УДК 140.8

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

© Н. В. Михайлова

Минский государственный высший радиотехнический колледж
Беларусь, 220005 г. Минск, пр. Независимости, 62.
Тел.: +375 (017) 331 89 45.
E-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Возросшая абстрактность современных математических теорий возродила интерес к традиционной философско-методологической проблеме о внутренне непротиворечивой системе аксиом, в которой нельзя вывести противоречащие друг другу утверждения. Если речь идет об аксиомах, описывающих хорошо известную область математических объектов, то с точки зрения локальной непротиворечивости эта проблема не представляется столь уж актуальной. Но с этой проблематикой связаны также различные попытки формалистов объяснить математическое существование через непротиворечивость. В статье показывается, что с системной точки зрения в контексте философско-методологического синтеза различных направлений обоснования современной математики можно не настаивать на исключительно логическом обосновании непротиворечивости математических теорий.

Ключевые слова: *философия математики, проблема непротиворечивости, программа формализма.*

Вопрос о непротиворечивости математических теорий до XIX века практически не возникал, так как считалось, что математические понятия отражают свойства реального мира, которые не могут быть противоречивыми. Но позже, благодаря формализации математических теорий, выяснилось что, например, непротиворечивость арифметики имеет большое значение для доказательства непротиворечивости других классических теорий. Поэтому проблема обоснования современной математики начала XX века в узком философском смысле состояла в избавлении от парадоксов теории множеств, а более широком смысле – в нахождении общих методологических принципов обоснования различных математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость.

Выход из создавшегося положения Давид Гильберт видел в применении аксиоматического метода, то есть, чтобы исследовать основания математики, следует выбрать систему аксиом, содержащую полное описание соотношений между элементарными понятиями математики. «Из многочисленных вопросов, которые могут быть поставлены относительно системы аксиом,– говорил Гильберт,– мне хотелось бы прежде всего указать на важнейшую проблему, именно на доказательство того, что система аксиом непротиворечива, т.е. что на основании этих аксиом никогда нельзя с помощью конечного числа логических умозаключений получить результаты, противоречащие друг другу» [1, с. 409]. История математики знает немало случаев, когда противоречивые понятия и теории, в частности становление и формирование обобщенных функций, были весьма продуктивными для развития математической науки. Например, анализ бесконечно малых Лейбница и дельта-функция Дирака, которые впоследствии на новом теоретическом фундаменте были обоснованы в рамках нестандартного анализа и современной теории обобщенных функций.

Методологический парадокс состоит в том, что реальный путь формирования понятия обобщенного решения, а затем и понятий обобщенных функций противоречит методологической установке Гильберта, согласно которой предметом математики является только непротиворечивая система. Но эвристический потенциал приложений новой теории оказался сильнее формальных методологических конструкций. Просто удивительно, что математическая мысль «пущенная в обход», приводит иногда к хорошим практическим результатам, как это случилось в обосновании этого физического формального объекта. Существенную роль при обосновании математических понятий и теорий играют идеи онтологического порядка. Их востребованность проявляется при рассмотрении теорий, радикально отличающихся от общепринятых. Например, когда возникают экстремальные познавательные ситуации, которые ведут к границам философско-математического понимания. Характерной особенностью метаматематики Гильберта является то, что философская рефлексия рассматривается в ней исключительно в математической перспективе. Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Гильберт выбрал новый путь для решения проблем обоснования. Программа перестройки оснований математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач.

Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории на основе «очищенной» от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода. Другая задача представляла собой радикально новую в то время философскую проблему – доказать непротиворечивость полученной теории. Гильберт первым понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Например, пересекаясь, хотя бы частично, с областью интуитивной математики, нельзя уже говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости математики, поскольку утверждение о непротиворечивости относится к множеству всех теорем, доказуемых в теории, то есть к совокупности, четкого определения которой мы как раз не имеем. Методология Гильберта сводилась к тому, чтобы, формализовав основные методы рассуждения в математике, установить их непротиворечивость путем анализа самого рассуждения. Ее специфика состояла в том, что объектом изучения стали не математические предметы, а рассуждения об этих предметах. Гильберт подвергает сомнению правомерность использования при доказательстве непротиворечивости некоторых классических методов математического доказательства, считая возможным вести доказательство в рамках специально разработанного учения.

Он предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, то есть сознательно ограничивал круг средств, которые считал допустимыми и надежными, хотя никогда не описывал и не фиксировал это ограничение в достаточно четкой форме. Как правило, в философско-математической литературе нет исчерпывающих комментариев о финитной установке, хотя Давид Гильберт подробно разъяснил ее на примере обычной арифметики: «Конечно, ее можно строить отдельно, конструируя числа с помощью содержательных наглядных соображений. Однако данная математическая наука никоим образом не исчерпывается числовыми равенствами и не сводится к ним одним. И, тем не менее, можно утверждать, что она является аппаратом, который в применении к целым числам должен всегда давать верные числовые равенства. Но тогда возникает обязанность исследовать строение этого аппарата настолько, чтобы в этом можно было убедиться. При этом в качестве подсобного средства в нашем распоряжении должен находиться только тот же самый конкретно-содержательный подход и тот же самый финитный способ мышления, которые в самом построении арифметики применялись для получения числовых равенств» [1, с. 440]. Это требование, считает он, в действительности выполнимо и его можно реализовать чисто наглядным и финитным способом, так же, как получаются сами арифметические истины, и такого рода рассмотрения будут гарантировать надежность математического аппарата.

Поскольку Гильберт все же не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, то, по-видимому, он надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся математическое рассуждение или нет. Программа математического формализма исходит из того, что непротиворечивость арифметики можно доказать финитными средствами, то есть такими, которые не содержат апелляций к актуальной бесконечности. Заметим, что вся финитная математика непротиворечива. Следует отметить, что методологические следствия теорем Гёделя зависят от различных толкований понятий «финитный», «конструктивный», «содержательный», которые приняты в обосновательной программе формализма. С точки зрения интуитивизма, даже при аксиоматическом изложении теории, реальное проникновение в суть непротиворечивости достигается с помощью интуитивных рассуждений, основанных на очевидности. Даже сам Гильберт был «строгим формалистом» в теоретической математике и в то же время «строгим интуиционистом» в метаматематике. Кроме того он пытался доказать интуиционистскими средствами, что сомнения интуиционистов излишни. Поэтому вовсе неслучайно вопросы, касающиеся арифметической сущности математики и обоснования математики с помощью аксиоматизации, были в центре внимания философов математики.

Процедура обоснования математики, согласованная с гильбертовскими идеализациями, предполагает формализацию математической теории с помощью содержательной «метатеории», которая, наряду с описанием структуры формализма, рассматривает принципы допустимой логики и соответствующие ей правила доказательства математических утверждений, так как математика обладает не только формальным, но и содержательным значением. Предмет математики составляют сами формальные системы, которые придумывают математики, а предмет метаматематики – описание таких формальных систем, выяснение и обсуждение их свойств. Метаматематику, например, можно охарактеризовать как содержательную математическую теорию, объектами которой являются символы, выражения и конструкции формальной системы, с помощью которых путем содержательного математического рассуждения доказывается непротиворечивость соответствующей формальной теории. Философский и методологический замысел Гильберта состоял в таком ограничении метатеоретических рассуждений математиков, чтобы, наконец, гарантировать их максимально возможную достоверность. Сам Гильберт считал, что метатеория должна иметь не чисто философское, а собственно внутриматематическое содержание, но современное состояние проблемы обоснования математики показывает, что понимание метатеории все же требует отказа от принципа отделения оснований математики от философии. Точнее речь идет об отказе от таких принципов метатеории, которые определяются исключительно на основе математических критериев, например, упомянутое требование финитности или ограничений на используемую в современной математике логику.

Философско-методологические установки гильбертовской математики Гёдель представил в виде следующих двух составных частей: «Во-первых, конструктивный элемент, который состоит в том, что речь о математических объектах может идти лишь постольку, поскольку они могут быть предъявлены или фактически построены. Во-вторых, специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были „наглядны", что означает в конце концов пространственно-временное сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественными» [2, с. 301]. Теоремы Гёделя относятся к метаматематике, хотя по формальному построению это логико-математическая работа. Так ее собственно и воспринимает большинство математиков и логиков. По существу гёделевские результаты дедуцируют необходимость отказа в гильбертовской математике от «финитистской компоненты» в доказательствах непротиворечивости, в соответствии с которой для знаковых комбинаций существенными оказываются только определенные свойства сходства и различия. Принято считать, что целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в основаниях с помощью чисто математических средств.

В действительности ее цель была скромнее из-за неявного предположения о том, что «реальны» лишь те задачи в основаниях, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. Заметим также, что финитная установка – это «весьма радикальное» направление в обосновании математики, считающее обоснованными и надежными только рассуждения о конечных совокупностях. Что же касается проблемы установления непротиворечивости анализа, решение которой прояснило бы судьбу теории доказательств, то она не решена до сих пор, как и проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Тем не менее, несмотря на отрицательные результаты Гёделя, принципы оснований математики Гильберта по-прежнему важны и интересны для современной математики. Главный шаг при размышлении о некоторой проблеме – это выбор идеи, которая сработает. Давид Гильберт, используя формализацию языка, предложил эффективный метод развития математики. Именно для надежного обоснования теоретико-множественной математики Гильберт предложил программу исследования математических доказательств методами новой математической дисциплины – метаматематики, или теории доказательств. Для него слово «доказательство» в его теории означало все же формальный дедуктивный вывод, реализуемый через конечную цепочку аксиоматически допустимых преобразований, соединяющую исходные предположения с выводом.

После того, как Давид Гильберт в «Основаниях геометрии» доказал совместимость выделенных им аксиом, для которых противоречия в дедуктивных выводах сказывались бы и на системе действительных чисел, вопрос непротиворечивости аксиоматики последней, с помощью понятий теории множеств, он свел к такому же вопросу для целых чисел. Поэтому возникла даже определенная эйфория от того, что удалось, наконец, поставить современную математику на надежный аксиоматический фундамент. Хотя как заключает Л. Б Султанова, «именно отсутствие финитных средств непротиворечивости формально-теоретического обоснования априорных элементов, в конечном счёте, и ограничивает формальнотеоретическое обоснование математики» [3, с. 233]. Критерий непротиворечивости, несмотря на его существенную роль в аксиоматических системах как формального, так и содержательного характера, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и математическая доказуемость. Если противоречия в математической теории проистекают из несовместимости ее основных методологических принципов, то их можно классифицировать как внутренние, а если они возникают из-за некорректности производных определений, то – как внешние противоречия, которые постепенно устраняются уточнением соответствующего математического формализма.

Чем более, например, физически востребована математическая теория, тем больше имеется оснований предполагать ее потенциальную защищенность от возможных противоречий. Если для каких-то целей физики используют какую-то новую математическую структуру, то веру в ее непротиворечивость они обретают изначально из ее употребления. Но, с точки зрения эволюции современных математических теорий, проблема непротиворечивости этим не решается, а только ставится. Большинство исследователей понимают под словом аксиоматизация вовсе не пересмотр основ всей математики, которые, вообще говоря, не имеют непосредственного отношения к их естественнонаучным интересам и поэтому не проблематизируют их в своих исследованиях. Но практическое применение основного для математики критерия непротиворечивости в естественнонаучной области имеет серьезные ограничения. Вопросы, нерешенной до сих пор проблемы непротиворечивости теории множеств, входят в обширную область трудных проблем теории познания, связанных с современной математикой. Характеризуя эту область, Гильберт упомянул о следующих пяти важнейших проблемах философии математики: принципиальной разрешимости каждого математического вопроса, дополнительной проверке результатов математического исследования, критериев простоты современных математических доказательств, соотношении содержательного и формального в математике и логике, разрешимости математических задач с помощью конечного числа операций. Именно требование, ограничивающее математические рассуждения финитными средствами, оказалось чрезмерно сильным и часто обсуждаемым философами, поскольку оно затрагивает сущность математического мышления. Оно методологически важно, так как, прикрываясь математической терминологией, иногда забывают о реальной цели, для которой все это делалось.

Выявляя наиболее существенные и важные черты имеющихся подходов к обоснованию, теперь нет необходимости сосредотачиваться только на одном пути обоснования, например, интуиционизма или формализма, отказываясь тем самым от других мощных приемов доказательства в математике, ограничивая и лишая практической силы теоретическую математику, использующую необычайной сложности структуры и множества. Глобальный теоретический вопрос проблемы обоснования математики оказался, в связи с развитием компьютерных вычислений, более приземленным практическим вопросом, а так как компьютерные вычисления ограничены математическими ресурсами, то в таком методологическом контексте более привлекательной выглядит идея локальной непротиворечивости. Вопрос о непротиворечивости математики, по мнению философа математики В. В. Целищева, можно рассматривать не только с точки зрения дедуктивной математики, но и как важнейший эмпирический вопрос. «Основанием для такого мнения служит то обстоятельство,– отмечает он,– что более теоретические ветви математики получают поддержку со стороны элементарных ветвей, которые, в свою очередь, принимаются благодаря приложениям» [4, с. 44]. Заметим, что когда математики еще не стремились использовать теоретико-множественные методы, убеждение Гильберта согласовывалось с имеющимся эмпирическим опытом, хотя это нельзя было признать за полноценное обоснование формальных систем математики. Вообще говоря, нельзя смешивать применение математической теории с самой этой теорией.

Однако оценку систем обоснования математики целесообразнее проводить по критерию полезности, а не по произвольному истолкованию на основе метафизических предпочтений. Именно формализация математики привела к более ясному осознанию природы самой математики, способствуя тем самым ее применению к нечисловым и непространственным объектам, например, к естественным и искусственным языкам и программам для вычислительных машин. Заметим, однако, что любая хорошая формализация неизбежно обедняет исследуемый объект и ради успешной работы игнорирует его многочисленные несущественные черты. Но с точки зрения аксиоматического типа мышления, повышение теоретического уровня строгости в формализованной математике было необходимым. Поэтому, помня о стоящей задаче, целесообразно использовать различные дополнительные виды формализации, которые, отличаясь друг от друга в отношении содержательной интерпретации, могут рассматриваться одновременно. В таком контексте программа формализма не исключает другие содержательные математические программы. Относительная неудача основной идеи Гильберта о доказательстве непротиворечивости теории средствами формального метаязыка, выявленная в теореме Гёделя о неполноте арифметики натуральных чисел, вообще говоря, вовсе не умаляет методологической значимости для развития современной математики программы Гильберта.

Согласно гильбертовской интерпретации философии непротиворечивости и принципу полноты математической системы, условие непротиворечивости математической теории поддается не только сугубо философской, но и арифметической трактовке. Почему же вопрос о непротиворечивости арифметики имеет столь большое значение в обосновании математики? С одной стороны, некоторые исследователи полагают, что если концепция натуральных чисел противоречива, то тогда наше мышление вообще не приспособлено к строго рациональному мышлению. Без формальной доказуемости непротиворечивость является лишь необходимым условием истинности предложений математической теории. Это связано с тем, что непротиворечивость необходима, но недостаточна, так как логика редуцирует математическую теорию к аксиомам, но ничего не говорит об истинности последних. «Таким образом, – считает Б. Л. Яшин, – проблема истинности математических теорем (высказываний) переходит, прежде всего, в плоскость проблемы непротиворечивости аксиоматик, которые служат исходным основанием для вывода (доказательства) этих теорем, и правильности этого вывода» [5, с. 152]. С другой стороны, высказываются и такие мнения, что формальная система не вырождается в бессмысленную игру как раз по причине того обстоятельства, что она содержит противоречие. Другими словами, математическая теория может быть «локально непротиворечивой», даже если она в принципе не является глобально непротиворечивой. Поэтому в дальнейшем имеет смысл говорить, например, о локальной непротиворечивости, так как глобальная непротиворечивость может оказаться избыточной.

Хотя роль эмпирического компонента познания в математике минимальна, современная математика, как обладающее сложной структурой научное знание, – это метатеория по отношению к естественным наукам. В метаматематике метатеория выступает как активное начало, подобное рефлексирующему субъекту, благодаря чему сама математика становится рефлексирующей наукой. Такое понимание отметает тупиковые пути решения подобного рода проблем и продуцирует возможные пути дальнейшего направления исследований в философии математики. Теория множеств лежит в основе всех математических наук и практически все математики верят в то, что она непротиворечива. Эта вера основана на том, что многовековой опыт работы математиков пока не давал повода для сомнений в непротиворечивости математики, частью которой является канторовская теория множеств. В случае переусложненной математики такая вера, по крайней мере, относительно наиболее глубоких математических конструкций, имеет под собой гораздо больше оснований, чем в других областях интеллектуальной человеческой деятельности. Кроме того, результаты Гёделя, с точки зрения философии демонстрируют нечто большее. Из невозможности обоснования в рамках конкретных программ, вообще говоря, не следует невозможность других подходов, способных осуществить такое обоснование.

Адекватное решение вопроса непротиворечивости математики может быть достигнуто в сфере методологических и содержательных рассуждений, вскрывающих механизм появления противоречий в математической теории. «В интуиционистском и конструктивном направлениях понятию непротиворечивости придается гораздо меньшее значение,– считает В. Э. Войцехович. – Главное различие между классической математикой, с одной стороны, и интуиционистской и конструктивной – с другой, связано с понятием существования» [6, с. 130]. Методологическая трудность состоит в том, что имеются такие классы чисел, доказать существование которых намного проще, чем построить конкретный пример. Заслуга Гильберта выявляется в намерении обосновать корректность тех разделов или частей математики, для которых наиболее существенно оперирование с «нефинитными объектами», что в свою очередь обусловило обращение к специфической философской интерпретации существования математических объектов. Поэтому поводу велась активная полемика между формалистами, для которых математическое существование было равносильно непротиворечивости, и интуиционистами, для которых можно было говорить о существовании математического объекта, только в том случае, если доказательство этого существования представляло способ его построения.

Поскольку оценка полезности математической теории зависит от ее назначения, то для реализации различных целей можно воспользоваться по-разному построенными теориями, то есть интуиционистская и классическая философии математики могут продуктивно сосуществовать. В философском споре теоретико-множественной и интуиционистской математики не оказалось победителя, поскольку они существенно дополняют друг друга. Разделяя объекты математики на формальные и идеальные, Гильберт соотносил идеальные объекты с априорным синтетическим созерцанием. Возможно поэтому, метаматематический опыт у Гильберта не так уж непосредственен, а носит трансцендентальный характер в духе философии Канта, последователем которого он себя считал. Благодаря работам Гильберта общепринятый взгляд на математику существенно сместил акценты и даже методологические ограничения формализма, установленные теоремами Гёделя, не поколебали общего убеждения работающих математиков в его целесообразности, а возникающие при их разрешении трудности давали дальнейшие импульсы к развитию самой математики.

Ограничение сферы надежной метатеории арифметизируемостью и финитностью требует пересмотра программ обоснования математики через выявление онтологических оснований математического мышления в различных областях современной математики, что, в свою очередь, неизбежно потребует привлечения новых подходов к гносеологическим критериям. Поэтому наряду с аналитическим движением в теоретические глубины математики возникает потребность понять не только те части обосновательных процедур, из которых состоит изучаемая область математики, но и понять целое, к которому можно отнести аксиоматизацию математических теорий. Единство и целостность всего многообразия математических систем знания, которые нельзя объяснить на языке его составных частей, возможно, удастся обеспечить в рамках философско-методологического синтеза, при котором новые общие теории сохраняют свое значение и для прежних областей исследования. Именно такой подход реализуется в системном синтезе направлений обоснования математики. Поэтому, вполне естественно, что для целостного подхода к обоснованию математики необходимо несколько дополнительных друг к другу направлений обоснования. Кроме того, системные соображения, отнесенные к конкретной математической теории, могут претендовать на роль ее философского обоснования.

Постгёделевская философия математики, состоящая из разных направлений, несмотря на эффективность аксиоматически построенных теорий, вначале породила серьезные сомнения в существовании непротиворечивых формальных описаний. Формализованное мышление, вообще говоря, не имеет абсолютных гарантий от возможности использования некорректных рассуждений и скрытых противоречий. Но, как авторитетно заключает В. Я. Перминов, «если мы возьмем конкретную теорию, и в особенности ее генетически первичную центральную часть, то установление полной непротиворечивости – вполне выполнимая задача» [7, с. 140]. Философские открытия Гёделя положили начало многочисленным исследованиям возможностей формализованного метода познания. Признавая методологическую актуальность теоремы Гёделя о непротиворечивости, накладывающей ограничения на программу Гильберта, философы математики пытаются избежать ее излишне радикального истолкования, закрывающего путь к финитному обоснованию отдельных математических теорий. С системной точки зрения можно даже не настаивать на исключительно логическом обосновании непротиворечивости математики не потому, что оно в принципе невозможно, поскольку даже гёделевские теоремы не столь категоричны в этом плане, а потому, что математические теории, в силу системных рассуждений, непротиворечивы по самой логике развития современной математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильберт Д. *Избранные труды: в 2 т. Т. II: Анализ. Физика. Проблемы. Personalia.* М.: Факториал, **1998.** 608 с.
2. Гёдель К. Об одном ещё не использованном расширении финитной точки зрения // *Математическая теория логического вывода.* М.: Наука, **1967.** С. 299–304.
3. Султанова Л. Б. *Неявное знание в развитии математики: монография.* Уфа: РИЦ БашГУ, **2009.** 260 с.
4. Целищев В. В. Непротиворечивость и полнота как нормы дедуктивного мышления в свете теоремы Гёделя о неполноте арифметики // *Философия науки.* **2005.** №2. С. 33–52.
5. Яшин Б. Л. Специфика понимания истины в математике // *Философия математики: актуальные проблемы: тезисы Второй международной научной конференции.* М.: МАКС Пресс, **2009.** С. 151–154.
6. Войцехович В. Э. *Математическое познание: от гипотезы к теории. Методологический анализ математического познания как метаисследование.* Минск: Университетское, **1984.** 144 с.
7. Перминов В. Я. О системном подходе к обоснованию математики // *Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сборник статей. Вып. 2.* Курск: КГУ, **2009.** С. 132–147.

Поступила в редакцию 07.12.2013 г.

PHILOSOPHICAL AND METHODOLOGICAL PROBLEM OF CONSISTENCY OF MATHEMATICAL THEORIES

© N. V. Michailova

Minsk State Higher Radioengineering College
62, Nezavisimosti ave., Minsk, 220005, Belarus.
Phone: +375 (29) 302 35 66.
E-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Increased abstraction of modern mathematical theories has revived interest in traditional philosophical and methodological problem of internally consistent system of axioms where the contradicting each other statements can't be deduced. If we are talking about axioms describing a well-known area of mathematical objects from the standpoint of local consistency this problem does not appear to be as relevant. But these problems are associated with the various attempts of formalists to explain the mathematical existence through consistency. But, for example, with regard to the problem of establishing of consistency of mathematical analysis the solution of which would clarify the fate of Hilbert's proof theory it has not solved yet so as the problem of the consistency of axiomatic set theory. Therefore it can be assumed that the criterion of consistency despite its essential role in axiomatic systems both formal and substantive nature is the same auxiliary logical criterion as well as mathematical provability. An adequate solution of the problem of consistency of mathematics can be achieved in the area of methodological and substantive arguments revealing the mechanism of appearance of contradictions in the mathematical theory. The paper shows that from a systemic point of view in the context of philosophical and methodological synthesis of various directions of justification of modern mathematics it can't insist on only the rationale for consistency of mathematical theories.

Keywords: *philosophy of mathematics, the problem of consistency, the program of formalism.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Michailova N. V. Philosophical And Methodological Problem Of Consistency Of Mathematical Theories // *Liberal Arts in Russia*. **2013**. Vol. 2. No. 6. Pp. 552–560.

REFERENCES

1. Hilbert D. *Izbrannye trudy: v 2 t. T. II: Analiz. Fizika. Problemy. Personalia [Selected Works: in 2 Vols. Volume 2: Analysis. Physics. Problems. Personalia].* Moscow: Faktorial, **1998.** 608 pp. [In Russian].
2. Gödel K. F. Matematicheskaya teoriya logicheskogo vyvoda. Moscow: Nauka, **1967.** Pp. 299–304. [In Russian].
3. Sultanova L. B. *Neyavnoe znanie v razvitii matematiki: monografiya [Implicit Knowledge in Development of Mathematics: Monograph].* Ufa: RIC BashGU, **2009.** 260 pp. [In Russian].
4. Tselishchev V. V. *Filosofiya nauki.* **2005.** No. 2. Pp. 33–52. [In Russian].
5. Yashin B. L. *Filosofiya matematiki: aktual'nye pro-blemy:* tezisy Vtoroi mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii. Moscow: MAKS Press, **2009.** Pp. 151–154. [In Russian].
6. Voitsekhovich V. E. *Matematicheskoe poznanie: ot gipotezy k teorii. Metodologicheskii analiz mate-maticheskogo poznaniya kak metaissledovanie.* Minsk: Universitetskoe, **1984.** 144 pp. [In Russian].
7. Perminov V. Ya. *Problemy onto-gnoseologicheskogo obosnovaniya matematicheskikh i estestvennykh nauk: sbornik statei.* No. 2. Kursk: KGU, **2009.** Pp. 132–147. [In Russian].

Received 07.12.2013.