МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАТОНИЗМ И ПРОБЛЕМА ВНУТРЕННЕЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ МАТЕМАТИКИ

Н.В. Михайлова

Насколько реальны объекты «математического мира»? Математические объекты представляют собой мысленные идеализации, созданные математиками и отражающие «кажущийся порядок» окружающего нас мира. Как это соотносится с тем, что реальность не ограничена пределами математического мышления? Платон предполагал, что математические объекты существуют во вневременном смысле, поэтому такую точку зрения философы называют математическим платонизмом.

Развитие математики на Древнем Востоке остановилось на идеализации математических представлений о числах, точках, прямых и т.д. Соответствующие понятия определились и надолго стали общепринятыми. Греческой философии мы обязаны появлением математического метода, когда стали исследовать не непосредственные природные объекты, а некоторое представление о них как о субъективно воспринимаемой реальности. Феномен рождения математического метода по-разному оценивался различными философами. Изучая математику, Платон пришел к выводу, что существует два мира: мир идей (строгий, упорядоченный и гармоничный) и мир вещей (несовершенный, неточный и хаотичный). Согласно его учению каждая реальная вещь – это лишь приближенная реализация ее «идеи». Идеи реальнее действительности – вот что было основой учения Платона, и в соответствии с этим математика у него становится реальнее действительности.

У Платона было совершенно фантастическое представление о природе математического исследования, до сих пор будоражащее воображение математиков и философов. Согласно Платону, душа человека, занимающегося математикой, обитавшая до его рождения в мире идей, в своей земной жизни постепенно вспоминает тот опыт, который она уже ранее обрела в другой жизни. Из-за недостаточности математических оснований, доступных философии его времени, Платон изменил представление о природе математического метода, предпочтя конечный результат развития математических теорий принять за исходную позицию. Сегодня принято называть платонизмом любую философскую позицию, в рамках которой система идеальных объектов человеческой мысли трактуется как особый, независимо существующий мир.

Платонистское отношение к математическим объектам своего исследования неизбежно для работающего математика. Он оперирует с абстрактными объектами как с некой реальностью, составляющей некоторое подобие мира, за которым нет «более подлинной» реальности. Когда математик, не имеющий достаточной философской подготовки, берется за решение методологических вопросов, за объяснение природы своих результатов, он невольно привносит в рассуждения элементы платонизма. Даже тайны творческой силы работающих математиков искали в платонизме. Специфичность математического творчества касается прежде всего математической убедительности, которую традиционно было принято отождествлять с потенциальной убедительностью, понимаемой как истинность. Многие математики не могут отделаться от некоторых суеверий, берущих начало от Пифагора и своеобразно воспринятых текстов Платона и поэтому получивших в современной философии «негативное» название «платонизм». Математические понятия существуют, как им казалось, если не в нашем мире, то в мире «более высокого порядка», более реальном, чем наш мир.

В духе концепции «математического платонизма» истинной считалась теория, которая соответствовала чему-то определенному, существующему вне нас. Однако со временем акценты в определении истинности изменились, поскольку сам собой возник довольно коварный вопрос: а что значит «соответствует»? Есть и другой взгляд на эту проблему, согласно которому платонизмом индуцируется взгляд на математику как на естественную науку, а потому и математическое творчество – это поиск объективно предзаданного результата. Фактически абстрактная математика – это отчасти эмпирическое исследование некоторых аспектов природного мира, точнее, той его части, которая отражается в определенной коммуникативной деятельности по созданию новых форм, осуществляемой сообществом математиков и позволяющей оперировать ими же созданными формальными объектами. Однако каким бы ни было научное знание, если оно принадлежит миру идей и имеет онтологический статус, то ему должно найтись место в понимании устройства Вселенной.

Принято считать, что платонизм – это тот взгляд, которого подсознательно придерживаются большинство математиков, не занимающихся профессионально вопросами обоснования. Анализ платонизма важен для понимания формирования математического знания, а также исторических тенденций и закономерностей развития современной математики. Об этом писал К. Гедель: «Несмотря на отличие от чувственного опыта, мы имеем нечто сходное с ощущением при восприятии теоретико-множественных объектов, как видно из того факта, что аксиомы воздействуют на нас как существующая истина. Я не вижу никакой причины доверять этому роду ощущений, то есть математической интуиции, менее, чем чувственным ощущениям… Они также могут представлять некоторый аспект объективной реальности» [1].

Математика XVII–XVIII вв. развивалась людьми разного социального положения, в частности юристом П. Ферма, университетским профессором И. Ньютоном, придворным и дипломатом Г. Лейбницем. Только в XIX в. произошла трансформация интеллектуальных дисциплин в профессию, что, по мнению крупнейшего специалиста в области функционального анализа Ф. Браудера, явилось следствием двух важнейших социально-исторических процессов: промышленно-технологической революции и изменения положения университетов в Западной Европе. Расширение математических исследований и выделение математики как профессии способствовали также организации математических сообществ. Кроме того, следует отметить, что социальные и психологические факторы стали существенно влиять и на оценку новых математических теорий. В разное время на протяжении всей истории науки со стороны общества превалировало либо утилитарное отношение к математике, либо восприятие ее как разновидности магии. Математики, по-видимому, все же воспринимают свой предмет в дополнительном смысле к указанным точкам зрения. Например, историю математики можно рассматривать и как историю преодоления психологических трудностей.

Определенная жесткость и консерватизм математических объектов традиционно рассматриваются как их исключительная привилегия по сравнению, например, даже с физическими объектами. В XIX в. господствовало убеждение, высказанное И. Кантом, что логика есть полностью завершенная наука. Согласно распространенным тогда представлениям, логика фактически включала три раздела: формальную логику, рассматривающую основные законы и формы мышления; прикладную логику, занимающуюся методами научного исследования; теорию познания, исследующую связь между мышлением и действительностью. Примечательно то, что последовавшая затем эпоха бурного развития классической логики вплоть формулирования Геделем ограничительных теорем в начале 30-х годов XX в. совпала с появлением и развитием различных неклассических направлений в логике. Однако применение классической логики в компьютерных науках оказалось настолько плодотворным и впечатляющим, что ряд новых феноменов логического универсума остался без должного внимания.

После работ Геделя стало ясно, что не существует общего метода для определения того, истинно ли или ложно произвольно взятое математическое утверждение. Если предположить, что такой метод существует, то тогда можно было бы доказать все истинные утверждения, а Гедель показал, что в рамках непротиворечивой системы аксиом, охватывающей аксиомы арифметики, такое доказательство провести невозможно. Поэтому с точки зрения математической логики целесообразнее говорить не об истинности, а о доказуемости. В таком контексте можно говорить о некоторой аналогии с проблемой разрешимости Гильберта: «…Существует ли единственный метод, при помощи которого, исходя из множества логических аксиом, можно доказать все доказуемые логические утверждения?» [2]. Кроме Геделя наиболее весомый вклад в исследование вопроса логической доказуемости внес А. Черч. Он нашел логическое выражение, которое в разработанном им непротиворечивом формальном языке было недоказуемо.

Философия математики пытается также разрешить фундаментальные проблемы, связанные с эпистемологическим статусом математических утверждений и онтологическим статусом соответствующих им математических объектов. При решении эпистемологических вопросов приходится рассматривать главный онтологический вопрос о существовании математических объектов и природе математических сущностей. Этот вопрос кажется сложным из-за распространенного в западной философии на протяжении многих столетий предположения, что в мире существует только два типа вещей: «если не физическое, то тогда умственное» и «если не умственное, то тогда физическое». Г. Фреге показал, что математика не является ни физической, ни умственной. Он объяснил это, указав на наличие третьего типа вещей – «абстрактных объектов», про которые он ничего существенного не мог сказать, за исключением того, что они не физические и не умственные.

Справедливости ради следует отметить, что система формальных правил Фреге порождает логические истины в строгом математическом смысле, соответствующем лейбницевскому понятию «истинности во всех возможных мирах». Даже сегодня система Фреге все еще остается первым убедительным примером обработки нечисловых данных механическими средствами – в том смысле, в каком «теории формальных правил» называют теперь «программами для компьютеров». Умственными являются индивидуальное сознание, желания, восприятия, страхи, личные мысли и т.д., а физическое – это, например, то, что заполняет пространство и может быть изучено научными методами. Можно привести примеры и того, что не является ни умственным, ни физическим, – это музыкальные и литературные произведения, религии, академии наук, университеты. Для университета физическое и мысленное воплощения необходимы, но его существование не исчерпывается ими. Это также и социальный институт, поэтому умственного и физического воплощений недостаточно для его полного описания.

Антифундаменталистская трактовка математики была дана Л. Витгенштейном. Он воспринимает математические символы и их комбинации как объекты реального мира, а правила игры с символами – как правила действия с предметами физического пространства. Именно такой подход лежит в основе того способа, посредством которого была сформулирована теорема Геделя о неполноте. Интерес Геделя к этой тематике следует иметь в виду при оценке того, что называют его «платонизмом». Двойственность подхода Геделя состоит в том, что, с одной стороны, он не сомневался в возможности существования части математики, изучающей свои собственные конструкции, а с другой стороны, он не считал эту часть наиболее полезной для самой математики и уж тем более не отождествлял ее с математикой в целом. Геделя называют иногда «крайним платонистом» в связи с его известным высказыванием о том, что «математические сущности» доступны интуиции математика точно так же, как физические объекты доступны чувственному восприятию.

Можно предположить, что в мире существует не два, а три основных типа вещей: мысленные, физические и социальные. Иногда целесообразно рассматривать математику и как социальную сущность, поскольку сами математики никогда не были «изолированными отшельниками», несмотря на их стремление к автономии. По мнению Р. Коллинза, это можно выразить с помощью «квазиматематического cogito»: «если я отрицаю, что математическое утверждение должно существовать в форме какого-то конкретного типа дискурса, то в самом этом высказывании я представляю утверждение о некотором дискурсе» [3]. Поэтому математика имеет социальную реальность в том смысле, что она является дискурсом в некотором социальном обществе. Социальный характер математики на первый взгляд кажется тривиальным фактором, свойственным всему человеческому знанию. Тем не менее философы и историки науки различают «внутреннюю историю науки» и «внешнюю историю науки».

Внутренняя история включает те события, которые можно реконструировать с помощью критерия научной рациональности. Эпизоды внешней истории науки в отличие от внутренней не подвергаются «рациональной реконструкции». Поэтому при исследовании внешней истории математического знания на помощь могут быть призваны социальные и культурные аргументы. Историками и философами науки признается тот факт, что в последней четверти XIX столетия в математике появилась новая тенденция к осмыслению и систематизации накопленного материала. В указанный период произошло «расщепление» в математическом бытии и математическом сознании, что способствовало возникновению подлинной философии математики. Специалист по квантовым компьютерам и квантовым вычислениям Д. Дойч считает фундаментальной ошибкой относительно природы математики, допускаемой с античных времен, то, что «математическое знание более определено, чем какая-либо другая форма знания». Такая ошибка не оставляет другого выбора, кроме как считать теорию доказательств частью математики.

Доказательства не абстрактны, поэтому их нельзя считать только областью математики. В отношении явлений, связанных с математическими доказательствами, возникает много философских вопросов в контексте акта «принятия доказательства», тесно связанного с представлениями о стандартах строгости математических рассуждений. Доказательство становится таковым только в результате некоего социального акта принятия доказательства математическим сообществом. Математик доказывает утверждение, даже построение контпримера рассматривается им как частный случай доказательства. Хотя встречающиеся иногда в математическом доказательстве конструкции типа «аналогично предыдущему…» и «очевидно, что…» чаще всего являются указаниями на пробел в доказательстве или источниками ошибок, неточностей, заблуждений. Наиболее показательным примером творческого развития в математике является создание математического анализа. В современных вузовских учебниках он излагается совсем не так, как излагали его создатели вплоть до конца XVIII в.

Напомним, что основными понятиями математического анализа являются понятия множества, функции, определяемой через множество, последовательности, определяемой через функцию, и предела. Роль понятия «множество» в математике была осознана лишь во второй половине XIX в. В процессе размышления над логическими основами математики и ее структурой осознавалась важность понятия множества, особенностью которого, в частности, является то, что оно не требует вычислений. Кроме того, считая эквивалентными любые два множества, для которых существует взаимно однозначное соответствие, теория множеств не принимает во внимание природу элементов этих множеств. С одной стороны, это позволило применить фундаментальные результаты математики к разнообразным объектам, равнозначным с точки зрения теории множеств, а с другой стороны, приходилось постоянно преодолевать сомнения насчет того, насколько содержательны полученные утверждения и теоремы. Долгое время не было сомнений и насчет функций, – считалось, что это либо аналитическое выражение, либо непрерывная кривая.

Практически никто не замечал аналогий между функцией и последовательностью, основанной на идее бесконечного продолжения элементов. Больше всего расхождений в математике конца XVII–XVIII в. было по поводу определения предела и понятий актуально бесконечно малых величин. Так что в начале XIX в. критически мыслящие математики стали изгонять бесконечно малые, заменяя их «ε-δ-формулировками», не желая «приносить строгость в жертву успеху». Вообще говоря, ε-δ-анализ не отражает полностью исходные идеи исчисления бесконечно малых, так как некоторые понятия, в которых бесконечно малые количества качественно различаются, непереводимы в ε-δ-анализ, поэтому они не отражены в более современных разделах математики, например в функциональном анализе. С методической стороны, скажем, определение непрерывности функции на языке ε-δ, несмотря на его эффективность при доказательстве непрерывности отображений, весьма далеко от интуитивного представления о непрерывной кривой как «состоящей из одного куска».

Эти издержки абсолютизации появились в результате включения дотеоретико-множественной математики в теорию множеств. К сожалению, более простые подходы могут привести к логическим ошибкам. Однако отсюда не следует, что используемая в университетском математическом образовании теория непрерывности – это последнее слово в современной математике. Уже в XX в. благодаря новой технике в канторовской теории множеств нестандартный анализ Робинсона возродил понятие бесконечно малых по Лейбницу. Хотя математики XVIII в. дали много доказательств, ошибочных с точки зрения современной математики, ни одно из них не получило признания современников, т.е. математическое сообщество всегда действует безошибочно. Фактически математика всегда была строгой наукой вне зависимости от исторических идеалов строгости и изменений ее критериев.

Социальное одобрение играло в математике определенную роль «гносеологической санкции». К середине XIX в. стало неприличным пользоваться актуально бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, а уровень строгости математических доказательств поднялся настолько, что превзошел лучшие образцы древнегреческой математики и спровоцировал появление математической логики. Вскоре благодаря результатам, полученным в математической логике, выяснилось, что многие понятия, используемые в строгих математических рассуждениях, не имеют прямых интерпретаций. Поэтому они относятся скорее к идеальным понятиям, как, например, понятие действительного числа, предполагающее бесконечную последовательность уточняющих приближений рациональными числами. После их осознания идеальные понятия стали предметом изучения не только в философии, но и в процессах творческого мышления. Следует ли поэтому удивляться, что среди математиков популярна точка зрения Платона о первичности идеальных понятий?

Некоторые математики стремятся найти собственное решение указанной проблемы, строя доказательства в соответствии со своими философскими и методологическими принципами, сознательно преодолевая в себе остатки стихийного математического платонизма. Платонистский взгляд на математические истины, согласно которому они не зависят не только от индивидуального, но и от социального сознания, отвергал и Л. Витгенштейн. Возникающие в математике противоречия, по Витгенштейну, не являются онтологическими противоречиями бытия, а представляют собой результат человеческой деятельности, создавшей эти противоречия. Поэтому проблемы оснований математики суть не онтологические проблемы, а проблемы деятельности, поскольку логические и математические системы – это, по существу, наши конструкции. Последнее слово является ключевым в понимании витгенштейновской психотерапии страха математиков перед скрытыми противоречиями.

Отвечая на вопрос о том, зачем математике нужно обоснование, Витгенштейн говорил: «Я полагаю, оно нужно ей не более, чем предложениям, повествующим о физических предметах или же о чувственных впечатлениях, – нужен их анализ... Математические проблемы так называемых оснований в столь же малой степени лежат для нас в основе математики, в какой нарисованная скала несет на себе нарисованную крепость» [4]. Математика не только учит по-новому оперировать понятиями, но и изменяет нашу понятийную деятельность, когда математическое предложение принято за постулат либо когда оно доказано. Мысль о прямой связи между формами языка, культуры и мышления стала толчком для разработки Э. Сепиром и Б. Уорфом гипотезы о лингвистической относительности, в соответствии с которой не реальность определяет язык, на котором о ней говорят, а наоборот, реальность опосредована языком. Согласно их мнению люди в значительной мере находятся под влиянием того языка, который является средством общения.

Нельзя полностью осознать действительность, не прибегая к помощи языка как средства разрешения частных проблем общения и мышления. По мнению Сепира и Уорфа, не только «мыслительный», но и «реальный» мир в определенной степени бессознательно строится на основе языковых форм выражения. С точки зрения «концептуальной относительности» даже наличие несовместимых описаний не ведет к упразднению реальности. Например, в квантовой механике имеется два дополнительных описания: через состояние поля и через состояние частицы с помощью диаграмм Фейнмана. Тем не менее нельзя утверждать, что описываемые этими двумя способами миры различные, поскольку описываемая реальность зависит от способа ее описания. Предположение о математическом происхождении некоторого утверждения делается не только потому, что оно является истинным, но также и потому, что оно воспринимается нами как таковое. Именно так строит свои отношения с математической истиной Витгенштейн, поскольку соответствие между фактом или событием и языковым выражением, описывающим их, невозможно полностью объяснить в логически безупречных терминах.

Одну из трактовок математики, отрицающих фундаменталистскую обоснованность с помощью очевидных аксиом, дал И. Лакатос. Согласно евклидовому идеалу математической теории она начинается с проверки истинности некоторой системы исходных положений или аксиом, из которой вытекает истинность остальных, дедуктивно выводимых новых утверждений. Но затем у математиков возникла новая потребность в доказательстве внутренней непротиворечивости – чтобы удостовериться в том, что «тривиально истинные аксиомы» не противоречат друг другу. С другой стороны, указанная потребность способствовала постановке в философии математики следующей фундаментальной проблемы: действительно ли формальные аксиоматические системы теории множеств являются достаточно общими конструкциями, чтобы охватить всю математическую интуицию, которая в определенном смысле не совпадает с любым множеством формализованных выражений, выдаваемых за ее отражение?

Например, ни одна из рассматривавшихся до сих пор формальных систем не адекватна тому представлению о бесконечном, которого бессознательно придерживаются математики. Хотя это важные проблемы философии математики, они потенциально представляют и значительный математический интерес. Современные математики не соотносят понятие истины только с аксиомами, при том, что убедительность теорем все же связана с приемлемостью абстрактных систем изначальных утверждений, поэтому такой идеал теории иногда называют квазиевклидовым. С точки зрения Лакатоса, живая наука начинается не с оснований или принципов, а с непосредственно проверяемых утверждений. В философии математики Лакатоса преобладает тенденция развеять миф об исключительности и непогрешимости математического знания и сблизить его с содержательным знанием. Мы никогда не знаем, мы только догадываемся. Мы можем превращать наши догадки в объекты критики и совершенствовать их.

Не вдаваясь в философское обсуждение того, что есть истина, заметим, что в математике достаточно принять, что существуют такие исходные и неопределяемые понятия, как «истина» и «ложь», которые могут быть значениями высказываний. Как только математики пытаются предложить другие значения, дополнительные к этим, например, «неизвестность» или «неопределенность», так они сразу вынуждены преодолевать трудности, возникающие в связи с тем, что степеней неизвестности много и поэтому сама по себе она не является логическим значением. Философия математики, считает Р. Херш, «запоздала для анализа того, чем в действительности занимаются математики, и для философских выводов в этом отношении» [5]. Витгенштейн и Лакатос стремились в меру своих возможностей ликвидировать данный пробел.

В связи с этим Л. Лаудан заметил, что если рациональность состоит в том, чтобы верить только в то, относительно чего мы можем разумно предполагать, что оно является истинным, то наука была и всегда будет иррациональной. Математики XX в. активно и плодотворно используют в своих выводах теорию множеств, опираясь на нее при обосновании математики как на наиболее фундаментальную структуру, несмотря на различного рода парадоксы. Этот иррациональный факт философии математики имеет вполне рациональное объяснение в поведении математиков, поскольку внутренние проблемы теории не являются причиной отказа от нее, если она не исчерпала свои эвристические возможности.

Независимость сложных математических объектов в теории множеств от математика обеспечивает им платонистское существование. Гедель показал, что любая достаточно широкая формальная система аксиом и правил вывода, достаточная для описания арифметических теорем и свободная от противоречий, должна включать утверждения, которые не являются ни доказуемыми, ни недоказуемыми в рамках этой системы. Поэтому после результатов Геделя можно сказать, что различия между разными платонистскими течениями в математике, по существу, перестали волновать современную философию математики.

Примечания

1. Цит. по: *Демидов С.С.* "Проблемы" Д. Гильберта и математика XX века // Математика и практика. Математика и культура. – М.: Самообразование; Семигор, 2000. – С. 145.

2. Цит. по: *Хопкрофт Дж.* Машины Тьюринга // В мире науки: Scientific American. – 1984. – № 7. – С. 44.

3. *Коллинз Р.* Социальная реальность объектов математики и естествознание // Философия науки. – 2001. – № 2.(10) – С. 7.

4. *Витгенштейн Л.* Философские работы.– М.: Гнозис, 1994. – Ч. 2, кн. 1. –С. 180.

5. *Hersh R.* Fresh breezes in the philosophy of mathematics // American Mathematical Monthly. – 1995. – V. 102, No 7. – P. 590.

Минский государственный
высший радиотехнический колледж,
г. Минск, Беларусь

Michailova, N.V. **Mathematical platonism and the problem of internal consistency of mathematics**

The paper analyzes mathematical platonism which most mathematicians who do not deal professionally with the problems of grounds for mathematical knowledge unconsciously adhere to. Stated that if heuristic potentialities of the theory are not exhausted its internal problems do not account for giving it up.