно разделить на следующие два нечетких множества – это онтологически истинные теории и логически непротиворечивые теории. Рассмотрим теперь более подробно их философские характеристики. В системе математического знания содержится подсистема математических утверждений, обладающих онтологической истинностью, которую называют “онтологической базой” или “онтологическим ядром” математики. Хотя невозможно строго очертить область суждений, относящихся к этой подсистеме, она выявляется через онтологическую интерпретацию математического мышления и через использование гносеологических критериев познания. “Как бы ни расширялась математика, сколь бы сложные и удаленные от здравого смысла и очевидности теории она ни делала предметом своего анализа, – резюмирует В.Я. Перминов, – в ее центре существовала и всегда будет существовать сфера первичной, евклидианской математики, принципы которой общезначимы и продиктованы фундаментальной онтологией мышления” [333, с.152]. В этом смысле онтологически истинная математика занимает вполне определенное место в структуре системы математического знания, поскольку она ориентируется на генетическую надежность математического мышления. Но онтологическая истинность математических суждений недостаточна, например, для понимания статуса математических аксиом, так как самоочевидность – это не универсальное свойство любых аксиом, а специфическая особенность первичных аксиоматик, принимаемых в качестве абсолютно надежных. Исходя из первичных онтологически истинных понятий математики, можно анализировать математические теории с помощью перехода от одних математических доказательств на основе принятых аксиом к другим. Все признанные математическим сообществом доказательства, как формалистского, так и интуиционистского направления в обосновании математики, можно отнести к "фактологическому" основанию математики. Это дает возможность говорить об истинности принципов математического познания, которую, в отличие от онтологической истинности, "можно назвать фактуальной истинностью, поскольку в ее основе лежит общенаучное представление об истинности как о соответствии суждений некоторому данному содержанию" [333, с.231]. В контексте проблемы обоснования современной математики можно говорить об "идеальной" фактуальной истинности математической теории в том случае, когда она достигает полной завершенности своих математических доказательств.

Здесь по существу речь опять идет о логически непротиворечивых теориях, в том смысле, что вопрос об истинности математических утверждений довольно часто сводится к вопросу о непротиворечивости соответствующей теории, который, согласно гёделевским результатам, не может быть решен средствами самой теории. Об этом, например, писал Герман Вейль: "Чистая математика признает только одно – но зато совершенно обязательное условие истины – именно, непротиворечивость" [78, с.56]. С философской точки зрения это можно рассматривать как категорическое утверждение, поскольку условие непротиворечивости, исключающее возможность одновременного вывода какого-либо предложения и его отрицания, не связано с истинностью предпосылок. Следует также отметить, что в философии математики вопрос о непротиворечивости математики в целом не имеет смысла, так как в современной математике существуют непротиворечивые теории, объединение которых уже противоречиво. Например, аксиоматики разных геометрий, непротиворечивые порознь, противоречивы в совокупности. В контексте платонистской составляющей в направлениях обоснования современной математики заметим, что как наличие противоречащих друг другу теорий не означает противоречивости всей математики, так и существование противоречащих миров не означает в целом противоречивости мира идей. Поэтому в обосновании математики речь идет уже только о непротиворечивости отдельных математических теорий, например, формальной арифметики или формальной теории множеств в рамках формалистского направления обоснования математики. Можно подытожить, что, по существу, речь идет о существовании двух традиций в современной философии с различным пониманием истины. Одна из них – это традиция Платона–Канта–

Гегеля, в рамках которой путь к истине понимается как движение к представлению о мире “как он есть сам по себе”. Другую традицию можно обозначить как “релятивизм”, в рамках которой вместо поиска математической истины математики и логики занялись поисками логической непротиворечивости, с учетом специфики ее концептуальной зависимости от того, что именно положено в основу математических рассуждений.

Можно заключить, что непротиворечивость теории остается пока главным критерием ее истинности, хотя трактовка критерия истинности в математике становится уже другой, поскольку вместо попыток формального доказательства непротиворечивости математической теории выдвигается более умеренное требование наличия косвенных доводов, подтверждающих непротиворечивость теории. Но, с точки зрения философского синтеза направлений обоснования современной математики к этим доводам относятся соответствующие методологические интерпретации направлений обоснования интуиционизма и платонизма. С одной стороны, онтологическая истинность математических понятий и принципов должна быть гарантией их непротиворечивости по отношению друг к другу. С другой стороны, трудности обоснования непротиворечивости аксиоматической системы, формируемой без ссылок на очевидность, приводят к тому, что она не может быть принята в качестве онтологически истинной. Но непротиворечивая теория никогда не была бы создана, если бы ее методологический замысел не был доступен математической интуиции. В определенном смысле можно даже говорить об “антионтологизме” в философии математики, поскольку он “органически присущ интуиционизму, который мыслит математические объекты как только мысленные конструкции, приемлемые в плане той или другой задачи” [333, с.216]. Например, содержательно, или как иногда образно говорят “наивно” построенные теории, в частности, наивная теория множеств, не столь уязвимы с точки зрения противоречивости, как формальные теории. Это можно аргументировать тем, что содержательная теория не репрезентируется целиком, а только в виде уже построенного своего фрагмента, непротиворечивость которого, как правило, обеспечивается в процессе построения, например, в конструктивистском духе интуиционистского направления обоснования математики.

Понятие соответствия математической мысли исследуемому объекту является чрезвычайно расплывчатым, поэтому его можно уточнять и философски конкретизировать по-разному. Но математики верят в то, что истинное знание дает им адекватную картину окружающего мира. В частности, для понимания других косвенных доводов, подтверждающих непротиворечивость теории, тоже необходимо понять, откуда у математиков возникает вера, или философская идея, в существование абсолютной истины. Заметим, что в философии математики до сих пор нет общепризнанного четкого представления о том, что такое знание и чем оно отличается от веры в смысле платонистского направления в обосновании математики. Например, Пол Коэн писал, что “непротиворечивость теории множеств существенным образом представляет собой предмет веры, подкрепляемой, однако, колоссальным практическим опытом успешного использования данной теории” [205, с.102]. Такая убежденность возможна лишь при понимании истинности в качестве практической эффективности, точнее в эффективном использовании математической теории в практических приложениях в широком смысле не только в естественных науках, но и в самой математике. В последнем случае эффективность следует понимать как совокупность отношений, соединяющих различные теории друг с другом. Об этом говорил даже сам Давид Гильберт: “Если помимо доказательства непротиворечивости может иметь смысл еще вопрос о законности некоторого мероприятия, то таким вопросом может быть только вопрос о том, сопровождается ли это мероприятие соответствующим успехом или нет” [111, с.340]. Этот тезис следует интерпретировать как допустимость критерия практической эффективности в случае невозможности доказательства непротиворечивости математической теории. Поэтому, можно заключить, что, в контексте анализа проблемы истины в математике, с учетом объективного многообразия логических возможностей в математике, возникает необходимость в философско-методологическом синтезе действующих направлений обоснования, по-своему способствующих сохранению единства и целостности современной математики.

Следует обратить внимание на еще один аспект взаимоотношений проблемы истины и обоснования. Если признать, что математика отражает реальную действительность, то для формальных теорий понятие истинности означает соответствие этой реальности. Согласно методологии математического реализма, в математике в качестве истинных утверждений могут приниматься как утверждения о конкретных объектах, так и утверждения об абстрактных сущностях. “Крупнейший математик нового времени Пуанкаре, – напоминает в связи с этим академик В.И. Арнольд, – делил все проблемы на два класса: бинарные и интересные. Бинарная проблема – это проблема, допускающая ответ "да" или "нет" (как, например, вопрос Ферма). А интересные проблемы – это те, в которых ответ "да" или "нет" недостаточен, в них нужно исследовать какой-либо вопрос, двигаясь вперед” [23, с.5]. В интересных проблемах возможно непрерывное продвижение вперед, доставляющее новые сведения о характере решений, которые остались бы незамеченными, если бы математическая проблема ставилась как бинарная. Поэтому в системной триаде обоснования математическая истина не подчиняется какому-то одному общезначимому критерию, поскольку именно бинарные проблемы, традиционно сводящиеся к трансформированному ответу типа “да – нет”, могут оказаться губительными для дальнейшего прогресса математики. Вместе с тем, нельзя не отметить, что одним из важнейших механизмов, характерных для процессов роста математического знания, является регресс, позитивно понимаемый как методологическое ослабление исходных принципов.

Согласно Гегелю, природа математических истин отличается от природы философских истин. Но следует все же особо подчеркнуть, что “Гегель истинность в математике ограничивал лишь доказательностью, а природа математической истины, как это следует из теорем К. Гёделя, кроется не только в ее доказуемости, и не всегда истину можно подтвердить доказательством" [272, с.81]. Даже без теорем Гёделя ясно, что математическая истина выходит за рамки любого формализма, точнее, что теоретико-числовая истина превосходит доказуемость в арифметике, поскольку иначе математики не могли бы решить какие системы аксиом и логические правила вывода следует брать в расчет при построении формальных систем. Точка зрения самого Гёделя была, как всегда, неожиданной, поскольку он считал, что придет время, когда ученые будут относиться к интуиции, с таким же уважением, как и к формальным построениям, то есть как к реальному инструменту познания, при помощи которого мы способны увидеть математические истины. Поэтому представляется вполне естественным в качестве направления внешнего обоснования современной математики рассматривать платонистскую составляющую, которая проявляется также и через эстетическую функцию теории, так как для многих математиков красота формальной математической теории – это более убедительный критерий истины, чем ее эмпирическое подтверждение. Иногда неправомерно ссылаются на то, что теорема Гёделя утверждает, будто существуют истинные утверждения, которые нельзя доказать, поскольку в такой репрезентации можно усмотреть некое противоречие. Если утверждение невозможно доказать, то откуда тогда возникает убеждение в его истинности? В таких прямолинейных интерпретациях смешиваются содержательное, или неформальное, и формальное понятия доказательства. "Теорему Гёделя надлежит понимать в следующем смысле: существуют не имеющие формального доказательства утверждения, являющиеся тем не менее истинными, причем истинность их подтверждается содержательными доказательствами" [454, с.389]. По существу речь идет о том, что указанные утверждения доказуемы содержательно, но недоказуемы формально. В контексте обоснованности, если рассуждения не содержат ничего лишнего и при этом не используются громоздкие выкладки, то объект воспринимается даже как математически красивый, подобно компьютерным визуализациям фрактальных объектов, которые доставляют эстетическое удовольствие.

Есть еще одна специфическая особенность математического знания, состоящая в том, что процесс обнаружения истины есть переход от неявного знания к явному знанию. Например, одной из особенностей аксиоматического подхода является то, что аксиомы содержат утверждения как об определяемых понятиях, так и о неопределяемых понятиях. Поэтому аксиомы содержат информацию о том, что можно утверждать о неопределяемых понятиях, то есть содержат неявные определения таких понятий. В частности, как подчеркивают Бурбаки, "аксиоматический метод показал, что "истины", из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем" [69, с.258]. С точки зрения когнитивного релятивизма, не только математика и физика сравнивают и дополняют друг друга, но и внутри математики такие подчеркнуто различные компоненты знания, которые получаются посредством интуиции или с помощью аксиоматического постулирования, вносят свой целостный вклад в общее понимание природы современного математического познания. Вспомним также, что хотя все математические доказательства должны быть по определению убедительными, в связи с их переусложненностью, некоторые из них “убедительнее других”, то есть, образно говоря, одни из них являются доказательствами в большей степени, чем другие. “Но ведь и математические истины, – напоминает В.А. Успенский, – допускают нечто вроде такой градации. Каждое из следующих трех утверждений: "$2 \cdot 2 = 4$", "$17^{14} > 31^{11}$", "$300! > 100^{300}$" – истинно. Однако мы говорим: "Верно, как $2 \cdot 2 = 4$", но не говорим: "Верно, как $17^{14} > 31^{11}$" или "Верно, как $300! > 100^{300}$"” [454, с.459]. Похожая ситуация, как с математическими аксиомами и более убедительными утверждениями, имеет место в физике элементарных частиц, которая не отвергает предположения о бесконечной сложности материи. Принято считать, что математика и физика как наиболее близкая к ней естественная наука методологически не очень тесно связаны друг с другом. Например, физики описывают окружающий мир, исходя из результатов экспериментов и наблюдений, а математики в определенном смысле независимы от этого мира, поскольку их теоремы и утверждения никак не зависят от окружающей реальности.

Поэтому, предполагает Грегори Чейтин: “Математические истины должны быть верны в любом мире. И все же определенное сходство есть. В физике, и вообще в естественных науках, ученые формулируют законы, сублимируя результаты наблюдений. Затем показывают, как результаты наблюдений могут быть выведены из получившихся законов. В математике происходит нечто подобное: математики сжимают результаты вычислительных экспериментов в аксиомы, а затем выводят из них теоремы” [474, с.44]. Расширение физического знания происходит путем добавления новых физических законов, которые можно рассматривать как систему физических аксиом, подобно тому, как добавление новых математических аксиом позволяет ответить на некоторые ранее неразрешимые вопросы. Хотя некоторые исследователи считают, что, по крайней мере, в настоящее время аксиоматизация физики представляется ненужной. Тем не менее, нельзя не подчеркнуть, что все выводы, которые удается получить с помощью неполной системы аксиом, являются истинными, коль скоро истинна каждая аксиома используемой системы. Это связано с тем, что в математике истинность теоремы отождествляется с ее выводимостью из непротиворечивой системы посылок в виде аксиом, а соответствующее доказательство представляет собой дедуктивную цепочку рассуждений, каждый шаг которой обосновывается логическим правилом из формальной математической логики. Но здесь возникает философский вопрос: что побуждает математиков принять за основу избранную ими систему аксиом? При ответе на него выявляется необходимость интуиционистского и формалистского подходов к обоснованию математики. Если предоставить математиков самих себе, то они в духе Брауэра могут при математических открытиях ограничиться интуитивными истинами, если у них нет необходимости в строго формальном обосновании. Если же заставить математиков заняться вместе с физиками совместной деятельностью по теоретическому обоснованию реальности, то они будут на стороне Гильберта. В отличие от отношений между физическими категориями, отношения между математическими категориями независимы от законов физики, поскольку определяются автономными свойствами самих абстрактных категорий.

Поэтому можно заключить, что с точки зрения философии физики разногласия во взглядах на понятие математической истины, в конечном счете, сводятся к разному пониманию отношения математики к реальному миру, хотя при более глубоком философском анализе можно обнаружить принципиальную независимость математики от реального мира. Есть и более радикальные точки зрения на проблему физической и математической истины. “Нет ни физической или математической истины вообще, но есть цель физической науки – нахождение закона изучаемого явления или процесса природы, как есть и цель математической науки – построение формально-логического доказательства того или иного утверждения” [29, с.131]. Но это не отказ от понятия истины в философии математики и философии физики, поскольку удачная математическая форма гарантирует физической теории правильность ее построения, а, в свою очередь, возможное физическое содержание теоретической конструкции сообщает математическому построению статус истинности его элементов. В таком контексте можно предположить, считает Дэвид Дойч, что “математика, изучающая эти отношения и свойства, таким образом, изучает абсолютно необходимые истины. Другими словами, истины изучаемые математикой, абсолютно определены. Но это не говорит ни об определенности самого нашего знания этих необходимых истин, ни о том, что методы математики дают своим выводам необходимую им истинность” [137, с.257]. В действительности математики изучают еще и ложные утверждения, контрпримеры и парадоксы. В связи с этим заметим, что в философии науки принято различать заблуждение абсолютное и относительное. Их методологическое отличие состоит в том, что “абсолютное заблуждение” дает тренинг, как не надо познавать, а “относительное заблуждение” – это, как правило, необходимый элемент поиска истины.

Можно сказать, что такое признание относительности, или релятивности, наших знаний уже стало тривиальным утверждением, которое не нуждается в особой философской аргументации. Но поскольку наши способы мышления социокультурно обусловлены или субъективны, а, следовательно, релятивны, то указать на релятивность наших представлений о мире – явно недостаточно. “Интересное начинается тогда, – акцентирует проблему А.Л. Никифоров, – когда мы ставим вопрос: а нет ли во всех этих релятивных картинах и представлениях чего-то абсолютного, чего-то такого, что не зависит от субъекта?” [309, с.70]. Можно предположить, что это и есть центральная проблема теории познания, которую пытались решить многие философы и ученые прошлого, исследуя относительность нашего познания и стремясь найти в нем элементы абсолютного. К этому можно добавить, что вопрос истины не только централен, но и весьма проблематичен для гносеологии в смысле ее философского истолкования. Из существующих философских концепций наиболее стройно и красиво проблема способности обретения истинного знания решена у Платона и Гегеля. Так, согласно Платону, сама возможность достоверного знания заключена в принадлежности души человека “миру идей”, в мире истинно сущего, в мире вечных и неизменных истин. В таком контексте интересна также и теория истины немецкого классика Георга Гегеля, согласно которой познание истины не только возможно, но и с необходимостью происходит благодаря некой объективной предзаданности и предопределенности. Суть этого гносеологического акта состоит в том, что “в системной схеме Гегеля в образе и роли абсолютной истины выступает Абсолютная Идея, а процесс познания истины предстает как процесс саморазвития и самопознания Абсолютной Идеи” [347, с.27]. Началом начал этого замысловатого пути и причиной всего сущего является сама Абсолютная Идея, которая в природе существует как отчужденный от себя дух и которая диалектически в философии Гегеля проявляется, не изолировано и не в застывшем виде, а как система саморазвивающихся категорий.

Скептически оценивая веру в “абсолютное”, Герман Вейль сказал: “Брауэр открыл нам глаза и показал, как далеко классическая математика, питаемая верой в "абсолютное", превосходящее все возможности человеческого понимания, выходит за рамки таких утверждений, которые могут претендовать на реальный смысл и истину, основанную на опыте” [81, с.87]. Давид Гильберт как постоянный оппонент Лёйтзена Брауэра был согласен с ним в том, что многие математические утверждения не являются “реальными” в указанном смысле. Он настаивал на том, что нереальные или “идеальные” предложения необходимы для полноты математической системы. Это по существу проявление фундаментальной дихотомии “реальное – нереальное” в одной из самых влиятельных программ современной математики. Ссылаясь на плоды, которые пожинает современная математика на “полях своих приложений”, Гильберт считал, что столь отрадное положение вещей обязывает математиков укреплять математику в ее основах. “Каково же широко распространенное мнение о математиках и математическом мышлении? – спрашивал он. – Оно гласит: математические истины абсолютно надежны, так как они доказаны исходя из определений посредством верных выводов. Поэтому они должны всегда соответствовать действительности” [113, с.449]. Хотя математическое познание можно интерпретировать как стремление к абсолютному знанию, к математической истине, которая остается истиной во всех возможных культурах и географических мирах, математики уже примирились с тем, что любая непротиворечивая формальная система аксиом не может дать ответ на все возникающие в ее рамках вопросы математической теории.

Но, для тех, кто воспитан на философском скептицизме, само словосочетание “абсолютная истина” представляется неким анахронизмом.

“Абсолютизация истины, поскольку она ограничивает движение мысли, может стать источником заблуждения, но она необходима, поскольку без нее невозможен переход к практике” [239, с.119]. Заметим, что древние греки достигли таких высот в математике благодаря тому, что настаивали на абсолютной истине, подтвержденной аксиомами и логикой рассуждений. Поэтому это касается и абсолютности математической истины. Действительно, с одной стороны, достаточно указать на различные мнения относительно абсолютной истинности утверждений о бесконечных множествах. В частности, утрата критериев абсолютной истины, в контексте все возрастающей сложности математики привел к тому, что большинство математиков оставили исследование вопросов оснований. Но, с другой стороны, математическая наука не знает предложений, истинность которых может подлежать дискуссии, поскольку пока утверждение не доказано, оно, вообще говоря, не входит в корпус математического знания. К этому можно добавить, что ни одна философия не может вызвать сочувствие у работающего математика, если она не признает незыблемости математической истины. Например, хотя уже общепринято, что теория множеств в некотором смысле унифицирует современную математику, она не является ее онтологическим основанием и, возможно, однозначно понимаемое обоснование современной математики вообще недостижимо. В контексте обоснования математики это впоследствии привело к либерализации и ослаблению ограничительных требований, допустимых с точки зрения онтологической истинности математических представлений. Поэтому, можно заключить, что с точки зрения каждого философско-методологического направления обоснования математики можно многое заявить о специфике концепции математической истины.

По этому поводу академик В.С. Степин говорит, что “нужны специфические способы обоснования истинности знания. <...> В свою очередь, процедуры выводимости обеспечивают перенос истинности с одних фрагментов знания на другие, благодаря чему они становятся связанными между собой, организованными в систему. Таким образом, мы получаем характеристики системности и обоснованности научного знания, отличающие его от продуктов обыденной познавательной деятельности людей” [430, с.61]. В философском контексте понимания истины в качестве ведущего принципа рационального мышления при подходе к обоснованию математики можно взять “принцип рефлексивного самообоснования”, согласно которому процессы самообоснования, протекающие в математической теории, обеспечивают в конечном итоге достаточно надежное обоснование в смысле непротиворечивости с явными признаками логической зрелости теории. В качестве математического примера рассмотрим глубоко укоренившийся предрассудок, согласно которому, если множество или функция определены явно, то тогда нет нужды доказывать их измеримость. С философской точки зрения проблема заключается в том, что это ошибочное предположение, маскируясь под математическую неаккуратность, в большинстве случаев невидимо в математической аргументации. Более того, маловероятно, чтобы в одной математической работе использовались сразу два математических объекта, измеримость которых взаимно противоречива. Поэтому результат отдельной математической работы выглядит всегда вполне правдоподобно, или, как говорят математики, является “истинным”. Тем не менее, если полученный с помощью ошибочного предположения результат будет явно абсурден, то, в духе принципа рефлективного самообоснования, он будет отклонен либо самоцензурой, либо цензурой других профессиональных математиков.

О математиках, зараженных подобного рода “интеллектуальными вирусами”, но незнакомых с философскими проблемами обоснования математики, логик и философ Н.Н. Непейвода сказал: “До сих пор в работах ведущих математиков встречаются вопросы типа: "Ну да, мы слышали, что гипотеза континуума неразрешима. Но на самом деле истинна она или нет?"” [306, с.245]. Заметим, что в философии математики давно установлено, что сама постановка вопроса об истинности гипотезы континуума в теории множеств некорректна. Базовый инструментарий, который задействуется при самообосновании математической теории, сводится к традиционным философским терминам: единство, существование, целостность, саморазвитие и эффективность. С помощью принципа рефлексивного самообоснования философы математики размышляют над смыслом системы аксиом и правил вывода, способных приводить к математическим истинам, не выводимым из заданных изначально аксиом и правил вывода. Поэтому специфика системной организации объекта исследования, в частности, современных математических теорий, требует соответствующей трансформации идеалов и норм обоснования математики, поскольку в рамках этой системы формируется определенный образ математической познавательной деятельности и выявляются обязательные процедуры, обеспечивающие постижение математической истины. В связи с этим можно напомнить философские репрезентации идеалов и норм неклассической науки, которые характеризовались отказом от “прямолинейного онтологизма” и пониманием относительной истинности теорий. Например, что касается масштабных компьютерных вычислений, то эмпирически они могут быть очень убедительными, но не всегда при этом избавляют от необходимости доказательств.

С одной стороны, есть определенная специфика эмпирического обоснования математики, находящая свое отражение в понимании эмпиризма, согласно которому нет абсолютной истины, поэтому, чтобы изучить какое-то явление реального мира, надо сначала предположить, что оно существует. С другой стороны, реалистическая трактовка математики, по мнению американского философа математики Джеральда Каца, все же предполагает существование “неэмпирического способа познания истины”, который в духе “картезианско-лейбницианской традиции” объяснялся “светом разума” [524, с.498]. Напомним, что французский философ и математик Рене Декарт заложил основу научного метода, опирающегося на рациональное мышление, возможности которого были для него безусловны и очевидны. Хорошей иллюстрацией трудностей, которые возникают при желании дать некую классификацию концепций и направлений современной философии математики, является неоднозначность понимания такого термина, как "реализм". По мнению реалиста, числа существуют, по мнению антиреалиста – нет. Реализм имеет много смыслов, поэтому целесообразно ограничиться реализмом в онтологии, согласно которому математические объекты существуют независимо от математиков. Но насколько реальны объекты математического мира? Ни одна из существующих философий математики не решает этого вопроса. Это проблема не только современной математики, но и современной физики, связанная с приходом большой волны квантовых физиков в проблемную область математически строгих обоснований физических результатов. "Квантовая гравитация и все ее проявления – струны и т.д., – утверждает академик С.П. Новиков, – безумно далеки от возможности подтверждения. В то же время эти теории оказались столь красивы математически, что они породили немало результатов и идей в чистой математике. Уход из реальной физики … талантливого сообщества теоретиков оголяет физику, лишает ее слоя, способного соединять реализм физики с высокой современной математикой" [315, с.18]. Например, теория струн, несмотря на колоссальные усилия, прилагаемые интернациональным коллективом математиков и физиков-теоретиков, до сих пор не вышли еще из стадии разработки.

В отличие от практического успеха геометрии Римана, в новой квантовой геометрии, согласующейся с теорией струн, нет готовых топологических и геометрических рецептов, уже описанных в работах по математике. Это как раз та ситуация, когда физики ставят новые задачи математикам, поэтому современные физики и математики погружены в исследования в теории струн, по крупицам собирая знания, которые лягут в основу новой области математической физики. Теория струн, несмотря на свою незавершенность, является основным претендентом на роль, как говорят физики, "теории всего", главным понятием которой является так называемая струна. "Теория струн говорит, что единственная причина, по которой частицы выглядят как точки, – то, что мы к ним недостаточно пристально присматриваемся. На самом деле "точечные частицы" – это крошечные петли, которые постоянно вибрируют. <…> Именно это мы наблюдали в квантовой механике, когда видели, что все что угодно – фотоны, электроны, вакуумные поля – постоянно осциллирует, колеблется туда-сюда" [116, с.177]. Но привести теорию струн в соответствие с законами физики в нашей Вселенной, опираясь только на три измерения, пока никак не удается. Для этого есть традиционное философское объяснение, состоящее в том, что абстрактные сущности непостижимы, как считают некоторые философы науки, поскольку мы не можем иметь контакта с тем, что не пребывает в пространстве-времени. Например, согласно теории критического рационализма Поппера, никакое суждение не может быть обосновано и тем самым определено как истинное, поэтому если мы говорим, будто теория "верна", то это значит, что нам не удалось ее опровергнуть. В этом состоит суть концепции “опровергаемости” Карла Поппера и это есть главный недостаток так называемой теории разумного замысла, которой мы довольствуемся при объяснении всех наблюдаемых на сегодня феноменов. Отсюда следует, что рациональность – это не только внутреннее свойство знаний, а проблема для исследователей, так как формальное суждение должно предполагать принятие критики.

Вообще говоря, мы рациональны в той мере, в какой мы открыты критике, включая и самокритику, и нам не дано предвидеть, какие фрагменты научного знания потерпят в дальнейшем фиаско. Но даже рационалистические концепции философии математики признают существование врожденных идей. С рационалистической точки зрения, понятия, необходимые для формирования абстрактных объектов, отражают способности нашего мышления или выводятся из таких понятий опять же с помощью принципов, определяющихся способностями разума. Один из способов сделать мир более понятным состоит в том, чтобы сделать его более искусственным, поскольку искусственные или формальные системы имеют тенденцию быть более понятными и предсказуемыми, чем естественные. Что в такой ситуации должен делать “реалист”, верящий в математическую истину? Разумнее всего не связывать себя со всеми версиями врожденных идей, а опереться в практической работе на одну из них. Если бы математическое обоснование опиралось на иерархию, в основе которой лежали бы только правила программы Гильберта, то, по мнению Дэвида Дойча: “Математические истины, проверка которых, исходя из этих правил, оказалась бы очень сложна, стали бы объективно менее фундаментальными, чем те, которые можно было бы немедленно проверить с помощью этих правил. Поскольку мог существовать только конечный набор таких фундаментальных истин, со временем математике пришлось бы заниматься даже менее фундаментальными задачами. Математика вполне могла исчерпать себя при этой зловещей гипотезе” [137, с.239]. Установление истинности математических суждений имеет различные степени достоверности, опирающиеся на допустимые критерии истинности в математике, специфика которых состоит в том, что истинность математических суждений только аналитическая, а не эмпирическая, причем характерной особенностью первой является анализ определений, обращение к языку, а также к смыслу утверждений.

С учетом сказанного, свобода выбора соответствующих направлений обоснования математики ограничена, с одной стороны, практикой их применения, а с другой стороны, потребностью математической мысли к максимальной убедительности и простоте, подтверждающей ее истинность и способствующей эффективности теории в ее приложениях. Но о свободе выбора можно говорить и в другом контексте, когда наука стремится сделать сложное явление простым. “Стало быть, всегда актуальны пересмотр и инвентаризация имеющихся теорий, их упрощение, обобщение и унификация. Успех новой теории – это признак ее неизбежности” [223, с.41]. Свобода в математике – это осознание ее неизбежности, или “вакцина от банальности”. Хотя свобода в математике – это не произвол. В частности, наука доказывать не есть еще вся наука и интуиция в математике должна дополнять логику, как ее “противовес и противоядие”. Такие ассоциации во многом исходят из противопоставления логики и интуиции, но с развитием первой, с одной стороны, для этого остается все меньше оснований, а с другой стороны, современная математика не самая подходящая сфера для интуитивных философских озарений. Абстрактное мышление философскими категориями и условными моделями – это совсем другое устройство и для других надобностей. К сожалению, интуитивные математические ощущения не всегда удается легализовать функционально. Интуиция все же ориентирована на другие цели и широко используется в качестве внематематических средств, в том числе неконтролируемых или ненаблюдаемых, либо вообще не относящихся к обоснованию математики. “Мы не имеем истинного познания естественных процессов, – резюмирует Эрнст Кассирер, – пока мы рассматриваем их только в качестве индифферентных зрителей; мы его получаем лишь тогда, когда рассматриваем весь развертывающийся перед нами процесс, как некоторое целесообразно расчлененное целое” [177, с.157]. Ничто не может быть данным раз и навсегда. Греческий идеал математического знания как свода абсолютно надежных и неопровержимых истин довлел над мышлением математиков более двух тысячелетий. Возникающие иногда контрпримеры “подрывали” старые доказательства, и они пересматривались, а новые варианты могли опять ошибочно считаться окончательными. В математике, вопреки распространенному мнению, нечто подобное происходит само собой, но понимание причин таких нестандартных явлений – это уже немало, прежде всего, для философского анализа самого процесса математического познания.

Выявляя наиболее существенные и важные черты имеющихся подходов к обоснованию, теперь нет необходимости сосредотачиваться только на одном пути обоснования, например, интуиционизма или формализма, отказываясь тем самым от других мощных приемов доказательства в математике, ограничивая и лишая практической силы теоретическую математику, использующую необычайной сложности структуры и множества. По этой же причине философов математики не должны излишне волновать отличия между различными платонистскими течениями в математике, хотя полезно различать логические и математические основания. Это связано с тем, что непротиворечивость необходима, но недостаточна, так как логика редуцирует математическую теорию к аксиомам, но ничего не говорит об истинности последних. Если логические основания анализируют истинность математических принципов, содержащих аксиомы правил вывода, опирающихся на философские концепции природы, то в математических основаниях истинность подразумевается, а математические рассуждения должны быть не только систематическими, но и доступными пониманию с помощью хорошего выбора языка математики. Глобальный теоретический вопрос проблемы обоснования математики оказался, в связи с развитием компьютерных вычислений, более приземленным и практически важным вопросом, а так как компьютерные вычисления ограничены математическими ресурсами, то в таком контексте более привлекательной выглядит идея локальной непротиворечивости. Вопрос о непротиворечивости математики, по мнению специалиста в этой области В.В. Целищева, можно рассматривать не только с точки зрения дедуктивной математики, но и как важнейший эмпирический вопрос. “Основанием для такого мнения служит то обстоятельство, – отмечает он, – что более теоретические ветви математики получают поддержку со стороны элементарных ветвей, которые, в свою очередь, принимаются благодаря приложениям” [470, с.44]. Поэтому, из невозможности строгого обоснования в рамках имеющихся программ, вообще говоря, не следует невозможность других подходов, способных осуществить такое обоснование.

Адекватное решение вопроса непротиворечивости математики может быть достигнуто в сфере методологических и содержательных рассуждений, вскрывающих механизм появления противоречий в математической теории. “В интуиционистском и конструктивном направлениях понятию непротиворечивости придается гораздо меньшее значение, – считает философ математики В.Э. Войцехович. – Главное различие между классической математикой, с одной стороны, и интуиционистской и конструктивной – с другой, связано с понятием существования” [96, с.130]. Заметим, что системные соображения, отнесенные к конкретной математической теории, могут претендовать на роль ее логического обоснования. С точки зрения философии системного подхода, избегая крайностей ограничительной программы Брауэра, можно исследовать конструктивность как вполне самостоятельный философско-математический предмет отдельно от самого вопроса математического существования. Различие между интуитивной и формальной математикой реализуется также в разном понимании полноты. Причина такого положения в том, что слишком абстрактный уровень исследования этой актуальной проблемы философии математики обусловил ее решение как логического вопроса, который оказался неразрешимым. Но при другом философско-методологическом подходе может быть показано, что такая общность, вообще говоря, не учитывает реальной динамики эволюции и развития современных математических теорий. Экспликация исторической эволюции проблемы обоснования математики показывает, что формализация позволяет приблизиться к идеалу надежности и обоснованности в математике. Ограничение сферы надежной метатеории арифметизируемостью и финитностью требует пересмотра программ обоснования математики через выявление онтологических оснований математического мышления в различных областях современной математики, что, в свою очередь, неизбежно потребует привлечения новых подходов к гносеологическим критериям. Поэтому наряду с аналитическим движением в теоретические глубины математики возникает потребность понять не только те части обосновательных процедур, из которых состоит изучаемая область математики, но и понять целое, к которому можно отнести аксиоматизацию математических теорий.

Существуют специфические законы целого, а также его свойства, которые нельзя объяснить на языке его составных частей, поскольку именно целое детерминирует части, выступая причиной их существования. В частности, основной недостаток позиции редукционистов состоит в том, что они не учитывают того факта, что свойства составляющих любую систему элементов могут существенно изменяться в результате их взаимодействия в рамках целостной системы, вследствие чего собственно и возникают новые системные свойства. Единство и целостность многообразия математических систем знания, возможно, удастся обеспечить в рамках философско-методологического синтеза, при котором новые общие теории сохраняют свое значение и для прежних областей исследования. Именно такой подход реализуется в системном синтезе направлений обоснования математики. Поэтому, вполне естественно, что для целостного подхода к обоснованию математики необходимо несколько дополнительных друг к другу направлений обоснования. Постгёделевская философия математики разных направлений, несмотря на очевидную эффективность аксиоматически построенных теорий, вначале породила серьезные сомнения в существовании непротиворечивых формальных описаний. Формализованное мышление, вообще говоря, не имеет абсолютных гарантий от возможности использования некорректных рассуждений и скрытых противоречий. “Но, если мы возьмем конкретную теорию, и в особенности ее генетически первичную центральную часть, то установление полной непротиворечивости – вполне выполнимая задача” [337, с.140]. Философские открытия Гёделя положили начало многочисленным исследованиям возможностей формализованного метода познания. Признавая важность теоремы Гёделя о непротиворечивости, отчасти накладывающей в методологическом смысле существенные ограничения на программу Гильберта, философы математики сейчас пытаются избежать ее излишне радикального истолкования, как закрывающей путь к финитному обоснованию отдельных математических теорий вообще. Таким финитным обоснованием для арифметики является ее интуиционистское представление.

Заметим, что хотя математика как культурное явление представляет собой достаточно самостоятельное направление, она не изолирована от других областей культуры, созданных человечеством на протяжении его истории, и прежде всего от философии. С точки зрения методологии системного анализа это означает, что "если изучаемые нами явления реально сцеплены системообразующими связями и отношениями, то и отражающие их понятия должны также образовывать систему, а не "броуново движение" категорий. Более того, некое понятие вообще может получить категориальный статус только тогда, когда оно берется не изолированно, а вводится в систему научных понятий и соотносится тем или иным образом с другими" [162, с.42]. Перефразируя высказывание Г. Лейбница о математике как науке о возможных мирах академик В.С. Степин говорит о философии, как науке о возможных мирах человеческой деятельности. "Улавливая тенденции изменения универсалий культуры и изобретая новые смыслы категорий, – конкретизирует он свою мысль, – философия прослеживает, как при этом изменяются смыслы других категорий. Таким способом философия моделирует возможные изменения универсалий культуры как системной целостности (а именно так они функционируют в той или иной культурной традиции)" [427, с.9]. Например, для решения философской проблемы обоснования математики надо выявить принципы, приобретающие гносеологический статус в исторически стабильных разделах математики.

Поскольку новых подходов к решению проблемы обоснования математики не приходится ждать от логики, то можно сосредоточиться на углублении философии математики, следуя общезначимым философским идеям целостности. С позиций математического знания можно попытаться концептуально зафиксировать возможность обоснования современной математики посредством философско-методологического синтеза реальных направлений обоснования как адекватной теоретической модели, способной на основе принципа системности вернуть методологическую целостность в проблему непротиворечивого обоснования современных математических теорий. Он основан на рациональном осмыслении процесса перехода от одного типа самоорганизации к другому, точнее на рассмотрении современной математики как саморазвивающейся системы, представляющей собой сложный тип системной целостности, которая перестраивает внутреннюю структуру обоснования математики.

4.3 Системная триада направлений обоснования математики как форма философско-методологического синтеза

Сведя основные процессы генезиса математического знания к общей схеме, можно получить определенную концепцию, которая будет содержать целый ряд предпосылок и допущений дихотомического характера. Общий вывод из проведенной реконструкции проблемы обоснования математики состоит в том, что философы математики должны снять неоправданные ограничения на программу обоснования математики, присущие первоначальной концепции Гильберта. Обоснование современной математики само нуждается в обосновании, то есть в обосновании соответствия обоснования своей первоначальной задаче. “Так не на философском, а на математическом уровне было установлено, – подчеркивает академик А.Д. Александров, – что бесконечность не может быть полностью включена в конечное и что анализ и упрочение оснований математики не имеет пределов, не может быть завершено” [7, с.247]. Поэтому здесь естественно возникают философские и собственно математические проблемы, поскольку обосновательная деятельность в современной математике состоит из двух относительно независимых уровней: математического и философского.

В философии и методологии науки совокупность предпосылок, определяющих конкретное научное знание и методы его обоснования, признанные достоверными на определенном этапе развития науки, принято называть парадигмой. В традиционной парадигме математические структуры рассматриваются с точки зрения таких дихотомических оппозиций, как дискретное – непрерывное, конечное – бесконечное, формальное – реальное и других. Дополнительность сторон этих оппозиций способствует формированию методологически значимой третьей компоненты, обеспечивающей целостность в контексте тринитарной методологии познания. Проблема целостности обсуждалась в философской литературе, благодаря чему было выделено два типа определений понятия целостности. В одних определениях указывался набор дополнительных друг к другу характеристик, на основании которых можно было судить о целостности как обобщающей функции по отношению к достигнутому уровню познания. В других определениях целостность выступает в роли ориентиров, обозначающих направление движения научного мышления. После различных попыток внутриматематического обоснования в процессе становления теорий в философии математики формируется новая функция математической теории – системной целостности, то есть такой ее организованности, которая, дифференцируясь в процессе саморазвития математических теорий, порождает новые состояния в соответствии с методологическими запросами и философскими проблемами современной математики.

С точки зрения самоорганизующихся (саморегулирующихся) систем, категории части и целого включают в свое содержание новые смыслы. Поэтому В.С. Степин необходимость введения понятия “системная целостность” аргументирует следующим образом: “При формировании новых уровней организации происходит перестройка прежней целостности, появление новых параметров порядка. Иначе говоря, необходимо, но не достаточно зафиксировать наличие системного качества целого, а следует дополнить это понимание идеей изменения видов системной целостности по мере развития системы. Уже в сложных саморегулирующихся системах появляется новое понимание вещи и процессов взаимодействия” [426, с.7]. Известно, что удачная философская идея по мере ее развертывания “обосновывает сама себя”. В контексте философской идеи триадичности наиболее адекватным будет определение такой целостности, которую невозможно познать во всей ее специфике, если исходить только из внутренних характеристик по отношению к исследуемой проблеме обоснования современной математики. Поскольку логическое обоснование, в силу гёделевских результатов, не достигает желаемых результатов для многих математических теорий, то вера математиков в их непротиворечивость основывается на практическом отсутствии реальных противоречий в этих теориях.

Фундаментальная недостаточность всех формальных систем имеет более важные последствия, чем независимость частных утверждений вроде знаменитой гипотезы континуума. “Принято утверждать, что математика и философия различаются друг от друга по объекту, поскольку первая трактует о количестве, а вторая о качестве. Все это неверно, – утверждает Иммануил Кант. – Различие этих наук не может корениться в объекте, ибо философия касается всего, а следовательно, и количества (quanta), как отчасти и математика, поскольку все имеет величину. Специфическое различие между двумя этими науками составляют лишь различия в способе рационального познания, или применения разума в математике и философии” [165, с.436–437]. Несмотря на эти различия, попытки увязать математические и философские концепции имеют под собой достаточное основание для выяснения их возможностей в плане достоверного обоснования математических теорий. Согласно основной гипотезе этого исследования, целостность программы обоснования современной математики эксплицируется при балансе философско-методологических компонент системной триады направлений обоснования математики. Стремясь к целостности, иногда приходится отказываться от полноты, поскольку чрезмерное усиление или ослабление отдельных компонент разрушает целое. Однако “мягкость” системной триады программы обоснования математики позволяет сохранить целостное единство при относительной свободе составляющих ее частей.

Хотя философский идеал рациональности хорош только до тех пор, пока мы не слишком к нему близки, разрушение старых закономерностей обоснования математики можно рассматривать как начало репрезентации порождения новых. Поэтому можно заключить, что оба аспекта рациональности, то есть классический, апеллирующий к автономности мышления, и неклассический, апеллирующий к представлению о его естественном происхождении, вообще говоря, не исключают друг друга. Следовательно, постнеклассический синтез этих аспектов рациональности не только возможен, но и необходим. Подобный синтез в проблеме обоснования современной математики осуществим через демонстрацию интеллектуальных механизмов становления математических теорий. Современный этап развития постнеклассического знания практически способствует формированию нового подхода к обоснованию на основании синтеза реальных направлений развития современной математики и компьютерных технологий. Переход к философско-методологическому синтезу меняет всю структуру концепции обоснования современной математики. “В принципе идея категориального синтеза опыта, порождающего конкретно-научные понятия, была эксплицирована И. Кантом, категориальные смыслы выступают предпосылкой и условием опыта и его обобщения. Но Гегель не ограничился этой констатацией, а сделал новый шаг. Сами категориальные смыслы он рассматривал как развивающиеся, и подчеркивал, что это развитие осуществляется в разных сферах духа – в обыденном познании, искусстве, нравственности, праве, религии и философии” [429, с.622]. Системная триада в методологическом плане является структурной опорой программ обоснования математики. Следует заметить, что даже само определение системного подхода, как одного из самых многозначных понятий, базируется на таком методологическом единстве, как “элементарность – связность – целостность”.

Главное отличие нового подхода к обоснованию математики состоит в отказе от устоявшегося “линейного мировоззрения”, ставшего каркасом стереотипного мышления, которое перекликалось с традиционной линейной математикой. Известная мысль о том, что “человек видит в мире лишь то, что несет уже в себе самом”, хотя и кажется парадоксальной, но даже сейчас подтверждается на каждом шагу. Например, в обосновательной практике теории статистики, широко используемой в естественнонаучных и социально-гуманитарных дисциплинах, сложилось понятие правильности, которое, однако, противоречит понятию точности, поскольку при описании реальных плохо формализуемых объектов существуют границы разумной точности. Поэтому убедительность обоснования математической теории зачастую обеспечивается третьим членом системной триады, соединяющим бинарную оппозицию в реально функционирующий комплекс. При таком философско-методологическом подходе, связанном с идеей триадичности, реализуется стремление к целостности программы обоснования математики. Если взглянуть на программу обоснования извне, понятие целостности ассоциируется с замкнутостью, а если смотреть на нее изнутри, то тогда целостность ассоциируется с открытостью. Поэтому целостность соединяет в себе противоположные свойства, а именно, замкнутость и открытость, которые с точки зрения триадической методологии должны находиться в соотношении дополнительности. Синтаксис соответствующего формального языка тернарного описания основан на трех категориях, восходящих к Аристотелю, – вещь (предмет, объект), свойство, отношение. При символьной формализации математического знания используется так называемая "триада неявного знания", суть которой можно определить следующим образом: математик конструирует формализм для описания математического объекта.

С учетом наличия многообразных теорий в математике и основанных на них философско-методологических концепциях обоснования, критерием правильности может быть только профессионализм в философии науки и математике тех, кто работает в этих пограничных областях знания. Исходя из важнейшей предпосылки классической рациональности о естественной упорядоченности мира реальности, получаем естественную претензию на системную целостность его теоретического познания. По мнению академика В.С. Степина, переход от классической к неклассической рациональности был подготовлен "формированием в различных сферах духовной культуры нового понимания рациональности, когда сознание, постигающее действительность, постоянно наталкивается на ситуации своей погруженности в саму эту действительность, ощущая свою зависимость от социальных обстоятельств, которые во многом определяют установки познания, его ценностные и целевые ориентации" [422, с.164]. С этой точки зрения неклассические и постнеклассические теории можно интерпретировать как реакцию на "упрощение" классического мышления, в связи с появлением новых методологических противоречий. Но в контексте проблемы обоснования современной математики остается открытым вопрос о характере базовой логики для постнеклассической модели обоснования математики. Поскольку до сих пор не создана общая методология деятельности, описывающая современные когнитивные процессы, то задача построения постнеклассической методологии представляется в настоящее время наиболее актуальной. Суть постнеклассической методологии состоит в способности указать адекватные способы действия на новом информационном этапе своего развития.

С учетом того, что в постнеклассической науке элементарные высказывания об объектах исследования являются взаимозависимыми, характер этой новой зависимости можно обозначить как "тринитарный". Следует также отметить, что основные трудности системного обоснования современной математики связаны с философско-методологическим анализом имеющихся стратегий обоснования, с точки зрения их совместимости, поскольку наиболее известные направления обоснования ориентированы на различные задачи и цели математического исследования. В силу сложности абстрактных математических объектов и структур для исследования программ обоснования математики нужен определенный методологический подход. Такой методологический подход существует в теории познания и называется системным. Системой является любой объект, на котором реализуются некоторые заданные свойства, находящиеся в определенном, заранее зафиксированном отношении. Поэтому философская суть системного подхода к проблеме обоснования состоит в том, что с его помощью мы надеемся получить приемлемое обоснование непротиворечивости содержательных аксиоматических систем, выводя его из анализа логики их развития и выявляя их логическую надежность без обращения к свойствам формализованной модели математической теории. "Ошибка современной философии математики, – по мнению В.Я. Перминова, – состоит в недооценке механизмов самообоснования математики, в недостаточном понимании того факта, что математическая теория, способная к развитию, обречена на приобретение полной корректности своих основных понятий и полной надежности связанных с ними принципов" [333, с.262]. Системный подход в проблеме обоснования современной математики как раз основан на понимании эволюции математических структур. Поэтому применяемый к обоснованию математики системный подход вытекает из исторического развития математических теорий и соответствующих математических структур, понимаемых как развивающиеся системы.

Системные идеи позволяют по-новому взглянуть на проблему обоснования математики, с которой не может справиться редукционистский метод в обосновании. Воспользуемся для структурирования новой концепции обоснования современной математики философским понятием "системная триада". Философское определение системы, включающее понятие целостности как существенное свойство, рождалось в длительных методологических спорах, поскольку понятие целостности не удавалось объяснить в привычных для математиков и философов терминах. Согласно определению философа науки Б.Г. Юдина: "С методологической точки зрения под целостностью можно понимать такой объект, который не удается познать во всей его специфике, если исходить из чего-то внешнего по отношению к нему" [493, с.86]. Поэтому, например, объяснение целостности системы обоснования математики должно вскрыть внутренние закономерности и процессы, обусловливающие ее качественное своеобразие. Для решения этой методологической задачи необходимо обратиться к рассмотрению некоторых философских аспектов проблемы части и целого. В философских работах хорошо проанализировано различие между системными понятиями целого и целостности. С одной стороны, целое – это совокупность “сильно” взаимодействующих частей, в котором смысл понятия “часть” определяется также присущим системе взаимодействием. С другой стороны, системы, обладающие свойством целостности, не имеют частей и рассматриваются как единый объект. Для понимания столь радикального философского подхода к свойству целостности следует пояснить, что в целостной системе взаимосвязи частей настолько сильны, что они не всегда могут рассматриваться как взаимодействия локализованных частей.

Напомним, что философское понятие “система” есть, по сути, совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, образующих единство и целостность. Так как организация и структура системы определяются характером взаимодействия ее компонентов, то основной философский вопрос, который при этом возникает, касается отношений свойств компонентов к способу их взаимодействия – это проявление специфической формы представления целого через части. Анализ функционирования понятия целостности невозможен без рассмотрения некоторых аспектов соотношения целого и части, поскольку реальное познание логически движется только в одном направлении от частей к целому. Для уточнения понятий целого и части воспользуемся реконструкцией, проделанной философом науки П.С. Карако: “Изложение содержания категорий целое и часть невозможно без их определения, методологическим обоснованием которого может быть только такой подход, когда учитывается их противоречивость и взаимосоотнесенность. Здесь будет уместным напомнить определение категории целое Гегелем: "Целое по своему понятию есть то, что содержит в себе части". Но не просто части, а взаимосвязанные части. Вот почему целое – это система, образованная взаимосвязанными частями и обладающая свойствами, которых нет у составляющих ее частей” [171, с.62]. С точки зрения обоснования современной математики для этого процесса характерно то, что ее части, то есть направления обоснования математики, выступают как целостности, обладающие специфическими особенностями. Поэтому исходным положением в рассмотрении целостности действующих в математическом познании направлений обоснования математики оказывается признание единства и полноты всех составляющих проблемы обоснования.

В философском принципе системности, который используется при философском анализе проблемы обоснования математики, по мнению философа и методолога науки В.Н. Садовского, “утверждается примат целого над частями, но при этом подчеркивается взаимозависимость целого и частей, выражающаяся, в частности, в иерархическом строении мира” [397, с.46]. При этом условием адекватного познания исследуемой проблемы обоснования, с точки зрения ее строго рационалистической интерпретации, является единство анализа и синтеза, способствующего целостному анализу исследуемых объектов. Такое единство не исключает, а предполагает наличие богатого разнообразия, поскольку отказ от редукционизма, сводившего сложные объекты к сумме свойств образующих его простых частей, стал противоречить реальным фактам, обнаруженным в процессе развития научного познания. С точки зрения философско-методологического анализа при пересмотре проблемы обоснования современной математики можно отметить следующую характеристическую особенность системного подхода, согласно которой свойства целого не могут быть сведены к свойствам своих частей. Этот методологический принцип направлен, прежде всего, против редукционистского подхода к обоснованию математики. Основная особенность современной математики состоит в том, что она развивается отчасти автономно, поскольку как развивающийся "живой организм", она подобна саморегулирующимся системам. Это в свою очередь способствует процессу самообоснования развитой математической теории, доводящему за конечное число шагов содержательную теорию до логического совершенства, достаточным признаком которого служат, например, надежность и стабилизация ее аксиоматического основания.

Самообосновывающиеся (или саморазвивающиеся) системы, характеризующие более сложный тип системной целостности, отличаются не только от простых систем, суммарные свойства частей которых исчерпывающе определяют свойства целого, но и от самоорганизующихся систем, где целое не исчерпывается свойствами частей. В какой мере саморазвитие идей применимо к становлению отдельных математических теорий? При ответе на этот вопрос можно сослаться на следующий философский анализ: "в целом методологическая исходная позиция Кантора содержит и ряд положительных моментов, которые должны быть подчеркнуты, а именно: 1) она исходит из познавательно-оптимистического начала; 2) она принимает во внимание исторический опыт, утверждающий, что в математике периоды относительного саморазвития идей могут продолжаться в течение нескольких поколений, вследствие чего отдельный индивидуум, безотносительно к "трансъентной реальности", может добиться выдающихся успехов" [363, с.65]. Такого рода методологические рекомендации Георга Кантора можно интерпретировать как определенную нацеленность молодого исследователя на самостоятельность, то есть на такие свойства, которые не акцентируются в достаточной степени в настоящее время. Следует согласиться с В.Я. Перминовым, что "мы фиксируем, таким образом, наличие процесса самообоснования в математической теории, утверждаем, что этот процесс в конечное время доводит теорию до полного логического совершенства и что стабилизация аксиоматики служит достаточным признаком этого совершенства (непротиворечивости аксиоматики)” [337, с.144]. По существу речь идет о единстве взаимосвязанных познавательных процессов исследования в надежде обрести на этом пути философское приращение смысла. Идеальная связь между направлениями обоснования математики создает новое методологическое единство проблемы обоснования, которое проверяется не только философско-математическим мышлением, но и непосредственно становлением новых математических теорий.

Для понимания цели философско-математического исследования необходимо выявить коннотацию объема используемых определений. К саморазвивающимся системам можно, например, отнести современные компьютерные сети, предполагающие диалог человека и компьютера, или “глобальную паутину” Интернет. Даже социальные объекты, рассмотренные с учетом их исторического развития, можно отнести к типу сложных и саморазвивающихся систем. Важно при этом отметить, что в диалоговой системе отражение формальной модели предшествует непосредственному акту человеко-машинных отношений, то есть она воздействует на человека, даже если он этого не осознает. Поэтому анализ современной математики как интегративного знания предполагает принятие во внимание исторического опыта ее развития. Согласно прогнозу академика А.П. Ершова: “Мы… должны быть готовы к тому, что число человеко-машинных интерфейсов в диалоговых системах возрастет в течение предстоящих 50 лет на несколько порядков” [151, с.111]. Анализ таких систем, связанных с компьютерной имитацией, принципиально важен, так как для математического моделирования появилась потенциальная возможность воспроизведения на компьютере, например, крупномасштабных природных процессов. По существу, в современной математике начал создаваться инструментарий “количественного системного анализа”. В качестве соответствующего примера можно привести вычислительный комплекс, состоящий из системы моделей, системы программ обработки информации, а также способов обеспечения диалога человек–компьютер. За последние десятилетия в современной математике были найдены концептуальные подходы к построению математических моделей и соответствующего математического инструментария, с помощью которых раскрываются содержание конфликтов и методы их анализа в зависимости от структуры этой системы и целей участвующих в них субъектов.

Применительно к структурно сложным самообосновывающимся системам, например, к триаде обоснования современной математики, философские категории части и целого обретают новые характеристики. Новая концепция обоснования математических теорий фиксирует, что в дихотомии “часть – целое” разными свойствами обладает часть внутри целого и вне его. Целостная концепция обоснования современной математики уже не исчерпывается только свойствами ее частей, хотя и характеризуется их свойствами. Поэтому возникает методологическая необходимость учитывать системное качество целого. В частности, методологические особенности этих частей нельзя объяснить, исходя только из анализа включающей их системы, без соответствующего философского анализа. “В этом смысле, – поясняет Б.Г. Юдин, – мы говорим о системах, которые меньше суммы составляющих их частей, поскольку природа частей накладывает существенные ограничения на целое. В данной ситуации целое не создает себе частей, но строится из того, что уже существует” [493, с.98]. К тому же эти части, как методологически самостоятельные направления обоснования математики, могут в течении времени обладать большей или меньшей изменчивостью, в связи с развитием новых разделов математики, что собственно и характеризует их как части общего целого. Но, тем не менее, они сохраняют целостность, прежде всего, как для идентификации самих частей, так и включающей их системы обоснования.

Тринитарной методологии хорошо соответствует философский принцип субаддитивности, определяемый как “целое меньше суммы частей”, который можно интерпретировать следующим образом: “Говоря о том, что целое меньше суммы частей, мы прежде всего имеем в виду невозможность выведения данных частей из объемлющего их целого” [491, с.88]. Иначе говоря, принципы конструирования объемлющего целого не должны привноситься из этого целого. Когда говорят, что целое не сводится к сумме частей, обычно ссылаются на взаимодействие между частями и реже упоминают внешние связи. Другую методологическую направленность имеет принцип супераддитивности, формулируемый как “целое больше суммы частей”, включающий относительную независимость целого от части, что более естественно для гуманитарного знания. В последнем случае части могут быть объяснены из целого, что наиболее характерно для диад. Для анализа целостности программы обоснования современной математики применение философского принципа субаддитивности вполне оправдано тем, что он приложим к исследованию конкретных проблем. Кроме того, правомерность использования принципа субаддитивности основана на том, что отдельные программы обоснования, входящие в целостную триаду, сами по себе не являются исчерпывающими характеристиками. В интеллектуальных структурах можно выделить два типа целостности, во-первых, “дифференцированную целостность”, которая отличается особой структурой составляющих ее независимых частей, функционирующих более или менее сравнительно автономно, а во-вторых, “интегрированную целостность”, когда составляющие ее части оказываются в состоянии стабильной взаимосвязи, хотя такое деление все же довольно условно.

Методологический сдвиг в решении проблемы обоснования зависит не только от достижений в логике и генезиса аксиоматических систем, а, прежде всего, от углубленного понимания проблем философии математики и от расширения допустимых подходов к обоснованию математических теорий. В философии и методологии науки идет смена идеала, а именно, переход к целостности как более фундаментальному понятию, чем полнота. Формальные описания различных сторон исследуемых теоретических моделей в таком контексте становятся важнейшими этапами на пути рационального постижения целостных объектов. Целостность и системность могут служить показателями достаточно высокого уровня развития мировоззренческого сознания. Системные соображения полезны для развитой математической теории, поскольку дают возможность убедиться в том, что глубокие противоречия в такой теории маловероятны. Они помогают также прояснить степень достоверности содержательных математических выводов, основанных на рассмотрении исторической эволюции математических теорий. Философия математики, с точки зрения системной методологии, как предполагает В.Я. Перминов, должна соединить в себе три разнородных положения. Он сформулировал их в виде следующих положений. Во-первых, тезис об “идеальности и формальности математических структур”, представляющий современную математику как совокупность чисто мыслительных конструкций, ограниченных только методологическим требованием непротиворечивости. Во-вторых, тезис об “априорности исходных математических представлений”, которые заключены в традиционных разделах математики, таких как арифметика и элементарная геометрия. В-третьих, тезис о “реальности исходных математических представлений как непосредственно связанных с универсальной онтологией, лежащей в основе человеческого мышления” [333, с.9]. Целостное познание проблемы обоснования как единство включает в себя множество процессов, состояний и структур, существующих в конкретности и системности подходов к обоснованию.

С онтологической точки зрения интересна философская идея Гёделя о реальном статусе специфических математических объектов, существующих во внечувственном мире, которая может быть интерпретирована как указание на предметную онтологию. Она является выражением структуры мира, существующего независимо от математики, поскольку математические идеализации обусловлены реальностью в той же мере, что и законы физики. Следует признать, что понятия формалистской философии математики были в определенном смысле прогрессивными, поскольку появились как естественная реакция на понятия некритической интуитивной манеры математического рассуждения. Заметим, как писал Иммануил Кант, “если согласиться, что необходимо выйти из данного понятия, дабы синтетически сравнить его с другим понятием, то следует признать, что необходимо нечто третье, в чем единственно может возникнуть синтез двух понятий” [166, с.124]. Синтез представлений, следуя Канту, основывается на способности воображения, а их единство – на единстве апперцепции, то есть на осознанном восприятии. Когда формализация стала пониматься как единственный способ получения истинного математического результата, то всякое содержательное мышление стало рассматриваться как не обладающее полной достоверностью. Это заблуждение пытались устранить с помощью интуиционистской философии математики. Но требование конструктивности всех допустимых объектов математики существенно ограничивает логические средства, применяемые в интуиционистской математике.

В связи с этим возникла необходимость в некотором обобщенном подходе к обоснованию математики. То, что синтез позволяет методологически решить задачу обобщения является вполне естественным, так как это, вообще говоря, родственные процедуры. “Только обобщение фиксирует отношения сходства, а синтез – связи. Обобщение объединяет в класс, синтез – в целостность” [232, с.99]. Возможно, поэтому обобщение называют иногда “количественным синтезом”. Особенность основных направлений обоснования математики состоит в том, что в философии науки они рассматриваются не как необходимые явления для процесса обоснования и не через их синтез, а только исследуется их существование и отношение друг к другу. С одной стороны, реализация обоснования современной математики возможна, когда в соответствующем философско-методологическом подходе содержится весь необходимый для этого синтез философских направлений обоснования. С другой стороны, лишь осуществив этот синтез, точнее получив полное знание о современной математике, можно будет удостовериться в возможности существования концепции обоснования. Под возможностью здесь понимается отсутствие противоречий, то есть, говоря о реальной возможности обоснования математики, следует, прежде всего, сказать о возможности самого понятия обоснования, а оно становится возможным тогда, когда осуществлен его синтез. Поэтому конечной задачей исследования является выяснение того, что дает синтез в обосновании современной математики.

Заметим, что Иммануил Кант называл основоположения математическими, если “они дают право применять математику к явлениям, касаются явлений с точки зрения одной лишь возможности их и указывают, как они с точки зрения их созерцания и реального [содержания] их восприятия могут быть построены согласно правилам математического синтеза” [166, с.137]. Не привлекая “количественный синтез” в защиту интуиционизма как одного из направлений обоснования современной математики, необходимо сказать, что математическое мышление неизменно подтверждает рабочую гипотезу о первичности интуитивной и конструктивной основы математического рассуждения по отношению к его формально-символическому оформлению. Например, Кант считал, что “математика имеет преимущество перед философией в том, что знания первой интуитивны, в то время как знания последней лишь дискурсивны” [165, с.437]. Интуиционизм, в качестве направления в философии математики, возник как реакция на сформировавшиеся к началу прошлого века математические тенденции, согласно которым математический объект можно было полагать существующим даже в тех случаях, когда не было никакой возможности воплотить этот объект в “математической действительности”. Хотя классическая математика была “наивно конструктивной” в том смысле, что если доказывалась теорема существования математического объекта, то при этом давался способ его построения. Признание несостоятельности отдельных программ обоснования не следует также отождествлять с невозможностью обоснования математики, хотя оно способствовало появлению некоторого скептицизма в отношении строгости самого математического мышления.

Строгое математическое мышление, согласно Брауэру, выдвинувшему интуиционистскую программу обоснования математики, протекает на уровне интуитивно ясных представлений, которые в какой-то степени более или менее адекватно отражаются в формальных понятиях, допускающих мысленное конструирование. Поэтому целью интуиционистской программы обоснования являлась конструктивная редукция математики к исходным представлениям интуитивно ясной арифметики. Профессионально проанализировав математическое мышление, Герман Вейль пришел к такому философскому заключению: “В основе всего знания лежит следующее: (1) Интуиция, обычный для разума акт "видения" того, что ему дано; ограниченная в науке рамками Aufweisbare, интуиция в действительности простирается далеко за эти пределы. <…> (2) Понимание и выражение. Даже в формализованной математике Гильберта мне необходимо понимать указания, которые даются в ходе общения с помощью слов относительно того, как обращаться с символами и формулами. <…> (3) Мышление о возможном. В науке весьма ограниченная форма такого мышления используется в тех случаях, когда, обдумывая возможности математической игры, пытаются удостовериться в том, что эта игра никогда не приводит к противоречию; гораздо более свободной формой является воображение, с помощью которого придумываются теории” [81, с.77]. Следует заметить, что в смысле строгости обоснования программа интуиционизма в зоне своего действия находится вне критики, поскольку числа натурального ряда являются для всех предельно надежными конструкциями и не включают в себя противоречивых допущений. Но основной ее недостаток состоит в том, что за рамками брауэровского интуиционизма осталась большая часть исторически признанной классической математики. Появление таких методологических ограничений было вызвано необходимостью применения к актуально бесконечным математическим объектам, которые с интуиционистской точки зрения трудно признать теоретически корректными, закона исключенного третьего, “не данного в интуиции”. Согласно современным воззрениям философии математики, интуиционистская критика этого закона является не совсем корректной, во-первых, поскольку он обладает интуитивной ясностью, то он необходим для математического сознания, во-вторых, в случае актуально бесконечных множеств лишаются проверяемости и другие законы логики.

Рассмотрим новую методологию обоснования математики, открывающую в рамках системной триадической структуры дополнительные возможности анализа природы математического мышления на основе хорошо известных философско-методологических направлений обоснования современной философии математики: формализма Гильберта, интуиционизма Брауэра и платонизма Гёделя. У современных математиков нет определенных абсолютных убеждений относительно обоснованности математических конструкций и теорий или непротиворечивости используемых ими формальных систем. Более того, вряд ли они задумываются над тем, “пользователями” каких именно конкретных формальных математических систем они являются. Во-первых, неявные философские убеждения постепенно размываются по мере расширения формальных систем математики и все большей их удаленности от доступных интуитивному восприятию математических феноменов. Во-вторых, задача обоснования математики в контексте проблемы надежности математического мышления не может быть решена без обращения к внелогическим критериям. Поэтому возможность найти для обоснования современной математики простые и ясные общие основания, которые способствовали бы дальнейшему прогрессу философии математики, не следует заранее отвергать как утопическую. Это именно тот пункт, в котором философы расходятся в разных направлениях при выборе философско-методологической концепции. Как подчеркивает Имре Лакатос: “Выбор центрального понятия философско-методологической концепции обусловлен как общими принципами и установками философа, так сказать, способом его ориентации в пространстве философских проблем, так и той "сверхзадачей", которую он ставит перед собой” [226, с.17]. В современной философии и методологии науки осознается недостаточность бинарных структур, хотя понятия, сложившиеся в бинарной парадигме, не всегда легко укладываются в триадическую структуру.

Триада в этом философском исследовании – это ключевое понятие в новой концепции обоснования математики, поскольку согласованность находящихся в отношении дополнительности ее элементов порождает чувство реальности. Триадой называют систему из трех элементов, каким-то образом связанных между собой. Как справедливо отмечает Р.Г. Баранцев: “Здесь может смущать некоторая размытость конструкции, недостаточная убедительность выбора, неполная определенность решений. Однако вопрос "Почему так, а не иначе?" – из диадной парадигмы. Триада же больше сопоставляет, соединяет, сращивает, чем противопоставляет, расщепляет, отталкивает. Различие признаков, сторон, аспектов не должно переходить в разделение, уничтожающее целостность. Чрезмерный анализ губителен для триады” [32, с.82]. Триадические конструкции системного типа привлекали внимание многих исследователей. Среди различных типов триад для обозначенных целей обоснования математики выделим системные триады. Системные триады характеризуются тем, что их единство создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других. Такие триады можно также называть не только системными, но и целостными. Системная триада, реализующая тринитарную методологию, может послужить базовой структурой целостностного подхода к проблеме обоснования математики.

Принципиально важно отметить, что целостность новой концепции обоснования математики понимается не в смысле совокупности или объединения различных направлений обоснования, как несобственных элементов триады. Например, “утверждение о том, что объект *A* обладает свойством целостности, всегда подразумевает возможность выделения в *A* единиц членения особого типа, а именно, собственных элементов. Если предположить, что *A* состоит из несобственных элементов, то *A* будет не целостным, а составным объектом (совокупностью), образованным путем объединения элементов, которые в принципе могут иметь место и по отдельности” [415, с.181]. Для существования таких методологических триад необходимы определенные зазоры, связанные с общезначимым философским системным принципом дополнительности, который можно интерпретировать следующим образом: в системной триаде каждая пара элементов находится в отношении дополнительности, а третий элемент можно характеризовать как аналог меры их совместимости. Можно также предположить, что до тех пор, пока этот философский принцип соблюдается в подходе к обоснованию математики, естественное стремление к полноте не нарушает его целостности. При экспликации структуры обоснования всего комплекса математического знания представляется целесообразным воспользоваться синергетическим подходом, предполагающим, что взаимодействие всех элементов этого комплекса оказывает воздействие на его функционирование как целостной системы. Новым источником общенаучных понятий являются, например, общетеоретические проблемы современной науки, рассматриваемые в современом направлении научного знания – синергетике.

По мнению математиков С.П. Курдюмова и Г.Г. Малинецкого: "Синергетика, как правило, имеет дело с процессами, где целое обладает свойствами, которых нет ни у одной из частей. Целое в таких системах отражает свойства частей, но и части отражают свойства целого. Здесь нельзя утверждать, что целое сложнее части, оно совсем другое" [220, с.7]. Заметим, что по существу синергетика состоит из математических моделей самоорганизации. Следует также различать синергетику как научную картину мира и синергетику как совокупность конкретных моделей самоорганизации, применяемых в конкретных областях знания. Через "синергию" научных дисциплин осуществляется саморефлексия науки. Принципы такой работы формирует "синергетическая философия науки", кредо которой состоит в том, что наука как процесс исследования является самоорганизующейся системой, способствующей формированию нового знания. В такой методологической перспективе предлагаемая концепция обоснования на предметном уровне связана с проработкой синтеза трех ветвей логики: философской, математической и физической, в качестве которого выступает системная триада как форма философско-методологического синтеза. В своем философско-методологическом анализе обоснования мы исходим из общепризнанного факта особой достоверности математического знания, его способности к самоорганизации и неправомерности отождествления теоретической математики с опытными науками.

С позиций синергетической модели развития в самоорганизующихся системах смысл феномена саморазвития отличается от гегелевской концепции саморазвития тем, что в этих системах принцип случайности равноправно позиционируется с принципом необходимости. Кроме того, как справедливо отмечает В.Н. Садовский: "В то время как отношения являются бинарными или сводимы к бинарным, система, представляющая собой целостную организацию и включая в себя неопределенное число элементов, не сводима к бинарным отношениям и поэтому имеет принципиально иную логическую природу" [396, с.134]. Системное обоснование математических теорий, безусловно, более абстрактно и более общезначимо, чем логическое, поскольку все программы логического обоснования математики базируются на некоторых видах редукции. Системный подход дает новый взгляд на проблему целостности программы обоснования математики. Если раньше целостные представления об объектах исследования складывались в основном на анализе их внешних взаимодействий, точнее на основе того, как они проявляют себя во внешних взаимодействиях, то системный подход методологически дополняет исследование целостности анализом внутренней дифференциации. Используя при этом дополнительные внутренние связи и целостные свойства системы, получают ее определенное философское обоснование. Теоретический уровень математического знания образует сложная система взаимодействующих друг с другом математических теорий как фундаментального, так и частного характера, включающих эмпирический и теоретический уровни. В частности, для выявления специфических особенностей этих уровней математического познания необходим рассудочный синтез, как завершающий познавательный акт.

С общей философско-методологической точки зрения, как полагает академик В.С. Степин: "Взаимодействие знаний каждого из этих уровней, их объединение в относительно самостоятельные блоки, наличие прямых и обратных связей между ними требуют рассматривать их как целостную, самоорганизующуюся систему. В рамках каждой научной дисциплины многообразие знаний организуется в единое системное целое во многом благодаря основаниям, на которые они опираются" [424, с.120]. С точки зрения проблемы обоснования математики следует подчеркнуть, что основания математического знания выступают "системообразующим блоком", который определяет стратегию философского поиска системной триады направлений обоснования математики. В ее характеристике можно выделить следующие нюансы. Во-первых, это целостность, восходящая к первичному кантовскому синтезу "схватывания", с помощью которого имеющееся многообразие подходов к обоснованию превращается в системную целостность. А во-вторых, это геометрическое оформление схваченной целостности в виде триады направлений обоснования. Для обоснования математики триадический подход означает также, что никакая часть математики не обладает особыми привилегиями, так как каждое известное направление обоснования математики основано на поисках той части математики, которая в рамках этого направления имеет особую надежность своих доказательств, свободных от противоречий.

Поэтому итогом синтеза нескольких направлений обоснования современной математики должна стать особая модель объекта исследования. Она по необходимости будет "плоской", в том смысле, что "она дает вполне единообразное изображение объекта и потому необходимо строится в каком-то едином языке, т.е. в одной определенной "плоскости", а не в некоторой "сфере"" [495, с.49]. В такой модели будет специально подчеркнуто, что все три элемента системной триады потенциально равноправны, поскольку, например, суждение о математической истине не опирается непосредственно на одно только философское направление в обосновании математики. В современной философии математики можно выделить три основных подхода к обоснованию математики: формализм Гильберта, интуиционизм Брауэра и платонизм Гёделя.

Стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, позволяющей в проблеме обоснования замкнуть бинарную оппозицию “формализм – интуиционизм” в системную триаду, объединяющую три равноправных элемента обоснования, а именно, “формализм – платонизм – интуиционизм”, каждый из которых может участвовать в совмещении оппозиций как специфическая мера компромисса. Следует особо подчеркнуть, что методологическое различие этих философских направлений в обосновании современной математики, с точки зрения реального развития математического знания, указывает также на их взаимодополнительный характер.

Акцентируя внимание на целостности системной триады, Р.Г. Баранцев предложил для ее визуализации треугольную запись: “Треугольная запись подчеркивает двумерность триадного мышления в отличие от одномерного диадного. Следует также отметить, что, различая аспекты, мы не разрушаем целостности, ибо различие не есть разделение” [33, с.196]. Поэтому, исходя из предварительно проведенного философско-методологического анализа по проблеме обоснования современной математики, в качестве одной из форм триадического подхода можно рассмотреть следующую системную триаду философских направлений обоснования современной математики:

платонизм
/ \
формализм — интуиционизм.

Чтобы проиллюстрировать, как реализуется системная триада обоснования, сопоставим различные точки зрения на известные математические понятия и некоторые проблемы, акцентируя внимание на тех аспектах математических объектов, которые оказываются важными для обоснования математики. Нам представляется, что рассмотренные направления обоснования математики, входящие в системную триаду, которые отражают альтернативность точек зрения на современную математику, может примирить триадическая модель обоснования, учитывающая в своем анализе различные аспекты многообразия математического знания. Безусловно, невозможно обсудить в связи с каждым понятием все подходы, но обсуждение наиболее значимых мнений, способствующих пониманию предложенной концепции обоснования, будет полезно.

При осмыслении математических текстов Ю.И. Манин выделяет в этих процессах следующие аспекты, которые коррелируют с элементами системной триады и которые попеременно выступают на первый план в конкретных индивидуальных актах осмысления математических объектов. Это, во-первых, “внутренний” аспект семантики, эксплицирующий интуитивный смысл текста. Во-вторых, это дополнительный к нему “внешний” аспект семантики, реконструирующий опущенные подробности в формальной теории. В-третьих, это “реалистический” аспект семантики, который предполагает, что некоторые абстракции “могут быть не только естественнонаучными, но и философскими: предположение о существовании некоторого "неоплатонистского" мира множеств позволяет отнести к "реалистической" философию классической теоретико-множественно математики” [259, с.152]. Философская компонента формалистского направления в обосновании математики связана с абсолютизацией ее внешнего аспекта, при этом уточнение смысла математических понятий происходит за счет сужения потенциальных возможностей, заключенных в интуитивном образе. Поэтому все три аспекта осмысления математических текстов необходимы в процедуре обоснования математики, прежде всего, с точки зрения системного подхода к обоснованию. При этом предметная отнесенность философии математики является одним из основных критериев оценки системного подхода к исследованию проблемы обоснования математики. Анализ исследований по системному подходу как методологического направления философии науки показывает, что высокая степень абстрактности системных исследований создает для каждого из них практически необъятное поле возможностей выбора соответствующего теоретического и эмпирического материала, как, например, в исследованиях самоорганизующихся систем. По существу, источник подхода к такой сложноорганизованной системе, как современная математика, находится в самой системе математического знания. Это связано с целесообразным характером поведения этой системы, так как существенная черта системных объектов состоит в том, что они являются не просто системами, а самоорганизующимися системами, а это относится и к системе многообразного математического знания.

Рассмотрим подробнее каждую бинарную оппозицию системной триады обоснования математики на соответствующих математических примерах с учетом специфики предмета математики, то есть с точки зрения общей системы современного математического знания, интерпретируя ее в терминах разрабатываемой концепции обоснования современной математики. Переводя проблему обоснования математики в плоскость взаимоотношений между реальными объектами математической теории и концептуальной философской схемой ее обоснования, с точки зрения методологии получаем три тесно связанные задачи, способствующие ее решению. “Рассмотренная же в терминах системного метода, – согласно В.В. Целищеву, – она фактически распадается на ряд проблем: 1) проблему соотношения системы и элемента; 2) проблему определения статуса элемента системы; 3) проблему дополнения системы новыми элементами для образования более совершенной по некоторым критериям системы” [465, с.138]. Следует отметить, что практическое оправдание новой философской концепции обоснования математики через ее использование, отличается от собственно философско-методологического анализа, способствующего выявлению структуры концепции обоснования математики. Специфика современной математики заключается в том, что в отличие от других наук проблема обоснования математической теории не может быть решена исключительно на основании эмпирического опыта или специально подобранных для этого математических примеров.

Для уяснения, например, смысла математического понятия, а в нашем случае смысла предложенной концепции, который трудно выявить с помощью формального определения, по мнению академика И.Р. Шафаревича: “Не меньше (скорее больше) дает набор основных примеров (как правило, в не очень большом числе), являющихся для математика одновременно и мотивировкой, и содержательным определением, и "смыслом" понятия” [483, с.7]. Понимание проблемы обоснования математики может быть достигнуто с помощью философско-методологических рассуждений, вскрывающих механизмы взаимодействия противоположностей составляющих триады обоснования в процессе развития математических теорий. Интерпретация математической теории путем указания на ту предметную область, где ее основные положения выполняются, и интерпретация используемой математической методологии путем построения все усложняющихся моделей обоснования суть противоположные, но одновременно и взаимосвязанные направления реального процесса математического познания. По поводу философской составляющей проблемы обоснования следует заметить, что она выявляет внешний фундамент или базу соответствующей концепции обоснования, так как если обоснование и способно что-то изменить, то это относится в основном к внешнему статусу объекта исследования, но никак не касается его внутренних характеристик. Данное положение вполне философски допустимо для анализа современной математики, поскольку само ее развитие является одновременно и ее обоснованием.

Начнем анализ системной триады обоснования математики с бинарной оппозиции “формализм – интуиционизм”. При развитии математических идей одной из движущих сил является стремление найти такие математические объекты и структуры, которые отражали бы поведение реальных физических процессов, хотя очень трудно детально познать физический мир настолько, чтобы сразу можно было формировать четкие математические конструкции. Прогресс в математике возможен еще и потому, что математические понятия обладают своим собственным “импульсом развития”, который по большей части возникает внутри самой математики. В качестве подтверждения этого тезиса и доказательства объективности математических концепций приведем хорошо изученный математический объект – множество Мандельброта. На примере этого знаменитого фрактала можно пояснить дополнительность направлений формализма и интуиционизма и их совмещения с помощью платонизма. Интуиционизм дополняет формализм в том отношении, что некоторые принципы считаются интуитивно ясными, хотя строгость доказательства у интуиционистов не уступает логике формалистского доказательства. Как отмечает сам Бенуа Мандельброт, “именно фрактальная геометрия, созданная для нужд естествознания, совершенно неожиданно объединила несколько старых и благородных (хотя и узких) математических направлений в единый поток и пробудила от спячки еще несколько” [257, с.131]. Например, у множества Мандельброта есть точная математическая формула, обеспечивающая счет – это можно отнести к формализму, но есть и алгоритм операции построения этого математического объекта – это уже относится к интуиционизму, или точнее конструктивизму. Следует заметить, что хотя множество Мандельброта чрезвычайно сложно и даже замысловато устроено, его структура полностью определяется математическим формализмом исключительной простоты.

Фрактальные объекты репрезентируются не только геометрическим описанием или формальным уравнением, а также набором математических процедур – алгоритмом, с помощью которого выявляется, а точнее последовательно визуализируется или разворачивается его геометрическая форма, например, на современном компьютере. По существу математики научились превращать абстрактные математические формулы в компьютерные программы, которые способны реально изучать мир. В то же время, замечает В.Э. Войцехович, “здесь есть неизменные идеальные объекты, например, алгоритм, фрактал (как формула, организующая его, или соответствующая геометрическая картинка, мыслимая как завершенное целое) – но это при платонистской интерпретации” [99, с.502]. Поскольку процесс построения фрактального объекта бесконечен, то мера совмещения формализма и интуиционизма в нем – это платонизм, который дает уверенность в существовании законченного объекта – множества Мандельброта, то есть независимость этого фрактала в тончайших деталях от математики или компьютера придает этому множеству платонистское существование. Множество Мандельброта вполне определенно и объективно существует в современной математике. Если говорить о существовании множества Мандельброта, то оно существует все же не в наших разумах, поскольку ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное многообразие и сложность этого математического объекта.

Однако есть и другое мнение. Так, возражения В.Я. Перминова по поводу приведенного примера для подтверждения позиции реализма сводятся к тому, что речь идет не о реальной подоснове математических теорий, а об их объективной определенности в системе математического знания: “Множество Мандельброта, о котором у него идет речь, конечно, объективно определено операциями с комплексными числами, но мы не можем ему, в отличие от арифметики и евклидовой геометрии, приписать реальную (метафизическую) значимость” [338, с.36]. Но множество Мандельброта не может существовать и в компьютерных распечатках, так как они охватывают только часть сложно детализированной структуры фрактальных узоров, поэтому на распечатках мы видим не его, а приближение к нему, точнее его платоновскую “тень” в потенциально вневременном смысле. Как заключает Роджер Пенроуз, “множество Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем "глубже" мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка. Следовательно, существовать множество Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде” [328, с.37]. При этом он предлагает расширить рамки значения слова “существование”, так как в платоновском мире математические объекты существуют не так, как существуют физические объекты, поскольку они не имеют пространственного местоположения и представляют собой “вневременные объекты”.

Другой пример для иллюстрации пары “формализм – интуиционизм” дает дельта-функция Дирака. В современной математике есть такие обобщения понятия функции, которые не напрямую и довольно трудно сводятся к отображениям множеств. Речь идет об обобщенных функциях, в частности, о дельта-функции Дирака, введение которых было стимулировано эмпирическими идеями из физики, что собственно и явилось новым стимулом развития функционального анализа и теории дифференциальных уравнений. Интуитивно осмысливая дельта-функцию, физик представит ее как точечную единичную массу бесконечной плотности. “Для математика, – поясняет Ю.И. Манин, – несколько более абстрагированный вариант этого представления будет скорее относиться к категории "внутренней" семантики. Лишь получив возможность осознавать дельта-функцию "внешним" образом как функционал на пространстве финитных функций и включив ее таким образом в качестве хорошо определенного терма в формализмы анализа и в качестве теоретико-множественного объекта – в общематематические теории, математик почувствует себя совершенно спокойно” [259, с.159]. Но если интуиционистская компонента в системной триаде обоснования математики должна приближать трактовку абстрактных математических понятий к современной прикладной математике, то тогда дельта-функция – это не функционал, как иногда его трактуют математики-теоретики, а функция с локализованным значением. Говоря о платонистской компоненте, можно сослаться на авторитетное мнение академика С.Л. Соболева, разработавшего принципиально новые приложения теории обобщенных функций к вычислительной математике: “Обобщенные функции представляют собой "идеальные элементы", которые пополняют классические функциональные пространства по тому же образцу, как вещественные числа пополняют множество рациональных” (цит. по [222, с.358]). К этому следует добавить, что центральным в формализме теории обобщенных функций является понятие обобщенной производной, благодаря которому современная математика прибрела дополнительные степени свободы, а интуиционизм способствует интуитивному постижению этих формально сложных математических конструкций.

Рассмотрим теперь в системной триаде обоснования математики вторую бинарную оппозицию “формализм – платонизм”. После того, как Курт Гёдель показал, что непротиворечивость достаточно богатой теории, содержащей арифметику, не может быть установлена средствами, которые могут быть формализованы в самой этой теории, это привело к расхождению мнений в среде математиков на неудачи с доказательством континуум-гипотезы, в частности, это свидетельствовало о недостаточности формалистской концепции в обосновании. Поэтому как считает логик Хаскелл Карри: “Есть и такая группа логиков, которые утверждают, что формализм должен быть дополнен "семантическими" рассмотрениями платонистского характера” [173, с.32]. А, с точки зрения критерия строгости математических теорий, по его мнению, большинство платонистов в свою очередь допускает возможность формализации, поскольку в большинстве платонистских теорий нет иного критерия строгости, чем критерий, выведенный из формализации. Следует отметить, что математиков, являющимися внутренними участниками философско-математического дискурса, тоже всегда интересовал вопрос о том, как объяснить объективность математической веры в надежность математического рассуждения. Сами профессиональные математики, несмотря на силу формализма, стремятся обрести уверенность в том, что платонистские допущения, на которых базируется математика, не выходят за допустимые пределы, а условия, ограничивающие применение принципов аналогии и общности, сводятся к требованию формальной непротиворечивости следствий, выводимых из этих допущений. Так, например, некоторые философы математики предполагают, что большая часть внутренних участников дискуссии являются “повседневными платонистами”, а блюстители математической строгости – формалистами. Косвенное обоснование этой ситуации в современной математике имеет новые веские аргументы. Они связаны с “нестандартным решением” проблемы, стоявшей первой в знаменитом докладе Давида Гильберта “Математические проблемы” и оказавшей влияние на развитие математики в XX столетии, то есть континуум-гипотезы Кантора.

Напомним, что Курт Гёдель доказал невозможность опровержения гипотезы континуума, а Пол Коэн доказал, что она и ее отрицание не противоречат аксиомам теории множеств. В некотором “абсолютном смысле” проблема континуум-гипотезы, относящаяся по своему содержанию к самым основаниям математики, не решена до сих пор, хотя Гёдель и Коэн, которые по-разному относились к ее истинности, сумели показать, что она неразрешима средствами стандартной теории множеств. Из их результатов можно сделать следующий вывод. Выбор мощности континуума свелся, по мнению академика Н.Н. Лузина, к свободной аксиоме: “Первое, что приходит на ум, это то, что установление мощности continuum’а есть дело свободной аксиомы, вроде аксиомы о параллелях для геометрии. <…> Мощность continuum’а, если только мыслить его как множество точек, есть единая некая реальность и она должна находиться на алефической шкале там, где она на ней есть; нужды нет, если определение этого места затруднительно или, как прибавил бы J. Hadamard, "даже невозможно для нас, людей"” (цит. по [223, с.46–47]). В частности, с одной стороны, если признать относительность теоретико-множественных понятий в духе парадокса Сколема, то тогда принятие любого решения относительно истинности континуум-гипотезы будет по существу актом “иррациональной математики”. Но, с другой стороны, если предположить, что, несмотря на неразрешимость проблемы континуума, на шкале мощностей множеств определенное место для мощности континуума объективно существует, то это означает, что можно допускать существование мира идей, например, мира множеств, не зависящего от аксиом теории множеств, используемых в рассуждениях математиков. Тогда можно предположить, что умеренный математический платонизм в такой ситуации по существу превращается в философский платонизм.

Поэтому, во-первых, более мощные методы доказательства, чем используемые в стандартной теории множеств, возможно, могли бы прояснить истинность континуум-гипотезы, а во-вторых, ее истинность или ложность может зависеть от точки зрения или той веры, которой придерживаются математики. Несмотря на несводимость континуума к некоторой конструктивной процедуре, направление интуиционизма в проблеме континуума можно рассматривать как процедуру совмещения, точнее как интуитивное постижение формальных математических конструкций с платоническим существованием, хотя для интуиционистского направления континуум не имеет того характера общности, который присущ геометрической идее континуума. Поскольку объекты теории множеств не принадлежат физической реальности, в платонизме Гёделя основную роль играет интуитивная составляющая, так как “несмотря на их удаленность от чувственного опыта, у математика есть что-то вроде восприятия также и для этих объектов, ибо аксиомы теории множеств как бы сами навязываются нам в качестве истинных. “Я не вижу, – писал Курт Гёдель, – никаких причин, почему этому виду восприятия, т.е. математической интуиции, мы должны доверять меньше, чем восприятиям, которые приводят нас к построению физических теорий и к ожиданию, что будущий чувственный опыт согласуется с ними” [521, с.271]. Континуум-гипотеза не зависит от стандартных аксиом теории множеств, поэтому отношение любого математика к этой проблеме позволяет причислить его к сторонникам либо формализма, либо платонизма. Но, говоря об интуиционизме как мере совмещения в оппозиции “формализм – платонизм”, необходимо заметить, что математическую интуицию все же не следует рассматривать в качестве единственной способности получения математического знания о соответствующих объектах.

Другой пример для иллюстрации пары “формализм – платонизм” дает ряд натуральных чисел. Говоря о специфике ряда натуральных чисел, как идеализации количественных закономерностей, математики легко приходят к согласию относительно того, какие рассуждения о свойствах натуральных чисел следует признать убедительными и доказательными, а какие свойства могут привести к гипотезам или ошибкам. Ряд натуральных чисел – это довольно тонкая структура математики, гораздо более сложная, чем большинство других первичных понятий, хотя он интуитивно ясен и понятен. Его роль в обосновании математики Бертран Рассел объясняет так: “То обстоятельство, что традиционная чистая математика может быть выведена из натуральных чисел, является сравнительно недавним открытием, хотя это давно подозревалось” [370, с.14]. С формальной стороны итальянский математик и философ Джузеппе Пеано показал, что вся теория натуральных чисел может быть выведена из трех примитивных идей и пяти аксиоматических утверждений плюс логика и некоторые сведения о множествах, которые используются в определении натурального ряда чисел. В качестве неопределяемых понятий в арифметике Пеано фигурируют: “выделенный элемент”, “натуральное число”, “следующий за”, которые должны быть восприняты независимо. Как поясняет последнее понятие немецкий философ Эрнст Кассирер: “Три не "следует" за двумя так, как гром за молнией, ибо оба эти числа обладают не временной реальностью, но исключительно идеальным логическим составом. Смысл следования сводится здесь к тому, что два входит, как посылка, в определение понятия трех, что значение одного понятия становится ясным тогда, когда твердо дано значение другого” [177, с.50]. Но все доказанное в формальной системе аксиом арифметики натуральных чисел справедливо и для объектов каждой интерпретации аксиоматики Пеано, которая оказалась проще аксиом геометрии Евклида.

С философско-методологической точки зрения бесконечный натуральный ряд чисел в целом, или его аналог, никто никогда не наблюдал в реальности. В частности, бесконечность натурального ряда как идеальной мысленной конструкции не связана с какими-либо реальными физическими ограничениями. В формализме ряда натуральных чисел представлено по существу платонистское допущение в виде правила, устанавливающего переход от одного натурального числа к другому. Неразложимое сочетание "и так далее" составляет платонистскую сущность натурального ряда, благодаря которой каждое достигнутое натуральное число имеет "следующий за" ним элемент. Но, тогда это понятие выявляет и третью компоненту в понимании ряда натуральных чисел, поскольку, как справедливо отмечает Герман Вейль: "Мне кажется поэтому вполне правильным говорить вместе с Брауэром об идее "всегда еще одного", из которой возникает числовой ряд, как проявление математической интуиции" [81, с.61]. Хорошо известно, что, вообще говоря, нельзя смешивать натуральное число с символом, его изображающим. Но если попытаться выяснить, в каком контексте натуральные числа могут быть объектами, обладающими некоторой реальностью, то здесь выявляются определенные эпистемологические трудности, поскольку аксиоматика Пеано может иметь любое количество различных философских интерпретаций, то с точки зрения логицистов, трактовка Пеано оказалась для философов "менее законченной", чем это казалось поначалу. Даже с математической точки зрения аксиоматическое определение натурального ряда дает понятие произвольной структуры, которая изоморфна натуральному ряду Добавим к этому, что натуральные числа, рассматриваемые, например, как результат пересчета объектов, сами являются объектами интуиции, то есть можно говорить об интуиционистской составляющей натуральных чисел, которая регулирует наши рассуждения о них.

С интуитивной точки зрения множество натуральных чисел может служить моделью упорядоченной дискретной совокупности, состоящей из конечного, но неопределенно большого числа элементов. Для генетической аргументации необходимости интуиционистской компоненты в анализе натурального ряда чисел можно, например, вспомнить, что для объяснения сущности натуральных чисел достаточно показать ребенку разное количество разных объектов, глядя на которые он легко приходит к пониманию их пересчета. Отметим также, что с деятельностной точки зрения формирование представления о бесконечном ряде натуральных чисел обусловлено общим стремлением к преодолению конечного. Поэтому, натуральный ряд чисел является математической идеализацией, отражающей эту тенденцию. Заметим в связи с этим, что наряду с моделью “математического” натурального ряда можно также говорить о “физическом” натуральном ряде. Например, геометр П.К. Рашевский пришел к следующему философскому выводу: “Духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком-то смысле "размытый вид", а не являлись строго определенными членами натурального ряда, как мы это себе представляем” [373, с.244]. Но числа такой гипотетической теории будут объектами другой природы, отличной от чисел натурального ряда, что является истинным источником методологических трудностей. Последовательность чисел, которая растет за рамками любого уже достигнутого числа путем перехода к следующему числу, по существу, есть многообразие возможностей, открытое в бесконечность. Она всегда остается в состоянии творения, а не в замкнутом мире вещей, что говорит об открытости математики. Поэтому можно заключить, что ряд натуральных чисел, существующий как актуально бесконечное множество в мире платоновских идей, одновременно присутствует где-то еще и в понимаемом нами мире, делая окружающую нас действительность более доступной для математического познания, а мерой их совмещения является начальное интуитивное представление о натуральных числах.

Рассмотрим, наконец, третью бинарную оппозицию “интуиционизм – платонизм” в системной триаде обоснования математики. Специалист по основаниям математики, немецкий математик Пауль Бернайс подметил, что двойственность арифметики и геометрии связана с противостоянием интуиционизма и платонизма. С одной стороны, понятие числа в арифметике имеет интуитивную природу, но “идея общности чисел наложена искусственно”, а с другой стороны, пространство в геометрии изначально платонистская идея, но “это противоречит имеющим в интуиционизме место процедурам конструкции фигур”. Но, согласно Бернайсу, “этого достаточно, чтобы показать, что две тенденции, интуиционистская и платонистская, обе необходимы; они дополняют друг друга, и будет насилием над собой отказаться от одной или другой” [43]. Рассмотрим в качестве примера нигде не дифференцируемую функцию Вейерштрасса из математического анализа, давшую неожиданный контрпример всюду непрерывной функции без производной, который разрушил традиционное представление о связи непрерывности и дифференцируемости функций и поколебал уверенность математиков в надежности геометрической интуиции.

Известно, что Стефан Банах, давший одно из наиболее простых доказательств существования нигде не дифференцируемых функций, “показал, что в смысле категорий почти все непрерывные функции нигде не дифференцируемы” [318, с.81]. Этот замечательный факт из современной математики раскрывает следующее: легче доказать, что “большинство” непрерывных функций нигде не дифференцируемы, чем привести пример хотя бы одной такой функции. Поэтому, с методологической точки зрения, очень важно понимать, как может реализоваться та или иная возможность, то есть возможна ли она в интуиционистском смысле. С математической точки зрения пример функции Вейерштрасса как появление определенного рода платонистской сущности не вызывает удивления. Но, благодаря этому примеру, по-новому была осознана сама операция дифференцирования, ранее считавшаяся относительно простой и всегда осуществимой, но оказавшаяся трудновыполнимой на практике. Несколько столетий назад функция мыслилась как аналитическое выражение, но теперь в более широком контексте ее можно рассматривать как произвольный закон соответствия между зависимой и независимой переменной, что характерно для формалистской компоненты обоснования математики. Анализ математических аргументов дает все основания считать, что формалистская составляющая триады обоснования может служить мерой совмещения на этом математическом объекте, поскольку если строго руководствоваться формальным определением непрерывности, то можно аналитически представить функцию Вейерштрасса в виде суммы функционального ряда.

Другой пример для иллюстрации пары “интуиционизм – платонизм” дает функция Кантора, определяемая с помощью канторова множества из функционального анализа. Функция Кантора строится на основании бесконечной процедуры, когда на замыкании каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала принимает значение, равное середине этого интервала. Сложность формализованного построения такого рода объектов заключается в том, что оно существенно опирается на интуитивные процедуры. Это приводит к различным философским взглядам на их существование: либо они существуют как математическая модель реального мира, либо как идея, не противоречащая принятой системе аксиом, что говорит о необходимости платонистской составляющей в их обосновании. Кроме того, с точки зрения прикладной математики реальные объекты всегда конечны, поэтому бесконечный математический объект может появиться в результате упрощающей математической схематизации, когда далекие элементы или их части теряют свою индивидуальность. Напомним, канторово множество знаменито тем, что, хотя и имеет мощность континуума, оно очень “разреженное”, то есть оно нигде не плотно на отрезке. Но, например, множество рациональных чисел любого отрезка имеет гораздо меньшую мощность, хотя оно и образует всюду плотное множество. Как поясняют американские математики Марк Кац и Станислав Улам: “Кардинальное число, или мощность, – это обобщение понятия количества элементов; оно связано со счетом, в то время как разреженность и плотность связаны с расположением в пространстве и понятием "близости". Объединяя эти два понятия, можно получить вполне удовлетворительное определение "малых" множеств” [181, с.177–178]. Например, канторово множество и множество рациональных чисел “малые”, первое потому, что оно разрежено, а второе потому, что оно скудно. По существу здесь явно просматриваются две философские составляющие – интуиционистская и платонистская, которые характеризуют разные понятия, так как хотя одно множество “мощное”, оно разреженное, а другое множество хотя и “скудное”, но плотное.

Если в обычном анализе понятия непрерывной функции и дифференцируемой функции имеют общность, простирающуюся далеко за наши интуитивные представления о кривой, то с помощью канторова множества можно построить непрерывную монотонную функцию, производная которой почти всюду равна нулю. Источником этой аномалии служит канторово множество. Интуитивно без формальной процедуры трудно понять, почему функция Кантора почти нигде не растет, но успевает ощутимо вырасти на множестве нулевой меры, в связи с чем ее иногда называют “канторовой лестницей”. В бинарной оппозиции “интуиционизм – платонизм” явно проявляются проблемы онтологического и гносеологического обоснования математики, которые разрабатываются с различных позиций при реализации аксиоматического и конструктивного подходов к построению математических объектов. Расхождение между интуиционизмом, точнее одним из его направлений – конструктивизмом, и платонизмом или реализмом в оценке онтологического статуса объектов математики состоит в том, что платонизм признает существование этих объектов независимо от мышления человека, а конструктивизм требует обоснования математических объектов независимо от онтологических предпосылок. С учетом разнообразия конструктивистских версий онтологического истолкования объектов современной математики рассмотренные математические функции, имеющие явные реалистические основания, могут интерпретироваться как интуитивные или конструктивные. Устойчивость триады обоснования математики обеспечивается тем, что “противоположности не достигают антагонизма, где имеет место… взаимодействие противоположностей” [200, с.59]. В таком контексте составляющие триады не исключают друг друга, а представляют собой единое целое в рамках новой концепции обоснования современной математики.

Безусловно, имеются и другие примеры, реализующие системную триаду обоснования современной математики, хотя представляется, что рассмотренные выше все же наиболее философски характерные. Компоненты системной триады образуют целостное единство, поэтому, поскольку все три составляющие системной триады обоснования математики входят в нее равноправно, то рассмотренные примеры можно в нужном контексте интерпретировать и для других бинарных оппозиций. Например, функцию Вейерштрасса можно интерпретировать как первый фрактал в истории математики. Так же, как к береговой линии острова Коха, к этой линии нельзя провести касательную ни в одной точке, поскольку такие функции не имеют производной. Разбор математических примеров, поясняющих необходимость включения философских направлений формализма, интуиционизма (или конструктивизма) и платонизма (или умеренного платонизма) в системную триаду обоснования современной математики, можно завершить сентенцией В.В. Целищева: "Некоторые из самых глубоких проблем философии состоят из примирения естественных, но несовместимых эпистемологий и онтологий" [468, с.38]. С точки зрения философии это относится к математическому платонизму, так как, с одной стороны, он недостаточно философски обоснован онтологически, а с другой стороны, "эпистемологизация математики" – это тоже вполне естественная реакция философии науки на платонизм. Еще раз обратим внимание на то, почему в системной триаде используются направления внутриматематического обоснования в сложившейся диадной парадигме "формализм – интуиционизм", гносеологически противостоящие друг другу. Оглядываясь на историю математики, мы можем сказать, что в споре двух великих мыслителей прошлого века – Гильберта и Брауэра – правыми оказались оба. Но, поскольку с точки зрения математической практики ни направление формализма, ни направление интуиционизма не является подлинно репрезентативным для обоснования математики, то наиболее употребительный философский подход в таких ситуациях – это вложение исследуемых структур в более богатую триадическую структуру, определяемую целями философско-математического обосновательного дискурса.

Для дополнительной аргументации допустимости такого подхода сошлемся на мнение самого Давида Гильберта: "Если помимо доказательства непротиворечивости может иметь смысл еще вопрос о законности некоторого мероприятия, то таким вопросом может быть только вопрос о том, сопровождается ли это мероприятие соответствующим успехом или нет" [111, с.340]. Так все же почему для методологии целостного подхода к обоснованию современной математики в качестве структурной единицы избрана именно триада? Во-первых, необходимость такого выбора обусловлена тем, что базовой диады "формализм – интуиционизм" было явно недостаточно. "Двумя основными подходами к основаниям математики, заострившими дилемму интуитивного и дискурсивного (содержательного и формального) в математике и соответственно имеющими наибольшее значение для выявления соотношения формальных и интуитивных моментов в математическом познании, являются интуиционизм и формализм” [175, с.68]. Во-вторых, из более сложных структур триада наиболее простейшая и достаточно содержательная в отличие от других искусственных и поверхностных интерпретаций. Ограничиваясь системной триадой как необходимой структурой синтеза направлений обоснования современной математики, содержащей в отличие от более сложных комплексов только три параметра, достаточных для обретения целостности, можно сослаться на принцип простоты в философской интерпретации “бритвы Оккама”. Тем не менее, в отличие от аргументированной необходимости, достаточность тернарной структуры остается пока под вопросом, хотя и существуют определенные основания в математике, физике и философии для выделения таких структур. Это связано с тем, что умножая математическое знание, мы в еще большей степени умножаем незнание, поэтому нельзя зацикливаться на традиционном научном стиле, декларирующем стремление к прогрессу и замалчивающем трудности и недостатки, обостряя тем самым концептуальные противоречия, которые являются непременным атрибутом любой концепции обоснования математики.

Наконец, необходимость в системной триаде платонистской компоненты, противостоящей формалистскому и интуиционистскому направлениям в философии математики, можно пояснить следующим образом. Например, по мнению такого авторитетного специалиста в математике и философии, как Роджер Пенроуз, “абсолютность математической истины и платонистское существование математических понятий, по существу, тождественны” [326, с.101]. Существенность платонистской концепции, как системы высших идеализаций сознания, определяется еще и тем, что мы не можем понять истоков математических идеализаций и их связей с категориями мышления. Допустимая интерпретация платонистской компоненты в системной триаде обосновании состоит в том, что нельзя абсолютизировать принципы обоснования математических теорий, поэтому она лишь фиксирует возможности духа, которые проявляются в виде математической мыследеятельности. Это вполне естественно, так как в математическом творчестве свобода выступает в связке со своим “диалектическим двойником” – ограничением. “Математическое становление и является, в сущности, процессом освобождения объекта (что можно понимать и в платонистском смысле, и в неоплатонистском, например, в духе "свободно становящихся последовательностей" Брауэра)” [26, с.116]. Поэтому можно заключить, что новое смысловое содержание определяется благодаря триадной структуре программы обоснования современной математики. По существу с ее помощью можно окончательно зафиксировать тот факт, что после ограничительных гёделевских результатов, указавших на принципиальную недостаточность внутриматематических подходов к обоснованию математики, определенный “бум фундаментализма” в философии математики пошел на спад. Есть еще один аспект новой концепции обоснования математики, связанный с системной целостностью, который заслуживает отдельного философского осмысления.

О целостности на основе генезиса тринитарного сознания, как методе научного исследования, можно говорить в различных смыслах, например, как об обобщении определенной теории, включающем в нее предшествующие теории, как о широком объединении нескольких теорий, в котором сглаживаются их противоречия, или как о системном подходе к проблеме обоснования современной теории. Например, теоретическое обоснование арифметики требует рассмотрения системы онтологических категорий, которая является целостной в том смысле, что все эти категории описывают некоторые аспекты реальности, определяющие акты деятельности в необходимых философских предпосылках. Системная триада программы обоснования современной математики указывает также на пределы обобщения своих философско-методологических подходов и допустимые пределы их абстрактности. Говоря в философском плане о системном анализе, академик Н.Н. Моисеев подчеркивает: “Одна из самых сложных задач создающейся на наших глазах технологии системного анализа и состоит в органическом объединении формального анализа, основанного на использовании математических моделей, с анализом неформальным, традиционным для естествознания и общественных наук” [280, с.98]. Системная триада определяет, каков должен быть уровень формальной абстракции аксиоматической системы, чтобы построенная на ее основе математическая теория находила новые области реальных эффективных приложений. По существу такой подход к обоснованию математики определяет облик современной постнеклассической науки, которая прошла путь становления неклассического естествознания, охватывающий период с конца XIX до середины XX столетия.

Эти исследования сопровождались формированием философских оснований науки, специфика которых состоит в новом понимании исторического развития средств и методов познавательной деятельности. Философская идея исторической изменчивости научного знания и вырабатываемых в науке принципов соединилась с новыми представлениями об активности субъекта познания. Кроме того, если классическая математика ориентировалась на глубокое постижение все более усложняющихся и сужающихся разделов математики, то новую парадигму исследования определяют комплексные исследовательские программы. Существенное отличие современной неклассической математики от классической математики состоит в том, что она не является полной в логическом смысле. Поэтому в новой парадигме происходит смена методологического идеала от полноты к целостности, то есть речь идет о переходе с помощью системной триады программ обоснования математики к целостности, как более фундаментальному понятию в философии математики, чем полнота. Являясь сложнейшим структурным образованием, программа обоснования современной математики характеризуется единством, системностью и целостностью.

Системность обосновательных процедур в математике означает, что они выступают неким связным неразрывным целым. Заметим, что системная целостность новой концепции обоснования современной математики вытекает не только из ее единства и качественного многообразия, но также из того, что обе эти характеристики являются проявлениями ее самоорганизации.

Заложенные в современную математику априорные концепции новых теорий могут стать эффективным и надежным путеводителем в обосновании математики, а не становиться методологическим ограничением для него, используя для этого принцип рефлексивного самообоснования (или саморазвития). Среди всех абстракций человеческого ума система математического знания является наиболее ярко представленным самообосновывающим абстрактным объектом. Согласно принципу рефлексивного самообоснования, философское обоснование сложных системных объектов характеризуется развитием новых уровней организации системы ценностей, оказывающих обратное воздействие на ранее сложившиеся подходы к обоснованию, в результате чего концепция обоснования математических теорий обретает системную целостность. Как утверждает В.С. Степин: "Категориальные смыслы, характеризующие саморазвитие и самоорганизацию, выполняют во многих областях современного научного поиска функцию методологических регулятивов. В частности, такого рода регулятивно-эвристической функцией обладает идея перестройки системы под воздействием возникающих в ней в ходе развития новых уровней организации. Гегель был первым мыслителем, который открыл эту особенность саморазвивающихся систем и категориально зафиксировал ее в понятии "погружение в основание"" [429, с.633]. Заметим, что здесь намеренно акцентируется внимание на методологическом потенциале гегелевской идеи "погружения в основание", поскольку эта идея долгое время не была востребована наукой.

Сегодня научное исследование постоянно сталкивается с ситуациями, которые требуют осмысления принципа "погружения в основание" к процессам самоорганизации и саморазвития, происходящим в постнеклассической науке. Но пока философские основания постнеклассической математики находятся в стадии разработки и новые подходы не вышли из стадии гипотезы. Идея самоорганизации теорий, как сложных системных объектов, становится в контексте их обоснования предпочтительнее внешней организации. "Структурная самоорганизация, – поясняет философ науки Э.М. Сороко, – обеспечивает структурную стабильность системы, поиск соразмерности, самосогласованности, гармоничности состава противоречивых, различающихся между собой компонентов" [419, с.131]. При этом следует учитывать философскую специфику этого процесса, состоящую в том, что самоорганизация, опираясь на фундаментальные структуры математики, не может выполнять функцию движущей силы обоснования математического знания без использования всех имеющихся информационных механизмов, обеспечивающих направленное развитие математики как высокоорганизованной открытой системы. С точки зрения целесообразности, более сложный тип системной целостности, чем самоорганизация (или саморегуляция), – это самообоснование математических теорий, при которой поддержание структурной целостности современной математики обеспечивается равномерностью функционирования всех ее составных частей. Отсюда следует, что мы не можем использовать традиционные подходы к обоснованию в отношении к развивающимся системам современного математического знания. Выход из затруднения состоит в отказе от старых представлений об обосновании развивающихся теорий математики и переводе проблемы с логического уровня на методологический уровень. В целостной методологии современной математики системный подход к обоснованию является одним из ведущих философских принципов интеграции математического знания, хотя реконструкции реальной системности объектов, их многоуровневой взаимосвязи и целесообразности разделения целого далеко не всегда являются столь уж очевидными философско-математическими фактами научного познания.

Целостность математического познания в контексте перспектив обоснования пропадает, когда нарушается соразмерность естественных компонент системной триады философско-методологических направлений обоснования математики, поскольку в сильной триаде возможна регенерация ослабевших свойств и их восстановление через другие компоненты. Возможно поэтому, философ Е.А. Мамчур придерживается другой точки зрения. Она настаивает на том, что “все компоненты системы знания являются результатом деятельности ученых, так что при анализе концептуальных систем речь должна идти, строго говоря, не о процессах самоорганизации, а о процессах организации, не о самоорганизующихся, а скорее об организуемых системах” [255, с.49]. Для такого мнения тоже есть своя аргументация. Несмотря на то, что достижения современной математики не менее совершенны, чем творения классиков, развитие математики не похоже на рост живого организма, который сохраняет свою форму и определяет свои границы. Рассматривая математическую теорию в целом, можно говорить как об онтологически истинных теориях, так и о логически непротиворечивых теориях. При этом необходимо помнить о разделении онтологии на систему идеализаций, напрямую связанных с математической познавательной деятельностью, и на систему формальных математических структур, базирующихся на онтологических представлениях. Так, арифметика – это формальная система, основанная на идеализациях, относящихся к онтологии, а теоретико-множественная аксиоматика уже не обладает статусом аксиом арифметики, несмотря на ее предельную убедительность в своей истинности. Поскольку трудно учесть все формализуемые аспекты направлений обоснования, то онтологическое обоснование современной математики, скорее всего, маловероятно. Однако в самой математике триада действующих направлений формализма Гильберта, интуиционизма Брауэра и платонизма Гёделя в обосновании математики позволяют универсальным образом рассмотреть все имеющиеся в настоящее время результаты и методы, присущие современным математическим теориям.

Современная математика не содержит в самой себе ограничивающего начала, поэтому, как сказал известный математик и философ Н.В. Бугаев: “Целесообразность и гармония не могут быть выброшены за борт из истинного научно-философского миросозерцания” [66, с.90]. Они должны соответствовать философским императивам математизации современной науки, поскольку целесообразность и гармония непосредственно связаны с математическими представлениями о соразмерности отношений между частями и целым. Естественно, на вопросы различной общности и глубины, которые относятся к обоснованию современной математики, редко можно дать окончательные ответы. Но, с одной стороны, уже полученные ответы могут изменить наше представление обо всем спектре рассмотренных вопросов, а с другой стороны, и сами ответы, и развитая в ходе их получения система философских понятий легли в основу новой концепции обоснования математики. Из философского анализа проблемы обоснования математики можно сделать следующий практический вывод: процесс развития математики, а также уточнение оснований математики, никогда не будут завершены, так как познание бесконечно. Почему мы предполагаем, что целостному подходу соответствует системная триада направлений обоснования математики, репрезентирующая одну из форм философско-математического синтеза? Во-первых, число три обладает высоким приоритетом, поскольку триединство удивительным образом сохраняет значение в духовной культуре наших дней. Несколько тысячелетий назад представление о триединстве Мира возникло у Платона. Кроме того, вполне уместно заметить, что идея тринитарности является основным догматом христианства, а троица – излюбленное число героев мифологии. Во-вторых, “основное значение триады состоит в том, что она фиксирует начало синтеза, соединяя воедино противоположные начала” [108, с.94]. Полярные качества диады по своей природе плохо философски согласуются друг с другом.

Но когда мы игнорируем эту несогласованность и говорим о “золотой середине”, в которой пытаемся найти решение философской проблемы обоснования, то мы, по существу, обращаемся к системной триаде, несущей в себе потенциальную возможность согласования. “В этой связи необходимо отметить, что у сложных систем существует потенциальная возможность перехода в одно из нескольких возможных качественно новых устойчивых состояний. Такое потенциально возможное разветвление пути развития системы называют точкой бифуркации” [375, с.71]. Поэтому не случайно структурирование понятий по принципу триады имеет множество вариантов. С точки зрения математики, треугольник – это двумерный симплекс, то есть простейший выпуклый многогранник данного числа измерений, а именно двух. Он примечателен тем, что три точки, образующие его вершины, с одной стороны, могут рассматриваться как самостоятельные элементы, а с другой стороны, образуют нечто целое в виде всем известной простейшей геометрической фигуры. Отсюда, возможно, и возникла философская идея триадичности, а то, что, осознав ее, люди стали мыслить пространственно, хорошо отражено в разнообразных тринитарных метафорах. Как считает идеолог тринитарного мышления Р.Г. Баранцев, переход от диад к триадам позволяет заново взглянуть на суть диалектики, которая, вообще говоря, не привязана исключительно к дихотомии, а допускает изучение многомерных систем, включая тройные. Он предполагает, что "тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее внутренние возможности" [36, с.54]. Важнейшей характеристикой системной триады программ обоснования математики является то, что функционирование и развитие этой системы происходит в результате взаимодействия составляющих ее элементов при примате внутренних закономерностей реальной эволюции в контексте единства современной математики.

С одной стороны, это положение является центральным в системной триаде обоснования математики потому, что на нем основана вся стратегия исследования философско-методологического синтеза направлений обоснования математики. Но, с другой стороны, это положение кажется уязвимым звеном, так как при его аргументации в конкретно-научном знании нельзя опереться на общефилософские факты или на общепризнанную теорию. Однако, исходя из проведенного анализа, можно все же утверждать следующее. Системная триада как форма философско-методологического синтеза направлений обоснования современной математики дает "абсолютно надежный метод обоснования в том отношении, что его применение всегда имеет своим результатом предикацию знания тем и только тем, полаганиям, которые действительно выражают знание, и только в той мере, в какой они его действительно выражают" [479, с.138]. Эпистемологическая надежность такого подхода к обоснованию обусловлена тем, что источник развития системной триады обоснования в целом трактуется как самообоснование математических теорий в результате единства и борьбы противоположных сторон рассматриваемой триады. При этом как будто действует некий принцип неопределенности, подобный квантовому, то есть чем больше уточняется одно направление обоснования, включенное в триаду, тем более расплывчатым становится другое.

Понимаемый таким образом философско-методологический синтез является существенной стороной или аспектом диалектики. "Для диалектики как общефилософской концепции развития особый интерес представляют именно процессы самоорганизации, – подчеркивает Г.И. Рузавин, – так как с ними связаны усложнение и эволюция материальных систем и соответствующих им структур. В связи с этим сама диалектика получает новое подтверждение и конкретизацию на основе современных результатов науки" [392, с.18]. Рассуждать диалектически – это значит системно варьировать соотношение противоположностей. При этом диалектическое развитие сравнивается с движением не по кругу, а по спирали, поскольку при обороте по спирали мы не возвращаемся к уже пройденным этапам познания, а лишь приближаемся к ним на новом уровне познания. Поэтому, с точки зрения диалектики, нельзя говорить ни об окончательно построенной философской концепции обоснования математики, ни об окончательно опровергнутых методологических направлениях обоснования математики. Однако те, кто считает, что можно обойтись без диалектики в процедуре обоснования современной математики, упускают из вида следующее возражение. Диалектическое раздвоение сложного математического утверждения на аксиоматическое и эмпирическое является внутренне противоречивым. Переход от содержательного понимания к теоретико-множественному во взаимодействии с другими подходами вызывает собственное отрицание. В частности, во избежание "ошибок презентизма", необходимо возвращение к содержательному пониманию обоснования математики.

Процесс становления новой области математического знания, как и процесс формирования новой концепции обоснования математики, имеет свою, хотя и более трудную и глубокую логику. "Эта логика, – по утверждению академика А.Д. Александрова, – логика изменения понятий в соответствии с задачами познания – и есть диалектика" [7, с.259]. Поскольку сфера математического познания составляет некоторое поле для самостоятельности, то уже Платон говорил о математических науках как о "проводниках и помощниках" диалектики. Поэтому возникновение новой концепции обоснования современной математики, которую можно "достраивать" различными способами, не следует понимать упрощенно в том смысле, что каждый новый этап приводит к полному исчезновению предшествующих философско-методологических установок на познание реального мира. Любая философская теория, которая предполагает, что математика может объяснять естественный мир, должна также предложить объяснение очевидного для всех исторического факта, что фундаментальные науки никогда не оспаривали математику. Поэтому конкретные, исторически обусловленные, формы обоснования математики можно рассматривать как ее "вторичные кристализации", благодаря чему постнеклассическая математическая наука вовсе не уничтожает классическую и неклассическую математику, а только ограничивает их сферу действия. Они использовались и будут использоваться в отдельных познавательных ситуациях, хотя, возможно, утратив статус доминирующих или определяющих современный облик математики.

В целом это и есть перспектива нового уровня саморазвития математического знания, сохраняющего непрерывность развития. При этом появление принципиально нового обоснования математики характеризует скорее философский, чем собственно математический тип мышления, поскольку законы диалектики послужили отправной точкой философии развития математики и самоорганизации ее теорий. В условиях реального сосуществования дополнительных друг к другу направлений обоснования математики, при условии их методологической либерализации, философско-методологический синтез сводит различные элементы математического знания в целостную систему на основе единства математического знания, его теоретической и прикладной составляющих. К этому следует добавить, что роль системной методологии в проблеме обоснования математики не исчерпывается философскими задачами обеспечения и математическими задачами реализации синтеза различных направлений обоснования математики. С точки зрения прогностической функции системной методологии в обосновании математики понятия и принципы системного подхода способствуют такой организации предметного содержания исследования, которое связано с выявлением диалектических законов функционирования и развития математики. Поэтому, чтобы не потерять философской перспективы целостного обоснования современной математики, она должна иметь альтернативные подходы к обоснованию в духе разумного методологического компромисса. В этом исследовании были намечены предварительные философско-методологические контуры такого понимания проблемы обоснования современной математики, хотя, разумеется, с точки зрения философской незавершенности, в принципе, возможны различные философские подходы.

* * *

Практическая эффективность современной математики возможна лишь потому, что она представляет в своих теориях объективную реальность. Что касается различных подходов к обоснованию математики, то они, вообще говоря, представляют собой одинаково возможные способы рассматривать математическую деятельность, связывая ее в философском единстве с другими областями знания. Современная философия математики исходит из множественности способов объяснения изучаемых явлений, поскольку вынуждена признать не только ограниченность математики, но и ее неполноту. Поэтому общефилософский принцип относительности истины в контексте системного мышления в проблеме обоснования математики выступает в форме специального конкретно-научного принципа. В широком смысле проблема обоснования математики не получила окончательного разрешения, поскольку в настоящее время философы математики пришли к пониманию того, что ее решение лежит за пределами чисто логико-математического подхода и относится к философскому и интеллектуальному оснащению математического знания.

Математические теории развиваются, сохраняя единство разнообразных ветвей математики, согласуясь с физической реальностью, и каждый раз на новом мировоззренческом уровне возвращаются к целостному философскому пониманию мира. В контексте системного подхода к обоснованию можно говорить о ненужности или избыточности самих попыток найти для современной математики какое-то особое основание, в силу определенной произвольности философских интерпретаций математических теорий, как, например теории бесконечных множеств Кантора. Поэтому обоснование современной математики как систематической науки, охватывающей различные ветви естественной истории математики, должно использовать экстраординарные концепции. Их можно интерпретировать как комбинации обычных концепций, в которых при сохранении качественных различий имеется достаточно оснований для оправдания конкретных областей математики.

Основная трудность всех направлений обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне современная математика отличается от любого естественнонаучного знания более убедительной аргументацией и достаточно надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны и в определенном смысле внеисторичны. Выход из этого затруднения состоит в переводе проблемы обоснования математики с формально-логического уровня на философско-методологический уровень. Господствовавшие ранее научные парадигмы обоснования математики требовали полной определенности, но, согласно принципу неопределенности, в процесс исследования вмешивается субъективный фактор, оставляющий нечто существенное, возможно даже необязательно формализуемое, за рамками исследуемой математической теории или модели. Поэтому можно заключить: если математику нельзя обосновать в самой математике, то это не означает, что ее нельзя обосновать вообще, поскольку при построении абстрактных теорий математики используют не только математические, но и нематематические аргументы.

Стратегия развития современного математического знания показывает, что на основе аргументов внутриматематического характера можно получить объяснение недостижимости абсолютного обоснования математики. Поскольку не существует абсолютного, предельного и непроблематизируемого базиса современного математического знания, то не существует не только логической, но и формальной или интуитивной структуры, которая была бы достаточной для обоснования математики. Поэтому надежность теории связана с системной целостностью формальных и интуитивных процедур обоснования. В этом проявляется смена методологических ориентиров от достижения полноты к целостности в контексте системного подхода к обоснованию математики. Философско-методологический анализ современной математики выявляет специфическую способность математических теорий к самоорганизации, возникающей на пути их обобщений, выбора направления развития и целесообразности. Можно сделать вывод о том, что стратегия исследования проблемы обоснования современной математики должна включать анализ как актуального, так и потенциального состояния всей совокупности системы знания.

Смешение логических и математических оснований, проникших в современный математический здравый смысл через гильбертову метатеорию, привело к смещению философско-математических оценок, в которых стали преувеличиваться ценность формальной математической работы и преуменьшаться методологические возможности неформальной работы. В постгёделевской философии математики были выделены альтернативные методологические программы, поскольку идея обоснования математики исключительно одним только методом оказалась нереализуемой. В связи с этим произошла трансформация процесса философского исследования с построения единой или обобщенной теории обоснования математики на системный синтез нескольких концептуализаций. С философской точки зрения такой подход более привлекателен тем, что чрезмерное усиление, как и ослабление, каких-то обосновательных подходов может разрушить целостность программы обоснования математики. Кроме того, проведенный анализ проблемы истины в математике показывает, что с учетом объективного многообразия логических возможностей в математике, возникает необходимость рассмотрения философско-методологического синтеза действующих направлений обоснования современной математики.

Теоретико-множественная парадигма философии математики до сих пор является господствующей во всей современной математике и вместе с активно развиваемой новой областью – компьютерной математикой – ее оказалось вполне достаточно для успешного функционирования и развития математических теорий. Вполне вероятно, что различные их варианты будут существовать и развиваться параллельно, подобно тому, как сосуществуют различные геометрии. Демаркационная линия формализма и интуиционизма в математике зависит от философских программ, так как что считать в них логикой, а что математикой, определяется в значительной степени целями философского и математического исследования, например, в разном понимании концепции полноты, поэтому методологически оправдан переход от полноты к более фундаментальному понятию целостности. Поскольку выбор формализма не единственен, то можно использовать и интуиционистскую теорию множеств с соответствующей интуиционистской логикой, какие-то “промежуточные” варианты или новые версии теории множеств. Поэтому естественный переход к системной триаде как форме философско-методологического синтеза меняет всю структуру программы обоснования современной математики.

Целостность программы обоснования математики позволяет объяснить и познать во всей специфике то, что нельзя вывести исходя лишь из внешних признаков по отношению к исследуемой проблеме. Стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, позволяющей в новой концепции обоснования замкнуть бинарную оппозицию “формализм – интуиционизм” в системную триаду, объединяющую три равноправных элемента обоснования, а именно, формализм – платонизм – интуиционизм, каждый из которых позволяет участвовать в разрешении противоречий как специфическая мера компромисса. Важнейшей характеристикой философско-методологического синтеза, реализуемого с помощью системной триады программ обоснования современной математики, является то, что развитие этого синтеза происходит в результате функционирования и взаимодействия составляющих системную триаду элементов при приоритетном развитии внутренних закономерностей отдельных обосновательных программ.

Поскольку формализация допускает не вполне формализуемые теории, то целостность программы обоснования, когда она не входит в конфликт с имеющимся математическим опытом, характеризует их лучше, чем полнота. При этом следует иметь в виду, что для некоторых самоорганизующихся математических теорий исходные предпосылки обоснованы сами по себе тем реальным состоянием, в котором находится система математического знания. Тринитарная методология как философская концепция не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее новые возможности, когда от математики, при сохранении достаточной точности, требуется только лишь сохранять целостность исследуемых математических объектов. Признание прогресса при тринитарном подходе к обоснованию современной математики, в качестве естественной для математики абстракции потенциальной осуществимости, показало бы не только философскую проницательность, но и методологическую силу объединяющих коннотаций философских результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы проведенного исследования, являясь конкретизацией философского принципа системности в новой концепции обоснования современной математики, в рамках которой эта проблема приобретает новый методологический смысл и дальнейшую философскую перспективу, можно кратко резюмировать в следующих пяти положениях.

Один из возможных путей выхода современной математики из новых кризисов состоит в такой ее перестройке, которая может привести к естественному исключению из математики некоторых искусственных проблем, подобно тому, как это уже было сделано в неклассической геометрии. Философский вывод из этого состоит в том, что в проблеме обоснования математики, по-видимому, не стоит стремиться к совершенству исключительно одной из известных программ обоснования. В этой связи возникает потребность “расширения” философского принципа системности, включения в его содержание новых теоретических идей, генезиса абстрактных математических структур и наиболее плодотворных направлений обоснования математики. Можно также констатировать, что бесперспективность программы логицизма основана на недостаточной ясности абстрактных понятий математики, которую нельзя устранить с помощью сведения математики к логике, что в свою очередь проблематизировало методологические причины обнаруженных в математике парадоксов, оказавшиеся более глубокими, чем это представлялось логицистам.

Преимущественное внимание в проблеме обоснования математики было уделено анализу эвристического потенциала идей формализма и интуиционизма, так как с помощью этих философских направлений изначально была предпринята попытка обосновать в рамках математики непротиворечивость и истинность математических теорий. Затруднения в обосновании математики носили в значительной мере философский характер, хотя зависимость формалистской программы от чисто философских предпосылок является гораздо меньшей, чем, например, зависимость от них интуиционизма, поэтому выход из разногласий этих подходов к обоснованию пришлось искать не в математике, а в рамках общенаучной методологической концепции системного подхода. Необходимость использования философско-методологического анализа в области обоснования современной математики связана с выявлением как внутренних, так и внешних оснований математики. В частности установлено, что в контексте когнитивного релятивизма формирование проблемного поля обоснования математики не должно зависеть от ограниченного фрагмента арифметики, а также логической или предметной очевидности.

Современная математика достигла такого уровня методологической зрелости, что даже инкорпорирует свои методы исследования в анализ собственной структуры, переходя тем самым со стадии экстенсивного роста на новую стадию повторной философской рефлексии. Философский анализ путей обоснования непротиворечивости математических теорий выявил существенность допущений о достоверности используемых в них методов, определяемых существующими тенденциями в философии современной математики. Однако философско-методологическую критику метаматематики нельзя признать полностью корректной, поскольку ни одна математическая теория изначально не является абсолютно непротиворечивой в силу неустранимости латентной неопределенности ее основных объектов и аксиом. Установлено, что теоретические предпосылки философско-методологического анализа в новом подходе к обоснованию современной математики характеризуются также закреплением конструктивного разнообразия математической деятельности.

Выявлено, что критический пересмотр широко распространенных в философской среде воззрений на основания современной математики в пользу одной из действующих программ обоснования можно уподобить кризису научной мысли. В работе показано, как философско-методологический синтез сводит различные направления обоснования математики в целостность, обеспечивая тем самым единство математического знания. Такой подход обусловливает и стимулирует процесс обоснования математики с помощью системного метода анализа математических теорий и синтезом различных методов математического познания, поэтому в философско-методологическом синтезе речь идет о целостном единстве обосновательных программ и оснований математики в эпистемологическом плане. Философско-методологический синтез с помощью системной триады основных направлений обоснования математики, обусловленных деятельностной ориентацией мышления, а именно, формализма – платонизма – интуиционизма, позволяет убедиться в том, что глубокие противоречия в хорошо развитой математической теории маловероятны.

Следует также отметить, что разработка содержательных и формальных средств концептуального развития интегральной программы обоснования современной математики как системное освоение сложных взаимодействий имеет значительный эвристический потенциал. В действительности истоки непротиворечивости математических теорий лежат в ее системности, а реальная локальная непротиворечивость давно сложившейся математической теории обеспечивается генетической связью понятий. Важнейшим выводом проведенного философского исследования является то, что формирование новой философско-методологической концепции обоснования математики учитывает также ее характер как самоорганизующейся системы. Она снимает неоправданные ограничения на принципы метатеории, определяемые в рамках математических критериев непротиворечивости и полноты, и, опираясь на гносеологические критерии системности и целостности, способствует ее конкретизации.

В более широком общефилософском контексте полученные выводы из проведенного философско-методологического анализа проблемы обоснования современной математики можно конкретизировать в виде следующих развернутых положений.

Обращение математиков к философии и методологии происходит в такие периоды, когда требуется новое осмысление разнородного и часто методологически противоречивого накопленного математического материала. Сложившиеся представления о предметах и явлениях материального мира как системных образованиях оказались недостаточными при исследовании особенностей развития математики, а также ее философского обоснования. Для философов математики ориентирами в такой обосновательной деятельности могут служить стабильность, историческая устойчивость и мировоззренческая общность математики. Философско-методологическое обоснование математики необходимо для того, чтобы найти адекватные средства, гарантирующие надежность сверхсложных и труднообозримых современных математических доказательств и возможность использования в них компьютерных вычислений. Методологическая трудность имеющихся программ обоснования математики состоит в определении природы и границ “обосновательного ядра”, включающего не внушающие опасений утверждения и принципы доказательств.

Методы обоснования математики довольно плохо поддаются детальному объяснению на философском уровне, поскольку существуют концептуальные и методологические различия в подходах к их истолкованию и выделению основных смыслов. Несостоятельность логицистской программы обоснования математики, выявившаяся в процессе ее развития, следует из статуса логики как системы понятий, не связанной с идеей бесконечности, и зависимости математики от положений, надежность которых оправдывается за пределами логики. Программы формализма и интуиционизма тоже не дали убедительного рационального оправдания подходов к обоснованию, которые можно было бы взять за основу целостного образа математики. Наличие разных философско-методологических направлений обоснования математики показывает, что ни одно из них не может быть унифицировано. Поэтому на базе новой обосновательной методологии можно попытаться некоторым образом реабилитировать фундаментальное понятие актуально бесконечного, имеющее непосредственное онтологическое обоснование через оправдание некоторой части трансфинитной математики, и практическую целесообразность аксиомы выбора.

Неудачи классических программ обоснования математики явились следствием слабости их философско-методологических предпосылок, о чем говорят и новые кризисы в математике, связанные с переусложненностью современной математики. Но новые кризисы математики не ставят под удар саму математику, а определенные представления о том, какой она должна быть, с точки зрения философии математики, что по существу ведет к неоправданному отождествлению философии математики с самой математикой. Поэтому конечной целью философского анализа проблемы обоснования должен стать естественный синтез различных философско-мировоззренческих традиций, устоявшихся в философии математики, с целью создания интегральной многомерной теоретико-методологической концепции обоснования, так как синтез различных точек зрения, в том числе и ставших достоянием истории математики, обеспечивает развитие математических теорий. Системные соображения, отнесенные к математической теории, могут рассматриваться даже в качестве ее логического обоснования, для оправдания которого следует признать, что надежная дедукция возможна не только на высших уровнях формализации.

Редукционистские надежды на построение единого языка науки в целом не оправдались, хотя в обосновании математики в прошлом веке они были еще довольно сильными. Постгёделевская философия математики теперь ориентирована на открытие новых способов коммуникации знаний, а не редукции одного типа знания к другому, а также на восстановление или реконструкцию ее прежних прочно установившихся традиционных подходов к обоснованию. Так, например, платонистская вера в то, что математические сущности предшествуют математическим исследованиям и озарениям, традиционно основана на невозможности существования математики без абстрактных идеальных объектов, необходимых для математического мышления. Поэтому “умеренный платонизм” можно рассматривать как определенный альянс между философами и математиками с целью поиска методологических оснований интегративных процессов современной философско-математической мысли.

Рациональная реконструкция исторической эволюции гносеологического механизма обоснования математики представляет собой экспликацию предпосылочного знания в аксиоматизации математических теорий, которое не может разрушить дедуктивную природу математического доказательства, хотя и осложняет его обоснование. Рациональные критерии обоснования играют важную методологическую роль в становлении математической строгости и надежности математических теорий. Но отсутствие или неопределенность таких критериев не снижает уровня фактической значимости или строгости теории и не останавливает естественного прогресса математического знания, напротив, обеспечивает возрастание потенциала философии современной математики. Так как в философии нет единой системы методов исследования, то и в философии современной математики отсутствует критерий общезначимости результатов, хотя “границы иррационального” современная математическая наука изучает философскими инструментами рационального.

Привычка обращаться с математическими объектами так, как будто это сущности реального мира, существующие независимо от математиков, является источником методологических затруднений в обосновании новых математических теорий. Они обусловлены тем, что для этого направления в философии математики пока еще нет адекватных онтологических интерпретаций, поэтому формальные описания в системном подходе конструируются так, чтобы математическая реальность хорошо соответствовала содержательным истинам. Исследуемый феномен рационального обоснования математики погружен в более широкий внешний контекст, образуемый феноменом веры и внелогическими способами постижения реальности. В этом, возможно, состоит одна из причин живучести платонизма Гёделя, который непосредственно связан с природой математической деятельности, а именно с процессом отчуждения ее результатов от породившего их ума. Хотя математики и исследуемые ими абстрактные объекты обитают в разных мирах, факт познания идеальных математических объектов налицо, поскольку мы имеем строгие математические теории, которые успешно применяются в естественных науках. Этот аргумент необходимости математики в познании играет существенную роль в защите умеренного платонизма в обосновании современной математики.

В основе концепции структуры современной математической теории лежит фундаментальная дихотомия внешнего и внутреннего ограничения. Трудность выявления основных методологических принципов природы математического знания связана с тем, что процесс синтеза нового сущего в контексте онтологического понимания системы обоснования математики содержит нечто, что не выделяемо из целого при разделении его на части, поскольку речь идет не только о единстве этой совокупности, но и порождаемых ею свойствах. Линейный взгляд на обоснование уже давно не работает в современной математике, что, в частности, убедительно подтверждается гёделевской незавершенностью аксиоматических систем. Поэтому в качестве несущей обосновательной конструкции предлагается использовать синтез работающих направлений обоснования математики, который способствует целостному пониманию математики, несводимому к простой сумме свойств составляющих ее элементов, в силу методологической несуммативности целого. Системный подход, который несравненно более абстрактен, чем логическое обоснование математики, призван эксплицировать соответствующие процедуры обоснования.

Методологические презумпции, на которые опирается анализ программ обоснования математики, ограничиваются рядом базовых принципов на основе системно-методологического подхода, метода сравнительного анализа и когнитивного релятивизма. Поэтому неизбежным этапом познания, следующим за реконструкцией истории обоснования математики, выступает компаративистский подход к этой проблеме, поскольку действующие в математике направления обоснования находились, в принципе, на правильном пути, так как вопреки определенному скептицизму они стремились выявить реальную основу математического мышления. С точки зрения компаративистики, философия математики, сравнивая и сопоставляя традиции формализма и интуиционизма в обосновании, стремится выявить скрытые идеи, входящие в различные комбинации известных философско-методологических программ обоснования математики. Философия трансформирует проблему соотношения современной математики и теоретических конструктов ее обоснования в вопросы, понятийное оформление которых, приводит к различным подходам к обоснованию.

Когнитивный релятивизм в математике выступает как методологический ориентир, что очень важно для формирования познавательного мировоззрения, поскольку в современный период развития математического знания можно выявить совместное сосуществование математических и компьютерных методов, находящихся на различных этапах эволюции. В контексте ведущей линии развития постнеклассической рациональности формирование единого пространства философии математики не должно зависеть только от отдельных направлений обоснования математики. Важным свойством иерархических систем математики является невозможность полной редукции различных направлений обоснования – формализма Гильберта, интуиционизма Брауэра, платонизма Гёделя – к языку более простых уровней, поскольку каждый уровень имеет внутренний предел сложности описания, превысить который невозможно. Обосновательная философия математики требует принципиально другого, более адекватного анализа, соответствующего реальному развитию направлений теоретической и прикладной математики с учетом достижений обширного современного раздела компьютерной математики. Поэтому философское применение идеи дополнительности означает, что вопрос об обоснованности математической теории не должен ставиться в контексте методологических исключений.

Поиски целостного единства программ обоснования невозможно отделить от феномена многообразия знания, поэтому философы математики вынуждены рассматривать разнообразные пути синтеза действующих направлений обоснования, расширяющих горизонты математики. Среди таких подходов можно выделить дихотомию – редукцию и дополнительность. Если редукция стремится свести все многообразие явлений к одной теоретической схеме, то дополнительность пытается сохранить многообразие при поиске объединяющих оснований, придав им новую философскую интерпретацию. Идея редукции всей математики только к чисто теоретической компоненте, а последней к ее аксиоматической и дедуктивной форме, ведет к увеличению разрыва между математикой и ее практическим применением. Так, например, философскую экспликацию фрактальной геометрии и компьютерную визуализацию фракталов можно рассматривать как реальный образец нового современного направления постнеклассической математики, который в контексте системного подхода к обоснованию современной математики гносеологически осуществляется на определенных основаниях философско-методологического синтеза в составе хорошо известной математической триады “дискретность – непрерывность– фрактальность”.

Следует отметить, что пока системный подход в обосновании современной математики не обрел строгой формы методологической системы, эта философская задача не может пока рассматриваться в отрыве от общефилософских проблем теории познания. Методологическая идея системного обоснования математической теории состоит в том, чтобы теоретическую констатацию ее гносеологической завершенности связать со свойством ее непротиворечивости. Заметим, что системный подход опирается непосредственно на качественные признаки обоснования непротиворечивости содержательных аксиоматических систем, которые, вообще говоря, неприемлемы для логического обоснования. Поэтому новая концепция обоснования современной математики является по сути гносеологической, так как содержит в качестве необходимого компонента как допущение о достоверности используемых в ней методов логического анализа, так и гносеологические предпосылки, определяющие исходный понятийный базис обосновательной процедуры.

Установлено, что если смягчить доктринерские элементы программы обоснования Гильберта, то в теории доказательств потребуются не только результаты о непротиворечивости, но и новые подходы к расширению методологических принципов программ обоснования, способных объяснить естественность различий современных метаматематических исследований. Логическая невозможность обоснования непротиворечивости отдельных математических теорий, в силу гёделевских результатов о неполноте, не означает, что они противоречивы или проявят противоречивость в своем дальнейшем развитии. Но поскольку математическая истина не должна подчиняться никакому общественно-зависимому критерию, то в таком контексте можно отдать предпочтение платонистской точке зрения, согласно которой математическая истина абсолютна и вечна. С прагматической точки зрения, современная математика вполне достаточно, хотя и не абсолютно, обосновывается своими приложениями, поскольку научное знание тоже имеет свои пределы философско-математического познания. В частности, недооценка механизмов самоорганизации математики состоит в неадекватном понимании математических теорий, способных к дальнейшему развитию на пути приобретения корректности понятий и надежности своих практических методов.

Анализ истории развития математики показал, что в методологическом споре направлений формализма Гильберта и интуиционизма Брауэра не оказалось победителя, точнее конструктивная и теоретико-множественная математика хорошо дополняют друг друга. Эта бинарная оппозиция и есть элементарная структура обоснования, но для синтеза требуется более емкая структура, простейшей из которых является системная триада, фиксирующая начало синтеза и соединяющая воедино противоположные начала. Системная триада, необходимая для синтеза, становится достаточной, если удается скомпоновать реальные факторы обоснования. Между диадой и триадой существует преемственность, так как новый подход к решению проблемы обоснования математики не приводит к полному отказу от философских представлений и методологических установок предшествующего этапа, сохраняя идеалы и нормы математического знания, а также ее “непостижимой эффективности”. Новая философская концепция обоснования современной математики характеризуется особым, свойственным лишь ей методологическим основанием, позволяющим исследовать структуру различных математических теорий как саморазвивающихся систем.

Одно из проявлений философской рефлексии состоит в принятии новой организующей идеи или новой интерпретации уже существующих направлений, позволяющих построить более обстоятельную схему для решения проблемы обоснования математики. Разработка философско-методологического синтеза на основе системной триады “формализм – платонизм – интуиционизм”, как нового научного направления в философии математики, выражает реальный процесс движения математического познания от исследования обоснования через части к постижению единства многообразия: его целостности и его множественности, реализуемой в обширном по тематике разделе компьютерной математики. Такой процесс протекает и внутри самой современной математики с учетом определенных отклонений, вызванных новой проблемой переусложненности математических текстов и использованием современных компьютеров в математических доказательствах.

Исходным пунктом новой концепции обоснования математики стало объединение философских основ математических идеализаций и методов логического оперирования с ними, исходя из факта особой достоверности современной математики и неправомерности отождествления ее с опытными науками. Методологическое новшество проведенного исследования состоит в конкретизации философского принципа системности для формальных систем обоснования современной математики. Концептуальное развитие проблемы обоснования современной математики на основе проведенного исследования связано с таким пониманием доминирующего статуса математических моделей реальности, который снимает в рамках математических критериев неоправданные ограничения на программу обоснования. Опираясь на гносеологические критерии, можно также утверждать, что ведущая сила нового тринитарного мышления, преодолевающего традиционный философский монизм и бинаризм, – это реальный результат осмысления совокупного современного математического опыта.

Общую философскую концепцию тринитарной методологии можно использовать при углублении философии математики, опирающейся на современные представления о природе математического знания, которые раскрывают различные аспекты математической реальности, не выявляя при этом никаких существенных противоречий. Подведем, наконец, основной итог проведенного исследования, состоящий в том, что базовой структурой нового разработанного направления является системная триада, реализуемая в синтезе основных направлений: формализм Гильберта, интуиционизм Брауэра, платонизм Гёделя, которая перестраивает структуру обоснования современной математики. Предыдущие попытки обоснования математики лежат в разных философских плоскостях, поэтому наиболее характерные отличия предлагаемой концепции обоснования связаны с ответами, отчасти устраняющими неопределенность, присутствующую в следующих пяти вопросах.

Первый вопрос: “Что представляет собой эта новая целостность?”. Проведенный философский анализ показывает, что это системная целостность. Являясь сложнейшим структурным образованием, концепции обоснования современной математики характеризуется единством, системностью и целостностью. Системность обосновательных процедур означает, что они выступают неким связным неразрывным целым. После различных попыток внутриматематического обоснования в процессе становления теорий в философии математики формируется новая функция математической теории – системной целостности, то есть такой ее организованности, которая, дифференцируясь в процессе саморазвития математических теорий, порождает новые состояния в соответствии с методологическими запросами и философскими проблемами современной математики. Сложность этого философского понятия состоит в том, что в целостной системе методологии математики системный подход к обоснованию является одним из ведущих философских принципов интеграции современного математического знания, хотя реконструкция реальной системности объектов, их многоуровневая взаимосвязь и целесообразность далеко не всегда являются столь уж очевидным философско-математическим фактом.

Второй вопрос: "Каково ее качественное своеобразие?". Ее качественное своеобразие заключается в отказе от полноты. Что касается полноты, то следует заметить, что она фактически достигается только на некоторых математических моделях. Если иметь в виду целостность программ обоснования, то придется признать, что стремление к полноте – это все же стратегия философско-методологического поиска в рамках прежней обосновательной парадигмы. При достижении полноты описания формальной системы она останавливается в своем развитии. Согласно основной гипотезе этого исследования, целостность программы обоснования современной математики эксплицируется при динамическом балансе философско-методологических компонент системной триады направлений обоснования математики. Стремясь к целостности, иногда приходится отказываться от полноты, поскольку чрезмерное усиление или ослабление отдельных компонент разрушает целое. Это общая тенденция в философии науки, поскольку в философии и методологии науки идет смена идеала, то есть речь идет о переходе к целостности как более фундаментальному понятию, чем полнота. Формальные описания различных сторон исследуемых теоретических моделей в таком контексте становятся важнейшими этапами на пути рационального постижения целостных объектов. Поскольку формализация допускает не вполне формализуемые теории, то целостность программы обоснования, когда она не входит в конфликт с имеющимся математическим опытом, характеризует их лучше, чем полнота.

Третий вопрос: "Что представляет собой ее внутренняя структура?". Внутренняя структура описывается системной триадой. Переход к философско-методологическому синтезу меняет всю структуру программ обоснования современной математики. Системная триада в методологическом плане является структурной опорой направлений обоснования математики. Следует заметить, что даже само определение системного подхода, выявляющего сложность и многозначность этого понятия, базируется на таком единстве, как "элементарность – связность – целостность". Поэтому убедительность обоснования математической теории зачастую обеспечивается третьим членом системной триады, соединяющим бинарную оппозицию в реально функционирующий комплекс. При таком философско-методологическом подходе, связанном с идеей триадичности, реализуется стремление к целостности программы обоснования математики, поскольку системные триады характеризуются тем, что системная целостность создается тремя элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других. Системная триада, реализующая философскую тринитарную методологию, может послужить базовой структурой целостностного подхода к программе обоснования математики.

Четвертый вопрос: "Каковы специфические закономерности функционирования и развития этой целостности?". Специфические закономерности состоят в дополнительности направлений обоснования современной математики. Логическая экспликация дополнительности в рассматриваемой триаде предполагает переход от дополнительности, как отношению между линейными составляющими триады, к дополнительности, как отношению между высказываниями о сущности этих понятий. Можно предположить, что именно принцип дополнительности Бора развивает гипотезу Демокрита о связи непрерывного и дискретного и дополняет тезис Гегеля о единстве и борьбе противоположностей. Именно такой подход реализуется в системном синтезе направлений обоснования математики. Поэтому, вполне естественно, что для целостного подхода к обоснованию математики необходимо несколько дополнительных друг к другу направлений обоснования. В традиционной парадигме математические структуры рассматриваются с точки зрения таких дихотомических оппозиций, как дискретное – непрерывное, конечное – бесконечное, формальное – реальное и других. Дополнительность сторон этих оппозиций способствует формированию методологически значимой третьей компоненты, обеспечивающей целостность в контексте тринитарной методологии познания.

Пятый вопрос: "Что является фактором, органически соединяющим основные направления математики в целостность?". Это единство математики, механизмы самообоснования математики и трактовка математики как универсального понятийного средства. Основная особенность математики состоит в том, что она развивается отчасти автономно, поскольку как развивающаяся сложная система она подобна самоорганизующимся системам. Это в свою очередь способствует процессу самообоснования математической теории, который за конечное число шагов доводит содержательную теорию до логического совершенства, достаточным признаком которого служит стабилизация ее аксиоматического основания. Недооценка механизмов самообоснования математики, состоит в недостаточном понимании того факта, что математическая теория, способная к развитию, обречена на приобретение полной корректности своих основных понятий и полной надежности связанных с ними принципов. Заметим, что принцип целостности концепции обоснования вытекает не из ее единства и качественного многообразия, а наоборот, обе эти характеристики вытекают из ее самоорганизации. Такая самоорганизация математических теорий становится в контексте обоснования предпочтительнее внешней организации. С точки зрения целесообразности, самообоснование математических теорий и поддержание структурной целостности современной математики обеспечивается равномерностью функционирования всех ее составных частей.

В таком философском контексте важное практическое и теоретическое значение имеют выявленные в монографии закономерности, раскрывающие эвристический потенциал системного подхода в обосновании современной математики. Можно заключить, что наиболее плодотворная концепция обоснования не отменяет предшествующие программы, а органично синтезирует их, объединяя лучшее в обосновании и экспликации математического знания.

ЛИТЕРАТУРА
Список использованных источников

1. Агацци, Э. Переосмысление философии науки сегодня / Э. Агацци // Вопросы философии. – 2009. – № 1. – С. 40–52.

2. Агошкова, Е.Б. Эволюция понятия системы / Е.Б. Агошкова, Б.В. Ахлибинский // Вопросы философии. – 1998. – № 7. – С. 170–178.

3. Агошкова, Е.Б. Категория “система” в современном мышлении / Е.Б. Агошкова // Вопросы философии. – 2009. – № 4. – С. 57–71.

4. Адян, С.И. Предисловие редактора русского перевода / С.И. Адян // Основания математики / Д. Гильберт, П. Бернайс. – М.: Наука, 1982. – С. 11–16.

5. Акоф, Р.Л. Системы, организации и междисциплинарные исследования / Р.Л. Акоф // Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. – С. 143–164.

6. Александров, А.Д. Математика / А.Д. Александров // Философская энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1964. – Т. 3. – С. 329–335.

7. Александров, А.Д. Математика и диалектика / А.Д. Александров // Сибирский математический журнал. – 1970. – Т. 11, № 2. – С. 243–263.

8. Александров, А.Д. Наука наших дней / А.Д. Александров // Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. – М.: Наука, 2002. – С. 321–332.

9. Алексеев, И.С. Концепция дополнительности: Историко-методологический анализ / И.С. Алексеев. – М.: Наука, 1978. – 276 с.

10. Анисов, А.М. ЭВМ и понимание математических доказательств / А.М. Анисов // Вопросы философии. – 1987. – № 3. – С. 29–40.

11. Аносов, Д.В. Взгляд на математику и нечто из нее / Д.В. Аносов. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.

12. Аносов, Д.В. От Ньютона к Кеплеру / Д.В. Аносов. – М.: МЦНМО, 2006. – 272 с.

13. Аносов, Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем / Д.В. Аносов. – М.: МЦНМО, 2008. – 200 с.

14. Арепьев, Е.И. Аналитическая философия математики / Е.И. Арепьев. – 2-е изд., доп. – Курск: Изд-во КГПУ, 2003. – 191 с.

15. Арепьев, Е.И. Домножественная реалистическая интерпретация онто-гносеологических основ математики / Е.И. Арепьев // Вопросы философии. – 2010. – № 7. – С. 82–92.

16. Аристотель. Метафизика / Аристотель. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1999. – 608 с.

17. Арнольд, В.И. Математика с человеческим лицом / В.И. Арнольд // Природа. – 1988. – № 3. – С. 117–119.

18. Арнольд, В.И. И.Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, Вып. 4. – С. 197–207.

19. Арнольд, В.И. Что такое математика? / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2004. – 104 с.

20. Арнольд, В.И. А.Н. Колмогоров и естествознание / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. – 2004. – Т. 59, Вып. 1. – С. 25–44.

21. Арнольд, В.И. “Жесткие” и “мягкие” математические модели / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2004. – 32 с.

22. Арнольд, В.И. Недооцененный Пуанкаре / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. – 2006. – Т. 61, Вып. 1. – С. 3–24.

23. Арнольд, В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2006. – 120 с.

24. Арсенов, О.О. Георгий Перельман и гипотеза Пуанкаре / Олег Арсенов. – М.: Эксмо, 2010. – 256 с.

25. Аршинов, В.И. Синергетика как феномен постнеклассической науки / В.И. Аршинов. – М.: ИФ РАН, 1999. – 200 с.

26. Аршинов, В.И. Синергетическое знание: между сетью и принципами / В.И. Аршинов, В.Э. Войцехович // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. – М.: Прогресс–Традиция, 2000. – С. 107–120.

27. Архангельский, А.В. О сущности математики и фундаментальных математических структурах / А.В. Архангельский // История и методология естественных наук. Математика, механика. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – Вып. 32. – С. 14–29.

28. Бажанов, В.А. Диалектические основания творчества И. Лакатоса / В.А. Бажанов // Вопросы философии. – 2008. – № 9. – С. 147–157.

29. Баксанский, О.Е. Физика и математика: Анализ оснований взаимоотношения. Методология современного естествознания: Учебное пособие / О.Е. Баксанский. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 184 с.

30. Банах, С. Теория линейных операций / С. Банах. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 272 с.

31. Барабашев, А.Г. Будущее математики: Методологические аспекты прогнозирования / А.Г. Барабашев. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 160 с.

32. Баранцев, Р.Г. Системные триады и классификация / Р.Г. Баранцев // Теория и методология биологических классификаций. – М.: Наука, 1983. – С. 81–89.

33. Баранцев, Р.Г. Системная триада – структурная ячейка синтеза / Р.Г. Баранцев // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1988. – М.: Наука, 1989. – С. 193–209.

34. Баранцев, Р.Г. Имманентные проблемы синергетики / Р.Г. Баранцев // Вопросы философии. – 2002. – № 9. – С. 91–101.

35. Баранцев, Р.Г. Синергетика в современном естествознании / Р.Г. Баранцев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.

36. Баранцев, Р.Г. Становление тринитарного мышления / Р.Г. Баранцев. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. – 124 с.

37. Барроу, Д. Новые теории всего / Джон Барроу. – Минск: Попурри, 2012. – 368 с.

38. Батурин, В.К. Философия науки: Учебное пособие / В.К. Батурин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 303 с.

39. Белоусов, А.И. Гегелевская конструкция противоречия в контексте проблемы “Математика и опыт” / А.И. Белоусов // Математика и опыт. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 467–499.

40. Белоцерковский, О.М. Математическое моделирование на суперкомпьютерах (опыт и тенденции) / О.М. Белоцерковский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 8. – С. 1221–1236.

41. Беляев, Е.А. Философские и методологические проблемы математики / Е.А. Беляев, В.Я. Перминов. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 215 с.

42. Белякин, Н.В. Об основных критериях убедительности доказательства / Н.В. Белякин, Е.М. Черепанов // Философия науки. – 2010. – № 3. – С. 31–44.

43. Бернайс, П. О платонизме в математике / Пауль Бернайс // Платон-математик. – М.: Голос, 2011. – С. 259–275.

44. Берталанфи, фон Л. Общая теория систем – критический обзор / Л. фон Берталанфи // Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. – С. 23–82.

45. Берталанфи, фон Л. История и статус общей теории систем / Л. фон Берталанфи // Системные исследования. Ежегодник 1973. – М.: Наука, 1973. – С. 20–37.

46. Билялов, А.К. Об определении категорий “основа” и “обоснованное” / А.К. Билялов // Философские науки. – 1976. – № 5. – С. 140–144.

47. Бирюков, Б.В. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики / Б.В. Бирюков, В.Н. Тростников. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с.

48. Бирюков, Б.В. Синтез знания и формализация / Б.В. Бирюков // Синтез современного научного знания. – М.: Наука, 1973. – С. 447–474.

49. Бирюков, Б.В. Философско-логические основания математики в культурологическом аспекте: исторические судьбы древних контроверз точного мышления / Б.В. Бирюков, Л.Г. Бирюкова // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 2001. – № 5. – С. 70–83.

50. Блауберг, И.В. Понятие целостности и его роль в научном познании / И.В. Блауберг, Б.Г. Юдин. – М.: Знание, 1972. – 48 с.

51. Блауберг, И.В. Становление и сущность системного подхода / И.В. Блауберг, Э.Г. Юдин. – М.: Наука, 1973. – 270 с.

52. Блауберг, И.В. Философский принцип системности и системный подход / И.В. Блауберг, В.Н. Садовский, Б.Г. Юдин // Вопросы философии. – 1978. – № 8. – С. 39–52.

53. Блауберг, И.В. Проблема целостности и системный подход / И.В. Блауберг. – М.: Едиториал УРСС, 1997. – 448 с.

54. Блехман, И.И. Правдоподобность и доказательность в прикладной математике / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко // Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 196–202.

55. Блехман, И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 269 с.

56. Блехман, И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1983. – 328 с.

57. Богатых, Б.А. Принципы фрактальной геометрии и проблемы эволюционного процесса / Б.А. Богатых // Системный подход в современной науке. – М.: Прогресс–Традиция, 2004. – С. 509–520.

58. Болибрух, А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя) / А.А. Болибрух. – М.: МЦНМО, 1999. – 24 с.

59. Бор, Н. Математика и естествознание / Н. Бор // Избранные научные труды: в 2 т. / Н. Бор. – М.: Наука, 1971. – Т. 2. – С. 497–503.

60. Бор, Н. О понятиях причинности и дополнительности / Н. Бор // Избранные научные труды: в 2 т. / Н. Бор. – М.: Наука, 1971. – Т. 2. – С. 391–398.

61. Босс, В. Интуиция и математика / В. Босс. – М.: Айрис–пресс, 2003. – 192 с.

62. Босс, В. Лекции по математике. Т. 12: Контрпримеры и парадоксы: Учебное пособие / В. Босс. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 216 с.

63. Браун, Дж.Р. Может ли математика объяснять? / Дж.Р. Браун // Эпистемология и философия науки. – 2009. – Т. XIX, № 1. – С. 16–32.

64. Брауэр, Л.Э.Я. Математика, наука и язык / Л.Э.Я. Брауэр // Вестник РГГУ. Серия “Философия. Социология”. – 2010. – № 13. – С. 249–258.

65. Брюшинкин, В.Н. Достоинства и недостатки логического подхода к моделированию аргументации / В.Н. Брюшинкин // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Серия гуманитарные науки. – 2010. – Вып. 12. – С. 96–105.

66. Бугаев, Н.В. Математика и научно-философское миросозерцание / Н.В. Бугаев // Философская и социологическая мысль. – 1989. – № 5. – С. 85–93.

67. Буданов, В.Г. О методологии синергетики / В.Г. Буданов // Вопросы философии. – 2006. – № 5. – С. 79–94.

68. Буданов, В.Г. Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании / В.Г. Буданов. – 3-е изд., доп. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 240 с.

69. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 292 с.

70. Быкова, М.Ф. Гегелевское понимание мышления / М.Ф. Быкова; отв. ред. Н.В. Мотрошилова. – М.: Наука, 1990. – 126 с.

71. Бычков, С.Н. Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) / С.Н. Бычков, Е.А. Зайцев, Л.О. Шашкин // Историко-математические исследования. Вторая серия. – М.: Янус-К, 1999. – Вып. 4. – С. 303–324.

72. Бычков, С.Н. Математика в историческом измерении / С.Н. Бычков // Вопросы истории естествознания и техники. – 2003. – № 3. – С. 95–110.

73. Бычков, С.Н. Математика в мировой культуре: Учебное пособие / С.Н. Бычков, Е.А. Зайцев. – М.: РГГУ, 2006. – 228 с.

74. Бычков, С.Н. “Греческое чудо” и теоретическая математика / С.Н. Бычков. – М.: Издательский центр РГГУ, 2007. – 192 с.

75. Бычков, С.Н. Генезис теоретической математики как историко-научная и историко-философская проблема: автореф. дис. … д-ра филос. наук: 09.00.08 / С.Н. Бычков; МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 2008. – 41 с.

76. Валянский, С.И. Физические основы самоорганизации / С.И. Валянский, С.В. Илларионов // Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления. – М.: ИФ РАН, 1994. – С. 306–325.

77. Ван, Х. Процесс и существование в математике / Ван Хао // Математическая логика и ее применение. – М.: Мир, 1965. – С. 315–339.

78. Вейль, Г. О философии математики: сборник работ / Герман Вейль. – М.-Л.: ГТТИ, 1934. – 128 с.

79. Вейль, Г. Полвека математики / Герман Вейль. – М.: Знание, 1969. – 47 с.

80. Вейль, Г. Структура математики / Г. Вейль // Успехи математических наук. – 1976. – Т. 31, Вып. 4. – С. 220–237.

81. Вейль, Г. Математическое мышление: сборник / Герман Вейль. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

82. Вейценбаум, Дж. Возможности вычислительных машин и человеческий разум. От суждений к вычислениям / Джозеф Вейценбаум. – М.: Радио и связь, 1982. – 368 с.

83. Венцель, Е.С. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе / Е.С. Венцель // Математики о математике: Сборник статей. – М.: Знание, 1982. – С. 37–55.

84. Вечтомов, Е.М. Философия математики / Е.М. Вечтомов. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – 192 с.

85. Вечтомов, Е.М. Метафизика математики / Е.М. Вечтомов. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

86. Вигнер, Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Е. Вигнер // Успехи физических наук. – 1968. – Т. 94, Вып. 3. – С. 535–546.

87. Визгин, Вл.П. Н. Бор о взаимосвязи физики и математики / Вл.П. Визгин // Нильс Бор и наука XX века: Сборник научных трудов. – Киев: Наукова думка, 1988. – С. 138–144.

88. Виленкин, Н.Я. Тайны бесконечности (Зенон, Демокрит, Архимед) / Н.Я. Виленкин // Квант. – 1970. – № 3. – С. 3–13.

89. Витгенштейн, Л. Философские работы. Часть 1 / Л. Витгенштейн. – М.: Гнозис, 1994. – 612 с.

90. Витгенштейн, Л. Философские работы. Часть 2. Кн. 1 / Л. Витгенштейн. – М.: Гнозис, 1994. – 207 с.

91. Витгенштейн, Л. Дневники 1914–1916 / Л. Витгенштейн; под общ. ред. В.А. Суровцева. – М.: “Канон+”, 2009. – 400 с.

92. Вишневский, М.И. Философский синтез как мировоззренческая основа образования: монография / М.И. Вишневский. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 1999. – 252 с.
93. Владимиров, В. Тенденции развития современной математики / В. Владимиров, Л. Фаддеев // Коммунист. – 1988. – № 12. – С. 95–103.
94. Воеводин, В.В. Отображение проблемы вычислительной математики на архитектуру вычислительных систем / В.В. Воеводин // Вычислительные методы и программирование. – 2000. – Т. 1. – С. 37–44.
95. Воеводин, В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов / В.В. Воеводин. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 112 с.
96. Войцехович, В.Э. Математическое познание: от гипотезы к теории: Методологический анализ математического познания как метаисследование / В.Э. Войцехович. – Минск: Университетское, 1984. – 144 с.
97. Войцехович, В.Э. Становление и развитие математической теории / В.Э. Войцехович // Философские науки. – 1990. – № 12. – С. 93–100.
98. Войцехович, В.Э. Становление математической теории (философско-методологический анализ): автореф. дис. … д-ра филос. наук: 09.00.01 / В.Э. Войцехович; Институт философии РАН. – М., 1992. – 29 с.
99. Войцехович, В.Э. Господствующие стили математического мышления / В.Э. Войцехович // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 495–505.
100. Володарский, А.И. О единстве математики в период ее зарождения / А.И. Володарский // История и методология естественных наук. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – Вып. 32. Математика, механика. – С. 75–80.
101. Володин, И.А. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы / И.А. Володин, В.Е. Кузнецов, А.Т. Фоменко // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, № 5. – С. 71–168.
102. Вопенка, П. Математика в альтернативной теории множеств / Петр Вопенка. – М.: Мир, 1983. – 152 с.
103. Гайденко, П. История греческой философии и ее связи с наукой: Учебное пособие для вузов / П. Гайденко. – М.: ПЕРСЭ; СПб.: Университетская книга, 2000. – 319 с.
104. Гараедаги, Дж. Системное мышление: Как управлять хаосом и сложными процессами / Джамшид Гараедаги. – Минск: Гревцов Букс, 2010. – 480 с.
105. Гегель, Г.В.Ф. Наука логики / Г.В.Ф. Гегель. – М.: Мысль, 1998. – (Классическая философская мысль). – 1072 с.
106. Гейтинг, А. Интуиционизм. Введение / Аренд Гейтинг; под ред. и с коммент. А.А. Маркова. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
107. Генцен, Г. Непротиворечивость чистой теории чисел / Г. Генцен // Математическая теория логического вывода. – М.: Наука, 1967. – С. 77–153.
108. Герасимова, И.А. Принцип двойственности в когнитивных практиках / И.А. Герасимова // Вопросы философии. – 2006. – № 3. – С. 90–101.

109. Гёдель, К. Об одном ещё не использованном расширении финитной точки зрения / К. Гёдель // Математическая теория логического вывода. – М.: Наука, 1967. – С. 299–304.

110. Гёдель, К. Расселовская математическая логика / К. Гёдель // Введение в математическую философию / Б. Рассел. – М.: Гнозис, 1996. – С. 205–232.

111. Гильберт, Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 492 с.

112. Гильберт, Д. Основания математики. Теория доказательств / Д. Гильберт, П. Бернайс. – М.: Наука, 1982. – 651 с.

113. Гильберт, Д. Избранные труды: в 2 т. / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – Т. I: Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. – 575 с.

114. Гильберт, Д. Избранные труды: в 2 т. / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – Т. II: Анализ. Физика. Проблемы. Personalia. – 608 с.

115. Гнеденко, Б.В. Математика и научное познание / Б.В. Гнеденко. – М.: Знание, 1983. – 64 с.

116. Голдберг, Д. Вселенная. Руководство по эксплуатации. Как выжить среди черных дыр, временных парадоксов и квантовой неопределенности / Дэйв Голдберг, Джефф Бломквист. – М.: АСТ, 2010. – 416 с.

117. Гончаров, С.С. Введение в логику и методологию науки / С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1994. – 256 с.

118. Горенстейн, Д. Грандиозная теорема / Д. Горенстейн // В мире науки. – 1986. – № 2. – С. 62–74.

119. Григорян, А.А. Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей: философско-методологический анализ / А.А. Григорян. – М.: Едито-риал УРСС, 2004. – 120 с.

120. Григорян, А.А. Социокультурные и метафизические круги и их преодоление в развитии математики / А.А. Григорян // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 353–374.

121. Грин, Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории / Б. Грин. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 288 с.

122. Гротендик, А. Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика / Александр Гротендик. – Ижевск: Удмуртский университет, 1999. – 288 с.

123. Губин, В.Б. О связи стилей математического и физического мышления с природой задач математики и физики / В.Б. Губин // Вопросы философии. – 1998. – № 11. – С. 142–148.

124. Гуссерль, Э. Начало геометрии. Введение Жака Деррида / Эдмунд Гуссерль. – М.: Изд-во Ad Marginem, 1996. – 268 с.

125. Гутнер, Г. Категории модальности и математическое существование / Г. Гутнер // Вопросы философии. – 1998. – № 9. – С. 120–137.

126. Гутнер, Г.Б. Неявное знание и новизна в математике / Г.Б. Гутнер // Эпистемология и философия науки. – 2008. – Т. XV, № 1. – С. 117–123.

127. Гутнер, Г.Б. Способы конституирования идеального предмета / Г.Б. Гутнер // Эпистемология и философия науки. – 2011. – Т. XXIX, № 3. – С. 49–56.

128. Дайсон, Ф.Дж. Математика в физических науках / Ф.Дж. Дайсон // Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – С. 111–127.

129. Данилов, Ю.А. Красота фракталов / Ю.А. Данилов // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. – М.: Прогресс–Традиция, 2000. – С. 186–190.

130. Данциг, Т. Числа – язык науки / Тобиас Данциг. – М.: Техносфера, 2008. – 304 с.

131. Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа / Р. Дедекинд. – 5-е изд. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 48 с.

132. Демидов, С.С. Проблемы Гильберта / С.С. Демидов. – М.: Знание, 1969. – 32 с.

133. Демидов, С.С. “Проблемы” Д. Гильберта и математика XX века / С.С. Демидов // Математика и практика. Математика и культура. – М.: Самообразование, 2000. – С. 12–26.

134. Демидов, С.С. Контроверза “реализм – конструктивизм” и вопрос о прогрессе математики / С.С. Демидов // Проблема знания в истории науки и культуры. – СПб.: Алетейя, 2001. – С. 142–154.

135. Демуцкий, В.П. Концептуальные вопросы квантовой механики / В.П. Демуцкий, Р.В. Половин // Успехи физических наук. – 1992. – Т. 162, № 10. – С. 93–180.

136. Доддс, Э.Р. Греки и иррациональное / Э.Р. Доддс. – СПб.: Алетейя, 2000. – 507 с.

137. Дойч, Д. Структура реальности / Д. Дойч. – М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 400 с.

138. Драгалин, А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств / А.Г. Драгалин. – М.: Наука, 1979. – 256 с.

139. Дьедонне, Ж. Современное развитие математики / Ж. Дьедонне // Математика: периодический сборник переводов иностранных статей. – 1966. – Т. 10, № 3. – С. 3–11.

140. Дьедонне, Ж. О прогрессе математики / Ж. Дьедонне // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1976. – Вып. 21. – С. 9–21.

141. Дьюдни, А.К. Получение изображений самых сложных математических объектов с помощью компьютера-микроскопа / А.К. Дьюдни // В мире науки. – 1985. – № 10. – С. 80–87.

142. Дьюдни, А.К. Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа / А.К. Дьюдни // В мире науки. – 1988. – № 1. – С. 88–93.

143. Егоров, А.Д. Возникновение: Опыт построения парадигмы / А.Д. Егоров, И.Д. Егоров. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2007. – 128 с.

144. Егоров, А.Д. Феномен возникновения: От реальности к смыслу / А.Д. Егоров, И.Д. Егоров. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2009. – 512 с.

145. Егоров, А.Д. Пространство возникновения: Введение в геометрию сознания / А.Д. Егоров, И.Д. Егоров. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012. – 192 с.

146. Еровенко, В.А. Математика и философия: чувство онтологического одиночества / В.А. Еровенко, Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2008. – № 2. – С. 3–10.

147. Еровенко, В.А. “Символ философской простоты”, или Почему для натуральных чисел справедливы законы арифметики? / В.А. Еровенко, Н.Б. Яблонская // Философия и социальные науки. – 2009. – № 3. – С. 60–67.

148. Еровенко, В.А. Закон тройного понимания в эпоху гуманитарного полуобразования / В.А. Еровенко // Педагогика. – 2010. – № 9. – С. 65–72.

149. Еровенко, В.А. Аксиоматический путь – начало или конец понимаемой математики? / В.А. Еровенко, О.В. Гулина // Адукацыя і выхаванне. – 2011. – № 2. – С. 37–45.

150. Еровенко, В.А. “Расширение методологического горизонта”, или философская сущность принципа математической индукции / В.А. Еровенко, М.В. Мартон // Философия и социальные науки. – 2012. – № 1/2. – С. 45–52.

151. Ершов, А.П. Методологические предпосылки продуктивного диалога с ЭВМ на естественном языке / А.П. Ершов // Вопросы философии. – 1981. – № 8. – С. 109–119.

152. Ершов, Ю.Л. Некоторые вопросы применения формализованных языков для исследования философских проблем / Ю.Л. Ершов // Методологические проблемы математики. – Новосибирск: Наука, 1979. – С. 83–89.

153. Есенин-Вольпин, А.С. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении / А.С. Есенин-Вольпин // Вопросы философии. – 1996. – № 8. – С. 100–136.

154. Жуков, Н.И. Философские основания математики: Учебное пособие / Н.И. Жуков. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Университетское, 1990. – 109 с.

155. Журавлев, Ю.И. Фундаментально-математический и общекультурный аспекты школьной информатики / Ю.И. Журавлев // Вопросы образования. – 2005. – № 3. – С. 192–200.

156. Зеленков, А.И. Синергетический стиль мышления и перспективы пластичной рациональности / А.И. Зеленков // Философия и социальные науки. – 2010. – № 1. – С. 30–35.

157. Зенкин, А.А. Ошибка Георга Кантора / А.А. Зенкин // Вопросы философии. – 2000. – № 2. – С. 165–168.

158. Зенкин, А.А. Infinitum Actu Non Datur / А.А. Зенкин // Вопросы философии. – 2001. – № 9. – С. 157–169.

159. Зенкин, А.А. Априорные логические суждения с нулевой онтологией / А.А. Зенкин // Математика и опыт. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 423–434.

160. Иванова, А.Е. Математические основы теории систем: Учебное пособие / А.Е. Иванова. – М.: МГУП, 2009. – 196 с.
161. Ильин, В.В. Классика – неклассика – неонеклассика: три эпохи в развитии науки / В.В. Ильин // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 1993. – № 2. – С. 16–34.
162. Каган, М.С. О системном подходе к системному подходу / М.С. Каган // Философские науки. – 1973. – № 6. – С. 34–42.
163. Каганов, М.И. Абстракция в математике и физике / М.И. Каганов, Г.Я. Любарский. – М.: Физматлит, 2005. – 352 с.
164. Канке, В.А. Философия математики, физики, химии, биологии: Учебное пособие / В.А. Канке. – М.: КНОРУС, 2011. – 368 с.
165. Кант, И. Трактаты / Иммануил Кант. – СПб.: Наука, 1996. – 552 с.
166. Кант, И. Критика чистого разума / Иммануил Кант. – Симферополь: Реноме, 1998. – 528 с.
167. Кант, И. Из рукописного наследия / И. Кант. – М.: Прогресс–Традиция, 2000. – 752 с.
168. Кантор, Г. Труды по теории множеств / Г. Кантор. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
169. Кантор, Г. Основы общего учения о многообразиях / Г. Кантор // Парадоксы бесконечного. – Минск: Изд. В.П. Ильин, 2000. – С. 301–365.
170. Капица, С.П. Синергетика и прогнозы будущего / С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. – М.: Наука, 1997. – 285 с.
171. Карако, П.С. Категории целое и часть в курсе философии / П.С. Карако // Веснік БДУ. Сер 3. – 1995. – № 1. – С. 59–62.
172. Каратеев, В.П. Единство, интеграция, синтез научного знания / В.П. Каратеев. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1987. – 174 с.
173. Карри, Х. Основания математической логики / Хаскелл Карри. – М.: Мир, 1969. – 568 с.
174. Карпенко, А.С. Логика на рубеже тысячелетий / А.С. Карпенко // Логические исследования. – М.: Наука, 2000. – Вып. 7. – С. 7–60.
175. Карпунин, В.А. Формальное и интуитивное в математическом познании / В.А. Карпунин. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 151 с.
176. Карпунин, В.А. Понятие математической точности: соотношение логической строгости и интуитивной ясности / В.А. Карпунин // Логико-философские штудии: Межвузовский сборник. – СПб.: Изд-во С-Петербургского ун-та, 2001. – С. 59–73.
177. Кассирер, Э. Познание и действительность. Понятие субстанции и понятие функции / Эрнст Кассирер. – М.: ИТДГК "Гнозис", 2006. – 400 с.
178. Катасонов, В.Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора / В.Н. Катасонов. – М.: Мартис, 1999. – 207 с.
179. Катасонов, В.Н. Метафизическая математика XVII века / В.Н. Катасонов. – 2-е изд. – М.: ЛИБРОКОМ, 2011. – 144 с.

180. Катречко, С.Л. Трансцендентальная философия математики / С.Л. Катречко // Вестник Московского университета. Сер. 7. Философия. – 2008. – № 2. – С. 88–105.

181. Кац, М. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы / М. Кац, С. Улам.– М.: Мир, 1971. – 251 с.

182. Кедровский, О.И. Методологические проблемы развития математического познания / О.И. Кедровский. – Киев: Вища школа, 1977. – 230 с.

183. Кедровский, О.И. Методы построения теоретических систем знания: Диалог философа и математика / О.И. Кедровский. – Киев: Изд-во при Киевском университете, 1982. – 167 с.

184. Кезин, А.В. Идеалы научности / А.В. Кезин // Философия и методология науки: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М.: Аспект Пресс, 1996. – С. 294–330.

185. Кикель, П.В. Математика и реальность / П.В. Кикель. – Минск: БГПУ, 1999. – 186 с.

186. Клайн, М. Математика. Утрата определенности / Морис Клайн. – 2-е изд. – М.: РИМИС, 2007. – 640 с.

187. Клини, С.К. Введение в метаматематику / Стиви Коул Клини. – 2-е изд., испр. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 528 с.

188. Князева, Е.Н. Основания синергетики. Синергетическое мировидение / Е.Н. Князева, С.П. Курдюмов. – М.: КомКнига, 2005. – 240 с.

189. Койре, А. Очерки истории философской мысли. О влиянии философских концепций на развитие научных теорий / А. Койре. – М.: Прогресс, 1985. – 385 с.

190. Колесников, А.С. Философская компаративистика: Восток – Запад / А.С. Колесников. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2004. – 390 с.

191. Коллинз, Г. Формы пространства / Грэхем Коллинз // В мире науки. – 2004. – № 10. – С. 52–61.

192. Коллинз, Р. Социальная реальность объектов математики и естествознания / Р. Коллинз // Философия науки. – 2001. – № 2. – С. 3–23.

193. Колмогоров, А.Н. Научные основы школьного курса математики / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1969. – № 3. – С. 12–17.

194. Колмогоров, А.Н. Введение в математическую логику / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 120 с.

195. Колмогоров, А.Н. Математика / А.Н. Колмогоров // Математический энциклопедический словарь. – М.: Большая российская энциклопедия, 1995. – С. 7–38.

196. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / А.Н. Колмогоров. – 2-е изд. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 224 с.

197. Колмогоров, А.Н. Современные споры о природе математики / А.Н. Колмогоров // Апология математики: сборник статей / В.А. Успенский. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2011. – С. 506–536.

198. Комацу, М. Многообразие геометрии / Мацуо Комацу. – М.: Знание, 1981. – 208 с.

199. Корнаи, Я. Системная парадигма / Я. Корнаи // Вопросы экономики. – 2002. – № 4. – С. 4–22.

200. Коршунов, А.М. Онтология устойчивого развития: диалектика и синергетика / А.М. Коршунов, В.В. Мантатов // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 2010. – № 6. – С. 54–65.

201. Костюк, В.Н. Потенциальная реальность / В.Н. Костюк // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1992–1994. – М.: Эдиториал УРСС, 1996. – С. 115–135.

202. Кочергин, А.Н. Машинное доказательство теорем как нетрадиционная исследовательская программа в математике / А.Н. Кочергин // Исследовательские программы в современной науке. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 70–89.

203. Коэн, М. Введение в логику и научный метод / Моррис Коэн, Эрнест Нагель. – Челябинск: Социум, 2010. – 655 с.

204. Коэн, П.Дж. Неканторовская теория множеств / П.Дж. Коэн, Р. Херш // Природа. – 1969. – № 4. – С. 43–55.

205. Коэн, П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза / П.Дж. Коэн. – М.: Мир, 1969. – 347 с.

206. Коэн, П.Дж. Об основаниях теории множеств / П.Дж. Коэн // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, Вып. 5. – С. 169–176.

207. Крайзель, Г. Исследования по теории доказательств. Сборник статей / Г. Крайзель. – М.: Мир, 1981. – 289 с.

208. Крайзель, Г. Биография Курта Гёделя / Г. Крайзель // Успехи математических наук. – 1988. – Т. 43, Вып. 2. – С. 175–216; Т. 43, Вып. 3. – С. 203–238.

209. Красовский, Н.Н. Размышления о математическом образовании / Н.Н. Красовский // Известия Уральского университета. – 2003. – № 27. – Серия “Проблемы образования, науки и культуры”. Вып. 14. – С. 5–12.

210. Краузе, А.А. Истина и аксиома в философии науки / А.А. Краузе, О.Д. Шипунова // Философия науки. – 2009. – № 1. – С. 3–14.

211. Криз, И. Во что играют математические группы? / Игорь Криз, Пол Сигел // В мире науки. – 2008. – № 10. – С. 38–43.

212. Кричевец, А.Н.Трансцендентальный субъект и многообразие познавательных установок / А.Н. Кричевец // Математика и опыт. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – С. 154–167.

213. Кричевец, А.Н.Кризис математических наук и математического образования: эпистемологический подход / А.Н. Кричевец // Вопросы философии. – 2004. – № 11. – С.103–115.

214. Кузичева, З.А. Некоторые проблемы истории обоснования математики / З.А. Кузичева // История и методология естественных наук. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – Вып. 11.– С. 87–94.

215. Кузнецов, Б.Г. История философии для физиков и математиков / Б.Г. Кузнецов. – 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 352 с.
216. Кузнецова, И.С. Гносеологические проблемы математического знания / И.С. Кузнецова. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 135 с.
217. Купцов, В.И. Редукционизм: возможности и границы / В.И. Купцов // Философия и методология науки: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. – М.: Аспект Пресс, 1996. – С. 274–293.
218. Курант, Р. Математика в современном мире / Р. Курант // Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – С. 13–27.
219. Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 568 с.
220. Курдюмов, С.П. Синергетика – теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
221. Кутателадзе, С.С. Саундерс Маклейн, рыцарь математики / С.С. Кутателадзе // Сибирские электронные математические известия. – 2005. – Т. 2. – С. А5–А9.
222. Кутателадзе, С.С. Сергей Соболев и Лоран Шварц / С.С. Кутателадзе // Вестник РАН. – 2005. – Т. 75, № 4. – С. 354–359.
223. Кутателадзе, С.С. Три неизбежные задачи / С.С. Кутателадзе // Владикавказский математический журнал. – 2006. – Т. 8, Вып. 1. – С. 40–52.
224. Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / И. Лакатос. – М.: Наука, 1967. – 152 с.
225. Лакатос, И. Бесконечный регресс и основания математики / И. Лакатос // Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада. – М.: Логос, 1996. – С. 106–135.
226. Лакатос, И. Избранные произведения по философии и методологии науки / И. Лакатос. – М.: Академический проект, 2008. – 476 с.
227. Лакатос, И. Дедуктивистский versus эвристический подход / И. Лакатос // Эпистемология и философия науки. – 2009. – Т. XX, № 2. – С. 210–225.
228. Лакатос, И. Процедуры доказательства в современном математическом анализе / И. Лакатос // Вопросы философии. – 2009. – № 8. – С. 97–100.
229. Лебег, А. Предисловие к книге Н.Н. Лузина “Лекции об аналитических множествах и их приложениях” / А. Лебег // Успехи математических наук. – 1985. – Т. 40, Вып. 3. – С. 9–14.
230. Лебедев, С.А. Предмет и структура современной философии науки / С.А. Лебедев // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 2009. – № 1. – С. 3–25.
231. Лебедев, С.А. Философия. Курс лекций / С.А. Лебедев, В.В. Ильин. – М.: Эксмо, 2011. – 336 с.
232. Левин, Г.Д. Анализ и синтез в геометрии / Г.Д. Левин // Вопросы философии. – 1998. – № 9. – С. 92–104.

233. Левин, Г.Д. Истинность, рациональность, свобода / Г.Д. Левин // Вестник РАН. – 2004. – Т. 74, № 12. – С. 1090–1096.
234. Лекторский, В.А. О принципах исследования систем (В связи с "общей теорией систем" Л. Берталанфи) / В.А. Лекторский, В.Н. Садовский // Вопросы философии. – 1960. – № 8. – С. 67–79.
235. Лекторский, В.А. Теория познания (гносеология, эпистемологии) / В.А. Лекторский // Вопросы философии. – 1999. – № 8. – С. 72–80.
236. Лекторский, В.А. Кант, радикальный конструктивизм и конструктивный реализм в эпистемологии / В.А. Лекторский // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 11–21.
237. Лекторский, В.А. Философия, общество знания и перспективы человека / В.А. Лекторский // Вопросы философии. – 2010. – № 8. – С. 30–34.
238. Липкин, А.И. Философские проблемы квантовой механики / А.И. Липкин // Философия науки: Учебное пособие / Под ред. А.И. Липкина. – М.: Эксмо, 2007. – С. 368–406.
239. Липский, Б.И. Практическая природа истины / Б.И. Липский. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. – 152 с.
240. Лошак, Ж. Геометризация физики / Ж. Лошак. – М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. – 280 с.
241. Лузин, Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях / Н.Н. Лузин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 360 с.
242. Лукашевич, В.К. Анатомия научного метода: Учебное пособие / В.К. Лукашевич. – Минск: Мисанта, 1999. – 96 с.
243. Лукьянец, В.С. Парадигмальный сдвиг в методологии обоснования современной математики / В.С. Лукьянец // Философские проблемы оснований физико-математического знания. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 47–76.
244. Любищев, А.А. Линии Демокрита и Платона в истории культуры / А.А. Любищев; отв. ред. и сост. Р.Г. Баранцев. – СПб.: Алетейя, 2000. – 256 с.
245. Ляпунов, А.А. О фундаменте и стиле современной математики / А.А. Ляпунов // Математическое просвещение. – 1960. – Вып. 5. – С. 67–78.
246. Ляпунов, А.А. О некоторых особенностях строения современного теоретического знания / А.А. Ляпунов // Вопросы философии. – 1966. – № 5. – С. 39–50.
247. Ляпунов, А.А. В чем состоит системный подход к изучению реальных объектов сложной природы? / А.А. Ляпунов // Системные исследования. Ежегодник 1971. – М.: Наука, 1972. – С. 5–17.
248. Мадер, В.В. Введение в методологию математики (Гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики. Математика и теория познания) / В.В. Мадер. – М.: Интерпракс, 1994. – 448 с.
249. Мазуров, Вл.Д. Математические модели и реальность / Вл.Д. Мазуров // Известия Уральского университета. – 2004. – № 32. – Серия "Проблемы образования, науки и культуры". Вып. 16. – С. 25–39.
250. Майнцер, К. Сложность и самоорганизация / К. Майнцер // Вопросы философии. – 1997. – № 3. – С. 48–61.

251. Майнцер, К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез / К. Майнцер. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 464 с.

252. Мак-Лейн, С. Математическая логика – ни основания, ни философия / С. Мак-Лейн // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 148–153.

253. Маклейн, С. Категории для работающего математика / С. Маклейн. – М.: Физматлит, 2004. – 352 с.

254. Малышев, В.А. Философия больших систем и традиционная математика / В.А. Малышев // История и методология естественных наук. – М.: МГУ, 1989. – Вып. 36. – С. 75–83.

255. Мамчур, Е.А. Когнитивный процесс в контексте представлений о самоорганизации / Е.А. Мамчур // Самоорганизация и наука: опыт философского осмысления. – М.: ИФ РАН, 1994. – С. 48–65.

256. Мамчур, Е.А. О релятивности, релятивизме и истине / Е.А. Мамчур // Эпистемология и философия науки. – 2004. – Т. I, № 1. – С. 76–80.

257. Мандельброт, Б. Фракталы и возрождение теории итераций / Бенуа Мандельброт // Красота фракталов / Х.-О. Пайген, П.Х. Рихтер. – М.: Мир, 1993. – С. 131–140.

258. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

259. Манин, Ю.И. Доказуемое и недоказуемое / Ю.И. Манин. – М.: Советское радио, 1979. – 168 с.

260. Манин, Ю.И. Введение в теорию чисел / Ю.И. Манин, А.А. Панчишкин // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 49. – С. 5–348.

261. Мануйлов, В.Т. Конструктивность как принцип обоснования научного знания / В.Т. Мануйлов // Философские науки. – 2003. – № 10. – С. 104–121.

262. Мануйлов, В.Т. Конструктивность формалистского направления в обосновании математики / В.Т. Мануйлов // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ. – Курск, 2007. – Вып. 8. – С. 73–82.

263. Марков, А.А. О конструктивной математике / А.А. Марков // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1962. – Т. 67. – С. 8–14.

264. Марков, А.А. О логике конструктивной математики / А.А. Марков // Вестник Московского университета. Сер. 1. – 1970. – № 2. – С. 7–29

265. Марков, А.А. Теория алгорифмов / А.А. Марков, Н.М. Нагорный. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Фазис, 1996. – 448 с.

266. Маслов, В.П. Квантовая экономика / В.П. Маслов. – М.: Наука, 2005. – 68 с.

267. Матиясевич, Ю.В. Диофантовы множества / Ю.В. Матиясевич // Успехи математических наук. – 1972. – Т. 27, Вып. 5 – С. 185–222.

268. Матросова, Н.К. Феномен целостности: историко-философский аспект / Н.К. Матросова // Вестник СПбГУ. Серия 6. – 2010. – Вып. 4. – С. 69–73.

269. Медведев, Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного / Ф.А. Медведев. – М.: Наука, 1975. – 248 с.

270. Медведев, Ф.А. Доказательство как предмет историко-математического исследования / Ф.А. Медведев // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1985. – Вып. 28. – С. 187–202.

271. Медведев, Ф.А. Канторовская теория множеств и теология / Ф.А. Медведев // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1985. – Вып. 29. – С. 209–240.

272. Мейдер, В.А. Гегель об отличительных особенностях философии и математики / В.А. Мейдер // Методологические проблемы физики: материалы конференций 1976–1978. – М.: МОИП, 1980. – С. 76–84.

273. Меркулов, И.П. Когнитивные основания математических знаний / И.П. Меркулов // Эпистемология и философия науки. – 2007. – Т. XIV, № 4. – С. 127–141.

274. Месарович, М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, Я. Такахара. – М.: Мир, 1978. – 311 с.

275. Меськов, В.С. Мир информации как тринитарная модель Универсума. Постнеклассическая методология когнитивной деятельности / В.С. Меськов, А.А. Мамченко // Вопросы философии. – 2010. – № 5. – С. 57–68.

276. Метлов, В.И. Основания научного знания как проблема философии и методологии науки / В.И. Метлов. – М.: Высшая школа, 1987. – 143 с.

277. Мизес, фон Р. Математические постулаты и человеческое мышление / Рихард фон Мизес // Очерки о математике: Сборник статей. – М.: Знание, 1973. – С. 3–43.

278. Микешина, Л.А. Новые образы познания и реальность / Л.А. Микешина, М.Ю. Опенков. – М.: РОССПЭН, 1997. – 240 с.

279. Микешина, Л.А. Релятивизм как эпистемологическая проблема / Л.А. Микешина // Эпистемология и философия науки. – 2004. – Т. I, № 1. – С. 53–63.

280. Моисеев, Н.Н. Системный анализ динамических процессов биосферы. Системный анализ и математические модели / Н.Н. Моисеев // Вестник АН СССР. – 1979. – № 1. – С. 97–108.

281. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 488 с.

282. Моисеев, Н.Н. Компьютеризация, ее социальные последствия / Н.Н. Моисеев // Вопросы философии. – 1987. – № 9. – С. 103–112.

283. Моисеев, Н.Н. Расставание с простотой / Н.Н. Моисеев. – М.: Аграф, 1998. – 480 с.

284. Молодший, В.Н. О роли математической практики в развитии аксиоматического метода / В.Н. Молодший // Вопросы философии. – 1968. – № 4. – С. 134–143.

285. Монастырский, М.И. Математика на рубеже двух столетий / М.И. Монастырский // Историко-математические исследования. Вторая серия. – М.: Янус-К, 2000. – Вып. 5. – С. 56–70.

286. Монастырский, М.И. Современная математика в отблеске медалей Филдса / М.И. Монастырский. – М.: Янус-К, 2000. – 200 с.
287. Мороз, В. К проблеме теоретической классификации типов взаимосвязи математики и философии / В. Мороз // Alma mater (Вестник высшей школы). – 2005. – № 4. – С. 44–50.
288. Мороз, В.В. Философско-математический синтез: опыт историко-математической рефлексии / В.В. Мороз. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 307 с.
289. Мороз, В.В. Конструктивные тенденции в истории философии: диалектическое взаимодействие философии и математики в учении Платона / В.В. Мороз // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ. – Курск, 2007. – Вып. 8. – С. 95–106.
290. Мостовский, А. Современное состояние исследований по основаниям математики / А. Мостовский // Успехи математических наук. – 1954. – Т. 9, Вып. 3. – С. 3–38.
291. Мотрошилова, Н.В. Принцип системности в “Науке логики” Гегеля / Н.В. Мотрошилова // Вопросы философии. – 1980. – № 10. – С. 137–149.
292. Мотрошилова, Н.В. Путь Гегеля к “Науке логики”. Формирование принципов системности и историзма / Н.В. Мотрошилова. – М.: Наука, 1984. – 351 с.
293. Мотрошилова, Н.В. Рождение и развитие философских идей: Историко-философские очерки и портреты / Н.В. Мотрошилова. – М.: “Канон$^{+}$” РООИ “Реабилитация”, 2010. – 488 с.
294. Мудрагей, Н.С. Теория всего и теория познания (онто-гносеологические заметки) / Н.С. Мудрагей // Вопросы философии. – 2011. – № 6. – С. 82–92.
295. Мышкис, А.Д. Что такое прикладная математика? / А.Д. Мышкис // Сборник научно-методических статей по математике: Проблемы преподавания математики в вузе. – М.: Высшая школа, 1971. – Вып. 1. – С. 32–38.
296. Мышкис, А.Д. Об особенностях логики прикладной математики/ А.Д. Мышкис // Сборник научно-методических статей по математике. – М.: Высшая школа, 1978. – Вып. 8. – С. 11–16.
297. Нагорный, Н.М. К работам по основаниям математики / Н.М. Нагорный // Избранные труды: в 2 т. / Д. Гильберт. – М.: Факториал, 1998. – Т. I. – С. 562–570.
298. Нагорный, Н.М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики / Н.М. Нагорный // Логические исследования. – М.: Наука, 2001. – Вып. 8. – С. 105–128.
299. Налимов, В.В. Проблема человека в современной науке / В.В. Налимов // Вестник АН СССР. – 1979. – № 6. – С. 60–68.
300. Нариньяни, А.С. Модель или алгоритм: новая парадигма информационной технологии / А.С. Нариньяни // Информационные технологии. – 1997. – № 4. – С. 11–16.

301. Нариньяни, А.С. Математика XXI – радикальная смена парадигмы. Модель, а не Алгоритм / А.С. Нариньяни // Вопросы философии. – 2011. – № 1. – С. 71–82.

302. Науменко, Л.К. Диалектика Гегеля и системный подход / Л.К. Науменко // Философские науки. – 1974. – № 4. – С. 95–103.

303. Непейвода, Н.Н. Становление понятия конструктивности в математике / Н.Н. Непейвода // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 219–229.

304. Непейвода, Н.Н. Прикладная логика: Учебное пособие / Н.Н. Непейвода. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. – 521 с.

305. Непейвода, Н.Н. Вызов логики и математики XX века и “ответ” на них цивилизации / Н.Н. Непейвода // Вопросы философии. – 2005. – № 8. – С. 118–128.

306. Непейвода, Н.Н. Интеллектуальные вирусы / Н.Н. Непейвода // Логические исследования. – 2007. – Вып. 14. – С. 240–251.

307. Никитин, Е.П. О природе обоснования / Е.П. Никитин // Вопросы философии. – 1979. – № 10. – С. 46–55.

308. Никитин, Е.П. Природа обоснования: Субстратный анализ / Е.П. Никитин. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

309. Никифоров, А.Л. Необходимость абсолютного / А.Л. Никифоров // Эпистемология и философия науки. – 2004. – Т. I, № 1. – С. 70–80.

310. Никифоров, А.Л. Понятие истины в теории познания / А.Л. Никифоров // Эпистемология и философия науки. – 2008. – Т. XVI, № 2. – С. 50–65.

311. Новик, И.Б. Системный стиль мышления. Особенности познания и управления в сложных системах / И.Б. Новик. – М.: Знание, 1986. – 64 с.

312. Новиков, П.С. Конструктивная логика с точки зрения классической / П.С. Новиков. – М.: Наука, 1977. – 328 с.

313. Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1973. – 399 с.

314. Новиков, С.П. Мое поколение в математике / С.П. Новиков // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49, Вып. 6. – С. 3–6.

315. Новиков, С.П. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе / С.П. Новиков // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 3–22.

316. Овчинников, Н.Ф. Методологические принципы в истории научной мысли / Н.Ф. Овчинников. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

317. Огурцов, А.П. Этапы интерпретации системности научного знания (Античность и Новое время) / А.П. Огурцов // Системные исследования. Ежегодник 1974. – М.: Наука, 1974. – С. 154–186.

318. Окстоби, Дж. Мера и категория / Джон Окстоби. – М.: Мир, 1974. – 158 с.

319. Панов, В.Ф. Математика древняя и юная / В.Ф. Панов. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 648 с.

320. Панов, М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики / М.И. Панов. – М.: Наука, 1984. – 224 с.

321. Панов, М.И. Л.Э.Я. Брауэр и советская математика / М.И. Панов // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 250–279.

322. Панфилов, В.А. Генезис диалектического осмысления математики / В.А. Панфилов. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. – 170 с.

323. Паршин, А.Н. Размышления над теоремой Гёделя / А.Н. Паршин // Вопросы философии. – 2000. – № 6. – С. 92–109.

324. Паршин, А.Н. Путь. Математика и другие миры / А.Н. Паршин. – М.: Добросвет, 2002. – 240 с.

325. Паршин, А.Н. Русская религиозная мысль: возрождение или консервация? / А.Н. Паршин // Вопросы философии. – 2002. – № 4. – С. 50–59.

326. Пенроуз, Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / Роджер Пенроуз. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

327. Пенроуз, Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. Ч. I / Роджер Пенроуз. – М.; Ижевск: ИКИ, 2003. – 368 с.

328. Пенроуз, Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель / Роджер Пенроуз. – М.; Ижевск: ИКИ, 2007. – 912 с.

329. Пенроуз, Р. Большое, малое и человеческий разум / Р. Пенроуз, А. Шимони, Н. Картрайт, С. Хокинг. – СПб.: Амфора, 2008. – 191 с.

330. Перминов, В.Я. Философские основания представлений о строгости математического доказательства: автореф. дис. … д-ра филос. наук: 09.00.08 / В.Я. Перминов; МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 1986. – 32 с.

331. Перминов, В.Я. Проблема обоснования математики с системной точки зрения / В.Я. Перминов // Методологический анализ закономерностей развития математики. – М.: ВИНИТИ,1989. – С. 141–156.

332. Перминов, В.Я. Философия как метод / В.Я. Перминов // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 1997. – № 5. – С. 3–25.

333. Перминов, В.Я. Философия и основания математики / В.Я. Перминов. – М.: Прогресс–Традиция, 2001. – 320 с.

334. Перминов, В.Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства / В.Я. Перминов. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

335. Перминов, В.Я. Априорность математики / В.Я. Перминов // Вопросы философии. – 2005. – № 3. – С. 103–117.

336. Перминов, В.Я. Закономерности развития математики. Проблемы обоснования математики / В.Я. Перминов // Философия математики и технических наук: Учебное пособие для вузов / С.А. Лебедев [и др.]; под общ. ред. С.А. Лебедева. – М.: Академический проект, 2006. – С. 70–164.

337. Перминов, В.Я. О системном подходе к обоснованию математики / В.Я. Перминов // Проблема онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сборник статей / КГУ. – Курск, 2009. – Вып. 2. – С. 132–147.

338. Перминов, В.Я. Априорность и реальность исходных представлений математики / В.Я. Перминов // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 2010. – № 4. – С. 24–44.

339. Перминов, В.Я. Реальность математики / В.Я. Перминов // Вопросы философии. – 2012. – № 2. – С. 24–39.

340. Петров, Ю.А. О методологии обоснования математики / Ю.А. Петров // Вопросы философии. – 1972. – № 5. – С. 63–74.

341. Петров, Ю.А. Логика и методология научного познания / Ю.А. Петров, А.Л. Никифоров. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 249 с.

342. Петров, Ю.П. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: Учебное пособие / Ю.П. Петров, В.С. Сизиков. – СПб.: Политехника, 2003. – 261 с.

343. Петров, Ю.П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика / Ю.П. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 448 с.

344. Петров, Ю.П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами / Ю.П. Петров, Л.Ю. Петров. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 240 с.

345. Петросян, В.К. Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодоления / В.К. Петросян. – М.: Янус-К, 1997. – 144 с.

346. Петрушенко, Л.А. Единство системности, организованности и самодвижения (О влиянии философии на формирование понятий теории систем) / Л.А. Петрушенко. – М.: Мысль, 1975. – 286 с.

347. Пилецкий, С.Г. К вопросу об объективной истине / С.Г. Пилецкий // Вестник ВятГГУ. Серия “Философия и социология; культурология”. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 25–30.

348. Платон. Тимей / Платон // Сочинения в трех томах. Том 3. Часть 1 / Платон. – М.: Мысль, 1973. – С. 455–541.

349. Платон. Диалоги / Платон. – М.: Мысль, 1986. – (Философское наследие). – 607 с.

350. Подниекс, К.М. Вокруг теоремы Гёделя / К.М. Подниекс. – Рига: Зинатне, 1992. – 192 с.

351. Позер, Х. Математика и Книга Природы. Проблема применимости математики к реальности / Ханс Позер // Эпистемология и философия науки. – 2004. – Т. I, № 1. – С. 34–52.

352. Понтрягин, Л. О математике и качестве ее преподавания / Л. Понтрягин // Коммунист. – 1980. – № 14. – С. 99–110.

353. Попов, Ю.П. Вычислительный эксперимент / Ю.П. Попов, А.А. Самарский // Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. – М.: Наука, 1988. – С. 16–78.

354. Порус, В.Н. Парадоксальная рациональность (очерки о научной рациональности) / В.Н. Порус. – М.: Изд-во УРАО, 1999. – 124 с.

355. Порус, В.Н. Является ли наука самоорганизующейся системой? / В.Н. Порус // Вопросы философии. – 2006. – № 1. – С. 95–108.

356. Порус, В. Философия науки: современные интерпретации / В. Порус // Высшее образование в России. – 2006. – № 5. – С. 128–143.

357. Порус, В.Н. Многомерность рациональности / В.Н. Порус // Философия и социальные науки. – 2010. – № 1. – С. 24–29.

358. Постников, М.М. Является ли математика наукой? / М.М. Постников // Математическое образование. – 1997. – № 2. – С. 83–88.

359. Пружинин, Б.И. Рациональность и историческое единство научного знания: Гносеологический аспект / Б.И. Пружинин; под ред. В.А. Лекторского. – М.: Наука, 1986. – 150 с.

360. Пружинин, Б.И. "Стиль научного мышления" в отечественной философии науки / Б.И. Пружинин // Вопросы философии. – 2011. – № 8. – С. 64–74.

361. Пуанкаре, А. О науке / А. Пуанкаре. – М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1983. – 560 с.

362. Пуанкаре, А. Математика и логика / А. Пуанкаре, Л. Кутюра. – 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 152 с.

363. Пуркет, В. Георг Кантор / В. Пуркет, Х.И. Ильгаудс. – Харьков: Изд-во "Основа" при Харьковском университете, 1991. – 128 с.

364. Пушкин, В.Г. Философия Гегеля: абсолютное в человеке / В.Г. Пушкин. – СПб.: Лань, 2000. – 448 с.

365. Разборов, А.А. О сложности вычислений / А.А. Разборов // Математическое просвещение. Третья серия. – 1999. – Вып. 3. – С. 127–141.

366. Разумов, В.И. Категориально-системные методы в подготовке ученых: Учебное пособие / В.И. Разумов. – Омск: Омский университет, 2004. – 277 с.

367. Разумов, В.И. Категории в философии и математике / В.И. Разумов, В.П. Сизиков // Философия науки. – 2008. – № 3. – С. 38–45.

368. Ракитов, А.И. Философские проблемы науки. Системный подход / А.И. Ракитов. – М.: Мысль, 1977. – 270 с.

369. Ратников, В.С. Обновление методологической культуры в процессе освоения научного феномена сложности / В.С. Ратников // Системный подход в современной науке. – М.: Прогресс–Традиция, 2004. – С. 254–275.

370. Рассел, Б. Введение в математическую философию / Бертран Рассел. – М.: Гнозис, 1996. – 240 с.

371. Рассел, Б. Мудрость Запада: Историческое исследование западной философии в связи с общественными и политическими обстоятельствами / Бертран Рассел. – М.: Республика, 1998. – 479 с.

372. Рассел, Б. Человеческое познание, его сфера и границы / Бертран Рассел. – Киев: Ника–Центр, 2001. – 560 с.

373. Рашевский, П.К. О догмате натурального ряда / П.К. Рашевский // Успехи математических наук. – 1973. – Т. 28, Вып. 4. – С. 243–246.

374. Решер, Н. Границы когнитивного релятивизма / Н. Решер // Вопросы философии. – 1995. – № 4. – С. 35–54.

375. Ровинский, Р.Е. Самоорганизация как фактор направленного развития / Р.Е. Ровинский // Вопросы философии. – 2002. – № 5. – С. 67–77.

376. Ровинский, Р.Е. Синергетика и процессы развития сложных систем / Р.Е. Ровинский // Вопросы философии. – 2006. – № 2. – С. 162–169.

377. Роджерс, Л. Историческая реконструкция математического знания / Лео Роджерс // Математическое образование. – 2001. – № 1. – С. 74–85.

378. Родин, А.В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля / А.В. Родин. – М.: Наука, 2003. – 211 с.

379. Родин, А.В. Рациональность и релятивизм / А.В. Родин // Вопросы философии. – 2008. – № 9. – С. 55–76.

380. Родин, А.В. Теория категорий и поиски новых математических оснований физики / А.В. Родин // Вопросы философии. – 2010. – № 7. – С. 67–81.

381. Розин, В.М. Логика и основания науки / В.М. Розин // Высшее образование сегодня. – 2003. – № 2. – С. 26–38.

382. Розов, М.А. Философские аспекты проблемы математизации науки / М.А. Розов // Математизация современной науки: предпосылки, проблемы перспективы. Сборник трудов. – М.: АН СССР, 1986. – С. 14–22.

383. Розов, Н.С. Социологический реляционизм С. Фукса и объяснение “рабочего платонизма” в математике / Н.С. Розов // Философия науки. – 2006. – № 3. – С. 39–48.

384. Рокмор, Т. Математика, фундаментализм и герменевтика / Том Рокмор // Вопросы философии. – 1997. – № 2. – С. 82–92.

385. Рокмор, Т. Знание и философский диалог / Т. Рокмор // Вопросы философии. – 2009. – № 1. – С. 25–31.

386. Рокмор, Т. Гегель о конструктивизме / Т. Рокмор // Конструктивистский подход в эпистемологии и науках о человеке. – М.: “Канон$^{+}$” РООИ “Реабилитация”, 2009. – С. 130–140.

387. Рорти, Р. Философия и зеркало природы / Ричард Рорти. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1997. – 320 с.

388. Ружа, И. Основания математики / И. Ружа. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 352 с.

389. Рузавин, Г.И. О природе математического знания: Очерки по методологии математики / Г.И. Рузавин. – М.: Мысль, 1968. – 302 с.

390. Рузавин, Г.И. Философские проблемы обоснования математики: автореф. дис. … д-ра филос. наук / Г.И. Рузавин; Ин-т философии АН СССР. – М., 1969. – 46 с.

391. Рузавин, Г.И. Философские проблемы оснований математики / Г.И. Рузавин. – М.: Наука, 1983. – 302 с.

392. Рузавин, Г.И. Синергетика и диалектическая концепция развития / Г.И. Рузавин // Философские науки. – 1985. – № 5. – С. 11–21.

393. Рузавин, Г.И. Синергетика и сложноорганизованные системы / Г.И. Рузавин // Эпистемология и философия науки. – 2008. – Т. XV, № 1. – С. 100–116.

394. Рыбников, К.А. Очерки методологии математики / К.А. Рыбников. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
395. Сагатовский, В.Н. Опыт построения категориального аппарата системного подхода / В.Н. Сагатовский // Философские науки. – 1976. – № 3. – С. 67–78.
396. Садовский, В.Н. Проблемы общей теории систем как метатеории / В.Н. Садовский // Системные исследования. Ежегодник 1973. – М.: Наука, 1973. – С. 127–146.
397. Садовский, В.Н. Проблемы философского обоснования системных исследований / В.Н. Садовский // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1984. – М.: Наука, 1984. – С. 32–51.
398. Садовский, В.Н. Философия науки в поисках новых путей / В.Н. Садовский // Идеалы и нормы научного исследования. – Минск: Изд-во БГУ, 1981. – С. 315–340.
399. Садовский, В.Н. Смена парадигм системного мышления / В.Н. Садовский // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1992–1994. – М.: Эдиториал УРСС, 1996. – С. 64–78.
400. Садовский, В.Н. Людвиг фон Берталанфи и развитие системных исследований в XX веке / В.Н. Садовский // Системный подход в современной науке. – М.: Прогресс–Традиция, 2004. – С. 7–36.
401. Самарский, А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент / А.А. Самарский // Вестник АН СССР. – 1979. – № 5. – С. 38–49.
402. Самарский, А.А. Неизбежность новой методологии. Математика и методологическое обновление науки / А.А. Самарский // Коммунист. – 1989. – № 1. – С. 82–92.
403. Сачков, Ю.В. Научный метод: вопросы и развитие / Ю.В. Сачков. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 160 с.
404. Сачков, Ю.В. Вероятность как загадка бытия и познания / Ю.В. Сачков // Вопросы философии. – 2006. – № 1. – С. 80–94.
405. Светлов, В.А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия: Учебное пособие / В.А. Светлов. – М.: КомКнига, 2006. – 204 с.
406. Седых, В.Д. Проблема Пуанкаре и миллион долларов / В.Д. Седых // Математика в школе. – 2007. – № 2. – С. 26–31.
407. Секей, Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
408. Сигети, Й. Г. Гегель и Г. Кантор / Йожеф Сигети // Вопросы философии. – 1975. – № 9. – С. 146–157.
409. Симанов, А.Л. Методологическая функция философии и научная теория / А.Л. Симанов. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1986. – 235 с.
410. Сингх, С. Великая теорема Ферма. История загадки, которая занимала лучшие умы мира на протяжении 358 лет / Саймон Сингх. – М.: МЦНМО, 2000. – 288 с.

411. Славков, С. Понятие “математическая структура” и его значение / Светослав Славков // Вопросы философии. – 1970. – № 2. – С. 67–77.

412. Слемнев, М.А. Лабиринты познания / М.А. Слемнев. – Минск: Университетское, 1988. – 171 с.

413. Смейл, С. Математические проблемы следующего столетия / С. Смейл // Современные проблемы хаоса и нелинейности. – М.; Ижевск: ИКИ, 2002. – С. 280–303.

414. Смирнов, Г.А. Логические аспекты проблемы целостности / Г.А. Смирнов // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1995–1996. – М.: Эдиториал УРСС, 1996. – С. 108–126.

415. Смирнов, Г.А. Понятие целостности и принципы построения систем знания / Г.А. Смирнов // Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник 1997. – М.: Эдиториал УРСС, 1997. – С. 180–202.

416. Сокулер, З.А. Людвиг Витгенштейн и его место в философии XX в. (курс лекций) / З.А. Сокулер. – Долгопрудный: Аллегро–Пресс, 1994. – 172 с.

417. Сокулер, З.А. Философия науки в концепции Л. Витгенштейна / З.А. Сокулер // Философия науки: Учебное пособие / Л.Б. Баженов [и др.]; под ред. А.И. Липкина. – М.: Эксмо, 2007. – С. 101–142.

418. Соловьев, Ю.П. Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма / Ю.П. Соловьев // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 2. – С. 135–138.

419. Сороко, Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: введение в общую теорию гармонии систем / Э.М. Сороко. – 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 262 с.

420. Старжинский, В.П. Понятие “состояние” и его методологическая роль в физике / В.П. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1979. – 88 с.

421. Степин, В.С. Научное познание и ценности техногенной цивилизации / В.С. Степин // Вопросы философии. – 1989. – № 10. – С. 3–18.

422. Степин, В.С. От классической к постнеклассической науке (изменение оснований и ценностных ориентаций) / В.С. Степин // Ценностные аспекты развития науки. – М.: Наука, 1990. – С. 152–166.

423. Степин, В.С. Деятельностная концепция знания / В.С. Степин // Вопросы философии. – 1991. – № 8. – С. 129–138.

424. Степин, В.С. Философская антропология и философия науки / В.С. Степин. – М.: Высшая школа, 1992. – 191 с.

425. Степин, В.С. Теоретическое знание: Структура, историческая эволюция / В.С. Степин. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 744 с.

426. Степин, В.С. Саморазвивающиеся системы и постнеклассическая рациональность / В.С. Степин // Вопросы философии. – 2003. – № 8. – С. 5–17.

427. Степин, В.С. Конструктивные и прогностические функции философии / В.С. Степин // Вопросы философии. – 2009. – № 1. – С. 5–10.

428. Степин, В.С. Гегелевская концепция саморазвития и наука XXI столетия / В.С. Степин // Философия и социальные науки. – 2010. – № 1. – С. 5–19.

429. Степин, В.С. Гегель и современная наука / В.С. Степин // "Феноменология духа" Гегеля в контексте современного гегелеведения. – М.: "Канон+" РООИ "Реабилитация", 2010. – С. 606–635.

430. Степин, В.С. Наука и философия / В.С. Степин // Вопросы философии. – 2010. – № 8. – С. 58–75.

431. Стин, Э. Квантовые вычисления / Э. Стин. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 112 с.

432. Строгац, С. "Маленькое открытие" Ферми и будущее теории хаоса и сложности / Стивен Строгац // Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВТК, 2011. – С. 102–111.

433. Стюарт, Я. Концепции современной математики / Ян Стюарт. – Минск: Вышэйшая школа, 1980. – 384 с.

434. Стюарт, Я. Математика 2050 года / Ян Стюарт // Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВТК, 2011. – С. 37–46.

435. Султанова, Л.Б. Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления / Л.Б. Султанова // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 66–76.

436. Султанова, Л.Б. Роль неявных предпосылок в историческом обосновании математического знания / Л.Б. Султанова // Вопросы философии. – 2004. – № 4. – С. 102–115.

437. Султанова, Л.Б. Неявное знание в развитии математики: автореф. дис. … д-ра филос. наук: 09.00.01; 09.00.08 / Л.Б. Султанова; МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 2005. – 39 с.

438. Султанова, Л.Б. Неявное знание в развитии математики: монография / Л.Б. Султанова. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. – 260 с.

439. Такеути, Г. Теория доказательств / Г. Такеути. – М.: Мир, 1978. – 412 с.

440. Тарасенко, В.В. Метафизика фрактала / В.В. Тарасенко // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 421–437.

441. Тарский, А. Истина и доказательство / А. Тарский // Вопросы философии. – 1972. – № 8. – С. 136–145.

442. Тихомиров, В.М. О некоторых особенностях математики XX века / В.М. Тихомиров // Стили в математике: социокультурная философия математики. – СПб.: РХГИ, 1999. – С. 441–460.

443. Тихонов, А.Н. Научно-технический прогресс и математика / А.Н. Тихонов // Математизация современной науки: предпосылки, проблемы перспективы. Сборник трудов. – М.: АН СССР, 1986. – С. 75–81.

444. Том, Р. Бифуркационное подмножество пространства отображений / Р. Том // Успехи математических наук. – 1972. – Т. 27, Вып. 5. – С. 51–57.

445. Том, Р. Топология и лингвистика / Р. Том // Успехи математических наук. – 1975. – Т. 30, Вып. 1. – С. 199–221.

446. Том, Р. Современная математика – существует ли она? / Р. Том // Математика в школе. – 2003. – № 3. – С. 12–17.
447. Тростников, В.Н. О взаимоотношении математики и философии / В.Н. Тростников // Вопросы философии. – 1972. – № 8. – С. 86–96.
448. Тростников, В.Н. Конструктивные процессы в математике (философский аспект) / В.Н. Тростников. – М.: Наука, 1975. – 255 с.
449. Тростников, В.Н. Математические высказывания св. Игнатия (Брянчанинова) / В.Н. Тростников // Математика и практика. Математика и культура. – М.: Самообразование, 2000. – С. 146–150.
450. Тутубалин, В.Н. Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента / В.Н. Тутубалин // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, № 7. – С. 93–109.
451. Уемов, А.И. Л. фон Берталанфи и параметрическая общая теория систем / А.И. Уемов // Системный подход в современной науке. – М.: Прогресс–Традиция, 2004. – С. 37–68.
452. Успенский, В.А. Семь размышлений на темы философии математики / В.А. Успенский // Закономерности развития современной математики. – М.: Наука, 1987. – С. 106–155.
453. Успенский, В.А. Что такое аксиоматический метод? / В.А. Успенский. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 96 с.
454. Успенский, В.А. Апология математики: сборник статей / В.А. Успенский. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2011. – 554 с.
455. Фаддеев, Л.Д. Что такое современная математическая физика? / Л.Д. Фаддеев // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 226. – С. 7–10.
456. Фанг, Дж. Между философией и математикой: их параллелизм в “параллаксе” / Дж. Фанг // Вопросы истории естествознания и техники. – 1992. – № 2. – С. 3–17.
457. Фейнберг, Е.Л. Эволюция методологии в XX веке / Е.Л. Фейнберг // Вопросы философии. – 1995. – № 7. – С. 38–44.
458. Фейнберг, Е.Л. Две культуры. Интуиция и логика в искусстве и науке / Е.Л. Фейнберг. – Фрязино: Изд-во “Век 2”, 2004. – 288 с.
459. Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа / Г. Фреге. – Томск: Водолей, 2000. – 128 с.
460. Фрейдельмейер, Ж.-П. Что история говорит о преподавании анализа? / Жан-Пьер Фрейдельмейер // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики: Историко-математический и историко-методический аспекты. – Калуга: Изд-во КГПУ, 2002. – Вып. 4. – С. 45–62.
461. Хакен, Г. Информация и самоорганизация / Г. Хакен. – 2-е изд., дополн. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 245 с.
462. Харди, Г. Апология математики / Г. Харди. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. – 104 с.
463. Хейенорт, Ж. Ф. Энгельс и математика / Ж. ван Хейенорт // Природа. – 1991. – № 8. – С. 90–105.

464. Хофштадтер, Д. Гёдель, Эшер, Бах: Эта бесконечная гирлянда / Даглар Хофштадтер. – Самара: Бахрах-М, 2001. – 752 с.

465. Целищев, В.В. Об одном аспекте соотношения методологии дедуктивных наук и системного метода / В.В. Целищев // Системный метод и современная наука: Сборник научных трудов / НГУ. – Новосибирск, 1972. – Вып. 2. – С. 137–146.

466. Целищев, В.В. Поиски новой философии математики / В.В. Целищев // Философия науки. – 2001. – № 3. – С. 135–147.

467. Целищев, В.В. Математика и философия: технические детали и философские интерпретации / В.В. Целищев // Философия науки. – 2002. – № 2. – С. 27–43.

468. Целищев, В.В. Философия математики. Ч. 1 / В.В. Целищев. – Новосибирск: Наука, 2002. – 212 с.

469. Целищев, В.В. Онтология математики: объекты и структуры / В.В. Целищев; отв. ред. А.В. Бессонов. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – 240 с.

470. Целищев, В.В. Непротиворечивость и полнота как нормы дедуктивного мышления в свете теоремы Гёделя о неполноте арифметики / В.В. Целищев // Философия науки. – 2005. – № 2. – С. 33–52.

471. Целищев, В.В. Эпистемология математического доказательства / В.В. Целищев. – Новосибирск: Параллель, 2006. – 212 с.

472. Чайковский, Ю.В. История науки и обучение науке (на примере понятий "случайность" и "вероятность") / Ю.В. Чайковский // Вопросы истории естествознания и техники. – 1989. – № 4. – С. 17–28.

473. Чайковский, Ю.В. Ступени случайности и эволюция / Ю.В. Чайковский // Вопросы философии. – 1996. - № 9. – С. 69–81.

474. Чейтин, Г. Пределы доказуемости / Грегори Чейтин // В мире науки. – 2006. – № 6. – С. 38–45.

475. Черепанов, С.К. Постнеклассическая рациональность в математике / С.К. Черепанов // Философия науки. – 2010. – № 2. – С. 62–77.

476. Чернавский, Д.С. О методологических аспектах синергетики / Д.С. Чернавский // Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. – М.: Прогресс–Традиция, 2002. – С. 50–66.

477. Чернавский, Д.С. Синергетика и информация: Динамическая теория информации / Д.С. Чернавский. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 288 с.

478. Чернавский, Д.С. К онтологии научного творчества. Синергетический подход / Д.С. Чернавский, Н.М. Чернавская // Эпистемология и философия науки. – 2004. – Т. I, № 1. – С. 114–130.

479. Черняк, А.З. Эпистемическое обоснование в условиях самоорганизации знания / А.З. Черняк // Синергетическая парадигма. Когнитивно-комму-никативные стратегии современного научного познания. – М.: Прогресс–Традиция, 2004. – С. 131–156.

480. Шанин, Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства / Н.А. Шанин // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1962. – Т. 67. – С. 15–61.

481. Шапошников, В.А. Три парадигмы в философии математики / В.А. Шапошников // Эпистемология и философия науки. – 2008. – Т. XV, № 1. – С. 124–131.

482. Шапошников, В.А. Персоналистический платонизм о. Павла Флоренского / В.А. Шапошников // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. – 2011. – № 1. – С. 3–19.

483. Шафаревич, И.Р. Основные понятия алгебры / И.Р. Шафаревич // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 11. – С. 5–290.

484. Шафаревич, И. О некоторых тенденциях развития математики / И. Шафаревич // Москва. – 1990. – № 12. – С. 3–5.

485. Шафаревич, И.Р. Математическое мышление и природа / И.Р. Шафаревич // Вопросы истории естествознания и техники. – 1996. – № 1. – С. 78–84.

486. Шереметевский, В.П. Очерки по истории математики / В.П. Шереметевский. – 3-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 184 с.

487. Шрамко, Я. Ошибка Георга Кантора? / Я. Шрамко // Вопросы философии. – 2001. – № 9. – С. 154–156.

488. Шрамко, Я.В. Теорема Кантора и “фигуры умолчания” в научной дискуссии / Я.В. Шрамко // Вестник Московского университета. Сер. 7. Философия. – 2003. – № 5. – С. 68–72.

489. Штейнгауз, Г. Математика – посредник между духом и материей / Г. Штейнгауз. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 351 с.

490. Эшби, У.Р. Принципы самоорганизации / У.Р. Эшби // Принципы самоорганизации. – М.: Мир, 1966. – С. 314–343.

491. Юдин, Б.Г. Понятие целостности в структуре научного знания / Б.Г. Юдин // Вопросы философии. – 1970. – № 12. – С. 81–92.

492. Юдин, Б.Г. Методологические проблемы исследования самоорганизующихся систем / Б.Г. Юдин // Проблемы методологии системного исследования. – М.: Мысль, 1970. – С. 359–384.

493. Юдин, Б.Г. Методологический анализ как направление изучения науки / Б.Г. Юдин. – М.: Наука, 1986. – 261 с.

494. Юдин, Б.Г. Знание как социальный ресурс / Б.Г. Юдин // Вестник РАН. – 2006. – Т. 76, № 7. – С. 587–595.

495. Юдин, Э.Г. Методологическая природа системного подхода / Э.Г. Юдин // Системные исследования. Ежегодник 1973. – М.: Наука, 1973. – С. 38–51.

496. Юдин, Э.Г. Системный подход и принцип деятельности: Методологические проблемы современной науки / Э.Г. Юдин. – М.: Наука, 1978. – 391 с.

497. Юшкевич, А.П. Математика и ее история в ретроспективе / А.П. Юшкевич // Закономерности развития современной математики – М.: Наука, 1987. – С. 28–74.

498. Юшкевич, А.П. А.Н. Колмогоров о сущности математики и периодизации ее истории / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – СПб.: Издательство Международного фонда истории науки, 1994. – Вып. 35. – С. 8–16.

499. Яненко, Н.Н. Методологические проблемы современной математики / Н.Н. Яненко // Вопросы философии. – 1981. – № 8. – С. 60–68.

500. Яненко, Н.Н. Методологические проблемы математической физики / Н.Н. Яненко, Н.Г. Преображенский, О.С. Разумовский. – Новосибирск: Наука, 1986. – 196 с.

501. Янов, Ю.И. Математика, метаматематика и истина / Ю.И. Янов. – М., 2006. – 32 с. – (Препринт / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; № 77).

502. Яновская, С.А. Методологические проблемы науки / С.А. Яновская. – М.: Мысль, 1972. – 280 с.

503. Яновская, С.А. Содержательная истинность и формально-логическая доказуемость в математике / С.А. Яновская // Практика и познание. – М.: Наука, 1973. – С. 247–272.

504. Янчевский, В. Защита информации. Алгебра в криптографии / В. Янчевский // Наука и инновации. – 2007. – № 9. – С. 33–37.

505. Яскевич, Я.С. Статус и роль дискуссий в историческом развитии науки / Я.С. Яскевич // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ. – Курск, 2005. – Вып. 4. – С. 99–118.

506. Яскевич, Я.С. Инновационно-методологические и гносеологические парадигмы в развитии естествознания и техники / Я.С. Яскевич // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сборник научных трудов / КГУ. – Курск, 2010. – Вып. 3. – С. 74–117.

507. Яу, Ш. Теория струн и скрытые измерения Вселенной / Шинтан Яу, Стив Надис. – СПб.: Питер, 2012. – 400 с.

508. Яшин, Б.Л. Формально-логическая непротиворечивость и критерий истины в математике / Б.Л. Яшин // Философские вопросы современного естествознания (физика, математика, биология): сборник трудов. – М.: МГПИ, 1977. – С. 94–102.

509. Яшин, Б.Л. Рациональное и иррациональное в математике / Б.Л. Яшин // Философия познания. К юбилею Людмилы Александровны Микешиной: сборник статей. – М.: РОССПЭН, 2010. – С. 516–530.

510. Ященко, И.В. Парадоксы теории множеств / И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2002. – 40 с.

511. Anglin, W.S. Mathematics: A concise history and philosophy / W.S. Anglin. – New York: Springer-Verlag, 1994. – 261 p.

512. Appel, K. The solution of the Four-color-map problem / K. Appel, W. Haken // Scientific American. – 1977. – Vol. 237, № 4. – P. 108–121.

513. Appel, K. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging / K. Appel, W. Haken // Illinois Journal of Mathematics. – 1977. – Vol. 21, № 3. – P. 429–490.
514. Appel, K. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility / K. Appel, W. Haken // Illinois Journal of Mathematics. – 1977. – Vol. 21, № 3. – P. 491–567.
515. Ashby, W.R. Principles of the self-organizing dynamic system / W.R. Ashby // Journal General Psychology. – 1947. – № 37. – P. 125–128.
516. Balaguer, M.A. Platonist epistemology / M.A. Balaguer // Synthese. – Dordrecht, 1995. – Vol. 103. – P. 303–325.
517. Benacerraf, P. What numbers could not be / P. Benacerraf // Philosophical Review. – 1965. – Vol. 74, № 1. – P. 47–73.
518. Benacerraf, P. Mathematical truth / P. Benacerraf // Philosophy of Mathematics: Selected Readings. 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – P. 403–420.
519. Davies, B. Whither mathematics? / B. Davies // Notices of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 52, № 11. – P. 1350–1356.
520. Detlefsen, M. On interpreting Godel second theorem / M. Detlefsen // Journal of Philosophical Logic. – 1979. – Vol. 8, № 3. – P. 297–313.
521. Godel, K. What is Cantor's continuum problem / K. Gogel // Philosophy of Mathematics: Selected Readings. – New York: Englewood Hill, 1964. – P. 258–273.
522. Growers, W.T. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces / W.T. Growers // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1996. – Vol. 28, № 3. – P. 297–304.
523. Hersh, R. Fresh breezes in the philosophy of mathematics / R. Hersh // American Mathematical Monthly. – 1995. – Vol. 102, № 7. – P. 589–594.
524. Katz, J.J. What mathematical knowledge could be? / J.J. Katz // Mind. – 1995. – Vol. 104, № 418. – P. 491–522.
525. Kleiner, I. The role of paradoxes in the evolution of mathematics / I. Kleiner., N. Movshovitz-Hadar // American Mathematical Monthly. – 1994. – Vol. 101, № 10. – P. 963–974.
526. Maddy, P. Set and numbers / P. Maddy // Nous. – Bioomington, 1981. – Vol. 15, № 4. – P. 495–511.
527. Patnam, H. What is mathematical truth? / H. Patnam // New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology. – Prinstone: Princeton University Press, 1998. – P. 50–65.
528. Posy, C.J. Brouwer's constructivism / C.J. Posy // Synthese. – Dordrecht, 1974. – Vol. 27, № 1–2. – P. 125–159.
529. Restivo, S. The social roots of pure mathematics / S. Restivo // Theories of Science in Society. – Indiana: Indiana univ. press, 1990. – P. 143–154.
530. Shapiro, S. Mathematics and philosophy of mathematics / S. Shapiro // Philosophia Mathematica. – 1994. – Vol. 2, № 3. – P. 148–160.

531. Shor, P.W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer / P.W. Shor // SIAM J. Comput. – 1997. – Vol. 26, № 5. – P. 1484–1509.
532. Weaver, W. Science and complexity / W. Weaver // American Scientist. – 1948. – Vol. 36. – P. 536–539.
533. Wiles, A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem / A. Wiles // Annals of Mathematics. – 1995. – Vol. 142. – P. 443–551.

Список публикаций автора

1–А. Михайлова, Н.В. Философские взгляды Иммануила Канта на роль интуиции в научном познании / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Иммануил Кант: тезисы докладов XV Международных чтений, Минск, 24–25 ноября 1999 г. / БГУИР; редкол.: А.Ф. Апорович [и др.]. – Минск, 1999. – С. 40–42.

2–А. Михайлова, Н.В. Культурно-исторические аспекты математического знания и образования / Н.В. Михайлова // Проблемы совершенствования методической подготовки учителей математики в условиях перехода на новые программы и учебники: Сборник материалов Респ. науч.-метод. конф. / Мин. обр. Респ. Беларусь. БрГУ им. А.С. Пушкина. – Брест, 1999. – С. 35–40.

3–А. Михайлова, Н.В. Феномен бесконечного в многообразии математического знания / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2000. – № 2/3. – С. 78–83.

4–А. Михайлова, Н.В. О некоторых философских проблемах математического доказательства / Н.В. Михайлова // VIII Международная научная конф. им. академика М. Кравчука: материалы конференции, Киев, 11–14 мая 2000 г. / Институт математики НАН Украины, КНУ им. Т. Шевченко. – Киев, 2000. – С. 534.

5–А. Михайлова, Н.В. М. Мамардашвили: философский анализ проблемы смысла науки / Н.В. Михайлова // Философы XX века: Мераб Мамардашвили: материалы Республиканских чтений–3 / РИВШ БГУ; редкол.: Я.С. Яскевич [и др.]. – Минск, 2000. – С. 37–42.

6–А. Михайлова, Н.В. Философско-математическое знание с социально-образовательной точки зрения / Н.В. Михайлова // Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество: материалы 3-й Междунар. научно-практ. конф.: в 2 ч. / БГУ. – Минск, 2000. – Ч. 2. – С. 85–91.

7–А. Михайлова, Н.В. О культурной функции научного знания и рационалистической вере во всемогущество разума / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Исаак Ньютон: тезисы докладов XVI Международных чтений, Минск, 29–30 ноября 2000 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2000. – С. 95–97.

8–А. Михайлова, Н.В. Парадокс Менона в математическом образовании / Н.В. Михайлова // Педагогика. – М., 2001. – № 3. – С. 28–32.

9–А. Михайлова, Н.В. Методологические проблемы теоретической математики: три философских аспекта / Н.В. Михайлова // Учебное знание как основа порождения культурных форм в университетском образовании: материалы научно-практ. конф., Минск, 14–15 ноября 2000 г. / ЦПРО БГУ; под ред. М.А. Гусаковского. – Минск: Пропилеи, 2001. – С. 243–254.

10–А. Михайлова, Н.В. Картезианские темы в философии познания Блеза Паскаля / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2001. – № 4. – С. 18–22.

11–А. Михайлова, Н.В. Социокультурная обусловленность математического знания и образования / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Анри Пуанкаре: тезисы докладов XVII Международных чтений, Минск, 28–29 ноября 2001 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2001. – С. 174–177.

12–А. Михайлова, Н.В. Парадокс Менона в математическом познании / Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2001. – № 3. – С. 85–95.

13–А. Михайлова, Н.В. Рациональность математического знания и социокультурная стратегия познания / Н.В. Михайлова // Перспективы рациональности в XXI веке: материалы конференции молодых ученых, Минск, 25 апреля 2002 г. / Институт философии НАН Беларуси; редкол.: А.С. Майхрович [и др.]. – Минск: Экоперспектива, 2002. – С. 52–55.

14–А. Михайлова, Н.В. Картезианское понимание науки и конструктивная роль естественнонаучного образования / Н.В. Михайлова // Идея университета: парадоксы самоописания: материалы третьей Междунар. научно-практ. конф., Минск, 29–30 апреля 2002 г. / ЦПРО БГУ; под ред. М.А. Гусаковского, А.А. Полонникова. – Минск: БГУ, 2002. – С. 76–80.

15–А. Михайлова, Н.В. Рациональное и иррациональное мышление: проблемы философского осмысления / Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2002. – № 4. – С. 118–127.

16–А. Михайлова, Н.В. Концепция дополнительности математических понятий и проблема нового знания / Н.В. Михайлова // Еругинские чтения – VIII: тезисы докладов Междунар. математ. конф., Брест, 20–23 мая 2002 г.: в 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Брест, 2002. – Ч. 2. – С. 28–29.

17–А. Михайлова, Н.В. Проблема дополнительности в постнеклассической интерпретации математического знания / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Леонардо да Винчи: тезисы докладов XVIII Международных чтений, Минск, 20–21 ноября 2002 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2002. – С. 103–106.

18–А. Михайлова, Н.В. Эпистемологические проблемы современного математического знания / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 1. – С. 124–129.

19–А. Михайлова, Н.В. Метод дополнительности и философский анализ современной математики / Н.В. Михайлова // Многоступенчатое университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению: материалы четвертой Междунар. научно-практ. конф., Минск, 15–16 мая 2003 г. / ЦПРО БГУ. – Минск: Пропилеи, 2003. – С. 281–287.

20–А. Михайлова, Н.В. Теоремы Гёделя и программа Гильберта / Н.В. Михайлова // Еругинские чтения – IX: тезисы докладов Междунар. математ. конф., Витебск, 20–22 мая 2003 г. / ВГУ им. П.М. Машерова; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Витебск, 2003. – С. 209–210.

21–А. Михайлова, Н.В. Социокультурные проблемы формирования математического знания / Н.В. Михайлова // Народная асвета. – 2003. – № 2. – С. 3–5.

22–А. Михайлова, Н.В. Фундаменталистский и нефундаменталисткий подходы в философии математики / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Блез Паскаль: тезисы докладов XIX Международных чтений, Минск, 26–27 ноября 2003 г. / БГУИР; редкол.: А.Ф. Апорович [и др.]. – Минск, 2003. – С. 84–87.

23–А. Михайлова, Н.В. Стандарты строгости математических рассуждений и проблема вычислительной сложности / Н.В. Михайлова // Образовательные технологии в подготовке специалистов: сборник научных статей: в 5 ч. / МГВРК. – Минск, 2003. – Ч. 4. – С. 64–70.

24–А. Михайлова, Н.В. Проблема двойственности науки: вычисление или рассуждение? / Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2004. – № 2. – С. 80–88.

25–А. Михайлова, Н.В. Дуализм методологического подхода Гёделя и реалистические традиции математического образования / Н.В. Михайлова // Инженерно-педагогическое образование: проблемы и пути развития: сборник научных статей: в 2 ч. / МГВРК; под общ. ред. Н.А. Цырельчука. – Минск, 2004. – Ч. 2. – С. 179–184.

26–А. Михайлова, Н.В. О границе между интуитивным и формальным: иллюзия методологической целостности / Н.В. Михайлова // Философы XX века: Хосе Ортега-и-Гассет: материалы Респ. чтений – 9, Минск, 28 января 2004 г. / РИВШ БГУ; редкол.: Я.С. Яскевич [и др.]. – Минск, 2004. – С. 56–59.

27–А. Михайлова, Н.В. Эволюция современного математического знания и пределы правоты сознания / Н.В. Михайлова // Народная асвета. – 2004. – № 8. – С. 8–10.

28–А. Михайлова, Н.В. Неклассические тенденции в обосновании современного математического знания / Н.В. Михайлова // Современные проблемы науки и образования: материалы 5-й Междунар. междисциплинарной научно-практ. конф., Алушта, 30 апреля – 10 мая 2004 г. / ХНУ им. В.Н. Каракозова. – Харьков, 2004. – С. 13.

29–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологические программы интуиционизма и формализма в математике / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Жорес Алфёров: тезисы докладов XX юбилейных Междунар. чтений, Минск, 24–25 ноября 2004 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2004. – С. 158–161.

30–А. Михайлова, Н.В. Методология математики до и после программы Гильберта / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 2/3. – С. 110–114.

31–А. Михайлова, Н.В. Постнеклассическое знание и методологические проблемы компьютерной математики / Н.В. Михайлова // Философы XX века: Вячеслав Степин: материалы Респ. чтений – 10, Минск, 18 ноября 2004 г. / РИВШ; редкол.: Я.С. Яскевич [и др.]. – Минск, 2005. – С. 95–97.

32–А. Михайлова, Н.В. Фундаментальные двойственности математического знания и философско-методологический синтез / Н.В. Михайлова // Понтрягинские чтения – XVI: тезисы докладов XIX Воронежской весенней математической школы "Современные методы в теории краевых задач", проводимой в честь 100-летнего юбилея академика С.М. Никольского, Воронеж, 2–9 мая 2005 г. / ВГУ, МГУ, ИМ РАН. – Воронеж, 2005. – С. 109–110.

33–А. Михайлова, Н.В. Рационализм и иррационализм математического знания в контексте методологии образования / Н.В. Михайлова // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2005. – № 3. – С. 3–8.

34–А. Михайлова, Н.В. Тринитарный подход к оценочным суждениям о природе математического знания / Н.В. Михайлова // Актуальные проблемы радиоэлектроники: научные исследования, подготовка кадров: сборник научных статей: в 3 ч. / МГВРК; под общ. ред. Н.А. Цырельчука. – Минск, 2005. – Ч. 3. – С. 239–244.

35–А. Михайлова, Н.В. Проблема понимания математического знания: Кантор – Витгенштейн – Гёдель / Н.В. Михайлова // Современные проблемы преподавания математики и информатики: материалы Междунар. научной конф., посвященной 100-летию академика С.М. Никольского, Москва, 4–8 мая 2005 г.: в 2 ч. / МГУ. – М., 2005. – Ч. 1. – С. 136–137.

36–А. Михайлова, Н.В. Мезомир науки и онтологические основания математики / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2005. – № 4. – С. 106–112.

37–А. Михайлова, Н.В. Конструктивные аспекты обоснования университетской математики / Н.В. Михайлова // Четвертые научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 85-летию со дня рождения Ю.С. Богданова: тезисы докладов Междунар. математ. конф., Минск, 7–9 декабря 2005 г. / БГУ, Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2005. – С. 156–157.

38–А. Михайлова, Н.В. Проблема рационального конструирования фундаментальных математических структур / Н.В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ; редкол.: В.Т. Мануйлов (отв. ред.) [и др.]. – Курск, 2005. – Вып. 4. – С. 43–55.

39–А. Михайлова, Н.В. Философские проблемы обоснования научного знания в современной математике / Н.В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2006. – № 1. – С. 49–54.

40–А. Михайлова, Н.В. Системный анализ математических концепций и теорий обоснования / Н.В. Михайлова // Понтрягинские чтения – XVII: тезисы докладов юбилейной XX Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач”, Воронеж, 3–9 мая 2006 г. / ВГУ, МГУ, ИМ РАН. – Воронеж, 2006. – С. 115–116.

41–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологические проблемы обоснования математики: к синтезу неформального и формального мышления / Н.В. Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2006. – № 1. – С. 32–35.

42–А. Михайлова, Н.В. Синтетичность математических истин и постгёделевские проблемы математики / Н.В. Михайлова // Проблема свободы личности и общества в социально-гуманитарном дискурсе: материалы

Всероссийской науч. конф., Курск, 16–17 мая 2006 г. / КГУ. – Курск, 2006. – С. 387–391.

43–А. Михайлова, Н.В. Гносеологические возможности математики / Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2006. – № 2. – С. 26–29.

44–А. Михайлова, Н.В. Принцип неполноты знания и проблема обоснования математики / Н.В. Михайлова // Еругинские чтения – XI: тезисы докладов Междунар. математической конф., Гомель, 24–26 мая 2006 г. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2006. – С. 166–167.

45–А. Михайлова, Н. “Мысли без содержания пусты…”: Математический мир и сознание / Н. Михайлова // Беларуская думка. – 2006. – № 5. – С. 95–100.

46–А. Михайлова, Н.В. Макс Планк и природа эффективности математики / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Макс Планк: тезисы докладов XXI Междунар. чтений, Минск, 23–24 ноября 2006 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2006. – С. 191–194.

47–А. Михайлова, Н.В. Философский анализ методологических концепций Гейзенберга и Гёделя / Н.В. Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2006. – № 4. – С. 58–61.

48–А. Михайлова, Н.В. “Умеренный скептический платонизм” в системной триаде программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ; редкол.: В.Т. Мануйлов (отв. ред.) [и др.]. – Курск, 2006. – Вып. 6. – С. 63–76.

49–А. Михайлова, Н.В. Естественный язык и язык математики в контексте идеи дополнительности / Н.В. Михайлова // Народная асвета. – 2006. – № 12. – С. 8–12.

50–А. Михайлова, Н.В. Синтезирующая триадическая структура программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Третьи Курдюмовские чтения “Идеи синергетики в естественных науках”: материалы Междунар. междисциплинарной научной конф., Тверь, 19–21 апреля 2007 г. / ТГУ. – Тверь, 2007. – С. 355–359.

51–А. Михайлова, Н.В. Загадка “непостижимой эффективности математики” и математический платонизм / Н.В. Михайлова // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2007. – № 1. – С. 12–18.

52–А. Михайлова, Н.В. Функции многих переменных / Н.В. Михайлова // Математика в примерах и задачах: учебное пособие для учащихся колледжей: в 6 ч. Ч. 3 / Л.И. Майсеня [и др.]; под общ. ред. Л.И. Майсеня. – Минск: МГВРК, 2007. – Гл. 18. – С. 224–278.

53–А. Михайлова, Н.В. Дифференциальные уравнения / Н.В. Михайлова // Математика в примерах и задачах: учебное пособие для учащихся колледжей: в 6 ч. Ч. 4 / Л.И. Майсеня [и др.]; под общ. ред. Л.И. Майсеня. – Минск: МГВРК, 2007. – Гл. 22. – С. 163–245.

54–А. Михайлова, Н.В. Системный анализ как методологический подход в истории обоснования математики / Н.В. Михайлова // Леонард Эйлер и современная наука: материалы Междунар. конф., Санкт-Петербург, 14–17 мая

2007 г. / Санкт-Петербургский научный центр РАН; редкол.: Л.И. Брилевская [и др.]. – СПб., 2007. – С. 440–445.

55–А. Михайлова, Н.В. Психологические интенции тринитарного стиля философско-математического мышления / Н.В. Михайлова // Вышэйшая школа. – 2007. – № 2. – С. 38–42.

56–А. Михайлова, Н.В. Метафизические аспекты обоснования и проблема переусложненности математики / Н.В. Михайлова // Понтрягинские чтения – XVIII: тезисы докладов XXI Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач”, Воронеж, 3–9 мая 2007 г. / ВГУ, МГУ, ИМ РАН. – Воронеж, 2007. – С. 115–116.

57–А. Михайлова, Н.В. Проблема целостности познания в контексте рациональной сущности математического знания / Н.В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ; редкол.: В.Т. Мануйлов (отв. ред.) [и др.]. – Курск, 2007. – Вып. 8. – С. 83–94.

58–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологическое значение результатов Гёделя и структура математического мышления / Н.В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2007. – № 3. – С. 36–41.

59–А. Михайлова, Н.В. Философский и социальный аспекты инженерного образования / Н.В. Михайлова // Современная радиоэлектроника: научные исследования и подготовка кадров: сборник материалов: в 4 ч. / МГВРК; под общ. ред. Н.А. Цырельчука. – Минск, 2007. – Ч. 4. – С. 186–190.

60–А. Михайлова, Н.В. Теоретическая рефлексия математики в условиях возрастающей сложности науки / Н.В. Михайлова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2008. – № 1. – С. 161–166.

61–А. Михайлова, Н.В. Историко-методологическая проблема единства программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов III Междунар. конф., посвящ. 85-летию чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева, Москва, 25–28 марта 2008 г. / МФТИ. – М., 2008. – С. 507–508.

62–А. Михайлова, Н.В. Структурализм и математическая двойственность: границы математического познания / Н.В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ; редкол.: В.Т. Мануйлов (отв. ред.) [и др.]. – Курск, 2008. – Вып. 10. – С. 73–95.

63–А. Михайлова, Н.В. Математический платонизм и проблема внутренней непротиворечивости математики / Н.В. Михайлова // Философия науки. – Новосибирск, 2008. – № 1. – С. 80–90.

64–А. Михайлова, Н.В. Платонистская компонента системной триады программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Понтрягинские чтения – XIX: тезисы докладов XXII Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач”, Воронеж, 3–9 мая 2008 г. / ВГУ, МГУ, ИМ РАН. – Воронеж, 2008. – С. 145–147.

65–А. Михайлова, Н.В. Проблема обоснования математики в контексте философской идеи триадичности / Н.В. Михайлова // Вестник БГУ. Сер. 3. – 2008. – № 2. – С. 42–47.

66–А. Михайлова, Н.В. Теоретико-числовые и алгоритмические проблемы философии постгёделевской математики / Н.В. Михайлова // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сборник статей / КГУ; редкол.: Е.И. Арепьев (гл. ред.) [и др.]. – Курск, 2008. – С. 99–117.

67–А. Михайлова, Н.В. Философская компаративистика и проблема целостности математического знания / Н.В. Михайлова // Философия и социальные науки. – 2008. – № 4. – С. 33–38.

68–А. Михайлова, Н.В. “Аргумент Беркли” в контексте методологического обоснования математического знания / Н.В. Михайлова // Университетское образование: опыт тысячелетия, проблемы, перспективы развития: тезисы докладов II Междунар. конгресса, Минск, 14–16 мая 2008 г.: в 2 т. / МГЛУ; редкол.: Р.С. Пионова (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2008. – Т. 2. – С. 70–71.

69–А. Михайлова, Н.В. Философия математики в исторической эволюции направлений развития фундаментальной науки / Н.В. Михайлова // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. гум. і грам. навук. – 2008. – № 4. – С. 13–20.

70–А. Михайлова, Н.В. Проблема целостности философских программ обоснования современной математики / Н.В. Михайлова // XII Междунар. научная конф. им. академика М. Кравчука: материалы конференции, Киев, 15–17 мая 2008 г.: в 2 т. / НТУУ “КПИ”. – Киев, 2008. – Т. 2. – С. 270.

71–А. Михайлова, Н.В. Образовательная функция философско-методологических исследований по математике / Н.В. Михайлова // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Междунар. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г.: в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 144–145.

72–А. Михайлова, Н.В. Философско-математическое познание и его духовное содержание / Н.В. Михайлова // Адукацыя і выхаванне. – 2008. – № 10. – С. 55–61.

73–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологический синтез в рациональном обосновании современной математики / Н.В. Михайлова // Мировоззренческие и философско-методологические основания инновационного развития современного общества: Беларусь, регион, мир: материалы Междунар. научной конф., Минск, 5–6 ноября 2008 г. / Институт философии НАН Беларуси. – Минск: Право и экономика, 2008. – С. 147–149.

74–А. Михайлова, Н.В. Компаративистская методология в философско-математическом познании // Великие преобразователи естествознания: Игорь Курчатов: тезисы докладов XXII Междунар. чтений, Минск, 27–28 ноября 2008 г. / БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2008. – С. 143–144.

75–А. Михайлова, Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики: монография / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2008. – 332 с.

76–А. Михайлова, Н.В. Системная триада философско-методологических программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Философия науки. – Новосибирск, 2009. – № 1. – С. 104–117.

77–А. Михайлова, Н.В. Основания математики как предмет философско-методологической рефлексии / Н.В. Михайлова // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сборник статей / КГУ; редкол.: Е.И. Арепьев (гл. ред.) [и др.]. – Курск, 2009. – Вып. 2. – С. 104–111.

78–А. Михайлова, Н.В. Математические структуры и фундаментальная двойственность научного познания / Н.В. Михайлова // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 1. – 2009. – № 3. – С. 94–99.

79–А. Михайлова, Н.В. Эффективность “работающей математики”: философские подходы к обоснованию / Н.В. Михайлова // Понтрягинские чтения – XX: тезисы докладов XXIII Воронежской весенней математической школы “Современные методы в теории краевых задач”, Воронеж, 3–9 мая 2009 г. / ВГУ, МГУ, ИМ РАН. – Воронеж, 2009. – С. 126–127.

80–А. Михайлова, Н.В. Финитизация бесконечного в современной неклассической математике / Н.В. Михайлова // Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей / КГУ; редкол.: В.Т. Мануйлов (отв. ред.) [и др.]. – Курск, 2009. – Вып. 12. – С. 111–132.

81–А. Михайлова, Н.В. Методологическая проблема единства философских программ обоснования математики / Н.В. Михайлова // Философия и социальные науки. – 2009. – № 3. – С. 68–72.

82–А. Михайлова, Н.В. Философско-математические традиции обоснования в контексте инженерно-технического образования / Н.В. Михайлова // Якісна освіта XXI століття: проблеми і пошуки: збірнік матеріалів Всеукр. науково-методич. конф., 14 березня 2009 р.: у 2 т. / ДонНУ. – Донецьк, 2009. – Т. 1. – С. 86–94.

83–А. Михайлова, Н.В. Онтологическая неопределенность в формировании естественного пространства философии математики / Н.В. Михайлова // Чалавек. Грамадства. Свет. – 2009. – № 4. – С. 11–16.

84–А. Михайлова, Н.В. Рациональная сущность платонистской компоненты в системной триаде обоснования / Н.В. Михайлова // Философия и рациональность в культуре глобализирующегося мира: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–23 октября 2009 г. / БГУ; редкол.: А.И. Зеленков [и др.]. – Минск, 2009. – С. 162–164.

85–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологические основания постгёделевской математики: монография / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2009. – 198 с.

86–А. Михайлова, Н.В. Тринитарная методология в философском анализе программы обоснования математики / Н.В. Михайлова // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. 1. Філасофія. Паліталогія. Сацыялогія. – 2010. – № 2. – С. 36–43.

87–А. Михайлова, Н.В. Тринитарный подход к проблеме обоснования: мировоззренческая идея Роджера Пенроуза / Н.В. Михайлова // Информационно-образовательные и воспитательные стратегии в современном обществе: национальный и глобальный контекст: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 12–13 ноября 2009 г. / Институт философии НАН Беларуси; редкол.: Т.И. Адуло [и др.]. – Минск: Право и экономика, 2010. – С. 148–151.

88–А. Михайлова, Н.В. Логика: практикум для студентов специальности 1-08 01 01 – "Профессиональное обучение" и учащихся специальностей 2-40 01 01 – "Программное обеспечение информационных технологий", 2-40 02 02 – "Электронные вычислительные средства", 2-41 01 31 – "Микроэлектроника" / Н.В. Михайлова. – Минск: МГВРК, 2010. – 80 с.

89–А. Михайлова, Н.В. Историческая эволюция философских представлений о единстве современного математического знания / Н.В. Михайлова // Довгирдовские чтения – 1: эпистемология и философия науки: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 14 мая 2010 г. / Институт философии НАН Беларуси; редкол.: Т.И. Адуло [и др.]. – Минск: Право и экономика, 2010. – С. 155–158.

90–А. Михайлова, Н.В. "Невероятная эффективность" как практическая составляющая философско-методологического обоснования математики / Н.В. Михайлова // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. 1. Філасофія. Паліталогія. Сацыялогія. – 2011. – № 2. – С. 25–30.

91–А. Михайлова, Н.В. Философско-концептуальный уровень структурного проектирования новых компьютерных систем / Н.В. Михайлова // Философия в Беларуси и перспективы мировой интеллектуальной культуры: материалы Междунар. науч. конф. к 80-летию Института философии НАН Беларуси, Минск, 14–15 апреля 2011 г. / Институт философии НАН Беларуси; редкол.: А.А. Лазаревич [и др.]. – Минск: Право и экономика, 2011. – С. 190–192.

92–А. Михайлова, Н.В. Тернарный опыт обоснования современной математики в теоретико-познавательном контексте / Н.В. Михайлова // Седьмые Курдюмовские чтения "Синергетика в естественных науках": материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи, Тверь, 14–17 апреля 2011 г. / ТГУ. – Тверь, 2011. – С. 74–78.

93–А. Михайлова, Н.В. О системном подходе к обоснованию непротиворечивости современной математики / Н.В. Михайлова // Великие преобразователи естествознания: Мария Склодовская-Кюри: тезисы докладов XXIII Международных чтений, Минск, 21–22 апреля 2011 г. / Мин. обр. Республики Беларусь, БГУИР; редкол.: И.Ф. Габрусь [и др.]. – Минск, 2011. – С. 115–117.

94–А. Михайлова, Н.В. Практическая достоверность философско-методологического обоснования математики / Н.В. Михайлова // Математическое образование: концепции, методики, технологии: сборник трудов V Междунар. науч. конф. "Математика, образование, культура" (к 75-летию В.М. Монахова), Тольятти, 26–28 апреля 2011 г.: в 3-х ч. / ТГУ. – Тольятти, 2011. – Ч. 2. – С. 92–96.

95–А. Михайлова Н.В. Онтологическая неопределенность философии современной математики / Н.В. Михайлова // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. – Новосибирск, 2012. – № 2. – С. 29–35.

96–А. Михайлова, Н.В. Философско-методологический анализ целостности современной математики: образовательный контекст / Н.В. Михайлова // Математика и информатика в естественнонаучном и гуманитарном образовании: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 20–21 апреля 2012 г. / БГУ; редкол.: В.А. Еровенко (отв. ред.) [и др.]. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – С. 86–89.

97–А. Михайлова, Н.В. Принцип системности и философско-методологический синтез направлений обоснования математики / Н.В. Михайлова // Философия науки. – Новосибирск, 2012. – № 3. – С. 92–104.

98–А. Михайлова, Н.В. Логическая компетентность как интеллектуальная основа профессиональной подготовки студентов / Н.В. Михайлова // Инженерно-педагогическое образование: проблемы и пути развития: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 17–18 мая 2012 г.: в 2-х ч. / МГВРК; под общ. ред. С.Н. Анкуды. – Минск, 2012. – Ч. 1. – С. 89–91.

99–А. Михайлова Н.В. Философия математического познания и проблемы компьютерного образования / Н.В. Михайлова // Alma mater (Вестник высшей школы). – М., 2012. – № 6. – С. 24–29.

100–A. Michailova, N.V. Aesthetic function of modern mathematics / N.V. Michailova // Problem based learning and multidisciplinary approach in managerial studies: Selected articles: International Scientific Practical Conference / Kauno Kolegija University of Applied Sciences. – Kaunas, 2012. – P. 78–82.