УДК 140.8

Н. В. Михайлова

Минский государственный высший радиотехнический колледж
пр. Независимости, 62, Минск, 220005, Беларусь

E-mail: michailova_mshrc@mail.ru

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГЕНЕЗИСА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Рассматривается тезис о необходимости нового системного подхода к проблеме обоснования современной математики с учетом генезиса ведущих направлений обоснования и экспликации недостаточности методологических предпосылок программ формализма и интуиционизма в приращении математического знания.

Ключевые слова: философско-методологический анализ, современная математика, обоснование.

Специфика философии математики определяется тем, что как часть философии науки она занимается вопросами обоснования математики. Несмотря на все усилия, предпринятые математиками и философами XX в., проблема обоснования современной математики все еще далека от своего окончательного решения. Даже единой системы допущений, имеющих онтологический и гносеологический характер и лежащих в основе любой программы обоснования математики, пока еще нет. Это определяет как актуальность темы, так и необходимость использования принципиально новых концептуальных подходов к проблеме обоснования математики. С прагматической точки зрения, проблема обоснования состоит в нахождении необходимых условий его признания в математическом сообществе. Поскольку «любая теория, которая предполагает, что математика может объяснять естественный мир, должна также предложить объяснение того интересного исторического факта, что наука никогда не оспаривает математику» [Браун, 2009. С. 28]. В таком контексте при исследовании проблемы обоснования современной математики следует ориентироваться на реальные и наиболее перспективные направления развития самой математики.

Теоремы Гёделя о неполноте привели в 30-е гг. прошлого века к первому методологическому кризису, а начиная со второй половины XX в. в современной математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный гёделевскими результатами. Они связаны с проблемой переусложненности: один из них состоит в том, что доказательства стали настолько длинными и сложными, что никто не берет на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность; а второй связан с обоснованностью применения компьютеров в доказательствах. В философской и математической литературе эти проблемы пока еще детально не обсуждались. Суть обоснования новых результатов в современной математике состоит в нахождении аргументов, столь же значимых для других, как и для нас. В общеметодологическом плане обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств.

Поэтому проблему обоснования современной математики целесообразно обсуждать, прежде всего, с точки зрения философско-методологического анализа, а именно в плане общих принципов математического познания, сочетающих разные стороны математической деятельности. Проведенный философский и методологический анализ выявил три возможных подхода к обоснованию математики: онтологический, логико-гносеологический и системно-методологический. Онтологический подход связан с экспликацией непротиворечивых математических теорий, на основе признания онтологической истинности их оснований и несомненной истинности их принципов, что в свою очередь требует философского и методологического прояснения понятия математической истинности. Логико-гносеологический подход предполагает снятие неоправданных запретов на исходные принципы и логику редукции программ обоснования, выдвинутых в начале прошлого века, через рационализацию их гносеологических допущений. Системно-методологический подход можно рассматривать как новый путь к обоснованию математики на базе идеи эволюции и развития математических теорий, поскольку междисциплинарный инструментализм синергетики позволяет взглянуть на задачу обоснования с точки зрения разнообразных областей математической деятельности.

В философии математики генезис обоснования математики оценивается следующим образом: «Ожесточенные споры о методологических проблемах математики, о ее основаниях, о приемлемости исходных принципов математики привели к уточнению позиций участников дискуссии. Если раньше математики думали, что всякое разногласие обусловлено либо недостаточностью сведений, либо плохой постановкой вопросов, то сейчас, в данной дискуссии, выявилось различие в непримиримых взглядах – различие в математическом мировоззрении» [Мадер, 1994. С. 321]. Следует также отметить, что сами математики в ходе своей профессиональной работы тоже исходят из определенной интерпретации возможного и допустимого в математическом исследовании, за пределами которого начинается нечто, лежащее вне понимаемой ими математики. Возможно, в связи с этим, несмотря на некоторое продвижение в прояснении и обосновании методологических допущений, имеющих также гносеологический характер, проблема обоснования современной математики все еще далека от своего окончательного решения, поэтому она до сих пор является важнейшей целью различных философских и математических исследований.

С точки зрения постнеклассической рациональности в математике, системно-методологический подход – это такое направление в методологии обоснования, в основе которого лежит рассмотрение исследуемых объектов как систем, ориентирующее на раскрытие целостности объекта во всем многообразии его внешних и внутренних связей. Базовым понятием системного подхода к проблеме обоснования является понятие структуры, характеризующее специфику системного подхода и его организации. Структура задает способ связи различных элементов в системе, как со стороны анализа свойств составляющих ее элементов, так и со стороны изучения целостных свойств системы. Стремление к синтезу как определенному философскому взаимодействию и новой методологической целостности, заменяющей недостижимую полноту, связано с идеей тринитарности, которая находит плодотворное применение в синергетике. Поскольку инструментализм синергетического подхода с необходимостью коммуникативен, то он открыт для конструктивного диалога, который требует, с точки зрения работающих математиков, «структурной стыковки» наиболее плодотворных направлений обоснования, а также, с точки зрения философов науки, «структурного сопряжения» как предпосылки новой программы обоснования математики. В философско-методологическом анализе обоснования математики мы будем исходить из общепризнанного факта особой достоверности математического знания и неправомерности отождествления математики с опытными науками.

Необходимость философско-методологического анализа существующих направлений обоснования обусловлена, прежде всего, тем, что философия акцентирует свои когнитивные задачи на выявлении теоретически универсального в обосновании математики, а методология – на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте и создании условий для дальнейшего развития математики. Заметим, что философские споры первой половины прошлого столетия об интерпретации теоретико-множественных объектов канторовской теории, в основе которых лежало допущение актуальной бесконечности, велись исключительно на методологическом уровне. «Следовательно, в начале XX в. возник кризис не математики, а ее методологии: обнаружилось очередное резкое несоответствие объяснительных средств, которыми располагали математики в рассматриваемое время, тем новым теоретико-множественным объектам, которые они же сами и создавали» [Светлов, 2006. С. 34]. Поэтому проблему обоснования современной математики можно и нужно обсуждать, прежде всего, с методологической точки зрения, точнее в контексте общих принципов современного математического и философского познания.

Философско-математическая наука освоила три разных типа системных объектов исследования, используемых в обосновании. Во-первых, это простые системы, когда суммарные свойства частей исчерпывающе определяют свойства целого. Во-вторых, это сложные самоорганизующиеся, или саморегулирующиеся, системы, в которых целое не исчерпывается свойствами частей, поэтому необходимо учитывать системное качество целого, так как часть внутри целого и вне его обладает разными свойствами. В-третьих, это самообосновывающиеся, или саморазвивающиеся, системы, т. е. более сложный тип системной целостности, характеризующийся развитием, в результате которого происходит переход от одного вида самообоснования к другому, а самообоснование выступает устойчивым состоянием развивающейся системы, характеризующейся открытостью. Для конкретизирующего обоснования своих познавательных теорий и схем философы математики обращаются за помощью к самой математике, поскольку общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX в., с современной точки зрения должна быть признана в философии математики неудовлетворительной. Актуальность такой задачи определяется не только тем, что математика является отражением физического мира, но и тем, что она эффективное инструментальное средство познания этого мира.

Насколько существенна, с точки зрения эпистемологии, для современной математики проблема ее обоснования? Можно утверждать, что в общеметодологическом плане такое обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность как ставших уже классическими, так и сравнительно новых переусложненных современных математических рассуждений и доказательств. Последнее включает в себя три аспекта современной математической практики, требующих специального философско-методологического анализа. Во-первых, несмотря на устойчивость математических теорем, математика оказалась не такой строгой наукой, как это представлялось подавляющему большинству, поскольку в ней до сих пор существуют далеко не безобидные предрассудки. Во-вторых, методологически значимым для современной математики является вопрос о правомерности применения компьютерных методов, используемых как для доказательства новых результатов, так и для проверки проведенных вычислений. В-третьих, проблема обозримости математических доказательств с необходимостью связывается с их проверяемостью и убедительностью, т. е. возможностью мысленной репрезентации, при которой они схватываются целиком. Заметим, что в разные периоды истории развития математики надежными представлялись математические теории, соответствующие различным уровням теоретической строгости, формирующимся под влиянием критической познавательной установки, и которые гарантированы от контрпримеров.

Новая обосновательная методология строится через критику строго номиналистического построения математики и абстрагирования от свойств реального физического мира, через оправдание некоторой части теоретической математики, связанной с непосредственной опорой на онтологическую истинность. В связи с этим аргументированной критике подвергаются те программы обоснования математики, которые на основе номиналистски интерпретируемых понятий пытаются вывести всю систему принципов. Ограниченность такого подхода была продемонстрирована в практических задачах по математическому моделированию. В учебной математической литературе задача называется корректно поставленной, если она удовлетворяет трем условиям: решение существует, решение единственно, решение устойчиво. Если рассматриваемая задача не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий, то она называется некорректно поставленной. «Специфику некорректных задач отражает лишь третье условие (точнее – невыполнение третьего условия), а введение первого и второго условий растворяет действительно некорректные задачи в необъятном море задач, в которых решение не существует или не является единственным» [Петров, 2012. С. 22]. Ю. П. Петров показал, что помимо известных классов математических задач, а именно класса корректных и класса некорректных задач, как устоявшихся математических предрассудков, существует новый, т. е. третий класс задач – это такой класс задач, которые изменяют свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, традиционно использовавшихся при их решении.

При выяснении логической структуры положений, лежащих в основе различных программ математики, преследовались разные цели, вообще говоря, не совпадающие между собой для математики в целом. Если одна из них призвана была обеспечить непротиворечивость и методическую ясность преподавания математических курсов, то другая стремилась обеспечить истинность всей математики как целостного знания. По поводу философских дискуссий, относящихся к логико-гносеологическому подходу в обосновании, можно сказать, что их философско-методологический анализ выявил следующее. Редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику понятий и принципов, связанных с бесконечностью, что противоречило бы статусу логики как системы понятий, не связанных с идеей бесконечности. Поэтому можно считать общепринятым, что логицизм как направление в философии в настоящее время является малопродуктивным. «Другими словами, философия математики оказалась в глубоком кризисе, начиная с 50–60 годов XX в., когда были исчерпаны ресурсы традиционных подходов к пониманию оснований математики» [Целищев, 2002. С. 18]. Тем не менее можно утверждать, что философия математики выжила благодаря тому, что старые проблемы обоснования были заменены на новые. В частности, кризис логицистского направления обоснования математики способствовал укреплению позиции других подходов к обоснованию, среди которых необходимо выделить действующие формалистское и интуиционистское направления в обосновании математики.

Создатель программы «формализма» Давид Гильберт существенно опирался в процессе обоснования на метод формализации содержательной математики. План обоснования теоретико-множественной математики состоял в идее аксиоматизации теории множеств, в духе разработанной им метаматематики, или теории доказательств, а затем доказательстве непротиворечивости полученной системы аксиом. Необходимо отметить, что Гильберт взял у логицистов положение аксиоматизации и формализации математической теории, добавив в свою программу обоснования принцип финитизма, согласно которому оперирование с бесконечным можно сделать надежным только через конечное. Впоследствии оказалось, что финитистские методы пригодны для обоснования непротиворечивости сравнительно бедных формальных математических теорий, например, не содержащих аксиому полной математической индукции. Более того, для некоторых математических теорий, которые формализованы, их непротиворечивость, в силе результатов Курта Гёделя, не может быть доказана средствами этой системы. Своеобразную программу преодоления этих трудностей в математике, в духе неклассической рациональности, возникающих при попытке строить ее исключительно на базе теории множеств, предложил Лёйтзен Брауэр. Эта программа обоснования получила широкую известность в философии математики под обобщенным названием «интуиционизм», который в настоящее время объединяет также конструктивные направления математики и новое направление компьютерной математики в сложных доказательствах.

Использование понятия актуальной бесконечности есть то, что в философии принято называть «платонизмом», хотя некоторые математики предпочитают называть его «реализмом». Ценность платонистически ориентированного математического направления состоит в том, что оно представляет модели абстрагированного воображения, которые экстраполируются из конкретных областей математического опыта и математической интуиции. «Умеренный платонизм, освобожденный от крайностей и мистики и служащий реальной методологией действующих математиков, соответствует природе математики, является подходящей философией познания, способной правильно оценить, что такое математика» [Вечтомов, 2006. С. 119]. Корни современного платонизма следует искать в XIX в., когда математики начали пользоваться понятием актуальной бесконечности совершенно свободно, и актуально бесконечные множества объектов стали составлять основное содержание современной математики. Можно выделить крайние точки, которых придерживаются почти все работающие математики: от платонистского реализма, признающего самостоятельно существующие идеальные сущности, или реалии, до взгляда на математические понятия как на определенные конвенции. В таком контексте возможно корректнее говорить о некоторой срединной позиции, т. е. об «умеренном платонизме».

Феномен математических теорий состоит в их неисчерпаемости, что не исключает возможности фиксирования их «гносеологических срезов», предназначенных для конкретных целей их философско-методологического обоснования. Следует отметить, что среди важнейших методологических функций, которые выполняет новая фундаментальная математическая теория, необходимо выделить реализацию системно-методологического подхода. Его экспликация не возможна без релевантного взаимодействия математики и философии в контексте формирования методологически целостной концепции программы обоснования современной математики, которую можно также рассматривать как гипотетическую потребность в синтезе представлений о категориях, развиваемых в философии науки и математике. Он реализуется в таком мощном направлении современной математики, как компьютерная математика, которая синтезирует в себе как формалистское и конструктивистское, так и платонистское направления обоснования современной математики.

Например, если говорить о существовании множества Мандельброта, то нельзя сказать, что оно существует в наших разумах, так как ни один человек не в состоянии постичь безграничную сложность этого математического объекта. Но оно не может существовать и в компьютерных визуализациях, которые охватывают лишь сравнительно небольшую часть сложно детализированной структуры, дающей очень грубое начальное приближение.

Говоря о компьютерной математике, необходимо различать инструментальную составляющую, к которой можно отнести программу, описывающую формальный алгоритм, и собственно сам компьютер, реализующий конструктивную составляющую компьютерной программы. В частности, в компьютерном доказательстве реализуется линейная триада: «программа – компьютер – результат». Фрактальные объекты на языке компьютерной математики демонстрируют современный уровень развития постнеклассической математики, включающий платонистское существование в обосновании математики. В связи с этим Роджер Пенроуз утверждает, что «множество Мандельброта существует и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем “глубже” мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка. Следовательно, существовать множество Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде» [Пенроуз, 2007. С. 37]. Поэтому становится вполне оправданным гипотетическое предположение, что рассматриваемая в тончайших деталях структура множества Мандельброта не является частью нашего мышления, а реальна сама по себе.

Оба аспекта рациональности – классический, реализуемый в программе формализма, и неклассический, представленный в интуиционистском подходе, в обосновании математики не исключают друг друга, а способствуют становлению новой тринитарной парадигмы, принимающей вид «неформализуемой целостности». Постнеклассический синтез этих аспектов математической реальности не только возможен, но и необходим. Проведенный философско-методологический анализ показывает, что целостные свойства обосновательных процедур современной математики реально проявляют себя не только во внешних взаимодействиях философско-методологических направлений обоснования, имеющих интегральный характер, но и дополняются анализом внутренней дифференциации этих программ. Это позволяет выделить в философии современной математики три основных направления обоснования математики: направления формализма, интуиционизма и платонизма. Философско-методологический синтез реальных направлений обоснования математики сводит различные математические теории в целостности и системы, сохраняя при этом онтологические основания исходных математических понятий как предпосылочного знания, обеспечивая методологическое единство современного математического знания.

Разумеется, логически неконсистентно приписывать только платонизму экспликацию современного подхода к обоснованию математики. С точки зрения философско-методологического анализа, к «негипотетическим началам», учитывая относительную самостоятельность современной математики и генетическую организацию ее теорий, можно отнести основные существующие направления обоснования математики, доказавшие свою практическую целесообразность. Востребованность всех направлений обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне современная математика отличается от любого естественно-научного знания более надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны и в некотором смысле внеисторичны. Рассматриваемый в этой работе тезис состоит в новом понимании концепции обоснования математики, суть которой заключается в переводе философской проблемы обоснования математики с логико-гносеологического уровня на системно-методологический. Такой подход инкорпорируется в систему междисциплинарного научного знания через современные представления о самоорганизации с помощью философских противоположностей главных линий математического познания, таких как арифметико-алгебраическая и геометрико-топологическая, которые постоянно пересекались и переплетались, порождали новые интегрированные математические дисциплины. На примере близкого к указанным линиям деления – дискретного и непрерывного, можно указать на появление фрактальной геометрии, как образец постнеклассического знания в математике. «Фрактальность оказывается фундаментальным свойством материи, и оппозицию “дискретность – непрерывность” мы можем теперь переосмыслить в составе триады» [Баранцев, 2003. С. 79]. Она характеризуется с помощью главных линий математического познания, включенных в математическую триаду: «дискретность – фрактальность – непрерывность», содержащую фрактальность как новое направление математического знания. Чтобы линейная запись не искажала структуру этой системной триады, которая характеризуется равноправием составляющих ее компонент, их можно мыслить как вершины равностороннего треугольника в указанной последовательности. В качестве еще одного предпосылочного источника новой концепции обоснования современной математики укажем на хорошо исследованную классическую философскую проблему бесконечности, которую можно описать в виде линейной триады «конечное – потенциально бесконечное – актуально бесконечное».

Математическая триада фрактальных объектов является хорошим примером тринитарной методологии, используемой в самой математике. Фрактальная геометрия, занимающаяся изучением инвариантов группы самоаффинных преобразований, описывает весьма широкий класс природных явлений. С точки зрения принципа дополнительности, вопросы нельзя ставить в плане логических исключений, поскольку «линейная» установка наблюдателя оказывает влияние на результаты измерения. И дискретное, и непрерывное в составе триады – это математические модели, не исключающие, а дополняющие друг друга, так как обе они являются идеализациями, относящимися к гносеологии. Логическая экспликация дополнительности в рассматриваемой триаде предполагает переход от дополнительности, как отношению между линейными составляющими триады, к дополнительности, как нелинейному отношению между этими составляющими. Пониманию философской проблемы обоснования может способствовать применение концепции дополнительности к некоторым реальным фактам логической природы рассуждений. В этом контексте обоснование современной математики может потребовать различных точек зрения по поводу таких фундаментальных понятий математики, как натуральное число, множество и бесконечность, которые не поддаются однозначному описанию.

Философская компаративистика в такой нестандартной ситуации играет роль «третьего», точнее той методологической основы, опираясь на которую участники философско-математического диалога выстраивают свои позиции, пытаясь быть понятными друг другу. Релятивистская методология дает возможность интерпретировать реальные подходы к обоснованию математики в общефилософских категориях, чтобы понять общие тенденции развития философии современной математики. Они основаны на идее интеграции, которая характеризует тенденцию к соединению в рамках целостной системы математических теорий. Такой эпистемологический поворот заметен не только по отношению к программе обоснования, но и в философии математики в целом. Поскольку в философии современной математики выделяются три направления в обосновании, то в качестве формулы системной триады обоснования можно, например, рассмотреть следующую триаду обоснования современной математики: «формализм – платонизм – интуиционизм».

В системной триаде используются направления внутриматематического обоснования в сложившейся диадной парадигме «формализм – интуиционизм», гносеологически противостоящие друг другу. Поскольку с точки зрения математической практики ни направление формализма, ни направление интуиционизма не являются подлинно репрезентативными для обоснования математики, то наиболее употребительный методологический подход при экспликации структуры обоснования всего комплекса математического знания – это вложение исследуемых структур в более богатую структуру. Она определяется целями философско-математического обосновательного дискурса с помощью «третьего», который является формой опосредования крайних позиций. «Системный подход, таким образом, не требует выделения какой-то части математики как более надежной или абсолютно надежной и тем самым он свободен от субъективизма, неизбежно связанного с таким выделением» [Перминов, 2001. С. 278]. Философская суть такого подхода к обоснованию состоит в переводе проблемы обоснования математики с логического на методологический уровень.

Концептуальное развитие проблемы обоснования современной математики на основе философско-методологического анализа связано с таким пониманием доминирующего статуса математических моделей реальности, который снимает в рамках математических критериев неоправданные ограничения на программу обоснования. В заключение необходимо отметить, что системно-методологический подход к обоснованию математики более абстрактен, чем логико-гносеологический, поскольку он не предполагает никакой редукции. Философско-методологический анализ несостоятельности предыдущих установок на обоснование математики показывает, что эта проблема нуждается сегодня в постановке на принципиально иной основе, например, с помощью философско-методологического синтеза в форме системной триады обоснования. Философская значимость триады состоит в том, что в преломлении к проблеме обоснования в целом она раскрывается через понятия целостности, суммативности и единства, предполагающие определенный уровень самоорганизации предшествующих подпрограмм.

Сами математические теории тоже можно рассматривать как специфические самоорганизующиеся системы, восходящие к такой стадии зрелости, когда теории свободны от внутренних противоречий. К этому можно добавить, что любой перечень современных методов математического доказательства, а также формальных и конструктивных принципов построения математических объектов всегда будет оставаться неполным, поскольку эти методы и принципы подлежат пересмотру и уточнению. Проведенный философско-методологический анализ обоснования современной математики с помощью системного подхода, способствует видоизменению традиционных взглядов на обоснование. Предлагаемый подход заключается в отказе от достижения методологической полноты отдельных математических теорий и ориентации на формирование целостного взгляда на современные направления развития математического знания.

Список литературы

Баранцев Р. Г. Синергетика в современном естествознании. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Браун Дж. Р. Может ли математика объяснять? // Эпистемология и философия науки. 2009. Т. 19, № 1. С. 16–32.

Вечтомов Е. М. Метафизика математики. Киров: Изд-во ВятГУ, 2006.

Мадер В. В. Введение в методологию математики. М.: Интерпракс, 1994.

Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. М.; Ижевск: ИКИ, 2007.

Перминов В. Я. Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001.

Петров Ю. П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.

Светлов В. А. Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия. М.: КомКнига, 2006.

Целищев В. В. Философия математики. Новосибирск: Наука, 2002. Ч. 1.

Материал поступил в редколлегию 17.12.2012

N. V. Mikhailova

THE PHILOSOPHICAL AND METHODOLOGICAL ANALYSIS OF THE GENESIS OF MATHEMATICS FOUNDATIONS

The article argues for the need of a new systemic approach to the problem of foundation of modern mathematics. This approach should take into account the genesis of the main justification programs and the critique of their methodological presuppositions.

Keywords: philosophical and methodological analysis, modern mathematics, foundations.