УДК 101.1:510.2

Философская компаративистика и проблема целостности математического знания

Н. В. Михайлова, кандидат философских наук, доцент

Статья посвящена применению философской компаративистики к анализу программ обоснования математики. Предложенный методологический подход позволяет по-новому взглянуть на философскую проблему целостности математического знания.

Philosophical Comparativictics and the Problem of the Integrity of Mathematical Knowledge

N. Michailova, PhD in philosophy, associate professor

The article is devoted to the application of philosophical comparativistics to the analysis of the programs of the substantiation of mathematics. The methodological approach offered by the author allows to examine the philosophical problem of integrity of mathematical knowledge from the new point of view.

Широко понимаемая сравнительная философия существовала всегда, так как любой исследователь философских проблем рассматривает несколько альтернативных точек зрения и пытается сравнить их для поиска лучшего решения проблемы. Понятие «философская компаративистика» в большей мере отражает методологический аспект, то есть компаративистский подход как сравнительно-исторический метод в философии, присутствующий во всяком историко-философском исследовании. Компаративистский подход к исследованию проблемы обоснования – это неизбежный этап познания, следующий за реконструкцией истории философско-методологических программ математики. Как отмечает специалист по историко-философским исследованиям А. С. Колесников, «философская компаративистика обращает внимание на то, что всегда существовало, но приобретает принципиальное значение именно в современной ситуации множественности философских дискурсов» [1, с. 143]. С точки зрения компаративистики философия математики, сравнивая и сопоставляя философские традиции в подходе к обоснованию, стремится выявить скрытые идеи, входящие в различные комбинации известных философско-методологических программ обоснования. Цель философского сравнения связана с созданием новой идеи. В философской компаративистике такой идеей является утверждение синтеза философских программ обоснования математики.

Для адекватного понимания проблемы обоснования современной математики необходимо компетентное участие не только математиков, но и философов. Компаративистская методология в философии математики расширяет границы методологического поиска, поскольку лежит в основе любой попытки создания концептуального синтеза философских программ обоснования, который является методологической основой новой философской традиции XXI в. При изучении новых математических структур физика играет роль своеобразного индикатора, ограждая математиков от движения в схоластическом направлении бессодержательной абстракции. С этой точки зрения любопытна идея, которая представляется физикам-теоретикам наиболее плодотворной, а именно описание взаимодействий на малых расстояниях, порядка приблизительно 10^{-33}, с помощью взаимодействия струн. Помимо сложностей концептуального характера, физические трудности связаны с тем, что практически невозможно проверить математические предсказания физической теории экспериментально. По существу философы науки встретились с непривычной для них ситуацией, а точнее с первым примером физической теории, где ее достоверность должна оцениваться методологически так же, как математическая теорема. Но гипотезы, сформулированные в физической теории струн, привели и к новым математическим результатам.

Например, «идеи дуальности», отражающие соотношение между поведением частиц на малых и больших расстояниях, привели в итоге к крупным математическим результатам в алгебраической топологии. С точки зрения компаративистики не только математика и физика сравнивают и дополняют друг друга, но и внутри математики такие подчеркнуто различные компоненты познания, как «посредством интуиции» и «понятие посредством постулирования» вносят целостный вклад в понимание природы математического сознания. Заметим, что согласно современным философским воззрениям квантовая реальность и принцип дополнительности представляются более приспособленными для описания сознания, чем известные классические представления. Осознание незнания того, как именно мы познаем, – это процесс, приведший к формулированию неклассических принципов, среди которых необходимо выделить принцип дополнительности. Компаративистская методология показывает, как философские программы взаимодополняют друг друга и обосновывает взаимодополняющую природу каждой рабочей программы философии математики. Но прежде чем делать акцент на идеях целостности, необходимо проанализировать понятие дополнительности, необходимое для описания системной триады программ обоснования математики.

Философские поиски Б. Паскаля начинались с максималистских требований целостного знания, дающего в достаточно полном объеме знания о человеке и мире, не оставляющие людей в полумраке неведения «начала начал». Но мы до сих пор не знаем, что такое человек как целое, т. е. мы не знаем изначальной целостности. Философский подход к пониманию целостности современной математики заключен не только в ней самой, но и в философском понимании бытия, точнее в онтологии, которая рассказывает о том, что вообще есть бытие. Рассматривая математическую теорию в целом, можно говорить как об онтологически истинных теориях, так и о логически непротиворечивых теориях. При этом необходимо разделить онтологию на систему идеализаций, связанных с математически-познавательной деятельностью, и на систему формальных математических структур, базирующихся на онтологических представлениях. Так, например, арифметика как формальная система, основанная на идеализациях, относящихся к онтологии, а теоретико-множественная аксиоматика уже не обладает статусом аксиом арифметики, несмотря на предельную убедительность в своей истинности. Можно говорить о целостной системе онтологических категорий, включающей категории пространства и времени, случайности и необходимости, реальности и виртуальности и т. п. в том смысле, что все эти категории описывают аспекты актов деятельности в его онтологических предпосылках.

В философии науки совокупность предпосылок, определяющих конкретное научное знание и методы его обоснования, признанные достоверными на определенном этапе развития науки, принято называть «парадигмой». В традиционной парадигме математические структуры рассматриваются с точки зрения таких дихотомических оппозиций, как «дискретное – непрерывное», «конечное – бесконечное», «формальное – реальное» и т. п. Дополнительность сторон этих оппозиций способствует формированию методологически значимой третьей компоненты, обеспечивающей целостность в контексте тринитарной методологии познания. Исходными понятиями системного подхода являются понятия элемента, структуры и целостности. Системный синтез как методологический подход к программам обоснования проистекает из понимания эволюции математических структур. Главная роль современной математики – структурная. Именно структура теории, а также ее формальная гармоничность вселяют уверенность в надежности теории.

Для философии математики важно то, что математическая структура обладает собственными достоинствами и в качестве независимого от нас явления обнаруживает способность подсказывать новые идеи и новые вопросы. Поэтому при системном подходе математические теории исследуются не как готовые структуры, а как внутренне развивающиеся системы. Проблема целостности обсуждалась в философской литературе, благодаря чему было выделено два типа определений понятия целостности. В одних указывался набор дополнительных друг к другу характеристик, на основании которых можно было судить о целостности как обобщающей функции по отношению к достигнутому уровню познания. В других целостность выступает в роли ориентиров, обозначающих направление движения научного мышления. В контексте философской идеи триадичности более адекватным будет определение целостности второго типа, которую невозможно познать во всей его специфике, если исходить только из внешних характеристик по отношению к исследуемой проблеме обоснования математики. Анализ функционирования понятия целостности невозможен без рассмотрения некоторых аспектов соотношения целого и части, поскольку реальное познание исторически и логически движется только в одном направлении – от частей к целому.

В математическом доказательстве методологическая сопряженность целого и части связана с убедительностью и обозримостью. «Если убедительность – это в известной мере осуществимость доказательства как целого, завершенного, но в котором особо выделены исходный и заключающий его пункты, то обозримость – это осуществимость доказательства в каждом пункте сцепления доказательства без того, чтобы выявить противоречия в целостном, нарушить осуществимость доказательства как целого» [2, с. 75]. Двойственность этих понятий проявляется в том, что убедительность, в определенном смысле, отражает обозримость целого, а обозримость можно интерпретировать как убедительность частей, оставляющих доказательство. Формализованность доказательства – это отчасти необходимая упрощающая процедура, делающая математическое доказательство более универсальным, доступным для задания компьютеру. Заметим, что квантовые компьютеры могут решать задачи существенно быстрее, чем классические. Хотя квантовых компьютеров пока нет и до сих пор не ясно, когда появятся их практически полезные конструкции, американский специалист по квантовой теории Дэвид Дойч формализовал вопрос квантовых вычислений в рамках современной теории вычислений. Сейчас это актуальный предмет в математике и физике, так как процессы передачи и переработки информации происходят по физическим законам и установлены принципиальные ограничения на допустимую сложность поддающихся решению задач, так называемой полиномиальной сложности.

Различие источников формирования математических традиций исследования через неоднородность эпистемологического статуса философско-математического познания проявляется в особенностях синтеза современных программ обоснования математики. Когда в математическом доказательстве присутствует убедительность и обозримость, то это может стать решающим аргументом в пользу признания такого доказательства. Формалисты полагают, что обозримые доказательства можно формализовать, хотя интуиционисты считают, что конструктивные математические доказательства нельзя заменить формальными системами. По существу, это старый спор о реальности математических абстракций, связанный с различным пониманием интуитивной основы математического мышления: являются ли эти абстракции изобретением человеческого ума или их появление предопределено структурой мира, в котором мы живем. Роль абстракций в познании состоит в том, что они идеально ограничивают реальные объекты и тем самым позволяют определять их с наиболее возможной степенью точности. Слово «абстракция» в научном контексте не несет на себе никаких негативных признаков. Это не математический термин, а философское понятие, хотя оно широко используется в математике, физике и других науках. Абстракция – это форма познания, основанная на мысленном выделении наиболее существенных свойств и связей изучаемого объекта. Поэтому необходимо разделить методологическое и философское понимание математического реализма.

В частности, в математике методологический реализм означает, что в качестве непосредственно истинных предложений могут приниматься не только утверждения о конкретных математических объектах, но и об абстрактных сущностях, например, о множестве действительных чисел или о пространстве измеримых функций. Согласно номиналистскому подходу к обоснованию математики подлинной надежностью в математике обладают только высказывания о таких объектах, как натуральные числа и операции с ними. Новая обосновательная методология строится через критику строго номиналистического построения математики, через критику финитизма и через оправдание некоторой части трансфинитной математики, связанной с непосредственной опорой на онтологическую истинность. Такого рода идеи были высказаны К. Гёделем в его статье «Расселовская математическая логика», критиковавшим те программы обоснования математики, которые на основе номиналистски интерпретируемых понятий пытаются вывести всю систему принципов, необходимых для оправдания теории множеств. «Идея Гёделя состояла в том, чтобы некоторые из высших принципов математики, связанных с бесконечностью, приняв на основе их непосредственной истинности в качестве безусловно ясного описания математической реальности» [3, с. 115]. Философская компаративистика в такой ситуации играет роль «третьего» или той методологической основы, опираясь на которую участники философского диалога выстраивают свои позиции, пытаясь быть понятными друг другу.

Традиционная парадигма обоснования математики опиралась на структурное или формальное представление математической теории как наиболее адекватно соответствующей постановке проблемы обоснования. В настоящее время философы математики постепенно осознали то обстоятельство, что формальная теория вторична по отношению к содержательной в том смысле, что она может принимать только те факты, которые уже обоснованы с содержательной точки зрения. Говоря о сущности формалистской программы, Д. Гильберт пояснял: «Чтобы восстановить репутацию математики как эталона строгой науки, недостаточно просто избавляться от имеющихся противоречий: принципиальное требование аксиоматической теории должно простираться дальше, а именно надо знать, что внутри данной области знания, построенной на основе принятой системы аксиом, никакие противоречия вообще невозможны» [4, с. 414]. Достижение методологических целей обоснования математики, которые ставили перед собой формалистски и интуиционистски мыслящие философы начала прошлого века, оказалось не таким простым делом. Еще на границе XIX и XX вв. в теории дифференциальных уравнений и динамических систем, трудами А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова было математически формализовано понятие устойчивости. Суть его состоит в том, что система может в принципе «хорошо себя вести», но при небольших погрешностях в начальных или граничных условиях начинает существенно удаляться от желаемого поведения. Это приводит к тому, что теорема, которая привлекательно выглядит с точки зрения приложений, может стать бесполезной при малейшей модификации исходных условий, поскольку точно удовлетворить им довольно часто нет возможности по вполне объективным причинам физической точности измерений.

Пример исключительно устойчивого результата представляет собой теорема Гёделя о неполноте, так как любая попытка методологически обойти эту теорему, не ослабляя существенно достоинства формализованного языка математики, приводит к тому, что «сама попытка дает материал для построения примера, где она проваливается» [5, с. 122]. При попытках использования теоремы Гёделя в качестве философского аргумента в оценке состоятельности программы формализма неизменно привлекается понятие непротиворечивости арифметики. Между тем практика компьютерных вычислений, широко используемая в современной математике, имеет дело с более ограниченными обосновательными ресурсами математики. В таком контексте имеет смысл говорить о локальной непротиворечивости, так как вопросы о глобальной непротиворечивости могут оказаться избыточными. Наблюдая за развитием такого мощного современного направления, как компьютерная математика и отвечающая ей логика, которое принято называть сейчас «информатикой», можно предположить, что она вместе с утонченным формализмом современной математической логики может стать основанием синтеза в философии математики, способного сблизить направления развития разветвленного и утонченного математического формализма в духе математического реализма.

Содержательные математические теории, как и формальные, могут строиться аксиоматически, только аксиомы в содержательной теории – это истинные предложения, в которых важен смысл самих предложений, а не строчки формальных символов. Уже во второй половине XX в. выдающийся советский математик, академик А. Н. Колмогоров, рассуждая о современных взглядах на природу математики, говорил о законности употребления термина «содержательная математика метаматематики», хотя он и не является устоявшимся: «Эта математика метаматематики оказывается более широкой, чем “финитная математика” в строгом смысле. В некотором приближении можно сказать, что она по своему содержанию близка к упоминавшейся ранее “конструктивной математике”, но она значительно уже традиционной “канторовской” теоретико-множественной математики» [6, с. 16]. Вообще говоря, системное рассмотрение отказывается только от исключительно формально-отражательного толкования математической теории. Системные триады содержат широкие обосновательные возможности, которые в контексте методологии математики зависят от понимания статуса реальной логики и природы различных математических принципов, таких как, например, аксиома выбора. Напомним, что почти двадцать лет понадобилось на устранение в аксиоматике теории множеств таких противоречий, как парадокс Рассела путем включения в нее такого сильного математического средства, как аксиома выбора. Но из-за этого некоторые формулировки теории множеств потеряли свою изначальную изящность. Статус аксиомы выбора, или аксиомы Цермело, сегодня ни у кого не вызывает сомнения, хотя в начале XX в. ее применимость была предметом бурных философских споров.

Но главная причина ее принятия математическим сообществом состояла в том, что без нее нельзя было доказать целый ряд важнейших результатов математического и функционального анализа, необходимых математикам в их работе. Справедливости ради следует отметить, что наиболее интересные находки в математическом анализе обычно весьма живучи, в том смысле, что «излечимы» от технических ошибок в доказательствах, хотя и требуют иногда уточнений и расширений условий теорем. По мнению Г. Вейля, сам Д. Гильберт, был «строгим формалистом» в математике и в то же время «строгим интуиционистом» в метаматематике. После того, как в «Основаниях геометрии» Д. Гильберт доказал совместимость выделенных им аксиом, для которых противоречия в дедуктивных выводах сказывались бы и на системе действительных чисел, возникла определенная эйфория от того, что удалось наконец поставить математику на аксиоматический фундамент. Вопрос о непротиворечивости аксиоматики действительных чисел с помощью понятий теории множеств был сведен к такому же вопросу для целых чисел. Используя понятие системной триады в обосновании математики, мы опираемся не только на естественный процесс внутреннего вызревания математических теорий, но и на новое понимание содержательного математического рассуждения, которому логическая парадигма отказывала в доказательности.

Если математику нельзя обосновать в самой математике, то это не означает, что ее нельзя обосновать вообще, поскольку при построении абстрактных теорий математики используют не только математические, но и нематематические аргументы. Известно, что творческая интуиция математика привносит в математику недедуктивные и иррациональные моменты, уподобляющие ее музыке, поэзии и искусству. Поэтому все возможности обоснования математики, несмотря на скептицизм относительно абсолютно надежного обоснования, еще далеко не исчерпаны. Тринитарной методологии хорошо соответствует «принцип субаддитивности», согласно которому «целое меньше суммы частей». Методолог науки Б. Г. Юдин интерпретирует его следующим образом: «Говоря о том, что целое меньше суммы частей, мы прежде всего имеем в виду невозможность выведения данных частей из объемлющего их целого» [7, с. 88]. Иначе говоря, принципы конструирования объемлющего целого не должны привноситься из этого целого. Когда говорят, что целое не сводится к сумме частей, обычно ссылаются на взаимодействие между частями и реже упоминают внешние связи. Другую методологическую направленность имеет «принцип супераддитивности», формулируемый как «целое больше суммы частей», включающий относительную независимость целого от части, что более естественно для гуманитарного знания. В последнем случае части могут быть объяснены из целого, что наиболее характерно для диад.

Для анализа целостности программ обоснования математики – формализма, платонизма, интуиционизма – применение принципа субадитивности вполне оправдано тем, что он приложим к исследованию конкретных проблем. Кроме того, правомерность использования принципа субадитивности основана на том, что отдельные программы обоснования, входящие в целостную триаду, сами по себе не являются исчерпывающими характеристиками. Анализ наиболее успешно функционирующих программ обоснования современной математики, а именно формализма и интуиционизма или его популярной разновидности – конструктивизма, показывает, что в философии математики последних десятилетий все более важное место занимает «проблема реализма», заключающаяся в определении реальной основы математических понятий, структур и методологических принципов. Понятие «реализма в целом» включает в себя все программы обоснования математики, стремящиеся выявить или установить связь между математическими абстракциями, математическими структурами, математическими теориями и соответствующими отношениями реальности. В таком контексте мы говорим об «умеренном скептическом платонизме» как об особом типе реализма, соотносящего математические понятия с определенного рода идеями внечувствительной реальности. Такой интерес к онтологии в философии математики произошел благодаря изменению в целом современного математического мировоззрения.

С позиций философской компаративистики современная философия математики включается в философско-математический диалог и участвует в методологическом взаимодействии с целью достижения определенного уровня целостности и системности, делающей ее доступной для концептуализации, когда она начинает приобретать черты универсализма. Философская компаративистика в практической математике выступает как методологический ориентир, что особенно важно для формирования познавательно-преобразовательного мировоззрения. Такой подход можно проиллюстрировать на отношении к теоремам существования в классическом и конструктивном анализе. Например, известная теорема Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности является чистой теоремой существования классического математического анализа, поскольку известные методы ее доказательства не дают способа приближенного нахождения пределов таких последовательностей. Но вот что отмечает авторитетнейший математик Л. Д. Кудрявцев: «В конструктивном анализе доказывается, что существуют монотонные последовательности, для которых заведомо не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы найти их предел с любой наперед заданной точностью» [8, с. 126]. Однако качественные исследования вопросов существования и единственности решения, а также его непрерывной зависимости от начальных данных, то есть корректной постановки задачи, могут оказать важную методологическую помощь в проведении неформального математического исследования.

Онтологический аспект психической сущности человека заключается в том, что сравнение как способ существования критичности свойственно человеческому мышлению. Математик, согласно Г. Кантору, сравнивая, проявляет свободу мысли. Философско-методологическое единство программ обоснования математики – это результат отражения единого действительного мира во всем его многообразии и целостности в контексте различных направлений развития современной математики, несмотря на неоднородность философских подходов к проблеме обоснования математики. Например, существование актуальной бесконечности не противоречит математической интуиции, и такая бесконечность воспринимается математиками даже лучше, чем потенциальная бесконечность, которую философы не зря прозвали «дурной». Можно также заметить, что притягательной чертой актуальной бесконечности является ее логическая простота, так как с актуальной бесконечностью легче обращаться, чем с потенциальной. Когда вещественные числа определяются через классы рациональных чисел с помощью сечений Дедекинда, то они предполагаются существующими изначально и их существование открыто интуиции математика. Но обращение к такого рода интуиции, по мнению философа математики В. Н. Тростникова, означает фактический отход от рационализма, так как она может находиться «где угодно, только не в рассудке».

Уместно заметить, что идеология актуально-бесконечных множеств проникла в сознание математиков задолго до строгого обоснования теории вещественных чисел. Для человека как духовного существа вполне понятны реалии «горнего мира» как царства бесконечности и вечности, поскольку там нет ни времени, ни пространства. «Сейчас нам ясно, что математика так же двухприродна, как и сам человек: одна часть ее занимается числами, а другая бесконечностью. Но, как для человека горний мир важнее дольнего, так и в математике вторая ее часть важнее первой, так как ее познавательные ресурсы богаче, что показано Парисом и Харрингтоном» [9, с. 149]. Речь идет о том, что познавательный математический потенциал поднялся на новый уровень благодаря фигурирующему в дифференциальном и интегральном исчислении понятию актуальной бесконечности, невыразимому в логико-арифметическом языке. Математики Д. Парис и Л. Харрингтон высказали предположение о том, что некоторое потенциально-бесконечное арифметическое множество обладает определенным арифметическим свойством, а затем показали, что это предположение нельзя доказать в арифметике. После этого они допустили существование некоего актуально-бесконечного множества и только на этом допущении, не используя никаких свойств этого множества, доказали свое предположение.

С точки зрения методологии математики теорема Париса – Харрингтона означает, что математический анализ не сводим к арифметике, поскольку арифметика оперирует только с рациональными числами, а анализ – с вещественными числами, выразимыми в философской категории актуальной бесконечности, которую нельзя определить через потенциальную бесконечность с помощью математического понятия «предельного перехода». Исходя из этого можно заключить, что Д. Гильберт имел все основания называть математику «наукой о бесконечности», поскольку при любом философском размышлении о сущности математики из глубин сознания вполне естественно извлекается эта бесконечность. Сравнительный анализ как методологическое основание истории философии математики представляет ее не как сумму разрозненных программ обоснования, а как целостный феномен, выявленный с помощью этих философских программ, которые не разъединяют его, а способствуют пониманию исторической устойчивости и целостности интеллектуального феномена под названием «математика».

Список цитированных источников

1. *Колесников, А. С.* Философская компаративистика: Восток – Запад / А. С. Колесников. – СПб., 2004.

2. *Кочергин, А. Н.* Машинное доказательство теорем как нетрадиционная исследовательская программа в математике / А. Н. Кочергин // Исследовательские программы в современной науке. – Новосибирск, 1987.

3. *Перминов, В. Я.* Априорность математики / В. Я. Перминов // Вопр. философии. – 2005. – № 3.

4. *Гильберт, Д.* Избранные труды / Д. Гильберт. – М., 1989.

5. *Непейвода, Н. Н.* Вызов логики и математики XX века и «ответ» на них цивилизации / Н. Н. Непейвода // Вопр. философии. – 2005. – № 8.

6. *Колмогоров, А. Н.* Научные основы школьного курса математики / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1969. – № 3.

7. *Юдин, Б. Г.* Понятие целостности в структуре научного знания / Б. Г. Юдин // Вопр. философии. – 1970. – № 12.

8. *Кудрявцев, Л. Д.* Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – М., 1980.

9. *Тростников, В. Н.* Математические высказывания св. Игнатия (Бренчанинова) / В. Н. Тростников // Математика и практика. Математика и культура. – М., 2000.

Дата поступления статьи в редакцию: 23.05.2008 г.